

Tesis Doctoral

Estudio de las características dinámicas del muro de la presa de Soria mediante técnicas numéricas y experimentales



Juan Carlos Galván Santana

División de Mecánica de los Medios Continuos y Estructuras
Las Palmas de Gran Canaria • Noviembre de 2022



Programa de Doctorado: Tecnologías de Telecomunicación e Ingeniería Computacional

ESTUDIO DE LAS CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS DEL MURO DE LA PRESA DE SORIA MEDIANTE TÉCNICAS NUMÉRICAS Y EXPERIMENTALES

Programa de Doctorado:
Tecnologías de Telecomunicación e Ingeniería Computacional

Línea de investigación:
Ingeniería Computacional

Autor:	Director:
Juan Carlos Galván Santana	Dr. Don Luis Alberto Padrón Hernández

Las Palmas de Gran Canaria, noviembre de 2022

*A Elisa y a mi hijo Juan Carlos.
Gracias por la paciencia y apoyo
incondicional durante este largo,
e interesante, viaje personal.*

*A mis padres,
referentes en mi vida.*

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero expresar mi eterno agradecimiento al director de esta tesis, el profesor Luis Alberto Padrón Hernández, por su infinita paciencia hacia mi persona, así como por la confianza depositada en mí para emprender juntos este largo viaje, apoyándome en todo momento. Sin sus indicaciones, orientaciones y aportaciones encomiables, hubiera sido imposible llegar al destino final. Sin lugar a dudas, lo mejor que me llevo de todos estos años es haberlo conocido.

A mis profesores, Juan José Aznárez González y Orlando Maeso Fortuny, quienes siempre han estado presentes durante el desarrollo de esta tesis, dispuestos a ayudar ante cualquier problema que se plantease. Sobra decir que esta tesis lleva su sello de identidad.

Asimismo, a todos mis compañeros del IUSIANI, y en especial al profesor Guillermo Álamo Meneses, por siempre estar disponible para ayudarme con mis problemas de conectividad.

También es digno agradecer a Román Quevedo Reina, a Francisco Joel Auyanet y, nuevamente, al profesor Guillermo Álamo Meneses, ya que parte del capítulo 4 de esta tesis es de ellos. Hago extensivo este agradecimiento al laboratorio de ensayo de materiales del Departamento de Ingeniería Civil de la ULPGC, y a su personal, Jacob Montesdeoca García y a Cristóbal Melián Machín, por su ayuda inestimable para la construcción del sensor, así como de su caja de protección, empleados en el capítulo 4.

A los profesores del departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla, Pedro Galvín Barrera y Mario Solís Muñoz, por la inolvidable estancia que pasé en esta escuela.

Y, por último, quiero expresar mi agradecimiento a Jaime J. González González, por toda la documentación aportada al comienzo de esta tesis.

Los sensores utilizados en las mediciones descritas en el capítulo 5 fueron adquiridos gracias al proyecto INFRAESTRUCTURA DE COMPUTACIÓN CIENTÍFICA PARA APLICACIONES DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL Y SIMULACIÓN NUMÉRICA EN MEDIOAMBIENTE Y GESTIÓN DE ENERGÍAS RENOVABLES (EIS 2021 04) del Instituto Universitario SIANI, financiado por la Consejería de Economía, Conocimiento y Empleo del gobierno de Canarias, tramitado por la Agencia Canaria de Investigación, Innovación y Sociedad de la Información, y cofinanciado por el Fondo Europeo de Desarrollo regional (FEDER) en el marco del Programa Operativo FEDER Canarias.



**Gobierno
de Canarias**

Consejería de Economía, Conocimiento y
Empleo
Agencia Canaria de Investigación,
Innovación y Sociedad de la Información



ÍNDICE

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Introducción.....	1
1.2. Revisión bibliográfica.....	3
1.2.1. Métodos numéricos.....	3
1.2.2. Métodos experimentales.....	5
1.3. Objetivos.....	6
1.4. Estructura de la tesis.....	7
 CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA	 9
2.1. Introducción.....	9
2.2. Ecuaciones de gobierno.....	9
2.2.1. Ecuaciones de gobierno en elastodinámica lineal.....	9
2.2.2. Ecuaciones de gobierno para el problema dinámico en medios escalares.....	12
2.3. Propagación de ondas.....	14
2.3.1. Propagación de ondas en medios viscoelásticos.....	14
2.3.2. Propagación de ondas en medios escalares.....	17
2.4. Condiciones de radiación.....	18
2.4.1. Condición de radiación de Sommerfeld.....	19
2.4.2. Condición de radiación basada en el primer modo de vibración del cañón.....	21
2.4.3. Solución rigurosa semi-analítica para un cañón abierto infinito de sección rectangular.....	23
2.5. Método de los Elementos de Contorno.....	26
2.5.1. Formulación integral en elastodinámica armónica.....	26
2.5.2. Formulación integral en problemas escalares armónicos.....	35
2.5.3. Sistema acoplado. Condiciones de contorno y ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad.....	41
2.6. Aplicación a un problema de referencia.....	43
 CAPÍTULO 3. ESTUDIO DE LAS CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS DEL MURO DE LA PRESA DE SORIA MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO	 47
3.1. Introducción.....	47
3.2. Definición del problema de estudio.....	48

3.3. Respuesta del muro de la presa en base rígida. Análisis modal mediante el MEF y análisis armónico mediante el MEC.....	53
3.3.1. Análisis modal mediante el MEF.....	53
3.3.2. Análisis armónico mediante el MEC.....	54
3.3.3. Análisis de resultados.....	54
3.4. Influencia de la interacción dinámica suelo-estructura y de la geometría del cañón sobre la respuesta dinámica de la presa en condiciones de embalse vacío.....	56
3.5. Influencia de la condición de contorno de radiación en la respuesta dinámica obtenida.....	62
3.6. Influencia de la interacción dinámica suelo-estructura-agua sobre la respuesta dinámica del muro para distintos niveles de agua en el embalse....	67
3.6.1. Función de autocorrelación MAC en el modelo de muro en base rígida.....	71
3.6.2. Función de autocorrelación MAC en el modelo de muro en base flexible.....	75
3.6.3. Función de autocorrelación MAC entre los modelos de base rígida y base flexible para diferentes alturas de llenado del embalse.....	80
3.7. Resultados experimentales y calibración del modelo numérico.....	81
3.8. Conclusiones.....	85
 CAPÍTULO 4. SENSOR HORIZONTAL Y SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS DE BAJO COSTE PARA LA MEDICIÓN DE VIBRACIONES AMBIENTALES DE BAJO NIVEL	 87
4.1. Introducción.....	87
4.2. Descripción del sistema propuesto.....	88
4.2.1. Sensor.....	89
4.2.2. Amplificador y filtros para el acondicionamiento de la señal.....	93
4.2.2.1. Amplificador de instrumentación de precisión.....	93
4.2.2.2. Circuito de ajuste del offset.....	95
4.2.2.3. Amplificador operacional.....	95
4.2.2.4. Filtro de entrada analógico.....	95
4.2.3. Conversor analógico-digital.....	96
4.2.4. Microcontrolador.....	97
4.3. Modelo matemático del péndulo de Lehman.....	98
4.4. Validación experimental del sensor.....	100
4.4.1. Medidas de vibraciones en un edificio de cinco plantas.....	100
4.4.2. Medidas de vibraciones en la coronación del muro de la presa de Soria.....	101
4.5. Identificación de las primeras frecuencias naturales del muro de la presa de Soria con el sensor propuesto.....	104
4.5.1. Primera campaña experimental.....	105
4.5.2. Segunda campaña experimental.....	105

4.6. Coste de los materiales.....	108
4.7. Conclusiones.....	108
CAPÍTULO 5. IDENTIFICACIÓN MODAL EXPERIMENTAL DEL MURO DE LA PRESA DE SORIA	111
5.1. Introducción.....	111
5.2. Descripción de la campaña experimental.....	112
5.3. Resultados.	115
5.4. Comparación de las respuestas experimentales con las numéricas.....	119
5.5. Conclusiones.....	120
CAPÍTULO 6. REVISIÓN Y CONCLUSIONES. DESARROLLOS FUTUROS	123
6.1. Revisión y conclusiones.....	123
6.2. Desarrollos futuros.....	125
APÉNDICE. INTRODUCCIÓN A LA IDENTIFICACIÓN MODAL MEDIANTE EL ALGORITMO SSI-COV	127
A.1. Introducción.....	127
A.2. Modelo espacio-estado de sistemas dinámicos.....	128
A.2.1. Forma en tiempo continuo.....	128
A.2.2. Forma en tiempo discreto.....	129
A.2.3. Modelo espacio-estado estocástico.....	129
A.3. Identificación modal a través del método SSI-COV.....	130
A.3.1. Matriz de Hankel.....	130
A.3.2. Matriz de covarianza de salida.....	130
A.3.3. Descomposición de la matriz de Toeplitz.....	131
A.3.4. Parámetros modales. Frecuencias.....	132
A.3.5. Orden del sistema. Diagrama de estabilización.....	132
A.4. Aplicación del método.....	133
REFERENCIAS	135

CAPÍTULO 1

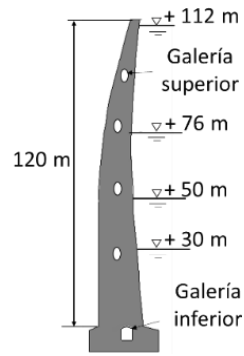
INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción

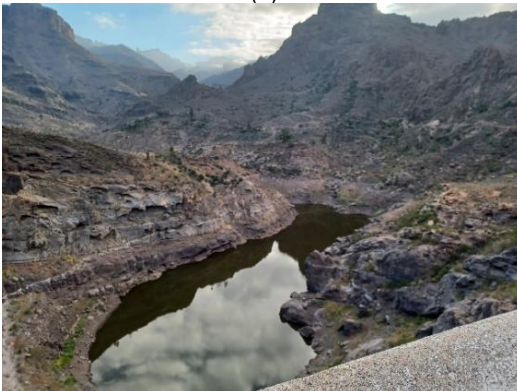
La presa de Soria (Fig. 1.1.a), ubicada en la isla de Gran Canaria entre los municipios de Mogán y San Bartolomé de Tirajana, es la mayor presa, por altura y volumen, de las que se encuentran en las Islas Canarias. El muro es una bóveda de hormigón en masa de doble curvatura, con geometría cuasi simétrica de 120 m de altura y cinco galerías en su interior (Fig. 1.1.b). Presenta una longitud total de cresta de, aproximadamente, 150 m y una capacidad bruta del embalse de 32 hm³. Por otra parte, el muro de la presa está levantado donde comienza la parte angosta del cañón (Fig. 1.1.c y 1.1.d). Fue construido entre los años 1962 y 1972, y con sus 50 años de antigüedad, sigue dando servicio a la zona sur de la isla [1]. En la actualidad está previsto que forme parte del proyecto de la central hidroeléctrica de bombeo de Chira-Soria, que prevé aprovechar los embalses ya existentes de Chira y Soria para crear un sistema con una capacidad de almacenamiento de energía de 3.2 GWh, con el objetivo de incrementar la integración de las energías renovables en la isla para 2026 y mejorar la estabilidad de su sistema eléctrico aislado.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.1: (a) Muro de la presa de Soria. (b) Sección transversal del muro. Vistas del cañón desde la coronación del muro de la presa de Soria, (c) aguas arriba y (d) aguas abajo. Imágenes tomadas el 27 de junio de 2022.

En infraestructuras como las presas, la monitorización de la salud estructural (SHM, Structural Health Monitoring) es hoy día una práctica común, ya que sirve de apoyo para la gestión, mantenimiento y evaluación del nivel de seguridad de este tipo de estructuras [2].

En el caso de Canarias, a la antigüedad de la mayor parte de las presas, hay que sumar la existencia de un cierto riesgo sísmico vinculado al origen volcánico de las islas y que, incluso ante eventos sísmicos de baja magnitud, podría dar lugar a fallos estructurales en los muros de las grandes presas. A todo esto, hay que añadir la falta de un análisis dinámico de la estructura que evalúe las solicitaciones a las que se vería sometido en caso de terremoto y permita estimar su nivel de seguridad, y un sistema de monitorización de la salud estructural del muro de la presa que sea capaz de detectar de manera precoz la posible aparición de problemas con el paso del tiempo. Se da el caso de que estos dos aspectos pueden considerarse muy estrechamente vinculados dado que el conocimiento de las características dinámicas de una estructura (a diferencia de lo que ocurre con las características estáticas) permite la implementación de sistemas de monitorización muy efectivos y eficientes capaces de detectar variaciones en las propiedades de la presa vinculados a problemas estructurales, y que hay que separar de las variaciones debidas a cambios en los parámetros ambientales o en la altura de llenado del embalse.

Desde el punto de vista numérico, el problema del estudio de la respuesta dinámica de presas abovedadas es un problema complejo debido a la existencia de medios de diversas características (hormigón, roca, agua, sedimentos de fondo), cada uno de los cuales presenta un comportamiento propio diferente de los demás. Ante una sollicitación sísmica, estos medios interactúan entre sí formando un sistema acoplado en el que ninguna de las partes puede ser estudiada aisladamente. Además, es necesario tener en cuenta varios aspectos adicionales: a) que los dominios son muy extensos o prácticamente infinitos en la práctica, b) que, dadas las dimensiones de la estructura y la geometría del emplazamiento, el carácter espacial de la excitación y las frecuencias características del sistema pueden ser determinantes en el cálculo de la respuesta y c) que en el caso de presas abovedadas, el problema tiene una geometría que no permite simplificación dimensional alguna y ha de ser estudiado con modelos que contemplen su realidad tridimensional.

El Método de los Elementos de Contorno (MEC) es un método numérico especialmente indicado para abordar problemas dinámicos como este. Esto es así porque, frente a los Métodos de Dominio como el Método de los Elementos Finitos (MEF), la formulación de elementos de contorno verifica de forma automática las condiciones de radiación en el infinito permitiendo un tratamiento numérico natural de estas regiones no acotadas sin la incorporación de hipótesis simplificadoras. De hecho, el método ha sido aplicado con éxito, por ejemplo, al estudio de la influencia del carácter espacial de la excitación sobre la respuesta sísmica de presas abovedadas, al efecto de la presencia de sedimentos de fondo como sólidos de naturaleza poroelástica, o a la influencia de las condiciones del embalse o las características de la excitación en la respuesta del sistema.

Por otro lado, estudiar empíricamente la respuesta dinámica de presas abovedadas, o de arco, a partir de la toma de medidas en estructuras reales es también un problema complejo. La gran rigidez de estas estructuras y la ausencia, en muchos casos, de fuentes de vibración cercanas, produce que la amplitud de las vibraciones experimentadas por la presa en condiciones normales sea extraordinariamente baja y, por tanto, difícil de medir. Es por ello

que una gran parte de los estudios de vibraciones se han realizado midiendo la respuesta ante vibraciones forzadas, habiéndose utilizado también otras fuentes de excitación como, por ejemplo, la descarga de una presa o eventos sísmicos. Sin embargo, estas técnicas de medición tienen diversas desventajas importantes como pueden ser su discontinuidad (en todos los casos), su aleatoriedad o ausencia (como en el caso de los terremotos), o su elevado coste e impacto (como en el caso de las vibraciones forzadas). En cambio, la capacidad para recoger datos de la vibración ambiente de bajo nivel permite superar estas desventajas. Esta técnica, ejecutada de manera adecuada, genera grandes posibilidades en diversos ámbitos, como puedan ser el desarrollo y validación de modelos y métodos de análisis y resolución para el estudio de la respuesta dinámica de estructuras, o la posibilidad de desarrollar y explotar sistemas de monitorización y mantenimiento eficientes y eficaces para los que es necesario, a su vez, un conocimiento previo de los factores que afectan a la respuesta dinámica del conjunto.

Tanto los modelos numéricos como los métodos experimentales son parte clave para la monitorización de la salud de estas estructuras. Los modelos numéricos desarrollados y/o actualizados a partir de los registros experimentales permiten dos cuestiones distintas: a) diseñar el sistema de SHM (conociendo previamente las características del sistema y por tanto pudiendo seleccionar los puntos de medida más adecuados); y b) interpretar los resultados y los cambios en los mismos (por ejemplo, identificar modos, y conocer si los cambios observados en frecuencias y formas modales pueden deberse a cuestiones ambientales, tales como temperatura o altura de llenado, o a problemas y/o cambios estructurales).

La consecución de los objetivos propuestos en esta tesis doctoral generará una serie de beneficios que pueden resumirse en tres puntos: a) la construcción un modelo numérico de la presa de Soria que posibilite el estudio de sus propiedades dinámicas y el planteamiento futuro de un sistema de monitorización del mismo; b) establecimiento y validación de metodologías que permitan en el futuro la construcción y calibración de modelos de otras presas importantes; y c) generación y difusión de resultados y conclusiones útiles para la comunidad científica, para los organismos involucrados en la evaluación de la seguridad de las infraestructuras de Las Islas y para la sociedad canaria en su conjunto.

1.2. Revisión bibliográfica

1.2.1. Métodos numéricos

Tanto el Método de los Elementos de Contorno como el Método de los Elementos Finitos han sido utilizados para estudiar la respuesta dinámica de presas abovedadas en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. Estas metodologías permiten tener en cuenta la flexibilidad del suelo, y permiten estudiar la relevancia de la interacción suelo-estructura-agua en la respuesta del sistema. Por ejemplo, la respuesta armónica en estado estacionario de la presa abovedada de Morrow Point fue estudiada empleando el MEF por Fok y Chopra [3, 4] considerando un amplio rango de propiedades del muro, embalses llenos o vacíos, suelos caracterizados como rígidos o flexibles, y contornos de truncamiento del embalse estudiados como rígidos o absorbentes. Posteriormente, Tan y Chopra [5] mejoraron el modelo, incluyendo la inercia y el amortiguamiento del suelo, y además realizaron un análisis paramétrico más

amplio. El mismo caso de estudio fue analizado por Domínguez y Maeso [6, 7] empleando un modelo multi-región tridimensional de Elementos de Contorno para el análisis armónico en estado estacionario de la respuesta sísmica lineal de presas de arco incluyendo la flexibilidad del suelo, la presencia de agua y la geometría del embalse, así como fenómenos complejos como los efectos de ondas viajeras. Más tarde, Maeso et al. [8] continuaron el desarrollo del modelo y estudiaron los efectos de la variación espacial del movimiento del suelo y de la geometría del cañón en la respuesta del arco de la presa de Morrow Point bajo ondas sísmicas incidiendo sobre la región de estudio desde diferentes direcciones y considerando varias geometrías, tanto del cañón como del embalse. Más tarde, Maeso et al. [9] y Aznárez et al. [10] mejoraron el modelo al incluir la presencia de los sedimentos del fondo empleando la formulación poroelástica de Biot, y analizaron la influencia de los sedimentos en la respuesta dinámica y sísmica del sistema. García et al. [11, 12] emplearon el modelo para estudiar cómo el nivel del embalse, el espesor de los sedimentos, o los ángulos de incidencias de las ondas sísmicas afectaban a la respuesta sísmica del muro. Otros esquemas computacionales han sido propuestos, por ejemplo, Seghir et al. [13] presentaron un modelo 2D MEC-MEF simétrico para el estudio de la interacción muro-embalse en presas de gravedad considerando el dominio del embalse como ilimitado. Más tarde, Aftabi and Lotfi [14] presentaron un método Elementos Finitos - (Elementos Finitos - Híper Elementos Finitos) – Elementos de Contornos para el analizar el comportamiento dinámico de una presa abovedada, incluyendo un enfoque modal y elementos finitos de fluido para discretizar la región próxima al embalse, e híper-elemento de fluido tridimensional para modelar el canal prismático que se extiende hacia el infinito. Recientemente, Li et al. [15] propusieron un nuevo 3D Método de los Elementos Finitos de Contornos Escalados (SBFEM) para estudiar la interacción suelo-estructura de presas de arco teniendo en cuenta las capas inclinadas en el interior del suelo. El muro de la presa de Soria, en particular, se ha estudiado recientemente desde el punto de vista estático, por Concepción-Guodemar et al. [16], quienes desarrollaron un modelo de diferencias finitas tridimensional para estudiar la distribución de esfuerzos en el muro de la presa bajo condiciones estáticas.

La influencia de la topografía del embalse, así como el estudio de la representación matemática del contorno de truncamiento del embalse, son aspectos relevantes en este tipo de problemas. Condiciones de contorno específicas para representar el contorno de truncamiento del embalse han sido desarrolladas y aplicadas a este tipo de problemas por numerosos autores, tales como Humar y Roufaiel [17], Medina y Domínguez [18, 19], Fok y Chopra [2, 3], Domínguez y Meise [20], Szczesiak and Weber [21], Maeso et al. [7, 8], Aznárez et al. [9], Aftabi y Lotfi [13], o Jafari y Lotfi [22]. La influencia de la manera en que la geometría del embalse es modelada es otro aspecto de interés. Por ejemplo, García et al. [10], estudiaron la influencia de considerar un embalse abierto o cerrado. Mircevska et al. [23] analizaron la influencia de la distancia del contorno de truncamiento al muro de la presa, y Mircevska et al. [24] estudiaron como la geometría del embalse (con superficie regular o compleja) afecta a la distribución de fuerzas hidrodinámicas sobre el muro de la presa debido a acciones sísmicas.

El análisis modal de las presas de arco es otro enfoque que contribuye a una comprensión más profunda de la dinámica del sistema. Dos estudios dedicados a este tema son, por ejemplo, Mohammad Amin Hariri-Ardebilia et al. [25] y los de Farzad y Lotfi [26]. En 2019, Mohammad Amin Hariri-Ardebili et al. [25] estudiaron las frecuencias naturales y los modos de vibración de seis

presas abovedadas, y propusieron un método para las presas de arcos basado en la teoría de campos aleatorios. En 2021, Reza Farzad and Vahid Lotfi [26] presentaron un análisis modal en el dominio de la frecuencia en un sistema de muro-embalse-suelo con una herramienta computacional especial para resolver el problema cuando se produce la propagación de ondas debido a que se incluyen la compresibilidad del agua y la masa rocosa del suelo. El estudio se llevó a cabo en el sistema muro-embalse-suelo de Morrow Point con diferentes valores del coeficiente de absorción del fondo del embalse, siendo el sistema modelado mediante elementos finitos.

Una revisión más en profundidad sobre el tratamiento del análisis dinámico numérico de las presas de arco, y también, de presas de gravedad, puede encontrarse en Rezaiee-Pajand et al. [27].

Como es sabido, los modelos numéricos están sujetos a un cierto nivel de incertidumbre debido a las hipótesis y simplificaciones hechas durante su desarrollo en cuanto a, por ejemplo, propiedades de los materiales, geometrías, condiciones de contorno y ecuaciones de gobierno de las diferentes regiones implicadas.

1.2.2. Métodos experimentales

Desde el punto de vista experimental, el procedimiento tradicional empleado para evaluar la integridad estructural de los muros de las presas se basaba en inspecciones visuales y, más recientemente, en ensayos de vibración forzada. En la actualidad, numerosos estudios de detección de daños utilizan métodos de evaluación mediante vibraciones ambientales, fundamentalmente a través del análisis modal operacional (OMA, operational modal analysis [28]). Esta técnica permite, por una parte, analizar el comportamiento dinámico de una estructura mientras está operando, y por otra, emplear fuerzas ambientales (por ejemplo, el viento) para excitar la estructura. Para llevar a cabo este análisis, se puede disponer de una red de sensores que monitorizan el comportamiento de la estructura mientras está en servicio, obteniéndose información sobre el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, lo que permite estudiar diferentes aspectos del comportamiento dinámico de los muros de las presas. Esto posibilita tanto la identificación de daños estructurales como la identificación de las frecuencias naturales y de los modos de vibración del muro de la presa, lo que permite calibrar, y/o actualizar, modelos numéricos, contribuyendo a una comprensión más profunda de la dinámica del sistema. Durante las dos últimas décadas se han realizado muchos estudios experimentales con la técnica OMA en diferentes tipos de infraestructuras [29-38]. En el ámbito de la aplicación de las técnicas OMA al análisis dinámico de presas, en 2000, Darbre et al. [39] obtuvieron por medio de pruebas de vibración ambiental las frecuencias de la presa de Mauvoisin, donde se observó que las frecuencias aumentaban inicialmente con el aumento del nivel del agua y luego disminuyen con un aumento adicional. Poco después, Darbre et al. [40] presentaron un programa experimental y los resultados de un programa de registro continuo de vibraciones ambientales llevado a cabo en la misma presa, donde obtuvieron que los efectos de la masa añadida son superados por el endurecimiento de la presa debido al aumento de la presión hidrostática para los niveles más bajos del embalse. En 2014, Calcina et al. [41] obtuvieron las propiedades dinámicas de la presa de Punta Gennarta considerando dos niveles de agua diferentes, llevándose a cabo las mediciones de manera asíncrona. Realizaron un modelo numérico con el MEF que les permitió verificar

analíticamente las frecuencias naturales y las formas modales, así como los cambios vinculados al nivel del agua, con los resultados obtenidos experimentalmente. En 2016, García-Palacios et al. [42] calibraron y actualizaron un modelo de elementos finitos de la presa La Tajera habiéndose utilizado como fuente de vibración la generada por la descarga de la presa. Emplearon amortiguamientos, frecuencias naturales y formas modales identificadas a partir de la técnica OMA, a través de un enfoque de optimización basado en el método Monte Carlo. Cabe señalar que utilizaron un sistema inalámbrico de adquisición de datos sincronizado desarrollado por los autores. Poco después, Yang et al. [43] obtuvieron las propiedades dinámicas de la presa de Ertan a partir de los registros de cinco movimientos sísmicos. Construyeron y calibraron un modelo lineal de elementos finitos de la presa y un modelo no lineal que considera juntas de contracción para reproducir las frecuencias obtenidas, llegando a la conclusión que el uso del modelo no lineal podría ser razonable para simular la respuesta dinámica de la presa Ertan. En 2021, Pereira et al. [44] presentaron un trabajo que abordaba desde la identificación modal hasta la detección de daños en la presa de Baixo Sabor. Para ello, se rastrearon las propiedades modales de la estructura durante tres años aplicándose un OMA automatizado. Los daños se simulaban en un modelo numérico de la presa y los resultados se utilizaron para probar la capacidad de las herramientas de detección de daños para encontrar estas anomalías. El estado del arte de este tema ha sido resumido recientemente por Pereira et al. [45]. Una revisión de la literatura sobre la monitorización de la salud estructural de presas de hormigón, puede encontrarse en Bukenya et al. [2].

Ahora bien, la actualización de modelos numéricos y la monitorización de la salud estructural [46] puede implicar el uso de un número significativo de equipos de adquisición de datos, y el costo de estos puede representar una barrera para el uso de esta tecnología. Comercialmente, existe una amplia variedad de equipos de adquisición de datos sísmicos, pero son relativamente caros, lo que podría restringir el número de estaciones que se pueden desplegar simultáneamente. Sin embargo, los precios y la accesibilidad a los componentes electrónicos han ayudado a desarrollar sistemas a precios bajos donde los geófonos y los acelerómetros son los sensores más utilizados. Así, diferentes grupos de investigación desarrollan sus propios equipos. Por ejemplo, J.L. Soler-Llorens et al. [47] mostraron un registrador sísmico de bajo costo basado en Arduino, utilizando como sensores geófonos verticales. Probaron el sistema comparando las señales registradas con las obtenidas a través de diferentes sistemas comerciales de adquisición de datos y diferentes tipos de geófonos. Para probar el sistema se utilizó como señal de entrada una onda sinusoidal donde un generador de funciones proporcionaba esta entrada. Por otro lado, S. Valenti et al. [48] propusieron un sismómetro inalámbrico de bajo costo para el monitoreo de edificios por medio de acelerómetros, el cual se evaluó, a través de la comparación de resultados en términos de frecuencias y desplazamientos, con un sistema de cableado típico, empleando una torre como estructura de demostración.

1.3. Objetivos

El objetivo global de esta tesis doctoral es contribuir al conocimiento sobre los modelos y métodos aplicables al análisis numérico de la respuesta dinámica de presas abovedadas a través del estudio pormenorizado de un caso concreto: la presa de Soria, en Gran Canaria. Para ello, el muro de la presa se

modelará y analizará utilizando técnicas y herramientas basadas en el Método de los Elementos de Contorno, estudiándose la influencia de los distintos factores ambientales y funcionales que pueden afectar a sus propiedades dinámicas, y abordándose el estudio de la validez de los modelos utilizados.

Se pueden enumerar los siguientes objetivos específicos:

A. Construcción de un modelo geométrico (mallado) del muro de la Presa de Soria que lo represente con la mayor exactitud posible.

B. Análisis del comportamiento dinámico del muro de la presa según la hipótesis de “base rígida”, es decir, obviando la flexibilidad del terreno circundante. El estudio se realizará en las situaciones de presa vacía y con distintos niveles de llenado.

C. Construcción de un modelo geométrico (mallado) aproximado del entorno del muro de la presa, con especial atención al barranco aguas arriba del muro, donde se desarrolla el embalse.

D. Análisis del comportamiento dinámico del sistema conjunto muro-embalse-terreno. Evaluación de la influencia de los efectos de interacción suelo-agua-estructura en el comportamiento dinámico del sistema.

E. Construcción de un equipo de adquisición de datos que sea capaz de medir vibraciones de frecuencias muy bajas en estructuras muy rígidas y débilmente excitadas.

F. Realización de campañas experimentales que permitan identificar las principales propiedades dinámicas de la Presa de Soria (frecuencias y modos propios).

G. Calibración del modelo numérico (model updating) mediante la comparación del modelo numérico y los datos experimentales de las principales propiedades dinámicas del sistema (frecuencias y modos propios).

1.4. Estructura de la tesis

Esta tesis doctoral se ha estructurado en 8 capítulos. Una vez presentadas en este capítulo las directrices de la tesis doctoral, en el siguiente capítulo se muestran las ecuaciones de gobierno, tanto en elastodinámica lineal como en medios escalares, así como las ecuaciones para los casos de propagación de ondas en los medios mencionados. También se presenta un estudio de las condiciones de radiación que se aplicarán en los modelos numéricos. El MEC se desarrollará en dicho capítulo, ya que será utilizado para el estudio dinámico del muro de la presa. Al final de ese segundo capítulo, toda la formulación presentada se aplicará a un problema de referencia para diferentes cotas de agua.

En el capítulo 3 se presentan los modelos numéricos que se emplearán en el análisis armónico. En primer lugar, se llevará a cabo un análisis modal con el MEF para validar la malla del muro de la presa que se empleará en el análisis armónico con el MEC. A continuación, se analizará la influencia de la interacción suelo-estructura, así como la de la geometría del cañón sobre la respuesta dinámica muro de la presa. Posteriormente, se aplicarán las condiciones de radiación en el contorno de truncamiento de la presa y se seleccionará una de ellas para estudiar la influencia de la interacción dinámica suelo-estructura-agua en la respuesta dinámica del muro para distintas cotas de agua. Por último, se calibra el modelo numérico partiendo de los datos

obtenidos en una campaña experimental y se exponen las conclusiones derivadas de este capítulo.

El capítulo 4 muestra un sensor horizontal, así como un sistema de adquisición de datos de bajo coste, para medir vibraciones ambientales de bajo nivel. El capítulo comienza con una descripción detallada de cada una de las cuatro partes de las que consta el sistema propuesto, y se deducen las ecuaciones matemáticas que conducen a la obtención de la frecuencia fundamental del sensor. Se compararán los resultados obtenidos con el sistema de adquisición propuesto con los obtenidos por un sismógrafo comercial. El sensor propuesto será utilizado para identificar las primeras frecuencias naturales del muro de la presa de Soria. También, se especifica de manera detallada el coste de los materiales y componentes empleados para la construcción del sistema.

En el capítulo 5 se describe la campaña experimental llevada a cabo para la identificación modal del muro de la presa de Soria. En esta campaña se utilizaron equipos comerciales con capacidad de sincronización entre ellos, dado que se constató que esto era crucial para la correcta identificación modal. Por otra parte, en dicho capítulo, también se analizan determinadas frecuencias para justificar su origen no estructural.

Finalmente, en el capítulo 6 se presenta un resumen de las conclusiones extraídas de esta tesis. La tesis finaliza discutiendo futuras líneas de investigación y desarrollos que podrían seguir a este trabajo.

CAPÍTULO 2

METODOLOGÍA

2.1. Introducción

La metodología empleada para el desarrollo de esta tesis doctoral estará basada, fundamentalmente, en la aplicación del Método de los Elementos de Contorno (MEC) [49], que consiste en una estrategia numérica con importantes ventajas en la resolución de problemas de elasticidad dinámica tales como propagación de ondas elásticas y vibraciones en piezas mecánicas, mecánica de la fractura y propagación de grietas, y especialmente en aquellos que implican a regiones infinitas como problemas de interacción suelo-estructura, propagación de ondas sísmicas y acústicas, etc. En relación con otros métodos, el MEC presenta las siguientes ventajas: 1.- requiere, en general, discretizar únicamente el contorno de las regiones implicadas; 2.- trata de forma natural regiones de naturaleza infinita o semi-infinita (semiespacio); y 3.- se obtiene el mismo grado de precisión tanto en el tratamiento de la variable natural (desplazamiento) como de su derivada (tensión). El problema se afrontará en términos de su respuesta dinámica en el dominio de la frecuencia y, por tanto, considerando un comportamiento lineal y medios con leyes de comportamiento elásticas.

Este capítulo se organizará de la siguiente manera. En primer lugar, en el apartado 2.2. se exponen las ecuaciones de gobierno, tanto en elastodinámica lineal como en medios escalares. En el apartado 2.3 se presentan las ecuaciones para los casos de propagación de ondas, tanto en medios viscoelásticos como en escalares, y ya en el apartado 2.4 se presenta un estudio de las condiciones de radiación. Posteriormente, en el apartado 2.5, se presenta una introducción al Método de Elementos de Contorno, y, posteriormente, se desarrollan las bases del modelo de Elementos de Contorno que será posteriormente utilizado en esta tesis para estudiar el comportamiento dinámico del muro de la presa de Soria. Por último, en el apartado 2.6, toda la formulación presentada en este capítulo será aplicada a un problema de referencia.

2.2. Ecuaciones de gobierno

2.2.1. Ecuaciones de gobierno en elastodinámica lineal

Para comenzar con este estudio, se parte de las hipótesis de comportamiento lineal y elástico del sólido, que presenta, por una parte, pequeñas deformaciones, y por otra, continuidad dentro del mismo. Se considerará un sistema de coordenadas cartesiano donde los ejes son indicados por x_j ($j=1, 2$ y 3), siendo el vector de posición $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, mientras que el vector desplazamiento de un punto $\mathbf{x}$ en un instante de tiempo t viene dado por $\mathbf{u} = u_i = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Las tres componentes (x_1, x_2, x_3) de este vector están referidas a un sistema cartesiano fijo. Escribiendo en notación de índices

las ecuaciones del tensor de pequeñas deformaciones que relaciona las deformaciones con las componentes del desplazamiento en un punto del sólido considerado, siendo $i = 1, 2, 3$ las tres componentes del vector desplazamiento cada una de ellas referidas al sistema cartesiano fijo, tenemos,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (2.1)$$

donde $i, j = 1, 2$ y 3 , y ε_{ij} es el tensor de deformaciones.

Por otra parte, de la ecuación de Cauchy (2.2) [50], que define el comportamiento dinámico de un sólido, tenemos las ecuaciones de equilibrio interno, en forma diferencial, que en notación de índices es

$$F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \ddot{u}_i \quad (2.2)$$

donde F_i es el vector fuerzas de volumen; σ_{ij} es el tensor de tensiones; ρ es la densidad del material y $\ddot{u}_i$ es el vector aceleración. La ecuación (2.2) es válida en todo el medio continuo.

La ecuación (2.3), conocida como ley de Hooke, representa las componentes del tensor de tensiones (tensiones normales y tangenciales), para un cuerpo elástico, lineal e isótropo, como funciones lineales de las deformaciones: las tensiones normales en función de las deformaciones longitudinales unitarias, y las tensiones tangenciales, en función de las deformaciones transversales unitarias.

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (2.3)$$

siendo $\varepsilon_{kk} = e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ la dilatación volumétrica del medio; δ_{ij} la delta de Kronecker ($\delta_{ij}=1$ si $i = j$; $\delta_{ij}= 0$ si $i \neq j$); G el módulo de elasticidad transversal $G = E/2(1 + \mu)$, y λ la constante de Lamé $\lambda = \mu E/(1 + \mu)(1 - 2\mu)$. E representa el módulo de elasticidad y μ el coeficiente de Poisson [50].

Ahora bien, escribiendo la relación tensión-deformación de forma inversa

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\mu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.4)$$

y particularizando la ecuación (2.2) para la dirección 1, se llega a

$$X + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \rho \ddot{u}_1 \quad (2.5)$$

siendo σ_{11}, σ_{12} y σ_{13}

$$\sigma_{11} = 2G\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{kk} = 2G \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = 2G \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.6)$$

$$\sigma_{12} = G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.7)$$

$$\sigma_{13} = G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad (2.8)$$

y sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (2.5) obtenemos

$$X + G \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + G \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla \mathbf{u} = \rho \ddot{u}_1 \quad (2.9)$$

Llamando:

$$\Delta u_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \quad (2.10)$$

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (2.11)$$

llegamos a

$$X + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla \mathbf{u} + G \Delta u_1 = \rho \ddot{u}_1 \quad (2.12)$$

De la misma manera, y por permutación circular:

$$Y + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla \mathbf{u} + G \Delta u_2 = \rho \ddot{u}_2 \quad (2.13)$$

$$Z + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x_3} \nabla \mathbf{u} + G \Delta u_3 = \rho \ddot{u}_3 \quad (2.14)$$

Multiplicando por $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14), respectivamente, y sumando, se obtiene

$$\mathbf{f}_v + (\lambda + G) \nabla (\nabla \mathbf{u}) + G \Delta \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.15)$$

y como $\Delta \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u}$, la ecuación (2.15) se puede expresar como

$$\mathbf{f}_v + (\lambda + G) \nabla (\nabla \mathbf{u}) + G \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.16)$$

siendo:

$$\mathbf{f}_v = X \mathbf{i} + Y \mathbf{j} + Z \mathbf{k} \quad (2.17)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{k} \quad (2.18)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{i} \Delta u_1 + \mathbf{j} \Delta u_2 + \mathbf{k} \Delta u_3 \quad (2.19)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{u}_1 \mathbf{i} + \ddot{u}_2 \mathbf{j} + \ddot{u}_3 \mathbf{k} \quad (2.20)$$

La ecuación de Navier (ecuación (2.16)) representa las ecuaciones de equilibrio en notación vectorial y ha de cumplirse en todos los puntos del dominio en estudio en cada instante de tiempo. Esta ecuación viene expresada en el dominio del tiempo, pero hay que destacar que esta tesis se desarrolla en el dominio de la frecuencia, ya que los planteamientos en el dominio de la frecuencia conducen a simplificar matemáticamente las ecuaciones de gobierno con respecto a las del dominio del tiempo. Por ello, se pasará del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, partiendo de la base que el campo de desplazamientos constará de una parte transitoria $\mathbf{u}^t(\mathbf{x}, t)$ y otra permanente $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$ con variación armónica [51]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{U}(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t} \quad (2.21)$$

donde i es la unidad imaginaria y ω es la frecuencia angular. Debido a los mecanismos de disipación internos de energía, la parte transitoria desaparecerá transcurrido un intervalo de tiempo por lo que se podrá formular el problema en un instante de tiempo donde solamente exista la parte permanente quedando la ecuación (2.21) de la forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t} \quad (2.22)$$

por lo que operando con la ecuación (2.16), se llega a las ecuaciones de Navier en el dominio de la frecuencia

$$\mathbf{f}_v + (\lambda + G)\nabla \nabla \cdot \mathbf{U} + G\nabla^2 \mathbf{U} = -\rho\omega^2 \mathbf{U} \quad (2.23)$$

Las variables de la ecuación (2.23) dependen de la posición y de la frecuencia.

2.2.2. Ecuaciones de gobierno para el problema dinámico en medios escalares

En los modelos numéricos que serán presentados más adelante en esta tesis, el agua será considerada como un fluido compresible de viscosidad despreciable (fluido perfecto), con comportamiento elástico y lineal que trabaja en un rango de pequeñas perturbaciones, y será considerada como un medio escalar. Por esta razón, en este punto se analizan las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico de un medio escalar.

Con el objetivo de obtener las ecuaciones que describen el comportamiento del agua, se considerará un paralelepípedo con volumen diferencial $d\Omega$ ($d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3$) que se mueve con el fluido (Fig. 2.1).

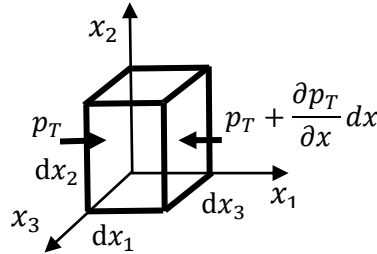


Figura 2.1: Fuerzas unitarias sobre $d\Omega$ en dirección x

siendo p_T la presión instantánea en cualquier punto. Aplicando la segunda ley de Newton ($\Sigma F = ma_x$) sobre el elemento de volumen $d\Omega$, y en ausencia de fuerzas de volumen, la condición de equilibrio en la dirección x_1 , por ejemplo, establece

$$\sum df_{x_1} = dm \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial t} \quad (2.24)$$

siendo dm la masa del fluido en $d\Omega$. Llamando $\rho_0 = dm/d\Omega$ a la densidad del fluido en el estado imperturbado, y operando en la ecuación (2.24), teniendo en cuenta que

$$p = \frac{df}{ds} \quad (2.25)$$

se obtiene

$$dx_2 dx_3 \left[p_T - \left(p_T + \frac{\partial p_T}{\partial x_1} dx_1 \right) \right] = \rho_0 d\Omega \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial t} \quad (2.26)$$

En un estado de pequeñas perturbaciones se puede suponer una variación lineal de la presión, por lo que $p_T = p + p_0$ [52], donde p es la presión del fluido en cualquier punto y p_0 es el campo de presión del fluido correspondiente al estado imperturbado (p_0 es constante), obteniéndose

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho_0 \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial t} \quad (2.27)$$

De la misma manera, se obtienen

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho_0 \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial t} \quad (2.28)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho_0 \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial t} \quad (2.29)$$

Por otra parte, multiplicando las ecuaciones (2.27), (2.28) y (2.29) por $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, respectivamente, y sumando, llegamos a:

$$-\left[\frac{\partial p}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial x_3} \mathbf{k} \right] = \rho_0 \left[\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial t} \mathbf{k} \right] \quad (2.30)$$

Empleando el operador gradiente en la ecuación (2.30), da lugar a

$$-\nabla p = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\dot{u}_1 \mathbf{i} + \dot{u}_2 \mathbf{j} + \dot{u}_3 \mathbf{k}) = \rho_0 \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} \quad (2.31)$$

siendo la ecuación (2.31) la ecuación de equilibrio linealizada en las tres direcciones del espacio.

Por otra parte, partiendo de la ecuación de continuidad de un fluido [52],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \dot{\mathbf{u}}) = 0 \quad (2.32)$$

y denominando condensación (s) al incremento de densidad en el entorno de la partícula relativo al valor de reposo, cuya expresión viene dada por $s = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ [52], tras despejar ρ y sustituyéndolo en la ecuación (2.32), se llega a

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_0 (1 + s) + \nabla(\rho_0 (1 + s) \dot{\mathbf{u}}) = 0 \quad (2.33)$$

Ahora bien considerando que ρ_0 es constante, que estamos en el caso de pequeñas perturbaciones por lo que $|s| \ll 1$ y que $\nabla(s \dot{\mathbf{u}})$ puede ser despreciado por ser un infinitésimo de orden superior, la ecuación (2.33) se convierte en

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.34)$$

siendo la ecuación (2.34) la ecuación de continuidad linealizada.

Con el objetivo de obtener la ecuación de onda, se aplica, en primer lugar, divergencia en la ecuación de equilibrio linealizada (2.31)

$$-\nabla^2 p = \rho_0 \nabla \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} \quad (2.35)$$

y, en segundo lugar, derivamos respecto del tiempo la ecuación de continuidad linealizada (2.34), obteniéndose

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0 \quad (2.36)$$

Por otra parte, para pequeñas perturbaciones $|s| \ll 1$, se puede expresar la ecuación de estado isoentrópico como [52]

$$p = K_c s \quad (2.37)$$

relacionando la ecuación (2.37) los cambios de presión con los cambios de densidad relativos a través de una constante dependiente del medio K_c , que representa el módulo de compresión adiabático y cuya expresión es [52]

$$K_c = \rho_0 \left(\frac{\partial p_T}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \quad (2.38)$$

Por tanto, operando con las ecuaciones (2.35), (2.36) y (2.37) se llega a obtener

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.39)$$

siendo $c = \sqrt{K_c/\rho_0}$, la velocidad de propagación.

La ecuación diferencial (2.39) es la llamada ecuación de onda. Esta ecuación gobierna la propagación de ondas en un medio escalar, en fluidos no viscosos, dentro de un rango lineal de pequeñas perturbaciones en el dominio del tiempo. Cuando la excitación es armónica, la presión p para una frecuencia angular ω puede ser expresada como

$$p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t} \quad (2.40)$$

de tal manera que operando con (2.40) y sustituyendo en la ecuación de onda, se obtiene la ecuación de Helmholtz, que se empleará para el estudio dinámico del agua bajo la hipótesis de fluido compresible, de viscosidad despreciable y bajas perturbaciones en el dominio de la frecuencia, cuya expresión matemática es

$$\nabla^2 P + k^2 P = 0 \quad (2.41)$$

siendo k el número de onda ($k = \omega/c$).

2.3. Propagación de ondas

2.3.1. Propagación de ondas en medios viscoelásticos

En este apartado se estudiarán las características que tienen los fenómenos de propagación de ondas en medios viscoelásticos, homogéneos e isotrópos, partiendo de la integración de las ecuaciones de equilibrio dinámico en desplazamientos (ecuaciones de Navier). La ecuación (2.16) representa las ecuaciones de Navier en notación vectorial, expresadas de manera independiente a cualquier sistema particular de coordenadas. Ahora bien,

usando la relación: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}$, el sistema de ecuaciones representado por (2.16) se puede expresar de la forma

$$\mathbf{f}_v + (\lambda + 2G)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - G\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.42)$$

La integración de este sistema de ecuaciones es, en general, complejo, porque las tres componentes del desplazamiento se encuentran acopladas. Para desacoplar el sistema de ecuaciones se parte de la dilatación volumétrica e ($e = \nabla \cdot \mathbf{u}$) y del vector de rotación $\boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$) [49], que permiten desacoplar la ecuación (2.42) de modo simple. Eliminando las fuerzas de volumen ($\mathbf{f}_v$) para mayor simplicidad en la ecuación (2.42), y sustituyendo en esta misma ecuación $\nabla \cdot \mathbf{u}$ por e , y $\nabla \times \mathbf{u}$ por $\boldsymbol{\omega}$, se obtiene

$$(\lambda + 2G)\nabla e - G\nabla \times \boldsymbol{\omega} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.43)$$

Por una parte, aplicando divergencia a la ecuación (2.43) se llega a

$$(\lambda + 2G)\nabla(\nabla e) - G\nabla(\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = \rho \nabla \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.44)$$

y teniendo en cuenta que, $\nabla(\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = 0$ y $\ddot{\mathbf{u}} = \nabla \ddot{u}$, la ecuación (2.44) queda tras dividirla entre ρ

$$c_p^2 \nabla^2 e = \ddot{e} \quad (2.45)$$

siendo $c_p^2 = (\lambda + 2G)/\rho$, representando la velocidad de propagación de las ondas irrotacionales (e no tiene asociada cambios de forma). La ecuación (2.45) es la ecuación escalar de una onda que se desplaza con una velocidad de propagación c_p .

Por otra parte, aplicando rotacional a la ecuación (2.43), obtenemos

$$(\lambda + 2G)\nabla \times (\nabla e) - G[\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - \Delta \boldsymbol{\omega}] = \rho \nabla \times \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.46)$$

Teniendo en cuenta por una parte que, $\nabla \times (\nabla e) = 0$ y $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0$, y por otra parte que, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ (por lo que $\ddot{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \times \ddot{\mathbf{u}}$), la ecuación (2.46) queda, tras dividirla entre ρ

$$c_s^2 \Delta \boldsymbol{\omega} = \ddot{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.47)$$

siendo $c_s^2 = G/\rho$, donde c_s es velocidad de propagación de las ondas equivoluminales ($\boldsymbol{\omega}$ no tiene asociada cambios de volumen). La ecuación (2.47) es la ecuación vectorial de una onda que se desplaza con una velocidad de propagación c_s . Como las constantes c_p y c_s tienen dimensiones de velocidad, y dependen de la densidad y de las constantes elásticas del medio, estas constantes se pueden utilizar para definir las características del mismo, dependiendo el cociente entre ambas del coeficiente de Poisson

$$\frac{c_p^2}{c_s^2} = \frac{\lambda + 2G}{G} = \frac{2(1 - \mu)}{1 - 2\mu} \quad (2.48)$$

La ecuación de Navier (ecuación (2.42)) se ha transformado en las ecuaciones (2.45) y (2.47), donde la primera es una ecuación de onda escalar, con velocidad de propagación c_p , y la segunda es una ecuación de una onda vectorial, con velocidad de propagación c_s . En un medio homogéneo, isótropo e infinito, ambas ondas coexisten propagándose independientemente. Como $c_p > c_s$, la velocidad de propagación de la onda irrotacional es mayor que la de la onda rotacional, por lo que la primera es detectada antes que la segunda; por

este motivo, la onda irrotacional se denomina onda P (onda primaria) y la rotacional onda S (onda secundaria). Así, utilizando las velocidades c_p y c_s como constantes características del medio, la ecuación (2.43) se convierte en

$$c_p^2 \nabla e - c_s^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.49)$$

La ecuación (2.49) será empleada para estudiar las características del movimiento de los puntos del sólido bajo los efectos de las ondas P y S en un problema de propagación plana armónica genérico de velocidad c .

El campo de desplazamientos, en notación compleja, correspondiente a un problema de propagación de una onda armónica plana con velocidad de propagación c cuya dirección de propagación viene definida por el vector unitario $\mathbf{q}$ es [49]

$$\mathbf{u} = A e^{i(\omega t - k \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (2.50)$$

Donde A , es la amplitud; $k = \omega/c$, es el número de onda; $\mathbf{q}$, es el vector director de propagación de la onda armónica; $\mathbf{d}$, es el vector unitario que define la dirección del movimiento de las partículas; y $\mathbf{x}$ es el vector de posición de cualquier punto del medio. Sustituyendo en la ecuación (2.49) los siguientes términos obtenidos de la ecuación (2.50):

$$\nabla e = -A k^2 (\mathbf{q} \mathbf{d}) \mathbf{q} e^{i(\omega t - k \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.51)$$

$$\boldsymbol{\omega} \nabla \times \boldsymbol{\omega} = -A k^2 \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{d}) e^{i(\omega t - k \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.52)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 A e^{i(\omega t - k \mathbf{q} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (2.53)$$

Operando y sustituyendo k por ω / c , se obtiene:

$$-\left(\frac{c_p}{c}\right)^2 (\mathbf{q} \mathbf{d}) \mathbf{q} + \left(\frac{c_s}{c}\right)^2 \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{d}) = -\mathbf{d} \quad (2.54)$$

Aplicando a la ecuación (2.54) la relación: $\mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{q} \mathbf{d}) \mathbf{q} - \mathbf{d}$, se llega a

$$(c_s^2 - c_p^2)(\mathbf{q} \mathbf{d}) \mathbf{q} + (c^2 - c_s^2) \mathbf{d} = 0 \quad (2.55)$$

En la ecuación (2.55), si $\mathbf{q} \mathbf{d} = 0$ significa que $\mathbf{q}$ y $\mathbf{d}$ son perpendiculares, entonces $c = c_s$; el campo de desplazamientos corresponde al de una onda plana S (Fig. 2.2.a). Se puede hablar de 2 tipos de ondas S diferentes, las ondas SV y las ondas SH, estando ambas desacopladas. Las ondas SV son ondas S polarizadas verticalmente, y producen movimientos u_1 y u_2 (Fig. 2.2.b), mientras que las ondas SH son ondas S polarizadas horizontalmente, y producen movimientos u_3 (Fig. 2.2.c).

De la misma manera, aplicando a la ecuación (2.54) la relación: $(\mathbf{q} \mathbf{d}) \mathbf{q} = \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{d}) + \mathbf{d}$, se obtiene

$$(c_s^2 - c_p^2) \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{d}) + (c^2 - c_p^2) \mathbf{d} = 0 \quad (2.56)$$

En la ecuación (2.56) si $\mathbf{q} \times \mathbf{d} = 0$ significa que $\mathbf{q}$ y $\mathbf{d}$ son paralelos, entonces $c = c_p$, correspondiendo el campo de desplazamientos al de una onda plana P (Fig. 2.3).

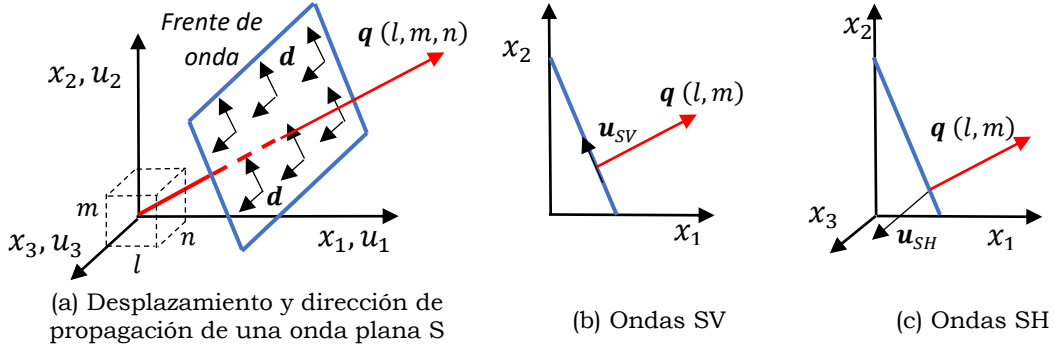


Figura 2.2: Ondas planas SH y SV. Definición de vectores y características geométricas

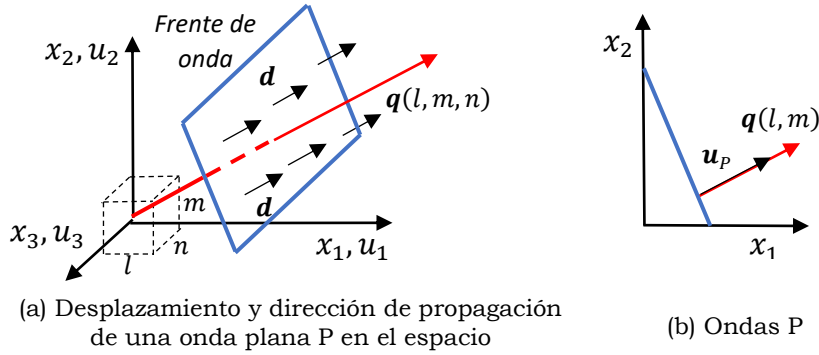


Figura 2.3: Ondas P. Definición de vectores y características geométricas

Como se puede observar en las figuras 2.2 y 2.3, las ondas SV y las ondas P gobiernan los movimientos en el plano $x_1 - x_2$.

2.3.2. Propagación de ondas en medios escalares

En el régimen armónico supuesto, se puede obtener la relación entre el desplazamiento del fluido en una dirección determinada y la derivada parcial de la presión del fluido en esa dirección. Para ello se partirá de la ecuación de equilibrio linealizada (2.31), y, como se dijo anteriormente, el vector desplazamiento de un punto x puede ser expresado como $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t}$, con lo que particularizando para cada una de las tres direcciones y sustituyendo en la ecuación de equilibrio linealizada, permite obtener

$$-\nabla p = \rho_0 i\omega \dot{\mathbf{u}} \quad (2.57)$$

siendo la ecuación que representa el desplazamiento en la dirección x_i en el dominio del tiempo

$$u_i(x_i, t) = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial p(x_i, t)}{\partial x_i} \quad (2.58)$$

La ecuación (2.58) queda expresada, de forma general, en el dominio de la frecuencia como

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \nabla P(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.59)$$

Por último, volviendo a la ecuación de continuidad linealizada (2.34) e integrándola se llega a

$$s = -\nabla \mathbf{u} \quad (2.60)$$

pudiéndose expresar la ecuación (2. 37) como

$$p = -K_c \nabla \mathbf{u} \quad (2.61)$$

Ahora bien, tomando el operador divergencia en $\mathbf{u}$, y sustituyendo $\nabla \mathbf{u}$ en la ecuación (2.61) llegamos a:

$$p = -K_c \varepsilon_{kk} \quad (2.62)$$

siendo ε_{kk} la dilatación volumétrica del fluido. Teniendo en cuenta que un fluido perfecto (no viscoso) no soporta tensiones tangenciales, el tensor de tensiones se reduce, por tanto, a su componente esférica:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (2.63)$$

donde el signo negativo indica una tensión de compresión para un valor positivo de la presión, y $\delta_{ij} = 1$ cuando $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. En un rango de pequeñas perturbaciones y teniendo en cuenta el carácter elástico y lineal del modelo, la ley de comportamiento puede plantearse desde la ley de Hooke, considerando la ecuación (2.63) como:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p = K_c \varepsilon_{kk} \quad (2.64)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (2.65)$$

2.4. Condiciones de radiación

En el medio físico existen muchos problemas definidos en dominios de grandes dimensiones, por ejemplo, un barco en el mar, un avión en vuelo o nuestro caso de estudio en particular, muro de una presa en contacto con agua. En esta tesis se estudiará la interacción de dos dominios de grandes dimensiones con el muro de la presa, siendo estos dos dominios el suelo y el agua almacenada en el embalse o cañón. En relación al suelo, el MEC permite tener en cuenta intrínsecamente el carácter ilimitado del suelo, sin necesidad de contornos absorbentes o cualquier otro artefacto matemático. En el caso del agua almacenada en el embalse o cañón, aunque no se trata de un medio ilimitado, su extensión es suficientemente grande como para que, en general, no resulte práctica la discretización de la totalidad del mismo. Por esta razón, y partiendo de la base de que un modelo detallado de las zonas del embalse o cañón más distantes del muro de la presa son menos relevantes para la respuesta del sistema, se extenderá la discretización hasta una determinada zona en la que se construirá un contorno de truncamiento artificial. En este contorno se impondrán unas condiciones de contorno que deberán ser capaces de representar, de manera aproximada, la porción del embalse o cañón no discretizada, prestando especial atención a la radiación de la energía que escapa de la región de estudio, y a los fenómenos de resonancia asociados a la propagación de las ondas a través de un cañón de geometría aproximadamente constante, en su caso.

Para el análisis de las condiciones de contorno en este contorno de truncamiento, vamos a considerar la geometría del problema representado en la figura 2.4. El muro de la presa está en contacto con el agua, de modo que ambos dominios están acoplados, y las vibraciones en la dirección

perpendicular al muro están relacionadas con las presiones que se desarrollan en ese contorno del medio fluido. De este modo, para hallar la respuesta del fluido, se realiza una discretización convencional por elementos de contorno de la región cercana al muro de la presa y, posteriormente, en el contorno de truncamiento, se impone como condición de contorno dicha relación entre presiones y movimientos.

Consideraremos a partir de este momento el caso de interés en el que, a partir del contorno de truncamiento, el embalse continúa desarrollándose a lo largo de un cañón de geometría transversal aproximadamente constante, y una longitud significativamente mayor a las dimensiones características de su sección. Para definir la condición de contorno adecuada en el extremo truncado dicho cañón, se presentarán dos condiciones de radiación aproximadas, que serán denominadas en este trabajo como condición de radiación de Sommerfeld y condición de radiación de Humar y Roufaiel y, a continuación, se presentará una solución semi-analítica rigurosa que será de aplicación en un cañón infinito abierto cuando la sección es cuadrada o rectangular. Posteriormente, en el apartado 2.6, se evaluarán y compararán las condiciones de contorno entre ellas, aplicándolas a un problema de referencia.

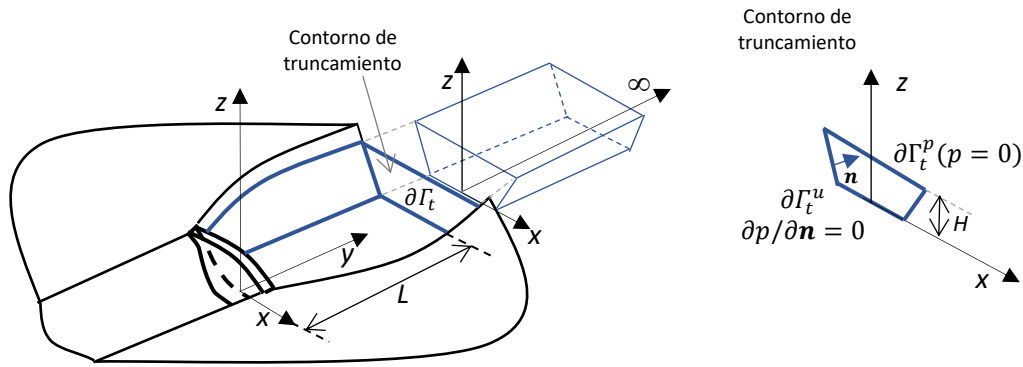


Figura 2.4: Modelo suelo-estructura-agua con contorno de truncamiento a una distancia L de la estructura

2.4.1. Condición de radiación de Sommerfeld

La primera condición de radiación que se analizará considera que la onda armónica plana se propaga aguas arriba en dirección perpendicular al contorno de truncamiento [53], tal y como se puede observar en la figura 2.5.

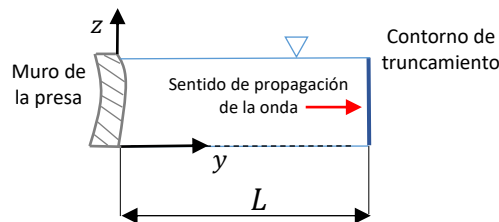


Figura 2.5: Muro de la presa con contorno de truncamiento a una distancia L del muro

Para su formulación matemática se parte de la ecuación de ondas en la dirección aguas arriba del cañón (ver apartado 2.2.2.)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.66)$$

La solución general de esta ecuación unidimensional es la fórmula de D'Alembert

$$p(y, t) = f(y - ct) + g(y + ct) \quad (2.67)$$

donde el término $f(y - ct)$ representa una traslación cuya forma es $f(y)$ y se propaga sin distorsión hacia la derecha (aguas arriba) con velocidad c ; el término $g(y + ct)$ representa una traslación cuya forma es $g(y)$ y se propaga sin distorsión hacia la izquierda (aguas abajo) con velocidad c . Por tanto, considerando la condición de radiación, no habrá traslación hacia la izquierda, por lo que el término $g(y + ct)$ es igual a cero, quedando la ecuación (2.67)

$$p(y, t) = f(y - ct) \quad (2.68)$$

Haciendo el siguiente cambio de variables, $u = y - ct$, la ecuación (2.68) queda

$$p(y, t) = f(u) \quad (2.69)$$

obteniéndose

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial p}{\partial u} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.71)$$

Por último, igualando las ecuaciones (2.70) y (2.71) se llega a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.72)$$

donde la ecuación (2.72) representa la condición de radiación unidimensional en el dominio del tiempo, conocida como condición de radiación de Sommerfeld. Para transformar la ecuación (2.72) del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, como la presión $p(y, t)$ para una frecuencia angular ω es $p(y, t) = P(y, \omega)e^{i\omega t}$, se obtiene

$$\frac{\partial P(y, \omega)}{\partial y} + \frac{i\omega}{c} \cdot P(y, \omega) = 0 \quad (2.73)$$

y llamando

$$K'_{1D} = \frac{i\omega}{c} \quad (2.74)$$

la ecuación (2.73) queda

$$\frac{\partial P(y, \omega)}{\partial y} + K'_{1D} \cdot P(y, \omega) = 0 \quad (2.75)$$

La ecuación (2.75) es la condición de radiación de Sommerfeld en el dominio de la frecuencia desacoplada, por lo que es aplicable directamente a cada nodo del contorno de truncamiento una vez discretizado este.

2.4.2 Condición de radiación basada en el primer modo de vibración del cañón

Para el estudio de la segunda condición de radiación, se parte de una onda armónica plana con amplitud unitaria y frecuencia angular ω propagándose aguas arriba, formando un ángulo θ en la dirección del eje y (Fig. 2.6).

Para obtener la ecuación de la presión hidrodinámica, se parte de la solución de la ecuación (2.39), siendo su forma

$$p(x, t) = Ae^{\frac{i\omega}{c}(ct-qx)} + A'e^{\frac{i\omega}{c}(ct+qx)} \quad (2.76)$$

donde el primer sumando de la derecha de la igualdad está relacionado con la onda incidente, y el segundo con la onda reflejada; A y A' son las amplitudes; ω es la frecuencia angular; c es la velocidad de propagación de las ondas en el agua; $\mathbf{q}$ es el vector director de propagación de la onda armónica y $\mathbf{x}$ es el vector de posición de cualquier punto.

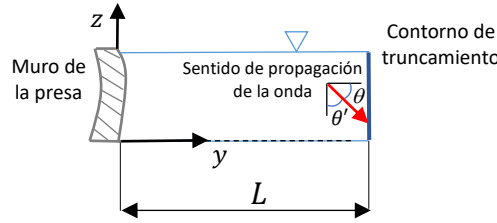


Figura 2.6: Muro de la presa con contorno de truncamiento a una distancia L del muro

En la condición de radiación de estudio, al igual que en el caso anterior, no hay onda reflejada, por lo que la presión hidrodinámica $p(y, z, t)$ con amplitud unitaria queda de la forma

$$p(y, z, t) = e^{\frac{i\omega}{c}(ct-qx)} \quad (2.77)$$

De acuerdo a la figura 2.6, la ecuación (2.77) queda

$$p(y, z, t) = e^{i\left(-\frac{\omega}{c}\cos\theta \cdot y + \frac{\omega}{c}\cos\theta' \cdot z + \omega t\right)} \quad (2.78)$$

Ahora bien, llamando:

$$k' = \frac{\omega}{c}\cos\theta \quad (2.79)$$

$$\lambda_z = \frac{\omega}{c}\cos\theta' \quad (2.80)$$

y sustituyendo las ecuaciones (2.79) y (2.80) en la ecuación (2.78) se obtiene

$$p(y, z, t) = e^{i(-k'y + \lambda_z z + \omega t)} \quad (2.81)$$

Por otra parte, elevando al cuadrado las ecuaciones (2.79) y (2.80) y sumándolas se llega a

$$k' = \pm i \sqrt{\lambda_z^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \quad (2.82)$$

De las dos soluciones posibles de la ecuación (2.82) se toma el signo negativo para que la onda se amortigüe en la dirección del eje y :

$$k' = -i \sqrt{\lambda_z^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \quad (2.83)$$

Quedando la condición de contorno para el contorno de cierre el dominio del tiempo de la forma

$$\frac{\partial p(y, z, t)}{\partial y} + \sqrt{\lambda_z^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \cdot p(y, z, t) = 0 \quad (2.84)$$

y en el dominio de la frecuencia

$$\frac{\partial P(y, z, \omega)}{\partial y} + \sqrt{\lambda_z^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \cdot P(y, z, \omega) = 0 \quad (2.85)$$

Para la obtención de λ_z se parte de la ecuación (2.86) en el dominio del tiempo propuesta por Humar y Roufaiel [54], que representa la presión hidrodinámica para una región aguas arriba la cual se extiende al infinito en la dirección del eje y , excitada en esta misma dirección, y considerando que tanto las paredes del cañón como la parte inferior del mismo son reflectivas.

$$p = p(y, z, t) = \frac{4\rho}{\pi} \sum_{n=1}^{n_1-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \frac{1}{i\bar{q}_n} e^{-i\bar{q}_n y} \cos \lambda_z^n z e^{i\omega t} + \frac{4\rho}{\pi} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \frac{1}{q_n} e^{-q_n y} \cos \lambda_z^n z e^{i\omega t} \quad (2.86)$$

donde λ_z^n son los autovalores, $q_n = \sqrt{\lambda_z^n - \omega^2/c^2}$, $\bar{q}_n = q_n/i$ y n_1 es el menor valor de n que hace real a q_n . $i = \sqrt{-1}$.

A gran distancia de la presa, el segundo término de la ecuación (2.86) desaparece, quedando la presión hidrodinámica de la forma

$$p = p(y, z, t) = \frac{4\rho}{\pi} \sum_{n=1}^{n_1-1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \frac{1}{i\bar{q}_n} e^{-i\bar{q}_n y} \cos \lambda_z^n z e^{i\omega t} \quad (2.87)$$

Para calcular λ_z^n aplicamos la condición de contorno de $p(y, H, t) = 0$ en la ecuación (2.87) obteniéndose:

$$\lambda_z^n = \frac{2n-1}{2H} \pi; \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.88)$$

Para el caso de un cañón rectangular, el primer modo de vibración está relacionado con la cota de agua H , siendo $\lambda_z^1 = \pi/2H$. Así, la ecuación (2.85) queda de la forma

$$\frac{\partial P(y, z, \omega)}{\partial y} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{2H}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \cdot P(y, z, \omega) = 0 \quad (2.89)$$

y llamando

$$K'_{2D} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2H}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \quad (2.90)$$

la ecuación (2.89) queda expresada como

$$\frac{\partial P(y, z, \omega)}{\partial y} + K'_{2D} \cdot P(y, \omega) = 0 \quad (2.91)$$

que tiene un formato equivalente al de la ecuación (2.75) derivada para representar la condición de radiación de Sommerfeld.

En este trabajo, se denominará a la ecuación (2.91) condición de radiación de Humar y Roufaiel. Al igual que en la condición de radiación de Sommerfeld, la ecuación de radiación de Humar y Roufaiel está desacoplada, por lo que se puede aplicar directamente a los nodos del contorno de truncamiento previamente discretizado.

Cabe destacar que la ecuación (2.91) para valores de $\omega/c \gg \lambda_z$ colapsa en la condición de radiación de Sommerfeld.

2.4.3. Solución rigurosa semi-analítica para un cañón abierto infinito de sección rectangular

En los dos apartados anteriores, las ecuaciones (2.75) y (2.91) estudiadas, se aplican en los nodos de cualquier contorno de truncamiento, independientemente de su forma. A continuación, se estudiará el caso de un cañón que se extiende uniformemente hasta el infinito, de sección rectangular, de ancho b y altura H , como el mostrado en la figura 2.7 [51].

Un movimiento en la dirección anteroposterior del trasdós de la presa, producido por una onda armónica, provoca en el agua la aparición de ondas de presión hidrodinámicas propagándose longitudinalmente aguas arriba. En el dominio de la frecuencia, la ecuación de Helmholtz (2.41) gobierna el comportamiento dinámico del agua, considerada esta como un fluido compresible de viscosidad despreciable (fluido perfecto), con comportamiento elástico y lineal que trabaja en un rango de pequeñas perturbaciones.

$$\nabla^2 P + \frac{\omega^2}{c^2} P = 0 \quad (2.92)$$

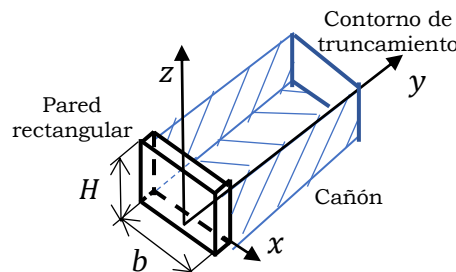


Figura 2.7: Pared rectangular con cañón de sección rectangular prismática (3D)

La solución de la ecuación (2.92) cuando se produce una propagación longitudinal en el sentido positivo del eje y es del tipo

$$P = P(x, z)e^{-ky} \quad (2.93)$$

donde k es el número de onda. Operando con la ecuación (2.93) para sustituirla en la ecuación (2.92) se llega a

$$\frac{\partial^2 P(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, z)}{\partial z^2} + P(x, z) \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0 \quad (2.94)$$

cuya solución general es de la forma [51]

$$P(x, z) = P(x)P(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_m e^{i\lambda_x^m x} + A'_m e^{-i\lambda_x^m x}) (B_n e^{i\lambda_z^n z} + B'_n e^{-i\lambda_z^n z}) \quad (2.95)$$

que sustituida en la ecuación (2.93) da lugar a

$$P = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_m e^{i\lambda_x^m x} + A'_m e^{-i\lambda_x^m x}) (B_n e^{i\lambda_z^n z} + B'_n e^{-i\lambda_z^n z}) e^{-k_{mn} y} \quad (2.96)$$

Operando con la ecuación (2.96) y sustituyendo en la ecuación (2.94) se obtiene el número de onda

$$k_{mn} = \pm \sqrt{\lambda_x^{m2} + \lambda_z^{n2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (2.97)$$

Para que la onda de presiones se amortigüe hacia el infinito la raíz tiene que tener signo negativo, por lo que la ecuación (2.96), tras sustituir el número de onda, conduce a

$$P = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_m e^{i\lambda_x^m x} + A'_m e^{-i\lambda_x^m x}) (B_n e^{i\lambda_z^n z} + B'_n e^{-i\lambda_z^n z}) e^{-\sqrt{\lambda_x^{m2} + \lambda_z^{n2} - \frac{\omega^2}{c^2}} y} \quad (2.98)$$

Por otra parte, los autovalores λ_x^m y λ_z^n se obtienen aplicando las siguientes tres condiciones de contorno a la ecuación (2.98):

- 1^{era} condición de contorno: Presión nula en la superficie: $P = 0$ en $z = H$.
- 2^{nda} condición de contorno: Velocidad normal nula en la base: $\partial P / \partial z = 0$ en $z = 0$.
- 3^{era} condición de contorno: Velocidad normal nula en las paredes del cañón: $\partial P / \partial x = 0$ en $x = b/2$ y en $x = -b/2$.

La aplicación de estas tres condiciones de contorno conduce a

$$\lambda_z^n = \frac{2n-1}{2H} \pi; n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.99)$$

$$\lambda_x^m = \frac{2(m-1)}{b} \pi; m = 1, 2, 3 \dots \quad (2.100)$$

Una vez obtenidos los autovalores λ_x^m y λ_z^n calculamos la función de presiones $P(x, z) = P(x)P(z)$, siendo

$$P(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m (e^{i\lambda_x^m x} + e^{-i\lambda_x^m x}) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(\lambda_x^m x) \quad (2.101)$$

$$P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (e^{i\lambda_z^n z} + e^{-i\lambda_z^n z}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\lambda_z^n z) \quad (2.102)$$

siendo la expresión de la función de presiones

$$P(x, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_m B_n \cos(\lambda_x^m x) \cos(\lambda_z^n z) \quad (2.103)$$

Haciendo $A_{mn} = A_m B_n$, donde A_{mn} son los factores de partición de cada modo en la solución completa (desconocidos y que dependen del problema tratado), y viniendo representados los modos propios por [51]

$$\hat{\Phi}_{mn} = \cos(\lambda_x^m x) \cos(\lambda_z^n z) \quad (2.104)$$

la solución general queda de la forma

$$P = P(x, y, z, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \hat{\Phi}_{mn} \cdot e^{-k_{mn} y} \quad (2.105)$$

donde k_{mn} está definido en la ecuación (2.97). Como se puede observar, las propiedades de los modos de propagación en el canal dependen del signo del radicando de dicha ecuación (2.97). Por tanto, si el radicando es positivo, entonces $k_{mn} \in \mathbb{R}^+$, y el término exponencial decae con la distancia, lo que significa que los modos se amortiguan rápidamente y no son relevantes lejos del origen de la perturbación. Por el contrario, si el radicando es negativo, entonces $k_{mn} \in \mathbb{I}^+$, lo que da como resultado modos que se propagan a lo largo del canal sin decaer, lo que implica que deben tenerse en cuenta para simular correctamente la radiación de energía fuera del modelo. Por tanto, será necesario considerar un número finito de términos del desarrollo que lleven asociado un valor imaginario de k_{mn} [51].

Por tanto, la solución de la ecuación (2.105) está compuesta de diferentes modos, y la amplitud A_{mn} dependerá de las condiciones de contorno impuestas.

Una vez se conocen los autovalores y los modos propios, la expansión finita de las presiones hidrodinámicas y sus derivadas se pueden calcular para cada nodo i del contorno de truncamiento situado a una distancia $y = L > 0$ (Fig. 2.8). Para ello se emplea la ecuación (2.105) particularizada para cada nodo i del contorno de truncamiento [51]

$$P_i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{i(mn)} \cdot \hat{\Phi}_{i(mn)} \cdot e^{-k_{mn} y} \quad (2.106)$$

donde

$$\hat{\Phi}_{i(mn)} = \cos(\lambda_x^m x_i) \cos(\lambda_z^n z_i) \quad (2.107)$$

siendo P_i la presión, y (x_i, z_i) las coordenadas (x, z) del nodo i en el contorno de truncamiento.

Haciendo uso de la notación matricial, la ecuación (2.106) se puede escribir en la malla del contorno de truncamiento como

$$\mathbf{P} = \hat{\Phi} \mathbf{A} e^{-ky} \quad (2.108)$$

y el flujo de presión como

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = - \hat{\Phi} k A e^{-ky} \quad (2.109)$$

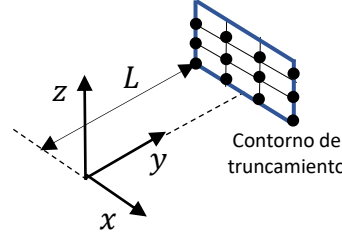


Figura 2.8: Contorno de truncamiento.
 $i=1, 2, 3 \dots NM$, nodos en el contorno de
 cierre. N , nodos totales en el eje z ; M ,
 nodos totales en el eje x

Operando con la ecuación (2.108):

$$\hat{\Phi}^{-1} P = \hat{\Phi}^{-1} \hat{\Phi} A e^{-ky} = A e^{-ky} \quad (2.110)$$

y sustituyendo la ecuación (2.110) en la ecuación (2.109), se llega a

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \hat{\Phi} k \hat{\Phi}^{-1} P = 0 \quad (2.111)$$

donde $\hat{\Phi}$ es la matriz que contiene los autovectores y k es una matriz diagonal con todos los números de onda, por lo que haciendo

$$K'_{3D} = \hat{\Phi} k \hat{\Phi}^{-1} \quad (2.112)$$

la ecuación (2.111) queda de la forma

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + K'_{3D} P = 0 \quad (2.113)$$

Esta solución se formulará sobre la malla del contorno de cierre sin que sea necesario tener en cuenta los nodos situados en la superficie libre del mismo ($p = 0$).

2.5. Método de los Elementos de Contorno

El MEC es el método numérico utilizado en esta tesis doctoral para discretizar las ecuaciones de gobierno descritas anteriormente en cada uno de los medios involucrados en el problema de estudio: el muro de la presa, la roca donde está cimentado, y el agua del embalse; todo ello con el objetivo de estimar la respuesta dinámica del muro de la presa de Soria teniendo en cuenta los fenómenos de interacción suelo-estructura y suelo-estructura-agua. La formulación del método se presenta en la línea de lo descrito por Domínguez [49], Maeso [51] y por Aznárez [55] en lo referente a su aplicación al problema concreto de la respuesta dinámica de presas bóveda.

2.5.1. Formulación integral en elastodinámica armónica

Para iniciar la formulación de este apartado, se considerará un cuerpo elástico Ω que tiene un contorno Γ con vector unitario normal $\mathbf{n}$ (Fig. 2.9). Se considerará un sistema de coordenadas cartesiano donde los ejes son indicados

por x_j ($j=1, 2$ y 3), siendo el vector de posición $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, siendo el vector desplazamiento de un punto x en un instante de tiempo (t) $\mathbf{u} = u_i = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$.

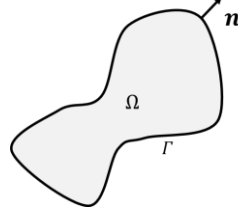


Figura 2.9: Cuerpo elástico cuyo dominio Ω está delimitado por el contorno Γ

Desarrollando la ecuación de Cauchy presentada en la ecuación (2.2), y expresando las fuerzas de volumen como ρb_i , se puede escribir la ecuación de movimiento en el dominio del tiempo como [50]

$$\rho b_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \ddot{u}_i \quad (2.114)$$

siendo b_i la carga por unidad de masa en la dirección de la coordenada i .

En el dominio Ω con contorno Γ , sean dos estados elastodinámicos, S y S^* , que satisfacen la ecuación de Cauchy en tiempos $t = t_1$ y $t = t_2$, respectivamente. Es importante puntualizar que S^* será una solución de referencia conocida la cual se utiliza para resolver el problema y obtener el estado S .

$$S(b_i, \rho, c_p, c_s; \Omega) = [u_i, \sigma_{ij}] \quad (2.115)$$

$$S^*(b_i^*, \rho, c_p, c_s; \Omega) = [u_i^*, \sigma_{ij}^*] \quad (2.116)$$

Para cualquier punto x , la ecuación (2.114) queda para el primer estado elastodinámico

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.117)$$

y para el segundo

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^* + \rho b_i^* = \rho \ddot{u}_i^* \quad (2.118)$$

Multiplicando la ecuación (2.117) por u_i^* y la ecuación (2.118) por u_i , e integrando en el dominio Ω se llega a

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} * u_i^* \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho (b_i * u_i^*) d\Omega = \int_{\Omega} \rho (\ddot{u}_i * u_i^*) d\Omega \quad (2.119)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^* * u_i \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho (b_i^* * u_i) d\Omega = \int_{\Omega} \rho (\ddot{u}_i^* * u_i) d\Omega \quad (2.120)$$

donde el operador $*$ entre vectores representa la suma del producto de convolución de sus componentes. Por otra parte, aplicando a la primera integral de las ecuaciones (2.119) y (2.120) la integración por partes:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\Omega = \int_{\Gamma} u \cdot v \cdot n_i \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega \quad (2.121)$$

donde n_i es el vector unitario normal a Γ con componente i (siendo el vector de tensión $t_i(x, t) = \sigma_{ij}(x, t)n_j(x)$). Por tanto, las primeras integrales de las ecuaciones (2.119) y (2.120) quedan de la forma:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} * u_i^* \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (t_i * u_i^*) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} * \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) d\Omega \quad (2.122)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^* * u_i \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (t_i^* * u_i) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}^* * \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega \quad (2.123)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.122) y (2.123) en las ecuaciones (2.119) y (2.120), respectivamente:

$$\int_{\Gamma} (t_i * u_i^*) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} * \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho(b_i * u_i^*) d\Omega - \int_{\Omega} \rho(\ddot{u}_i * u_i^*) d\Omega = 0 \quad (2.124)$$

$$\int_{\Gamma} (t_i^* * u_i) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}^* * \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho(b_i^* * u_i) d\Omega - \int_{\Omega} \rho(\ddot{u}_i^* * u_i) d\Omega = 0 \quad (2.125)$$

A continuación, restando las ecuaciones (2.124) y (2.125) conduce a

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (t_i * u_i^*) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} * \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}^* * \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho u_i^* * (b_i - \ddot{u}_i) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} (t_i^* * u_i) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho u_i * (b_i^* - \ddot{u}_i^*) d\Omega \end{aligned} \quad (2.126)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la simetría del tensor de deformaciones, las simetrías del tensor de elasticidad (o tensor constitutivo, que relaciona los tensores de tensiones y deformaciones), y las propiedades de la convolución, se obtiene que [49, 50, 56, 57]

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} * \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}^* * \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega \quad (2.127)$$

quedando la ecuación (2.126) de la forma

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (t_i * u_i^*) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho u_i^* * (b_i - \ddot{u}_i) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} (t_i^* * u_i) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho u_i * (b_i^* - \ddot{u}_i^*) d\Omega \end{aligned} \quad (2.128)$$

siendo la ecuación (2.128) el teorema de reciprocidad de Betti o teorema de Betti-Rayleigh en el dominio del tiempo. Para transformar la ecuación (2.128) al dominio de la frecuencia se considerará que las fuerzas de volumen b_i y b_i^* son

armónicas en el tiempo con una frecuencia angular ω ($b_i = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = B_i(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t}$), así como las condiciones de contorno, y operando de la misma manera que en apartados anteriores, se puede redefinir entonces los dos estados elastodinámicos S y S^* en el dominio de la frecuencia como:

$$S_\omega(B_i, \rho, c_p, c_s; \omega, \Omega) = [U_i, \sigma_{ij}] \quad (2.129)$$

$$S_\omega^*(B_i^*, \rho, c_p, c_s; \omega, \Omega) = [U_i^*, \sigma_{ij}^*] \quad (2.130)$$

Si los dos estados elastodinámicos anteriores son armónicos con la misma frecuencia ω , los productos de convolución de la ecuación (2.128) se transforman en productos, y, por otra parte, si los valores de las condiciones iniciales son los mismos que los valores del estado estacionario, los términos de las condiciones iniciales en la ecuación (2.128) son iguales, quedando esta ecuación de la forma

$$\int_\Gamma T_i U_i^* d\Gamma + \int_\Omega \rho U_i^* B_i d\Omega = \int_\Gamma T_i^* U_i d\Gamma + \int_\Omega \rho U_i B_i^* d\Omega \quad (2.131)$$

La ecuación (2.131), que es el teorema de reciprocidad en el dominio de la frecuencia, proporciona la representación integral en la que se basa el MEC, establecido el estado elastodinámico que se pretende resolver y otro escogido convenientemente, que en nuestro caso será el que está marcado con *, siendo este estado conocido. Para formular la ecuación (2.131) se requiere de un estado de referencia reducido S_ω^* , conocido como estado de Stokes, siendo la solución de este estado conocida como solución fundamental. La solución fundamental se refiere a problemas con solución conocida lo cual permite plantear un sistema de ecuaciones integrales.

La solución fundamental que se utilizará en este apartado representa la respuesta en términos de desplazamientos y tensiones en un dominio elástico, homogéneo e isótropo ilimitado. Así pues, asumiendo que el segundo estado * es la solución fundamental, se considerará una carga armónica unitaria la cual está aplicada a lo largo de una dirección l en un punto k' . Así, para una dirección k se tiene

$$\rho B_k^* = \delta(r) \delta_{lk} \quad (2.132)$$

siendo δ_{lk} la delta de Kronecker; $\delta(r)$ la función delta de Dirac, donde $r = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{k'}$ y representa la distancia entre el punto de aplicación de carga k' y el de estudio. La ecuación (2.132) representa, físicamente, una fuente puntual armónica que pulsa a la misma frecuencia que el problema real, aplicada en un punto de coordenada $\mathbf{x}_{k'}$. Antes de continuar con el planteamiento, cabe destacar que la ecuación (2.131) para la dirección k queda de la forma

$$\int_\Gamma T_k U_k^* d\Gamma + \int_\Omega \rho U_k^* B_k d\Omega = \int_\Gamma T_k^* U_k d\Gamma + \int_\Omega \rho B_k^* U_k d\Omega \quad (2.133)$$

Por tanto, teniendo en cuenta que la integral de volumen de la función delta de Dirac extendida a todo el dominio es igual a la unidad, la última integral de volumen de la ecuación (2.133), teniendo en cuenta la ecuación (2.132), queda de la forma:

$$\int_\Omega \rho B_k^* U_k d\Omega = U_k \delta_{lk} \int_\Omega \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k'}) d\Omega = U_k \delta_{lk} = U_l^{k'} \quad (2.134)$$

pudiéndose ahora reescribir la ecuación (2.133) como

$$U_l^{k'} + \int_{\Gamma} T_k^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} T_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} \rho U_k^* B_k d\Omega \quad (2.135)$$

Llegados a este punto, cabe enfatizar que la solución fundamental corresponde al espacio completo, lo que implica discretizar la superficie libre cuando se estudia un dominio semi-infinito, como sucede en esta tesis. No obstante, en la práctica solamente es necesario incluir una pequeña región alrededor del área analizada para obtener resultados precisos.

Dicha solución fundamental para el espacio completo se expresa tanto en desplazamientos (U^*) como en tensiones (T^*). Se define $U_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega)$ como los desplazamientos en la dirección k de un punto $\mathbf{x}$ debido a la carga aplicada en la dirección l , siendo su expresión [49]

$$U_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega) = \frac{1}{4\pi\rho c_s^2} (\psi \delta_{lk} - \chi^{r,lr,k}) \quad (2.136)$$

donde:

$$\begin{aligned} \psi &= \left(\frac{1}{z_s^2} - \frac{1}{z_s} + 1 \right) \frac{e^{z_s}}{r} - \frac{c_s^2}{c_p^2} \left(\frac{1}{z_p^2} - \frac{1}{z_p} \right) \frac{e^{z_p}}{r} \\ \chi &= \left(\frac{3}{z_s^2} - \frac{3}{z_s} + 1 \right) \frac{e^{z_s}}{r} - \frac{c_s^2}{c_p^2} \left(\frac{3}{z_p^2} - \frac{3}{z_p} + 1 \right) \frac{e^{z_p}}{r} \end{aligned} \quad (2.137)$$

y $z_s = -i\omega r/c_s$, $z_p = -i\omega r/c_p$ y r la distancia entre el punto de aplicación de la carga k' y el de estudio.

Por otra parte, se define $T_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega)$ como la componente en la dirección k del vector tensión sobre una superficie cuya normal unitaria exterior es $\mathbf{n}$ en el punto $\mathbf{x}$, y su expresión viene dada por [49]

$$\begin{aligned} T_{lk}^*(\mathbf{x}, \mathbf{l}, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \left(\delta_{lk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k} n_l \right) - \frac{2}{r} \chi \left(n_k r_{,l} - 2r_{,l} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} r_{,l} r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} + \left(\frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\alpha}{2r} \chi \right) r_{,l} n_k \right] \end{aligned} \quad (2.138)$$

Hay que destacar que la solución fundamental presenta una singularidad cuando $r \rightarrow 0$, que será tratada más adelante en este apartado.

Se omite la obtención de la solución fundamental cuyo desarrollo riguroso se presenta en Domínguez [49].

Como la solución fundamental para una carga unitaria a lo largo de una dirección definida por un vector unitario $\mathbf{l}$ con componentes l_i se puede escribir como

$$U_k^* = U_{lk}^* l_i \quad (2.139)$$

$$T_k^* = T_{lk}^* l_i \quad (2.140)$$

entonces, la ecuación (2.135) se puede poner de la forma

$$U_l^{k'} + \int_{\Gamma} T_{lk}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{lk}^* T_k d\Gamma + \int_{\Omega} U_{lk}^* \rho B_k d\Omega \quad (2.141)$$

La ecuación (2.141) es la representación integral del desplazamiento en cualquier punto interno en términos de valores de contorno U_k y T_k , las fuerzas en el dominio y las soluciones fundamentales conocidas, la cual es válida para cualquier punto k' donde la fuerza es aplicada. Si las fuerzas de volumen son nulas ($\rho B_k = 0$) la ecuación (2.141) queda de la forma

$$U_l^{k'} + \int_{\Gamma} T_{lk}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{lk}^* T_k d\Gamma \quad (2.142)$$

La ecuación (2.142) permite el cálculo de desplazamientos en puntos internos de Ω cuando los desplazamientos y sus tensiones son conocidas en Γ . Por ello, para poder formular así el problema, la ecuación integral será escrita en términos sólo de variables en Γ , lo que da lugar a aplicar la carga unitaria en el contorno. El hecho que el punto de aplicación pertenezca al contorno, es decir, $k' \in \Gamma$, requiere tratamiento especial debido a la singularidad de la solución fundamental cuando $r \rightarrow 0$, (r es la distancia entre el punto de aplicación k' y el de estudio). El proceso para extraer esta singularidad consiste en modificar ligeramente Γ para evitar que $r = 0$, sustituyendo el contorno real Γ por otros dos, $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ y Γ_ε , siendo Γ_ε una semiesfera infinitesimal de radio $\varepsilon \rightarrow 0$ con centro en el punto de colocación k' (Fig. 2.10) [49].

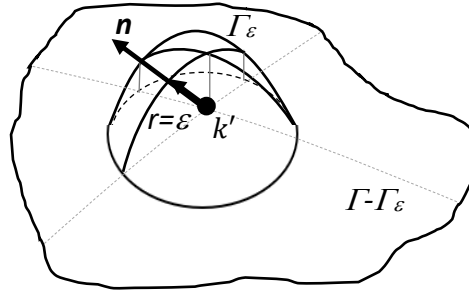


Figura 2.10: Contornos para la integración

Cada una de las integrales extendidas en el contorno en la ecuación (2.142) se descompone en otras dos, una extendida en $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ y otra en Γ_ε ,

$$U_l^{k'} + \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} T_{lk}^* U_k d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{lk}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} U_{lk}^* T_k d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} U_{lk}^* T_k d\Gamma \quad (2.143)$$

Las integrales extendidas en $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ no contienen la singularidad y se convierten en integrales extendidas al contorno Γ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, es decir,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} T_{lk}^* U_k d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} T_{lk}^* U_k d\Gamma \quad (2.144)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} U_{lk}^* T_k d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} U_{lk}^* T_k d\Gamma \quad (2.145)$$

Como las integrales extendidas sobre Γ_ε se definen en el límite, y teniendo en cuenta, por una parte, que la solución fundamental en desplazamientos es del orden $1/\varepsilon$, y por otra, que la solución fundamental en tensiones es del orden $1/\varepsilon^2$ y además la integral en el contorno es del orden ε^2 ($S_{\text{semiesfera}} = 2\pi r^2$), se puede escribir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} U_{lk}^* T_k d\Gamma = T_k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} U_{lk}^* d\Gamma = 0 \quad (2.146)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{lk}^* U_k d\Gamma = U_k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{lk}^* d\Gamma = U_k \left(-\frac{1}{2} \delta_{lk} \right) = -\frac{1}{2} U_l^{k'} \quad (2.147)$$

Sustituyendo (2.144), (2.145), (2.146) y (2.147) en la ecuación (2.143), se llega a

$$\frac{1}{2} U_l^{k'} + \int_{\Gamma} T_{lk}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{lk}^* T_k d\Gamma \quad (2.148)$$

Haciendo $c^{k'} = 1/2$, la ecuación (2.148) se puede expresar de forma general como

$$c^{k'} U_l^{k'} + \int_{\Gamma} T_{lk}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{lk}^* T_k d\Gamma \quad (2.149)$$

Como la carga unitaria se colocará en las tres direcciones del espacio, los vectores T_{lk}^* y U_{lk}^* se convertirán en matrices 3×3 , por lo que reescribiendo la ecuación (2.149) en notación matricial se llega a

$$\mathbf{C}^{k'} \mathbf{U}^{k'} + \int_{\Gamma} \mathbf{T}^* \mathbf{U} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^* \mathbf{T} d\Gamma \quad (2.150)$$

que es la representación integral del campo de desplazamientos del problema elastodinámico armónico cuando la carga puntual es aplicada en k' , donde $\mathbf{U}$ (ecuación (2.151)) y $\mathbf{T}$ (ecuación (2.152)) son los vectores de desplazamiento y tensión, respectivamente, y $\mathbf{U}^*$ (ecuación (2.153)) y $\mathbf{T}^*$ (ecuación (2.154)) son los tensores de la solución fundamental. Los coeficientes U_{lk}^* del tensor $\mathbf{U}^*$ son los desplazamientos en la dirección k debido a una fuerza unitaria actuando en la dirección l , mientras que los coeficientes T_{lk}^* del tensor $\mathbf{T}^*$ son las tensiones en la dirección k debidas a una fuerza unitaria actuando en la dirección l [49].

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (2.152)$$

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* & U_{13}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* & U_{23}^* \\ U_{31}^* & U_{32}^* & U_{33}^* \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* & T_{13}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* & T_{23}^* \\ T_{31}^* & T_{32}^* & T_{33}^* \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

Por otra parte, en problemas de tres dimensiones $\mathbf{C}^{k'}$ es un tensor 3×3 que depende de la forma del contorno en el punto k' bajo consideración y del coeficiente de Poisson del dominio. Si el contorno es regular $\mathbf{C}^{k'} = 1/2 \cdot \mathbf{I}$. Si el

punto k' está en el interior del contorno $\mathcal{C}^{k'} = 1 \cdot \mathbf{I}$. Si el contorno está en el exterior $\mathcal{C}^{k'} = 0$, siendo $\mathbf{I}$ la matriz unitaria diagonal 3×3 .

$$\mathcal{C}^{k'} = \begin{bmatrix} c_{11}^{k'} & c_{12}^{k'} & c_{13}^{k'} \\ c_{21}^{k'} & c_{22}^{k'} & c_{23}^{k'} \\ c_{31}^{k'} & c_{32}^{k'} & c_{33}^{k'} \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

Ahora bien, para resolver numéricamente la ecuación integral (2.150), el contorno debe ser discretizado en una serie de elementos (Fig. 2.11) sobre los cuales los desplazamientos y tensiones se escriben en términos de sus valores en una serie de puntos nodales. Escribiendo la ecuación (2.150) en forma discretizada para cada nodo, se obtendrá un sistema de ecuaciones algebraico lineal, y una vez se aplican las condiciones de contorno el sistema, puede ser resuelto para obtener todos los valores desconocidos, y, por tanto, una solución aproximada a los valores del problema de contorno. Cabe enfatizar que en esta tesis se emplearán elementos cuadráticos triangulares de 6 nodos y elementos cuadráticos cuadriláteros de 9 nodos. Las funciones de forma de estos elementos pueden verse en Domínguez [49].

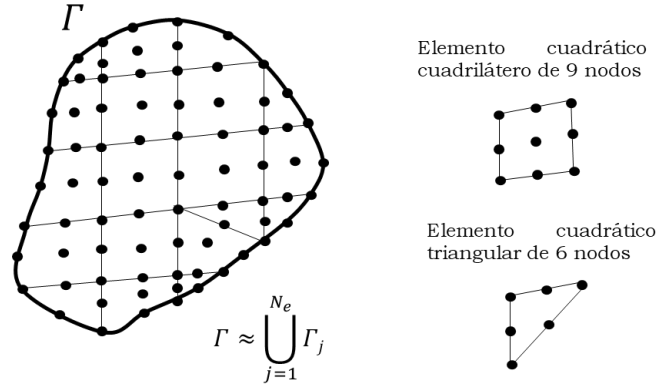


Figura 2.11: Superficie del contorno discretizada en N_e elementos cuadráticos triangulares y/o cuadriláteros (Γ_j) y N nodos. Cada elemento j está definido por N_n^j nodos

Sobre cada elemento j , los desplazamientos $\mathbf{U}$ y las tensiones $\mathbf{T}$ serán aproximados en términos de sus valores nodales como

$$\mathbf{U}(\xi) = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \cdots \quad \phi_N] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_N \end{Bmatrix}^j = \Phi(\xi) \mathbf{U}^j \quad (2.156)$$

$$\mathbf{T}(\xi) = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \cdots \quad \phi_N] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_N \end{Bmatrix}^j = \Phi(\xi) \mathbf{T}^j \quad (2.157)$$

donde N es el número de nodos del elemento y depende de la geometría del mismo; $\mathbf{U}^j$ y $\mathbf{T}^j$ son vectores de dimensión $3N_n^j \times 1$ que contienen los desplazamientos y tensiones nodales, respectivamente, del elemento j , y $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ son las funciones de interpolación, expresadas en términos de

coordenadas homogéneas definidas sobre cada familia de elementos. Cabe destacar que $\phi_k = 1$ en el nodo de estudio k y $\phi_k = 0$ en el resto de nodos.

La geometría del elemento se puede definir desde la posición de los nodos utilizando el mismo tipo de función de interpolación. Por tanto, cada coordenada puede ser expresada para las tres coordenadas cartesianas

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_N & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_N & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ \vdots \\ x_1^N \\ x_2^N \\ x_3^N \end{Bmatrix}^j = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{x}^j \quad (2.158)$$

siendo $\mathbf{x}^j$ un vector de dimensiones $3N_n^j \times 1$ que contiene las coordenadas de los nodos del elemento j .

Tras la discretización y sustituyendo en la ecuación integral (2.150) las funciones obtenidas, se obtiene la siguiente ecuación para un punto nodal:

$$\mathbf{c}^{k'} \mathbf{u}^{k'} + \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T}^* \mathbf{\Phi} d\Gamma_j \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{\Phi} d\Gamma_j \right\} \mathbf{T}^j \quad (2.159)$$

La ecuación (2.159) constituye un conjunto de tres ecuaciones algebraicas que dependen de los desplazamientos en el punto de colocación de la carga y de los desplazamientos y tensiones en todos los nodos del contorno correspondiente, pudiéndose escribir en forma matricial:

$$\mathbf{c}^{k'} \mathbf{u}^{k'} + \sum_{m=1}^{N_n} \hat{\mathbf{H}}^{k'm} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^{N_n} \mathbf{G}^{k'm} \mathbf{T}^m \quad (2.160)$$

siendo k' el punto de colocación y donde ahora el sumatorio se ha extendido a todos los puntos de la discretización. Los vectores $\mathbf{u}^m$ y $\mathbf{T}^m$ (3×1) representan las 3 componentes de desplazamiento y tensión del punto genérico m . Las matrices $\hat{\mathbf{H}}^{k'm}$ y $\mathbf{G}^{k'm}$, de dimensiones 3×3 expresan la respuesta en el punto m a la carga unidad en k' , y se definen como:

$$\hat{\mathbf{H}}^{k'm} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_j} \mathbf{T}^* \phi_{\bar{k}} d\Gamma \quad (2.161)$$

$$\mathbf{G}^{k'm} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \phi_{\bar{k}} d\Gamma \quad (2.162)$$

donde el sumatorio se extiende a todos los elementos a los que el nodo m pertenece, $\phi_{\bar{k}}$ es la función de forma correspondiente al nodo m y $\bar{k}$ representa la numeración local de m dentro del elemento e_m . El punto de colocación k' coincidirá con cierto nodo m de la discretización, por lo que

$$\mathbf{H}^{k'm} = \hat{\mathbf{H}}^{k'm}, \text{ si } k' \neq m \quad (2.163)$$

$$\mathbf{H}^{k'm} = \mathbf{c}^{k'} + \hat{\mathbf{H}}^{k'm}, \text{ si } k' = m \quad (2.164)$$

tomando la ecuación (2.160) la siguiente forma

$$\sum_{m=1}^{N_n} \mathbf{H}^{k'm} \mathbf{U}^m = \sum_{m=1}^{N_n} \mathbf{G}^{k'm} \mathbf{T}^m \quad (2.165)$$

la cual muestra la representación discretizada de la ecuación integral en el contorno. Por tanto, escribiendo la ecuación (2.165) para todos los nodos de la discretización, queda finalmente

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} \quad (2.166)$$

Imponiendo las condiciones de contorno y reordenando las columnas entre $\mathbf{H}$ y $\mathbf{G}$ para pasar las incógnitas (desplazamientos y tensiones) a un solo vector, se llega a un sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

2.5.2. Formulación integral en problemas escalares armónicos

De la misma manera que en el apartado anterior, se comenzará este apartado planteando la relación de reciprocidad para el problema escalar, cuya formulación integral en el medio escalar está basada en la segunda forma del teorema de Green (ecuación (2.167)), el cual establece una relación de reciprocidad entre dos funciones escalares que son continuas y poseen primera derivada continua. Siendo $\phi(\mathbf{x})$ y $\psi(\mathbf{x})$ dos funciones escalares, la expresión del teorema de Green se expresa como [56]:

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) d\Gamma \quad (2.167)$$

En nuestro caso, las funciones escalares son $P = P(\mathbf{x}; \omega)$ y un campo de presiones virtual $P^* = P^*(\mathbf{x}; \omega)$, quedando la ecuación (2.167) de la forma

$$\int_{\Omega} (P^* \nabla^2 P - P \nabla^2 P^*) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} - P \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (2.168)$$

Por otra parte, tal y como se mostró en el apartado 2.2.2, la ecuación (2.41) es la ecuación de onda que gobierna la propagación de ondas en un medio escalar, en fluidos no viscosos, dentro de un rango lineal de pequeñas perturbaciones en el dominio de la frecuencia, pudiéndose escribir como:

$$\nabla^2 P + k^2 P + \frac{1}{c^2} b = 0 \quad (2.169)$$

donde el tercer término está relacionado con la presencia de fuerzas internas en el problema real. De la misma manera, para el campo de presiones virtual P^* , la ecuación (2.169) queda

$$\nabla^2 P^* + k^2 P^* + \frac{1}{c^2} b^* = 0 \quad (2.170)$$

donde, en este caso, el tercer término está relacionado con la presencia de fuerzas internas en el problema virtual.

Por una parte, despejando el valor de $\nabla^2 P^*$ de (2.170) y sustituyéndolo en la ecuación (2.168) se llega a

$$\int_{\Omega} \left(P^* \nabla^2 P - P \left(-k^2 P^* - \frac{1}{c^2} b^* \right) \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} - P \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (2.171)$$

que tras reordenamiento conduce a

$$\int_{\Omega} P^* (\nabla^2 P + P k^2) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} b^* P d\Omega = \int_{\Gamma} \left(P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} - P \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (2.172)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (2.169), la ecuación (2.172) tras ordenarla queda de la forma

$$\int_{\Gamma} P \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} b^* P d\Omega = \int_{\Gamma} P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} b P^* d\Omega \quad (2.173)$$

representando la ecuación (2.173) la relación de reciprocidad en el medio escalar. Si se considera que no existen fuerzas internas de presión en el problema real a resolver, la ecuación (2.173) queda

$$\int_{\Gamma} P \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{1}{c^2} b^* P d\Omega = \int_{\Gamma} P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.174)$$

Se tratará el problema partiendo que el campo de presiones virtual P^* es provocado por una función delta de Dirac aplicada en una región virtual, por lo que la ecuación (2.170) queda:

$$\nabla^2 P^* + k^2 P^* + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k''}) = 0 \quad (2.175)$$

siendo k'' el punto de aplicación de la carga y δ la función delta de Dirac que es singular en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{k''}$ y vale cero en el resto de puntos del dominio, y como se dijo anteriormente, su integral de volumen extendida a todo el dominio igual a la unidad. Como se dijo en el apartado anterior, la función delta de Dirac representa, físicamente, una fuente puntual armónica que pulsa a la misma frecuencia que el problema real, aplicada en un punto de coordenada $\mathbf{x}_{k''}$ (Fig. 2.12). Así, aplicando las propiedades de la función delta de Dirac, la integral de volumen de la ecuación (2.174) queda

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c^2} b^* P d\Omega = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{k''}) P d\Omega = P^{k''} \quad (2.176)$$

por lo que la ecuación (2.174) se convierte en

$$P^{k''} + \int_{\Gamma} P \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma} P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.177)$$

La ecuación (2.177) se empleará en el tratamiento numérico en el medio escalar, necesitando conocer previamente a través de la solución fundamental el valor de la presión del fluido en cualquier punto interno del dominio conocido su valor, así como el de su derivada en el contorno del mismo, o lo que es lo mismo, el flujo de la solución fundamental.

La solución fundamental de la ecuación (2.175) en problemas armónicos tridimensionales, es [49]

$$P^*(k, r) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr} \quad (2.178)$$

donde k representa el número de onda y r es la distancia entre el punto k'' de aplicación de la fuente puntual (punto de colocación) y el punto donde se desea calcular el valor de la variable P^* (punto de observación).

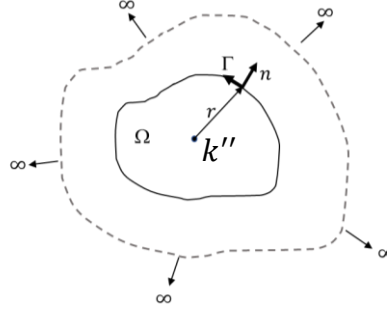


Figura 2.12. Punto k'' interior al dominio en estudio donde se aplicará la fuente de presión. Solución fundamental [52]

El flujo de la solución fundamental se obtiene derivando la ecuación (2.178) respecto a la normal del contorno, por tanto,

$$\frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}}(k, r) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{-ikr} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \quad (2.179)$$

La ecuación (2.177) permite el cálculo de presiones en puntos internos de Ω cuando las presiones y sus derivadas son conocidas en Γ . Por ello, de la misma manera que en el apartado anterior, la ecuación integral será escrita en términos sólo de variables en Γ , lo que implica aplicar la carga unitaria en el contorno. Ahora bien, cuando el punto de aplicación pertenece al contorno, es decir, $k'' \in \Gamma$, requiere una especial atención debido a la singularidad de la solución fundamental cuando $r \rightarrow 0$, siendo r la distancia entre el punto de aplicación k'' y el de estudio. Siguiendo el mismo tratamiento que se efectuó en elastodinámica armónica, para extraer esta singularidad se modifica ligeramente Γ para evitar que $r=0$, sustituyendo el contorno real Γ por otros dos, $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ y Γ_ε , siendo Γ_ε una semiesfera infinitesimal de radio $\varepsilon \rightarrow 0$ con centro en el punto de colocación k'' (Fig. 2.13).

De acuerdo a lo anterior, la ecuación (2.177) queda de la siguiente forma:

$$P^{k''} + \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} P d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} P d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.180)$$

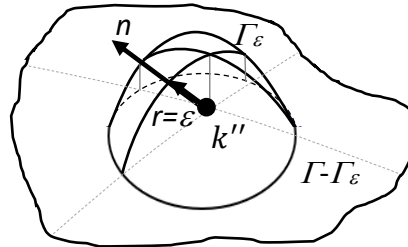


Figura 2.13: Contornos para la integración

Como las integrales extendidas en $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ no contienen la singularidad y se convierten en integrales extendidas al contorno Γ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se llega a:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} P d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} P d\Gamma \quad (2.181)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.182)$$

Como las integrales extendidas sobre Γ_ε se definen en el límite, la segunda integral de la parte izquierda de la ecuación (2.180) queda de la forma

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} P d\Gamma = P^{k''} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.183)$$

por lo que sustituyendo la ecuación de flujo (2.179) en la ecuación (2.183) y considerando, por una parte, que el punto se encuentra localizado en un contorno suave, y por otra, que $\partial r / \partial n = 1$, llegamos a:

$$P^{k''} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{ik}{\varepsilon} \right) e^{-ik\varepsilon} d\Gamma = -\frac{1}{2} P^{k''} \quad (2.184)$$

Por otra parte, la segunda integral de la parte derecha de la ecuación (2.180) es

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right)^{k''} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P^* d\Gamma \quad (2.185)$$

y sustituyendo la solución fundamental (ecuación (2.178)) en la ecuación (2.185)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right)^{k''} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P^* d\Gamma = 0 \quad (2.186)$$

Sustituyendo (2.181), (2.182), (2.184), (2.186) en la ecuación (2.180), llegamos a:

$$P^{k''} + \int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} P d\Gamma - \frac{1}{2} P^{k''} = \int_{\Gamma} P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.187)$$

Haciendo: $c^{k''} = 1 - (1/2) = 1/2$, la ecuación (2.187) queda

$$\frac{1}{2} P^{k''} + \int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} P d\Gamma = \int_{\Gamma} P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.188)$$

Pudiéndose expresarse de forma general como

$$c^{k''} P^{k''} + \int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}} P d\Gamma = \int_{\Gamma} P^* \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.189)$$

La ecuación (2.189) es la representación integral de la presión en puntos del contorno, donde el coeficiente $c^{k''}$ depende de la forma del contorno en el punto k'' bajo consideración, y adquiere el mismo valor que el del apartado anterior ($c^{k'}$).

Es importante resaltar que, en este tipo de medios, se pueden reducir considerablemente el número de grados de libertad considerando que en la superficie libre del agua la presión es nula, por tanto, no es necesaria su discretización. Para ello se parte de la ecuación (2.178), y se resta a la solución fundamental correspondiente a una excitación concentrada en un punto ξ la

correspondiente a otro punto $\bar{\xi}$ simétrico a aquel respecto a la superficie libre. Así, la presión en cualquier punto de la superficie libre se anula ya que al ser $r = \bar{r}$ implica que $P^* = \bar{P}^*$, y, por tanto, $\hat{P}^* = 0$. Esto se puede observar claramente en la figura 2.14, en la que el punto 1, perteneciente a la superficie libre, tiene $\hat{P}^* = 0$ ya que $r = \bar{r}$, mientras que en el punto 2 la $\hat{P}^* \neq 0$ debido a que $r \neq \bar{r}$.

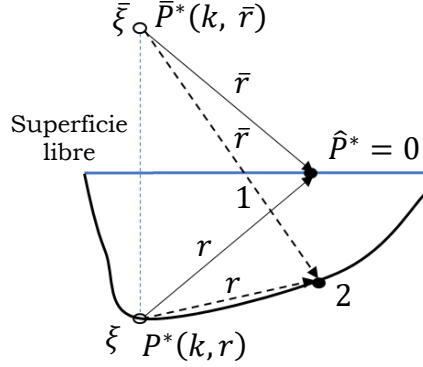


Figura 2.14: Solución fundamental de doble fuente para puntos situados en la superficie libre

La ecuación (2.189) queda expresada en forma matricial para cada punto de la forma

$$\mathcal{C}^{k''} \mathbf{P}^{k''} + \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{P} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{P}^* \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.190)$$

donde $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}^*$ representan las presiones y el campo de presiones virtuales, respectivamente, siendo vectores de dimensiones $3N_n \times 1$. Sus flujos $\partial \mathbf{P} / \partial \mathbf{n}$ y $\partial \mathbf{P}^* / \partial \mathbf{n}$ son también vectores de dimensiones $3N_n \times 1$.

Como se comentó en el apartado anterior, para resolver numéricamente la ecuación integral (2.190) el contorno será discretizado en una serie de elementos sobre los cuales las presiones y sus flujos se escriben en términos de sus valores en una serie de puntos nodales. La ecuación (2.190) será discretizada para cada nodo, y se obtendrá un sistema de ecuaciones algebraico lineal, que se resolverá una vez aplicadas las condiciones de contorno.

Sobre cada elemento j , las presiones $\mathbf{P}$ y sus flujos $\partial \mathbf{P} / \partial \mathbf{n}$ serán aproximados en términos de sus valores nodales mediante un conjunto de funciones polinómicas de interpolación Φ . Las presiones $\mathbf{P}$ y sus flujos $\partial \mathbf{P} / \partial \mathbf{n}$ dentro del elemento se aproximan por

$$\mathbf{P} = \Phi \mathbf{P}^j \quad (2.191)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{n}} = \Phi \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_j \quad (2.192)$$

donde $\mathbf{P}^j$ y $\partial \mathbf{P} / \partial \mathbf{n} \Big|_j$ son vectores de dimensión $3N_n^j \times 1$ que contienen los valores nodales de la presión y su derivada, respectivamente, del elemento, mientras que $\Phi(\xi)$ es una matriz de dimensiones $3 \times 3N_n^j$ de la forma

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \phi_{N_n^j}] \quad (2.193)$$

y como se comentó en el apartado anterior, las funciones de forma de estos elementos pueden verse en Domínguez [49].

Tras la discretización y sustituyendo en la ecuación integral (2.190) las funciones obtenidas, se obtiene la siguiente ecuación para un punto nodal

$$\mathbf{C}^{k''} \mathbf{P}^{k''} + \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \mathbf{n}} \Phi d\Gamma_j \right\} \mathbf{P}^j = \sum_{j=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}^* \Phi d\Gamma_j \right\} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_j^j \quad (2.194)$$

siendo N_e el número de elementos y j un elemento genérico. Integrando la ecuación (2.194) se llega a

$$\mathbf{C}^{k''} \mathbf{P}^{k''} + \sum_{m=1}^{N_n} \hat{\mathbf{H}}^{k''m} \mathbf{P}^m = \sum_{m=1}^{N_n} \mathbf{G}^{k''m} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_m^m \quad (2.195)$$

siendo k'' el punto de colocación y donde ahora el sumatorio se ha extendido a todos los puntos de la discretización (N_n). Las matrices de influencia quedan de la forma

$$\hat{\mathbf{H}}^{k''m} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \mathbf{n}} \phi_{\bar{k}} d\Gamma \quad (2.196)$$

$$\mathbf{G}^{k''m} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}^* \phi_{\bar{k}} d\Gamma \quad (2.197)$$

donde el sumatorio se extiende a todos los elementos (e_m) a los que el nodo m pertenece, $\phi_{\bar{k}}$ es la función de forma correspondiente al nodo m y $\bar{k}$ representa la numeración local de m dentro del elemento e_m . El punto de colocación k'' coincidirá con cierto nodo m de la discretización, por lo que

$$\mathbf{H}^{k''m} = \hat{\mathbf{H}}^{k''m} \quad , \text{ si } i \neq m \quad (2.198)$$

$$\mathbf{H}^{k''m} = \mathbf{C}^{k''} + \hat{\mathbf{H}}^{k''m} \quad , \text{ si } i = m \quad (2.199)$$

tomando la ecuación (2.195) la siguiente forma

$$\sum_{m=1}^{N_n} \mathbf{H}^{k''m} \mathbf{P}^m = \sum_{m=1}^{N_n} \mathbf{G}^{k''m} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_m^m \quad (2.200)$$

que expresa la representación discretizada de la ecuación integral en el contorno. Escribiendo la ecuación (2.200) para todos los nodos de la discretización y expresando el sistema algebraico de ecuaciones resultante de manera matricial, puede escribirse la siguiente expresión:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{G} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{n}} \quad (2.201)$$

A partir de la ecuación (2.59) se puede plantear la relación entre el movimiento y el flujo perpendicular al contorno, siendo esta

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{n}, \omega) = \rho_0 \omega^2 \mathbf{U}(\mathbf{n}, \omega) \quad (2.202)$$

por lo que en cada contorno se conocerá, o la presión o el movimiento normal.

2.5.3. Sistema acoplado. Condiciones de contorno y ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad

En los apartados 2.5.1 y 2.5.2 se presentaron la discretización, mediante el MEC, de las ecuaciones de gobierno, tanto para elastodinámica armónica como para problemas escalares armónicos, respectivamente, planteándose todo ello de manera aislada. En esta sección, se resumirá cómo dichas formulaciones pueden acoplarse para resolver de manera conjunta un problema en el que regiones de distintas naturalezas están presentes en un determinado problema. Es el caso del problema objeto de la presente tesis doctoral, en la que interactúan tres regiones diferentes (estructura, agua y suelo). El sistema lineal de ecuaciones a resolver se construye partiendo de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad entre las diferentes regiones implicadas. Para la obtención de este sistema de ecuaciones se definirán 3 dominios (estructura, agua y suelo) y seis contornos, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ y Γ_6 , de los cuales 3 son interfaces, Γ_2, Γ_3 y Γ_5 , tal y como se observa en la figura 2.15.

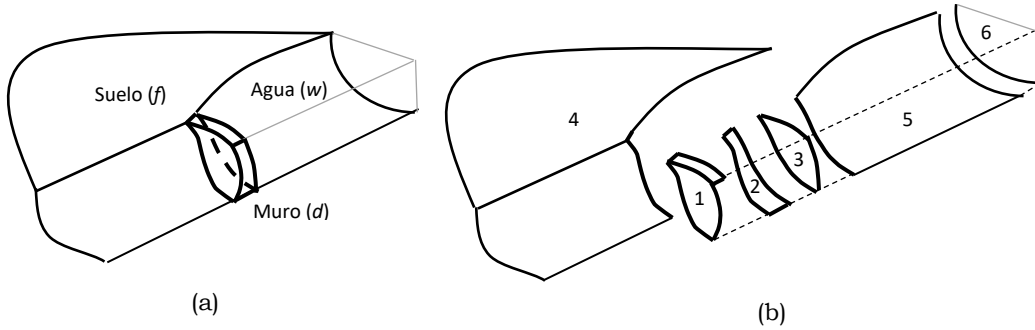


Figura 2.15: (a) Modelo de elementos de contornos para el sistema acoplado muro-agua-suelo. (b) Contornos individuales

Se asume que el modelo de estudio está sometido a una excitación sísmica definida por ondas armónicas planas verticales que inciden en el emplazamiento de la presa desde el infinito produciendo difracción de las ondas incidentes dando lugar a un campo de desplazamiento diferente. En el suelo, el desplazamiento total (u_t^f) y tensiones totales (t_t^f) constan de dos partes, la primera es el campo incidente (u_{ff}^f y t_{ff}^f) que es conocido, y la segunda es el campo difractado (u_d^f y t_d^f) el cual es desconocido. Así, el desplazamiento total y tensiones totales en el suelo pueden ser escritas como $u_t^f = u_{ff}^f + u_d^f$ y $t_t^f = t_{ff}^f + t_d^f$, respectivamente. El desplazamiento y las tensiones incidentes son cero en el muro de la presa y en la región del agua, por lo que solo existen desplazamientos y tensiones difractadas en el muro, así como en la región del agua, siendo el desplazamiento y tensiones totales para el muro: $u_t^d = u_d^d$ y $t_t^d = t_d^d$; y para la región de agua: $U_t^w = U_d^w$ y $p_t^w = p_d^w$. Al ser conocido el campo incidente en el suelo, podemos hacer para este medio en el dominio de la frecuencia $U_d^f = U_t^f - U_{ff}^f$ y $T_d^f = T_t^f - T_{ff}^f$ [51], quedando las ecuaciones (2.166), para el muro y suelo, y la ecuación (2.201) para el agua, en forma matricial

$$H^d U_t^d - G^d T_t^d = 0 \quad (2.203)$$

$$H^f U_t^f - G^f T_t^f = H^f U_{ff}^f - G^f T_{ff}^f \quad (2.204)$$

$$H^w P_t^w - G^w \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_t^w = 0 \quad (2.205)$$

Así, particularizando (2.203), (2.204) y (2.205) en las regiones muro (d), suelo (f) y agua (w), respectivamente, y teniendo en cuenta los contornos definidos en la figura 2.15.b, obtenemos

$$\mathbf{H}_1^d \mathbf{U}_1^d + \mathbf{H}_2^d \mathbf{U}_2^d + \mathbf{H}_3^d \mathbf{U}_3^d - \mathbf{G}_1^d \mathbf{T}_1^d - \mathbf{G}_2^d \mathbf{T}_2^d - \mathbf{G}_3^d \mathbf{T}_3^d = \mathbf{0} \quad (2.206)$$

$$\mathbf{H}_2^f \mathbf{U}_2^f + \mathbf{H}_4^f \mathbf{U}_4^f + \mathbf{H}_5^f \mathbf{U}_5^f - \mathbf{G}_2^f \mathbf{T}_2^f - \mathbf{G}_4^f \mathbf{T}_4^f - \mathbf{G}_5^f \mathbf{T}_5^f = \mathbf{H}^f \mathbf{U}_{ff}^f - \mathbf{G}^f \mathbf{T}_{ff}^f \quad (2.207)$$

$$\mathbf{H}_3^w \mathbf{P}_3^w + \mathbf{H}_5^w \mathbf{P}_5^w + \mathbf{H}_6^w \mathbf{P}_6^w - \mathbf{G}_3^w \frac{\partial \mathbf{P}_3^w}{\partial \mathbf{n}_3^w} - \mathbf{G}_5^w \frac{\partial \mathbf{P}_5^w}{\partial \mathbf{n}_5^w} - \mathbf{G}_6^w \frac{\partial \mathbf{P}_6^w}{\partial \mathbf{n}_6^w} = \mathbf{0} \quad (2.208)$$

Las ecuaciones (2.206), (2.207) y (2.208) forman un sistema acoplado de ecuaciones que representa el comportamiento dinámico del sistema muro-agua-suelo con tres tipos de interfaces: muro-agua, muro-suelo y agua-suelo. Para hacer resoluble el sistema de ecuaciones aplicamos, por una parte, las condiciones de contorno conocidas y, por otra parte, las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad que relacionan las variables dinámicas y cinemáticas entre interfaces que pertenecen a dos regiones diferentes.

La tabla 2.1 muestra las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad según el tipo de interfase, donde los superíndices S y A hacen referencia a regiones de tipo sólido viscoelástica y potencial, respectivamente, y los superíndices 1 y 2 a las variables asociadas a las dos regiones acopladas a través de un contorno dado, cuando estas regiones son de la misma naturaleza.

Tipo de interfase	Ecuaciones de equilibrio	Ecuaciones de compatibilidad
Sólido viscoelástico - sólido viscoelástico	$\mathbf{T}^{S1} + \mathbf{T}^{S2} = \mathbf{0}$	$\mathbf{U}^{S1} = \mathbf{U}^{S2}$
Sólido viscoelástico - agua	$\mathbf{T}^S - P^A \mathbf{n}^A = \mathbf{0}$	$\mathbf{U}^S \mathbf{n}^S + U^A = 0$

Tabla 2.1: Ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad.

Por otro lado, la tabla 2.2 muestra las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad particularizadas a cada uno de los tres tipos de interfases del modelo según lo indicado en la figura 2.15.a, siendo $\mathbf{n}_3^d$ y $\mathbf{n}_5^f$ los vectores unitarios normales a las interfaces muro y suelo (Γ_2), respectivamente, y $\mathbf{n}_3^w$ y $\mathbf{n}_5^w$ los vectores unitarios normales a los interfaces de agua (Γ_3 y Γ_5 , respectivamente).

INTERFASE		Ecuaciones de equilibrio	Ecuaciones de compatibilidad
muro (d) - suelo (f)	2	$\mathbf{T}_2^d = -\mathbf{T}_2^f$	$\mathbf{U}_2^d = \mathbf{U}_2^f$
muro (d) - agua (w)	3	$\mathbf{T}_3^d - P_3^w \mathbf{n}_3^w = \mathbf{0}$	$\mathbf{U}_3^d \mathbf{n}_3^d + U_3^w = 0$
		Como: $\mathbf{n}_3^w = -\mathbf{n}_3^d$; $\mathbf{T}_3^d = -P_3^w \mathbf{n}_3^d$	$\frac{\partial P_3^w}{\partial \mathbf{n}_3^w} = -\rho_0 \omega^2 \mathbf{U}_3^d \mathbf{n}_3^d$
suelo (f) - agua (w)	5	$\mathbf{T}_5^f - P_5^w \mathbf{n}_5^w = \mathbf{0}$	$\mathbf{U}_5^f \mathbf{n}_5^f + U_5^w = 0$
		Como: $\mathbf{n}_5^w = -\mathbf{n}_5^f$; $\mathbf{T}_5^f = -P_5^w \mathbf{n}_5^f$	$\frac{\partial P_5^w}{\partial \mathbf{n}_5^w} = -\rho_0 \omega^2 \mathbf{U}_5^f \mathbf{n}_5^f$

Tabla 2.2: Ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad aplicadas a los tres tipos de interfases del modelo según lo indicado en la figura 2.15.a.

Teniendo en cuenta las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en las interfaces del modelo recogidas en la tabla 2.2, y, por otra parte, que las tensiones en las superficies libres del muro (Γ_1) y suelo (Γ_4) son nulas ($T_1^d = T_4^f = 0$), se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$H_1^d U_1^d + H_2^d U_2^d + H_3^d U_3^d + G_2^d T_2^f + G_3^d P_3^w n_3^d = 0 \quad (2.209)$$

$$H_2^f U_2^f + H_4^f U_4^f + H_5^f U_5^f - G_2^f T_2^f + G_5^f P_3^w n_5^f = H^f U_{ff}^f - G^f T_{ff}^f \quad (2.210)$$

$$H_3^w P_3^w + H_5^w P_5^w + \rho_0 \omega^2 G_3^w U_3^d n_3^d + \rho_0 \omega^2 G_5^w U_5^s n_5^s + (H_6^w + G_6^w K^*) P_6^w = 0 \quad (2.211)$$

donde K^* puede tomar los valores de K'_{1D} (ecuación (2.74)), K'_{2D} (ecuación (2.90)) y/o K'_{3D} (ecuación (2.112)), dependiendo de la condición de radiación aplicada en el contorno de truncamiento.

Las ecuaciones (2.209), (2.210) y (2.211) forman un sistema lineal de ecuaciones del tipo

$$A \cdot x = B \quad (2.212)$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} H_1^d & H_2^d & H_3^d & G_2^d & 0 & 0 & G_3^d n_3^d & 0 & 0 \\ 0 & H_2^f & 0 & -G_2^f & H_4^f & H_5^f & 0 & G_5^f n_5^f & 0 \\ 0 & 0 & \rho_w \omega^2 G_3^w n_3^d & 0 & 0 & \rho_w \omega^2 G_5^w n_5^f & H_3^w & H_5^w & H_6^w + G_6^w K^* \end{pmatrix} \quad (2.213)$$

$$x^T = (U_1^d \quad U_2^f \quad U_3^d \quad T_2^f \quad U_4^f \quad U_5^f \quad P_3^w \quad P_5^w \quad P_6^w) \quad (2.214)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ H^f U_{ff}^f - G^f T_{ff}^f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.215)$$

En la ecuación (2.212), x es la incógnita, e incluye los desplazamientos, tensiones, así como las presiones en todos los nodos de todos los contornos e interfaces del problema para cada frecuencia ω .

2.6. Aplicación a un problema de referencia

El objetivo de este apartado es estudiar la aplicabilidad de las condiciones de radiación de Sommerfeld y de Humar y Roufaiel al problema particular de estudio en esta tesis, siendo ambas condiciones comparadas con la llamada solución rigurosa semi-analítica. Estas tres condiciones de radiación serán aplicadas a un modelo simplificado suelo-estructura-agua, donde la estructura es una pared plana, con la misma altura que la del muro de la presa de Soria (120 m), de longitud 80 m y espesor de 10 m, embebida en un cañón de sección rectangular, tal y como se muestra en la figura 2.16. Se ha tomado la distancia de la estructura al contorno de truncamiento (L) igual a 2 veces la altura del muro ($L=240$ m). Las propiedades de la pared, suelo y agua están definidas en la tabla 2.3. La respuesta dinámica de la pared se ha estudiado con el embalse vacío frente a seis niveles de agua diferentes en el mismo ($H = 30, 50, 76, 100, 110$ y 120 m). Las propiedades mecánicas del hormigón de la pared son las mismas que las que se emplearán para el hormigón del muro de la presa de Soria, siendo tomadas estas propiedades de un estudio específico llevado a cabo en el muro de la presa [58]. Las propiedades del suelo corresponden a las propiedades

genéricas de la ignimbrita, que es el tipo de roca predominante que hay en la zona de la presa de Soria [59].

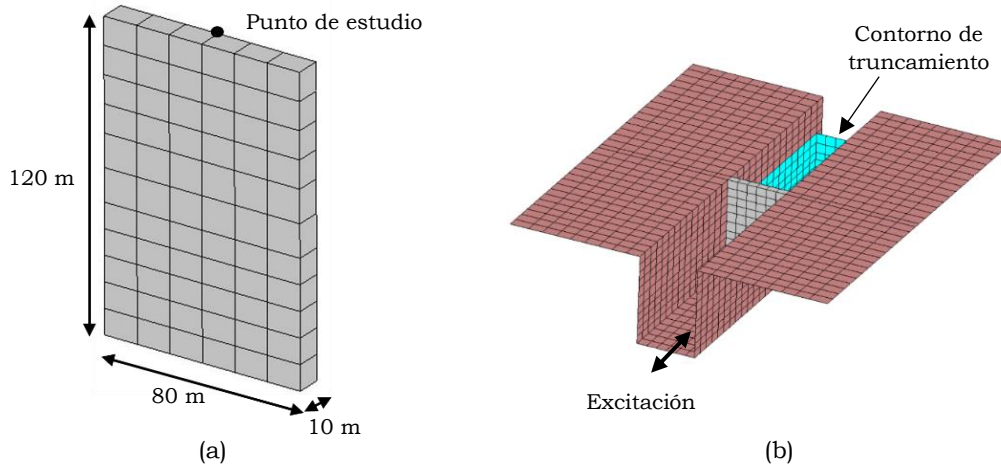


Figura 2.16: (a) Geometría y dimensiones de la pared plana de estudio. (b) Pared plana embebida en un cañón de sección rectangular con una cota de agua de 76 m

Propiedades	Hormigón del muro de la presa	Roca	Agua
Módulo de elasticidad transversal, G (MPa)	8167	12083	
Densidad, ρ (kg/m ³)	2300	2143	
Coefficiente de Poisson, ν	0.2	0.2	
Coefficiente de amortiguamiento, ξ	0.01	0.01	
Velocidad de las ondas de presión (m/s)			1438

Tabla 2.3: Propiedades mecánicas para el hormigón y para la roca.

Los seis espectros de la figura 2.17 muestran las funciones de respuesta en frecuencia obtenidas en un punto situado en el plano de simetría de la coronación de la pared (Fig. 2.16 (a)), para seis profundidades de agua en el cañón ($H = 30, 50, 76, 100, 110$ y 120 m) aplicando las tres condiciones de radiación vistas en el apartado 2.4, junto al caso de cañón vacío. En este modelo de pared en base flexible, el sistema está sometido a ondas sísmicas armónicas planas SH propagándose verticalmente y produciendo desplazamientos horizontales de campo libre en la dirección del eje del cañón. Para este caso de estudio, donde el cañón es de sección rectangular, las frecuencias fundamentales del cañón pueden ser calculadas analíticamente mediante la expresión, $\tilde{f}_{ar} = c/4H$; siendo $\tilde{f}_{ar}$ la frecuencia fundamental en Hz; c , la velocidad de propagación de las ondas en el agua, 1438 m/s; y H , la altura de la cota de agua en metros. En la tabla 2.4 se muestra el valor de estas frecuencias para cada una de las seis alturas de agua (H) de estudio; se han marcado estas frecuencias como $\tilde{f}_{ar}$ en los espectros de la figura 2.17, donde se observa que esta frecuencia es claramente obtenida cuando se aplica en el contorno de truncamiento la condición de Humar y Roufaiel o la solución rigurosa semi-analítica.

	$H = 30$ m	$H = 50$ m	$H = 76$ m	$H = 100$ m	$H = 110$ m	$H = 120$ m
Frecuencia ($\tilde{f}_{ar}$)	11.98 Hz	7.19 Hz	4.73 Hz	3.59 Hz	3.26 Hz	2.99 Hz

Tabla 2.4: Frecuencias fundamentales analíticas (cañón con sección rectangular) según la cota de agua.

Analizando los espectros de la figura 2.17, se observa que, para una cota de agua de 30 m, la frecuencia fundamental del muro no se ve alterada, mientras que las frecuencias correspondientes al segundo y tercer modo de vibración experimentan una disminución en frecuencias y un aumento en amplitud respecto al modelo numérico sin agua. A partir de la cota de agua de 50 m, se ve claramente la reducción, tanto en amplitud como en frecuencia, de las frecuencias naturales de la pared a medida que la cota de agua aumenta, excepto para la frecuencia correspondiente al segundo modo de vibración, en la que se observa que mientras el valor numérico de su frecuencia disminuye, va aumentando la amplitud respecto al modelo de pared sin agua hasta la cota de 100 m, a partir de la cual empieza a disminuir su amplitud.

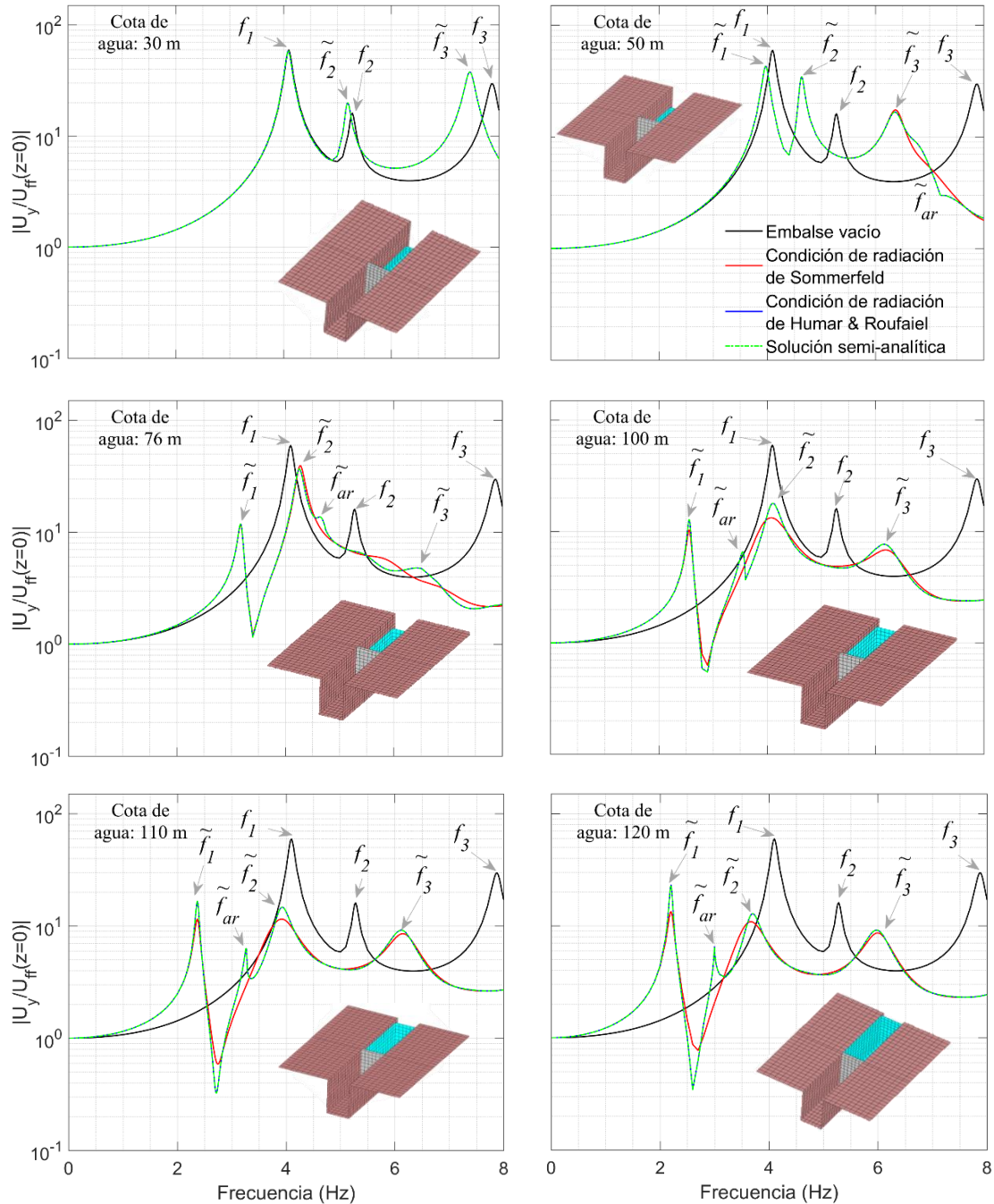


Figura 2.17: Funciones de respuesta en frecuencia en el punto de estudio de la pared plana bajo la aplicación de diferentes condiciones de radiación en el contorno de truncamiento y para diferentes cotas de agua: 30, 50, 76, 100, 110 y 120 m

Por otra parte, analizando las respuestas según las condiciones de contorno aplicadas en el contorno de truncamiento, se observa que, hasta la cota de agua de 50 m, la respuesta de la pared es insensible a la condición de contorno considerada, ya que como se comentó anteriormente, para valores $\omega/c \gg \pi/2H$ la condición de radiación de Sommerfeld converge con la condición de Humar y Roufaiel y con la solución semi-analítica. Ahora bien, para las cotas de agua de 76, 100, 110 y 120 m, se observa que la condición de Sommerfeld proporciona una respuesta levemente sobreamortiguada para algunos rangos de frecuencias, destacando esta sobreamortiguación para $H = 100, 110$ y 120 m para la primera y segunda frecuencia natural, donde se observa que, a partir de la cota de 100 m, a medida que aumenta la cota de agua, el amortiguamiento asociado al primer modo va aumentando, mientras el asociado al segundo va disminuyendo.

Un hecho a resaltar es que, para todas las cotas de agua estudiadas, las respuestas del muro obtenidas considerando la condición de radiación de Humar y Roufaiel y la solución semi-analítica se superponen, por lo que, debido a su simplicidad, la condición de Humar y Roufaiel será empleada para el estudio de la respuesta del muro de la presa de Soria en el capítulo 3. También se empleará la condición de Sommerfeld aunque, como se ha observado, presenta una ligera sobreamortiguación respecto a la de Humar y Roufaiel y a la solución rigurosa semi-analítica.

CAPÍTULO 3

ESTUDIO DE LAS CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS DEL MURO DE LA PRESA DE SORIA MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1. Introducción

En el capítulo 2 se presentó una metodología numérica basada en el MEC, la cual se aplicará en este capítulo para construir un modelo numérico específico del muro de la presa de Soria con el objetivo de estudiar distintos aspectos relacionados con su respuesta dinámica. El modelo tiene en cuenta las interacciones suelo-estructura, estructura-agua y suelo-estructura-agua, así como la geometría real del muro de la presa, diferentes modelos del embalse, diferentes cotas de agua en el embalse, la incidencia de las ondas de campo lejano y la radiación de energía hacia el exterior del sistema a través de la roca del suelo y del contorno de cierre utilizado para truncar el embalse, mallando únicamente la zona cercana al muro de la presa, y modelando el resto del embalse como un canal que continúa con geometría constante. Para llevar a cabo este estudio se construyen dos modelos numéricos diferentes del muro, uno de elementos finitos que consta solamente de la geometría del muro, con el que se llevará a cabo un análisis modal en base rígida, y otro de elementos de contorno, que será empleado para el análisis armónico. Posteriormente, se construyen varios modelos tridimensionales de elementos de contorno, incluyendo la geometría del muro y la de la topografía circundante con diferentes aproximaciones, que van desde un cañón recto trapezoidal simplificado hasta un modelo más elaborado que representa la topografía del lugar donde está situada la presa de Soria. Se evalúa la influencia de las interacciones suelo-estructura, estructura-agua y suelo-estructura-agua, de la precisión del modelado geométrico del cañón y del tipo de condición de contorno de radiación en el contorno de truncamiento del embalse. El modelo es probado y actualizado comparándolo con los datos obtenidos de una campaña experimental, encontrando que el modelo numérico completo propuesto es capaz de capturar la respuesta dinámica y puede ser utilizado para monitorizar el estado estructural del muro de la presa.

El capítulo está estructurado de la siguiente manera. En el siguiente apartado se presentan los modelos numéricos que se emplearán en el análisis armónico, así como las propiedades mecánicas de los mismos. A continuación, en el apartado 3.3 se expone el análisis modal llevado a cabo con el Método de los Elementos Finitos (MEF) para validar la malla del muro de la presa que se empleará en el análisis armónico con el Método de los Elementos de Contorno

(MEC). En el apartado 3.4 se analiza de manera detallada la influencia de la interacción suelo-estructura, así como de la geometría del cañón sobre el muro de la presa. A continuación, en el apartado 3.5, se hace un estudio de las condiciones de radiación en el contorno de truncamiento de la presa y se justifica la utilización de la condición de radiación de Humar y Roufaiel, la cual se empleará en el apartado 3.6 para estudiar la influencia de la interacción dinámica suelo-estructura-agua en la respuesta dinámica del muro para distintas cotas de agua en el embalse. Seguidamente, en la sección 3.7 se calibra el modelo numérico partiendo de los datos obtenidos en una campaña experimental, y, por último, se exponen las conclusiones derivadas de este capítulo en el apartado 3.8.

3.2. Definición del problema de estudio

Para el estudio dinámico del muro de la presa se ha desarrollado un modelo geométrico que consta de dos partes: el muro de la presa y el cañón. La geometría del muro de la presa se construyó partiendo de la información proporcionada por un estudio específico realizado en el año 1991 [58], mientras que para el cañón se han construido dos modelos, por una parte, un modelo en el que la geometría del cañón es recta trapezoidal, y, por otra parte, otro modelo en el que la geometría del cañón es aproximada a la topografía real, partiéndose para su construcción de la información topográfica del LIDAR [59]. Tanto el modelo geométrico del muro, como los diferentes modelos geométricos del cañón, se han utilizado para crear las mallas de elementos de contorno empleadas en el análisis numérico armónico llevado a cabo con el código de elementos de contorno en el dominio de la frecuencia descrito en Maeso et al. [9]. La figura 3.1. muestra la malla de elementos de contorno usada para modelar el muro de la presa, mientras que las figuras 3.2, 3.3 y 3.4 muestran la malla del muro junto con las mallas para las diferentes geometrías del terreno que lo rodea, que va, desde un cañón prismático recto con dos longitudes diferentes (Figs. 3.2 y 3.3, extensiones de la superficie libre igual a un radio, r' , de longitudes 2 y 3 veces la altura del muro de la presa; esto es, 240 y 360 m, respectivamente) a un modelo que representa una aproximación a la topografía real del cañón (Fig. 3.4, con una extensión de la superficie libre igual a un radio r' de longitud 2 veces la altura del muro de la presa, es decir, de 240 m).

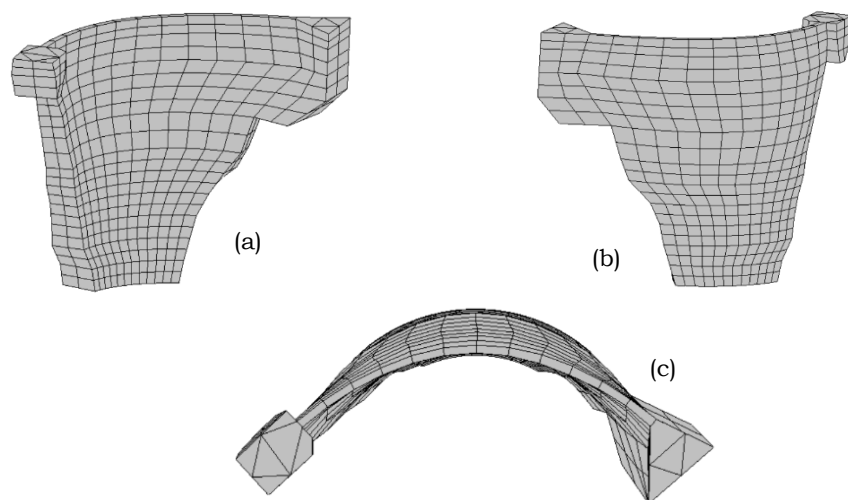


Figura 3.1: Perspectiva de la malla utilizada para el análisis armónico del muro de la presa. (a) Vista aguas abajo, (b) vista aguas arriba, (c) vista aérea

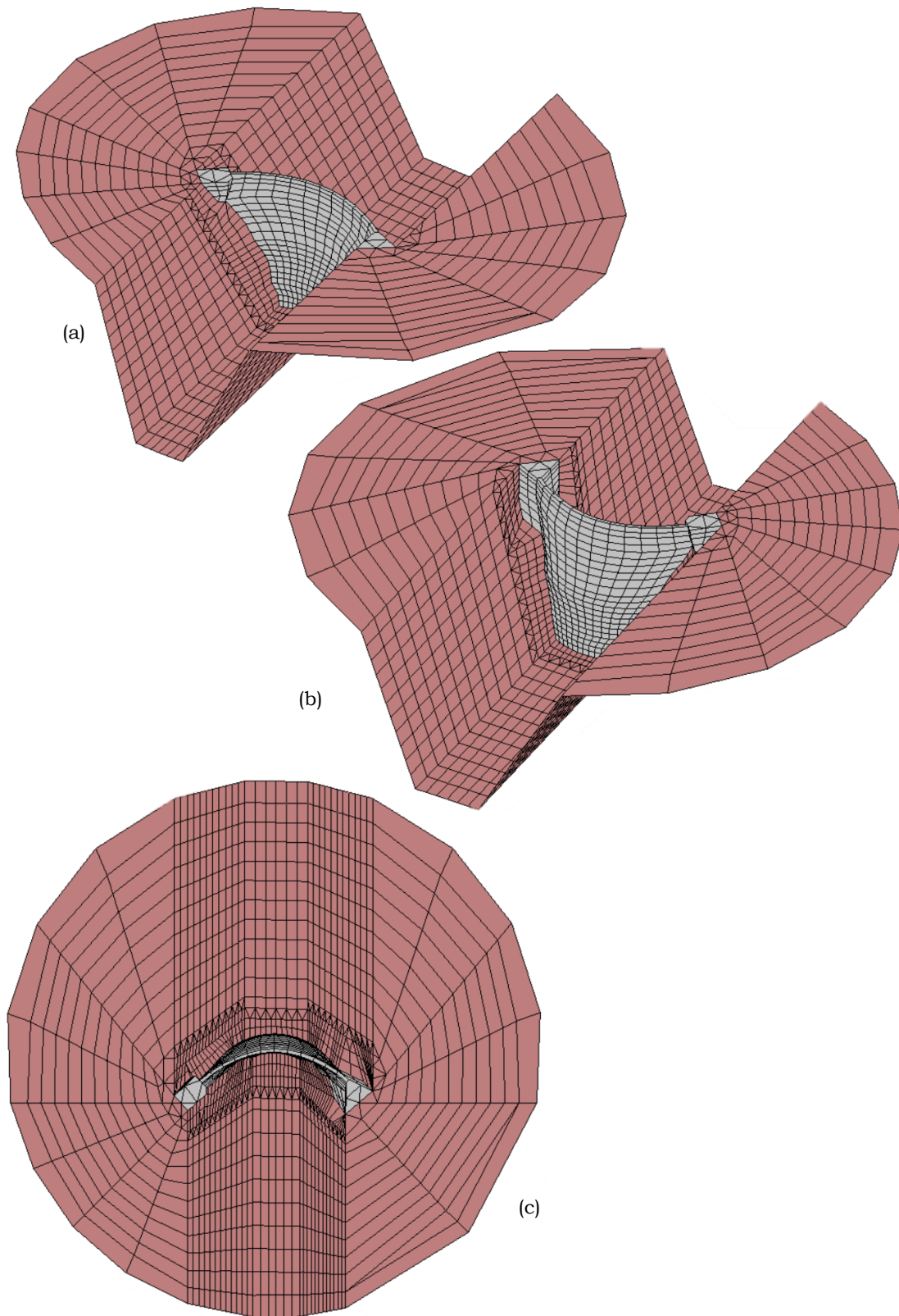


Figura 3.2: Discretización de elementos de contorno. Cañón recto prismático con extensión de discretización del campo libre de $r' = 240$ m. (a) Vista aguas abajo, (b) vista aguas arriba, (c) vista aérea

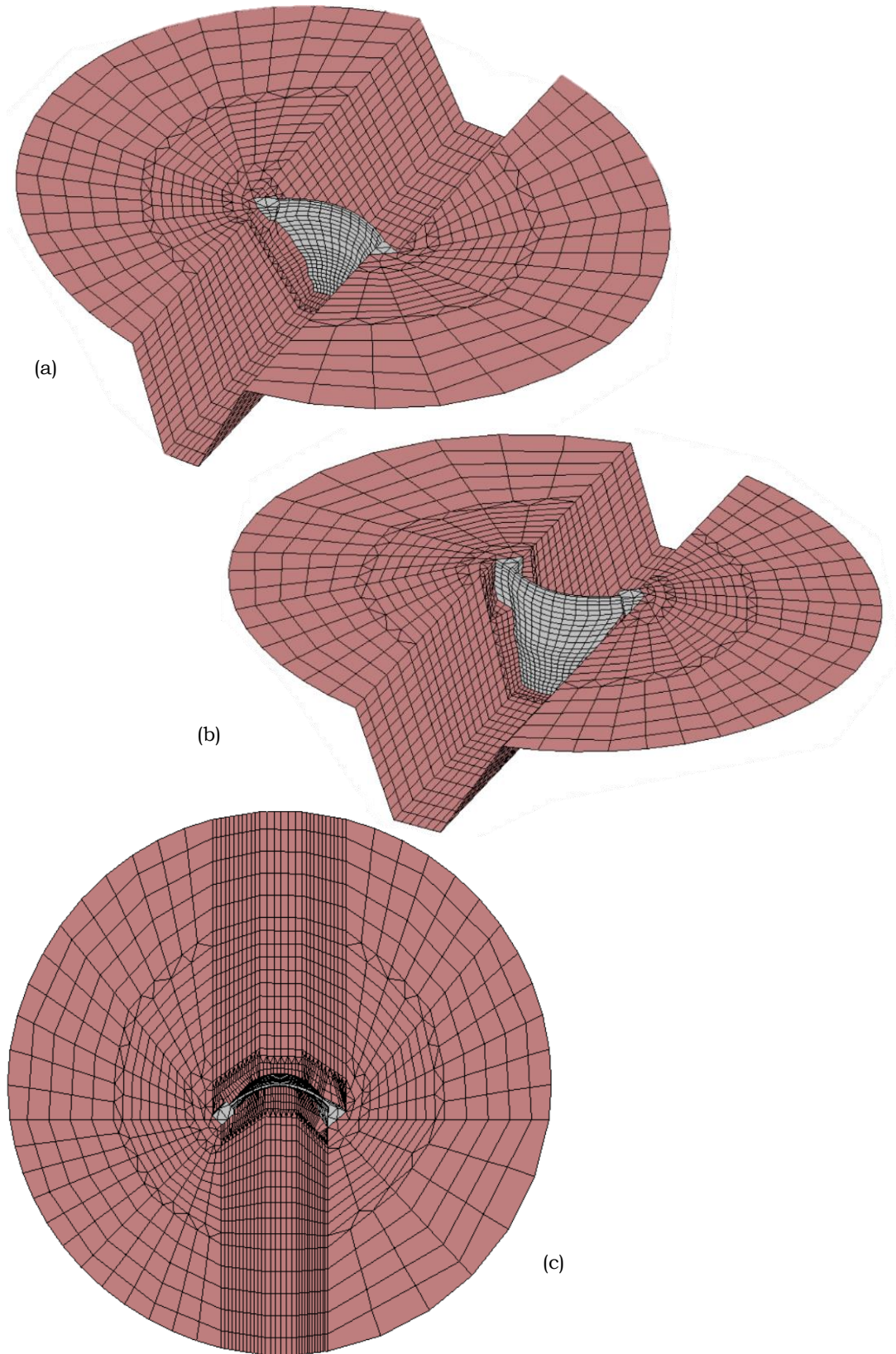


Figura 3.3: Discretización de elementos de contorno. Cañón recto prismático con extensión de discretización del campo libre de $r' = 360$ m. (a) Vista aguas abajo, (b) vista aguas arriba, (c) vista aérea

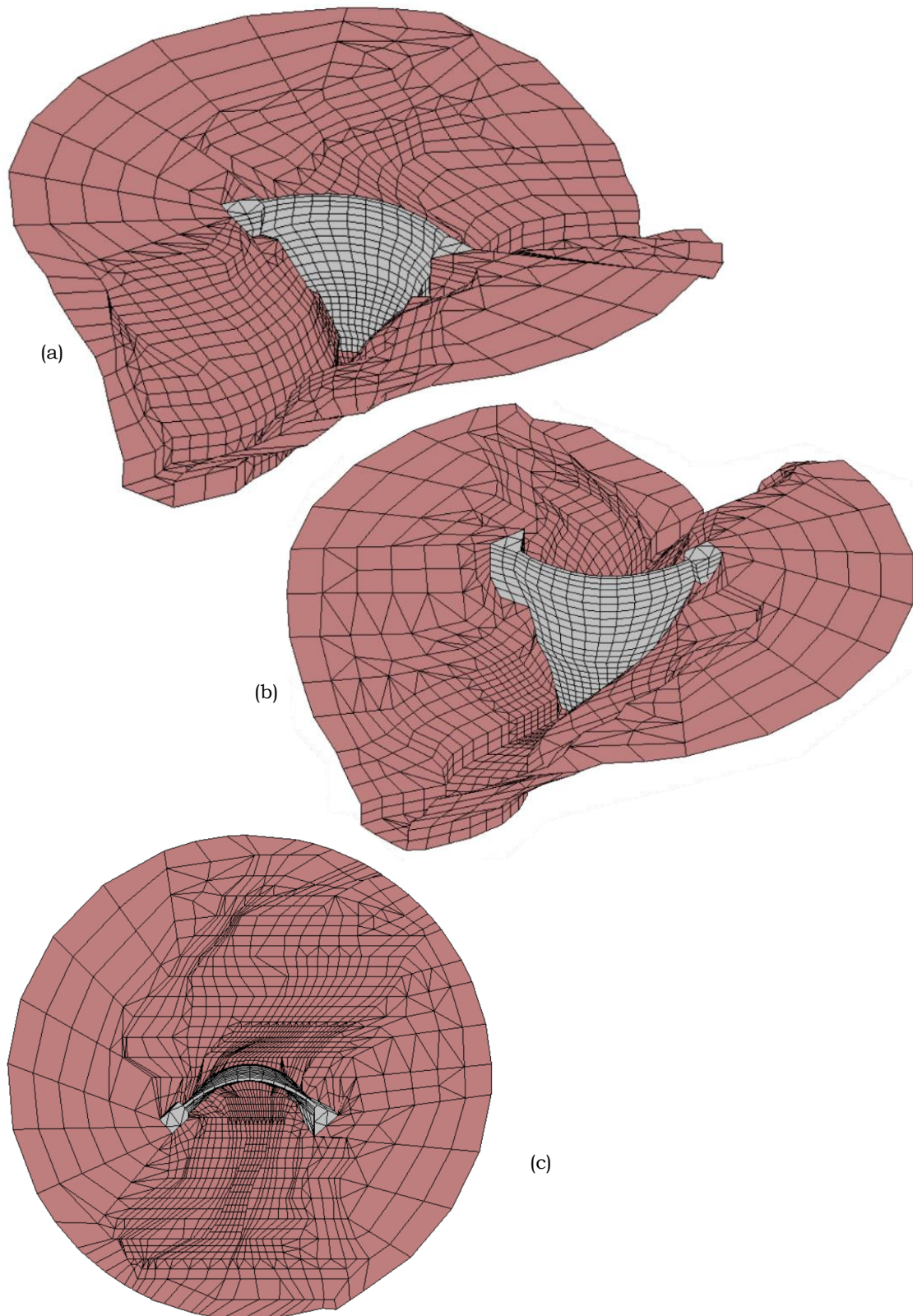


Figura 3.4: Discretización de elementos de contorno. Cañón con geometría aproximada a la real con extensión de discretización del campo libre de $r' = 240$ m. (a) Vista aguas abajo, (b) vista aguas arriba, (c) vista aérea

Para la discretización de los modelos geométricos se han utilizado elementos cuadriláteros cuadráticos de nueve nodos y elementos triangulares de seis nodos con aproximación parabólica [49, 51, 55], mostrándose en la tabla 3.1 el número de nodos y elementos de cada modelo geométrico. El tamaño de los elementos del muro está determinado por la longitud de onda en el muro a la máxima frecuencia de interés, mientras en el suelo, el tamaño de los elementos aumenta a medida que aumenta la distancia respecto al área de estudio. En el caso del suelo, el Método de los Elementos de Contorno permite tener en cuenta intrínsecamente el carácter ilimitado del mismo, sin la necesidad de contornos absorbentes o cualquier otro artefacto matemático, estando la malla del suelo truncada a una distancia tal que el campo de ondas estará suficientemente amortiguado.

Modelos de elementos de contorno	Número de nodos	Número de elementos
Base rígida	3228	733
Base flexible. Cañón recto trapezoidal ($r' = 240$ m)	8168	2023
Base flexible. Cañón topográfico ($r' = 240$ m)	10397	2739
Base flexible. Cañón recto trapezoidal ($r' = 360$ m)	10408	2631

Tabla 3.1: Número de nodos y elementos en los diferentes modelos de elementos de contorno.

Tanto el muro, como el suelo que lo rodea, se han tratado como medios viscoelásticos homogéneos e isotrópos, aplicando en cada uno de ellos las ecuaciones de Navier, mientras que el agua ha sido modelada como un medio acústico, descrito por las ecuaciones de Helmholtz. En la tabla 2.3 del capítulo 2 se muestran las propiedades iniciales consideradas para cada región.

Los puntos de estudio son el punto 1, punto 2 y punto 3, localizados, aproximadamente, a $1/4$, $1/2$ y $3/4$ de la longitud de la coronación de la presa, respectivamente, medidos de estribo izquierdo a derecho (Fig. 3.5). Para analizar las respuestas dinámicas del muro bajo determinadas condiciones, se obtendrán las funciones de respuesta en frecuencia (FRFs) que determinan los desplazamientos de cualquiera de los tres puntos de la coronación en la dirección del cañón, respecto a los desplazamientos sísmicos del campo libre. En el caso de los modelos de muro en base rígida, dichos desplazamientos pueden ser especificados, de manera simplificada, mediante la aplicación de un desplazamiento unitario armónico horizontal en los estribos y en la base del muro de la presa, tanto en la dirección anteroposterior como en la dirección transversal del cañón. Por otro lado, en el caso de los modelos de muro en base flexible, el campo sísmico incidente se considera compuesto por ondas armónicas planas SH que se propagan verticalmente desde el infinito incidiendo en el emplazamiento de la presa, tanto en la dirección anteroposterior como en la dirección transversal del cañón. El planteamiento matemático de dicho campo incidente se muestra en el apartado 2.3.1 del capítulo 2.

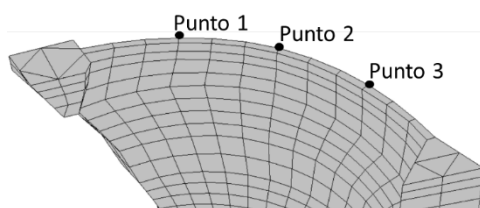


Figura 3.5: Puntos de estudio

3.3. Respuesta del muro de la presa en base rígida. Análisis modal mediante el MEF y análisis armónico mediante el MEC

3.3.1. Análisis modal mediante el MEF

Con el objetivo de validar la malla de elementos de contorno del muro de la presa que se empleará en el análisis armónico, previamente se llevó a cabo un análisis modal. Para ello, se construyó un modelo de elementos finitos 3D, con el fin de obtener las frecuencias naturales y las formas modales del muro de la presa en base rígida para compararlas con las obtenidas mediante el análisis armónico para el mismo caso de muro en base rígida. En este análisis modal, la condición de contorno en los estribos y en la base del muro de la presa fue la de empotramiento perfecto (Fig. 3.6), construyéndose la malla de elementos finitos correspondiente a la geometría del muro de la presa por medio de 4250 elementos tetraédricos y 7805 nodos. Para este análisis se utilizó el software Code_Aster, que se puede considerar como el motor de cálculo para el análisis de elementos finitos [60]. En la figura 3.7 se ilustran diferentes vistas de la malla de elementos finitos del muro de la presa.

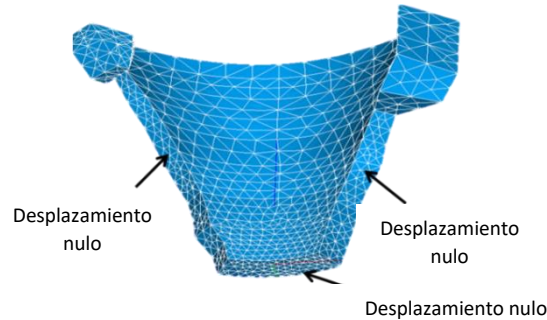


Figura 3.6: Condiciones de contorno impuestas en el análisis modal

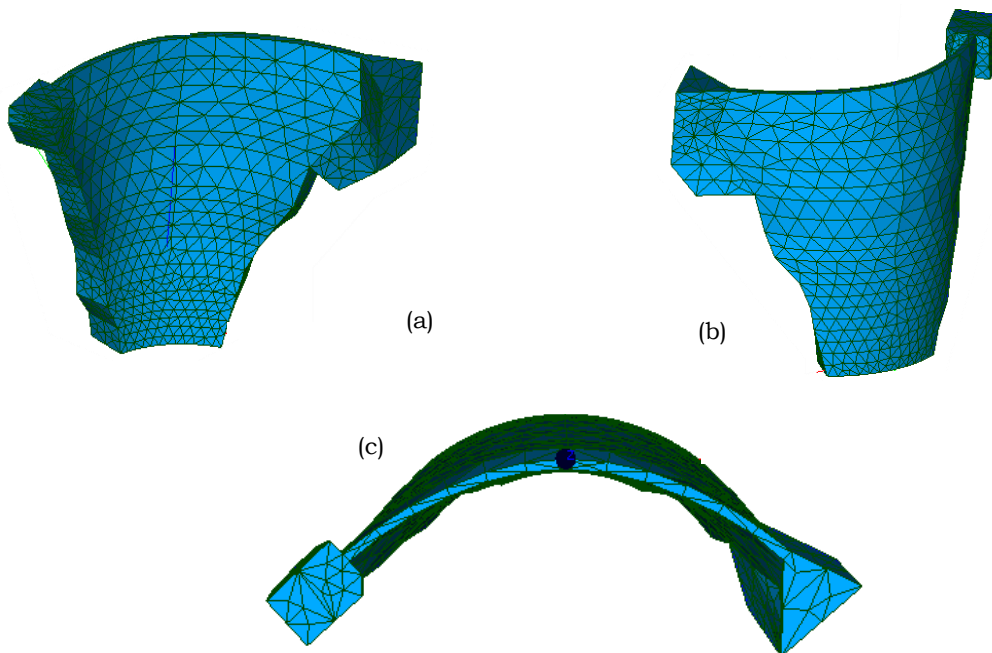


Figura 3.7: Perspectiva de la malla utilizada para el análisis modal del muro de la presa. (a) Vista aguas abajo, (b) vista aguas arriba, (c) vista aérea

3.3.2. Análisis armónico mediante el MEC

Por otra parte, para obtener las frecuencias naturales y las formas modales por medio del análisis armónico se empleó el modelo de muro en base rígida, siendo la excitación para este estudio la aplicación de un desplazamiento unitario armónico horizontal en los estribos y en la base del muro de la presa, en dirección anteroposterior o en dirección transversal (Fig. 3.8).

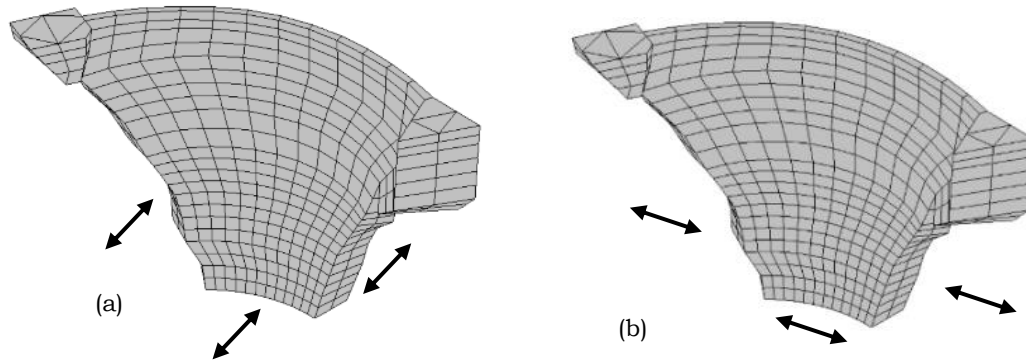


Figura 3.8: Condiciones de contorno impuestas en el análisis armónico. (a) Desplazamiento unitario armónico anteroposterior, (b) desplazamiento unitario armónico transversal

3.3.3. Análisis de resultados

Las cuatro primeras formas modales, así como las frecuencias naturales obtenidas con el análisis modal usando el MEF, junto con las formas modales y frecuencias naturales inferidas en el análisis armónico usando el MEC para el modelo de muro en base rígida, se ilustran en la figura 3.9, observándose una muy buena concordancia en los resultados obtenidos, tanto en formas modales como en frecuencias, lo que contribuye a validar la malla del muro de la presa usada en los modelos de elementos de contorno para los diferentes análisis armónicos. Cabe destacar que las formas modales coinciden con las formas modales generalmente observadas en este tipo de estructuras, como se muestra, por ejemplo, en Haribi-Ardebili et al [25].

Ahora bien, atendiendo a la segunda y cuarta forma modal, se observa que en la coronación del muro estas formas son muy parecidas. Por ello se hace necesario mostrar una vista adicional de los distintos modos de vibración para apreciar la forma modal adoptada a lo largo de todo el muro.

En la figura 3.10 se ilustran cuatro perspectivas correspondientes a las cuatro primeras formas modales, pudiéndose observar que, si bien, la segunda y cuarta forma modal son muy parecidas en la coronación (Fig. 3.9), a lo largo del muro no lo son. Como se puede apreciar en la figura 3.10, la deformada de la segunda forma modal se asemeja al primer modo de vibración de una viga en voladizo, mientras que, para la cuarta forma modal, la deformada se asemeja al segundo modo de vibración para la viga en voladizo.

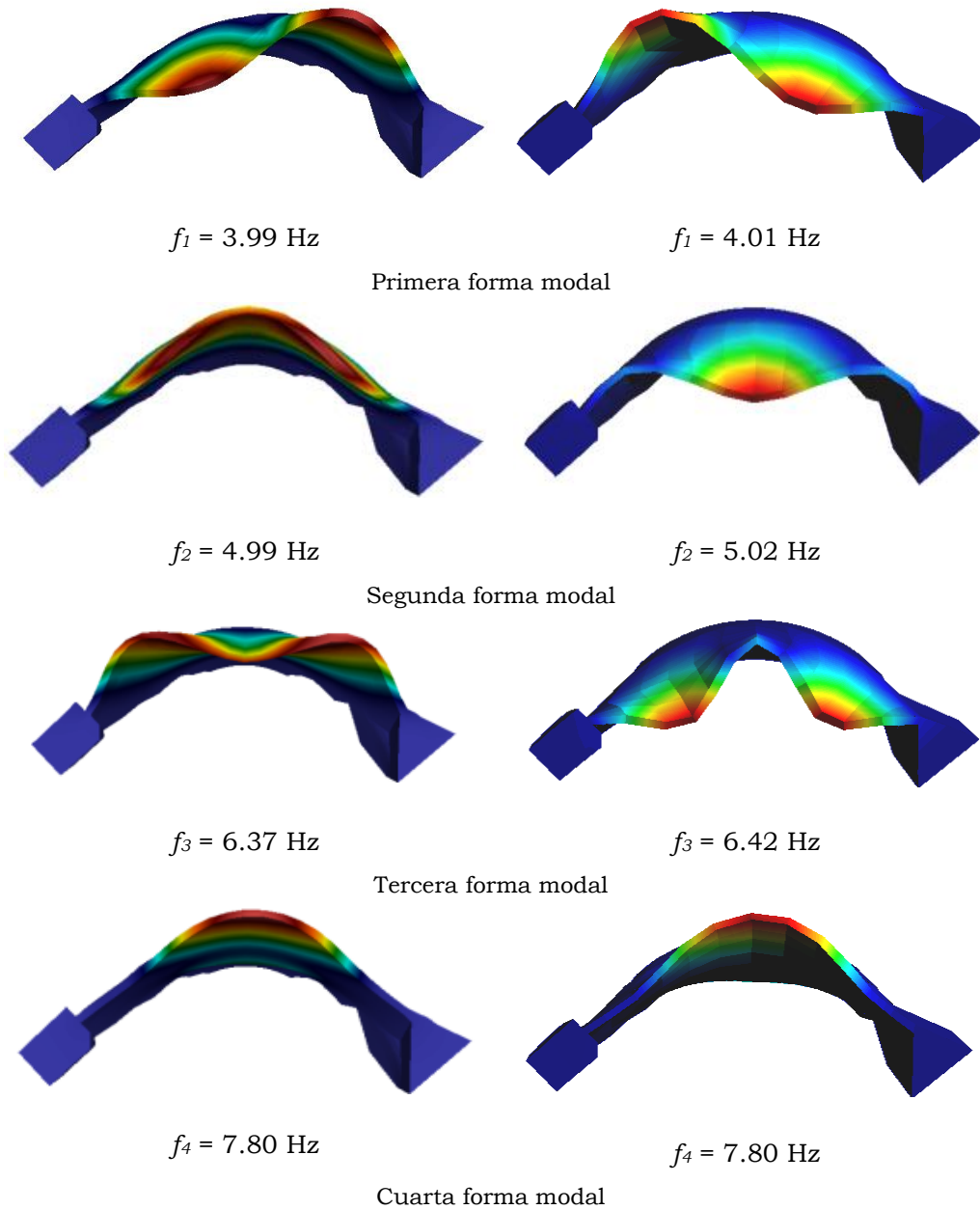


Figura 3.9: Vista en planta de las cuatro primeras formas modales obtenidas a partir del análisis modal mediante el MEF (columna izquierda) y a partir del análisis armónico mediante el MEC (columna derecha)

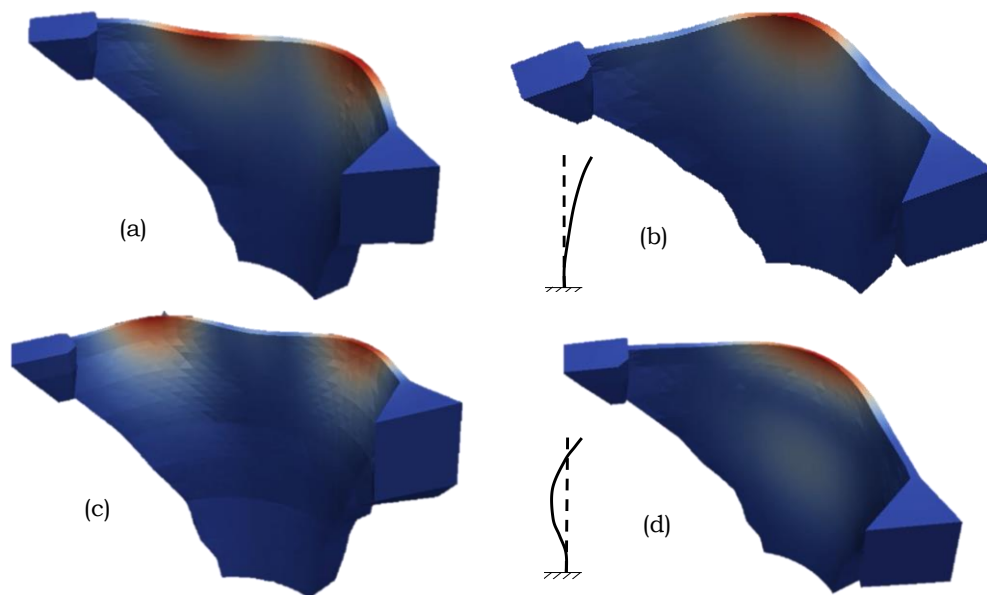


Figura 3.10: Perspectivas del muro con la primera (a), segunda (b), tercera (c) y cuarta (d) formas modales

3.4. Influencia de la interacción dinámica suelo-estructura y de la geometría del cañón sobre la respuesta dinámica de la presa en condiciones de embalse vacío

La figura 3.11 representa las FRFs obtenidas mediante el análisis armónico, en valor absoluto, para el caso de embalse vacío en los tres puntos de estudio, tanto para el modelo de muro en base rígida, como para el modelo de muro en base flexible con los tres tipos de cañones diferentes mostrados en las figuras 3.2, 3.3 y 3.4. En la columna izquierda y derecha de la figura 3.11 se muestran las FRFs para el caso de excitación anteroposterior y excitación transversal, respectivamente, mientras que, en la fila superior, central y baja se muestran las FRFs para los puntos de estudio 1, 2 y 3, respectivamente. Para facilitar la comprensión de estos espectros, se han marcado con líneas continuas (para el modelo de muro en base rígida) y discontinuas (para los modelos de muro en base flexible), los picos máximos de las FRFs, siendo f_1 , f_2 , f_3 y f_4 las frecuencias de las formas modales 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Cabe destacar que los valores numéricos de estas frecuencias f_1 , f_2 , f_3 y f_4 , no son los correspondientes a los picos máximos del valor absoluto de las FRFs, sino de su parte imaginaria, tal y como se verá más adelante.

En la figura 3.11 se observa que la interacción suelo-estructura influye en la respuesta dinámica de los puntos de estudio, obteniéndose que los valores numéricos de las frecuencias de los picos máximos de las FRFs en los modelos de base flexible son más bajos que los del modelo de base rígida, como era de esperar, debido a los efectos de interacción suelo-estructura. Por otra parte, en relación a las amplitudes, se puede observar que, bajo excitación anteroposterior, las amplitudes de las FRFs a las frecuencias correspondientes a formas modales simétricas (f_2 , f_3 y f_4) son más bajas en los modelos de muro en base flexible que en los de muro en base rígida, sucediendo lo mismo para la forma modal antismétrica (f_1) bajo excitación transversal. De acuerdo con las formas modales del muro, se observa que la mayor respuesta para las formas

modales simétricas 2 y 4 se obtiene bajo excitación anteroposterior en el punto 2, situado en el plano de simetría, mientras que para la forma modal simétrica 3, la mayor respuesta se obtiene en los puntos de estudio 1 y 3 bajo la misma excitación anteroposterior; a su vez, la mayor respuesta para la forma modal antisimétrica 1 se obtiene en los puntos 1 y 3 bajo excitación transversal. Como es de esperar, con excitación anteroposterior se excitan principalmente los modos simétricos, mientras que con excitación transversal se excitan los modos antisimétricos.

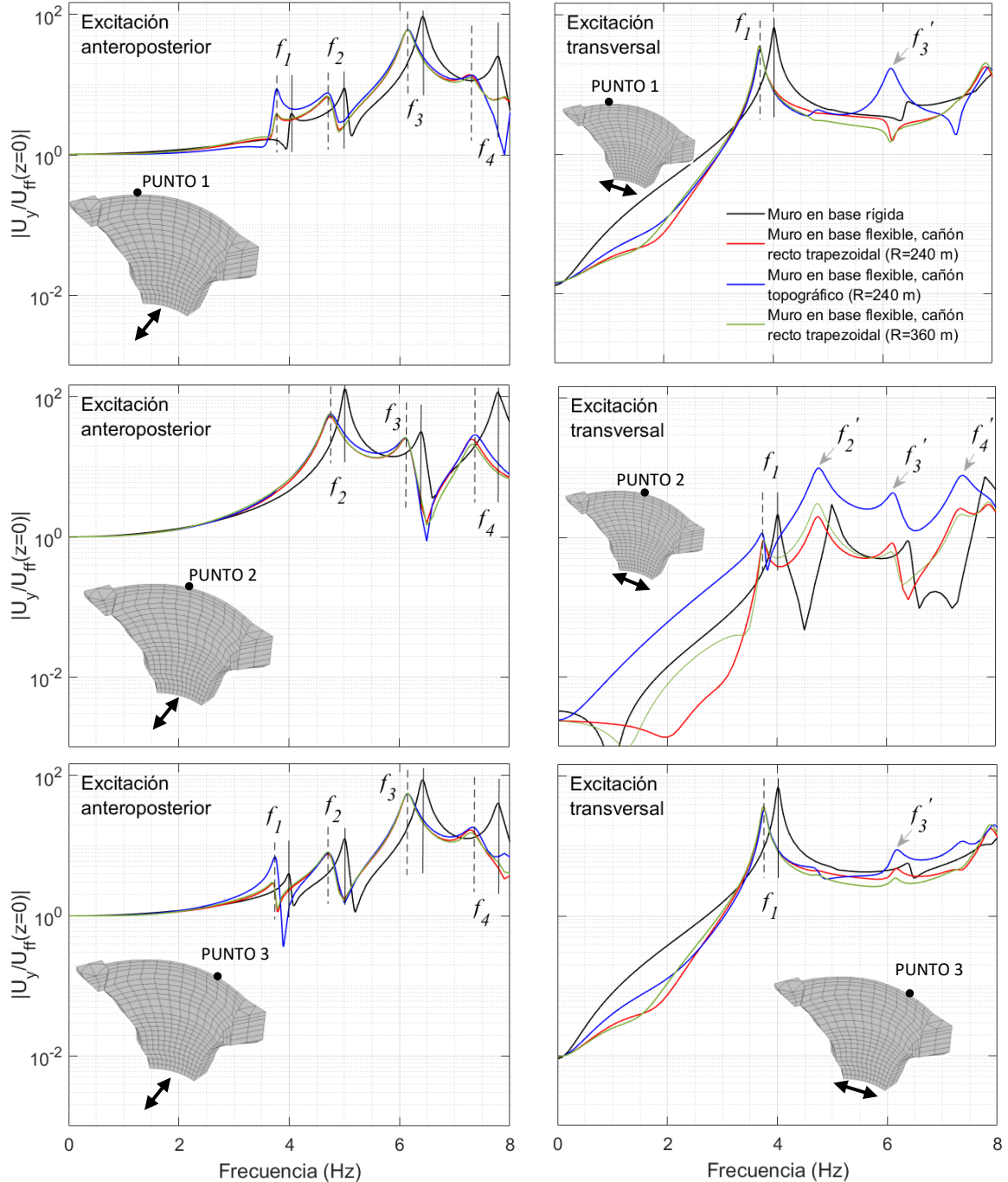


Figura 3.11: FRFs en tres puntos de la coronación del muro de la presa para los modelos de muro en base rígida y en base flexible con diferentes representaciones del cañón. Punto 1 (espectros superiores), punto 2 (espectros intermedios) y punto 3 (espectros inferiores)

Para la obtención de las frecuencias naturales de cada forma modal, se ha separado la componente real y la componente imaginaria de las FRFs de los

puntos de estudio, tanto para excitación anteroposterior (Fig. 3.12) como para excitación transversal (Fig. 3.13). En la parte imaginaria de las FRFs (columna derecha) se han marcado como f_1 , f_2 , f_3 y f_4 las frecuencias correspondientes a la primera, segunda, tercera y cuarta forma modal, respectivamente, dibujándose también sus respectivas formas modales para estas frecuencias. Como es sabido, las frecuencias de cada forma modal se obtienen teniendo en cuenta el tipo de excitación (la excitación anteroposterior excita los modos simétricos, mientras la transversal los antimétricos) y la forma modal. De esta manera, el valor de la frecuencia fundamental que corresponde a la primera forma modal se obtiene de la parte imaginaria de los puntos de estudio 1 y 3 bajo excitación transversal (Fig. 3.13, fila superior e inferior); el de las frecuencias naturales correspondientes a las formas modales simétricas 2 y 4 se obtienen de la parte imaginaria del punto 2 bajo excitación anteroposterior (Fig. 3.12, fila intermedia); y por último, la frecuencia natural de la tercera forma modal, simétrica, se obtiene de la parte imaginaria del punto de estudio 1 o 3 bajo excitación anteroposterior (Fig. 3.12, fila superior o inferior).

Para el caso de excitación transversal (Fig. 3.13, columna derecha), hay que destacar que se observan unos picos para los diferentes modelos de base flexible con cañón recto trapezoidal a frecuencias superiores a la frecuencia fundamental que podrían confundirse con frecuencias naturales del muro, pero cuando se dibujan las formas modales de estas frecuencias se observa que no corresponden a ninguna de las formas modales representadas en la figura 3.9. Por otra parte, en la figura 3.11 y en la columna derecha de la figura 3.13, se han marcado en tres picos las frecuencias f'_2 , f'_3 y f'_4 correspondientes al modelo de muro en base flexible con cañón topográfico. Respecto a sus formas modales, que se muestran en la columna derecha de la figura 3.13, se observa que son parecidas a las del modelo de base flexible con cañón recto trapezoidal bajo excitación anteroposterior (Fig. 3.12, columna derecha) pero con una pequeña asimetría, lo que es debido a la no simetría del cañón topográfico, no presente en los modelos de cañón recto trapezoidal.

En la tabla 3.2 se presentan las cuatro primeras frecuencias naturales obtenidas a partir de las partes imaginarias de cada FRF, mostrándose entre paréntesis la reducción en frecuencia producida en los modelos de base flexible frente al modelo de base rígida. Esta reducción es aproximadamente, en promedio, del 5.50% para la frecuencia fundamental, del 5.00% para la segunda frecuencia natural, del 4.00% para la tercera y del 4.30% para la cuarta frecuencia, con diferencias insignificantes entre los diferentes cañones estudiados.

Modelos de elementos de contorno	Primera forma modal	Segunda forma modal	Tercera forma modal	Cuarta forma modal
Base rígida	4.01 Hz	5.02 Hz	6.42 Hz	7.80 Hz
Base flexible, cañón recto trapezoidal ($r' = 240$ m)	3.79 Hz (-5.48%)	4.77 Hz (-4.98%)	6.16 Hz (-4.05%)	7.46 Hz (-4.35%)
Base flexible, cañón topográfico ($r' = 240$ m)	3.80 Hz (-5.23%)	4.78 Hz (-4.78%)	6.17 Hz (-3.89%)	7.47 Hz (-4.23%)
Base flexible, cañón recto trapezoidal ($r' = 360$ m)	3.78 Hz (-5.73%)	4.76 Hz (-5.18%)	6.16 Hz (-4.05%)	7.46 Hz (-4.35%)

Tabla 3.2: Comparación entre las frecuencias naturales del modelo de presa en rígida y los diferentes modelos de presa en flexible. En paréntesis se muestra la reducción de la frecuencia natural de los modelos en base flexible respecto al modelo de base rígida.

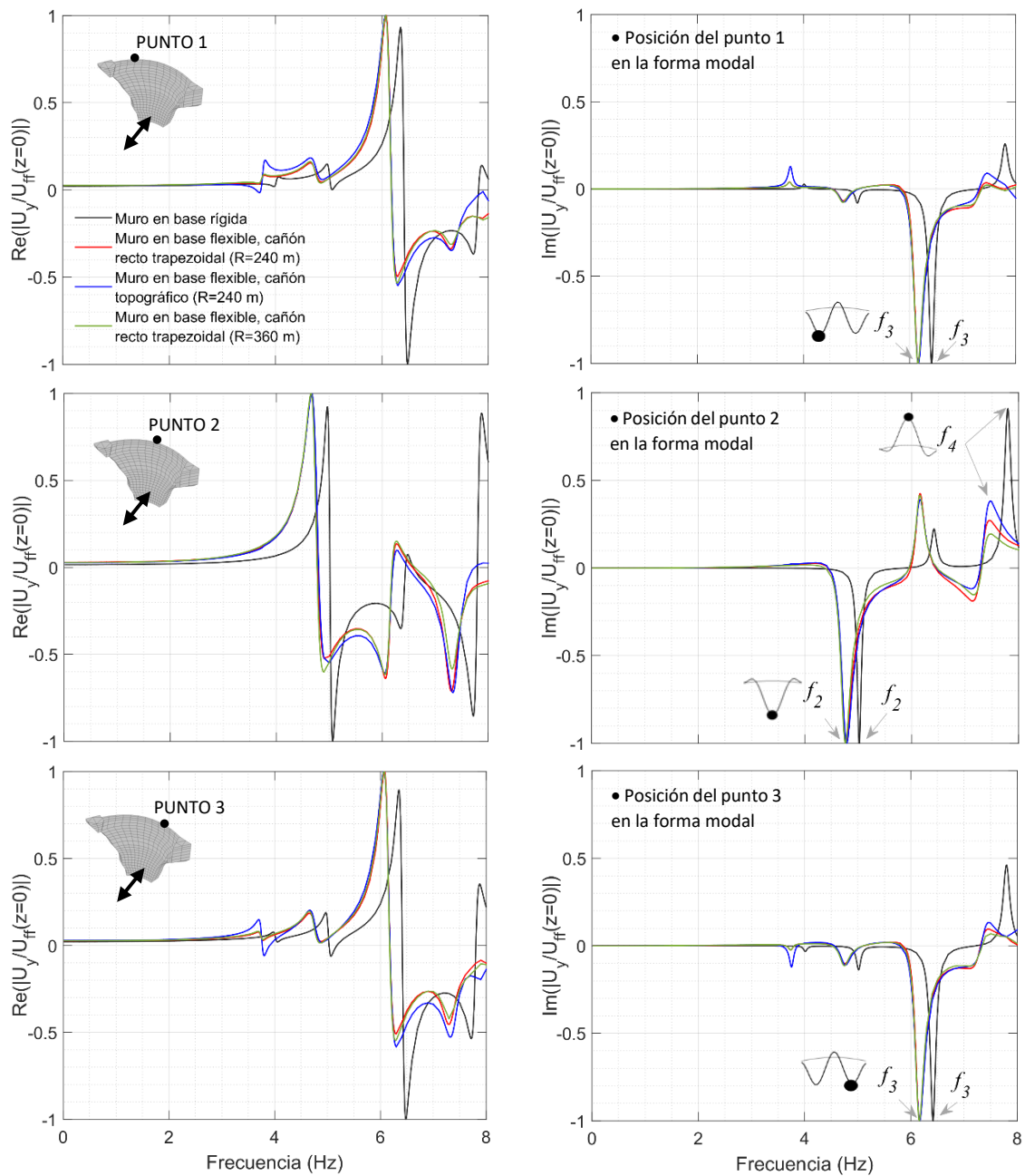


Figura 3.12: Parte real (columna izquierda) y parte imaginaria (columna derecha) de las FRFs del punto 1 (fila superior), punto 2 (fila intermedia) y punto 3 (fila inferior) bajo excitación anteroposterior con diferentes representaciones del cañón

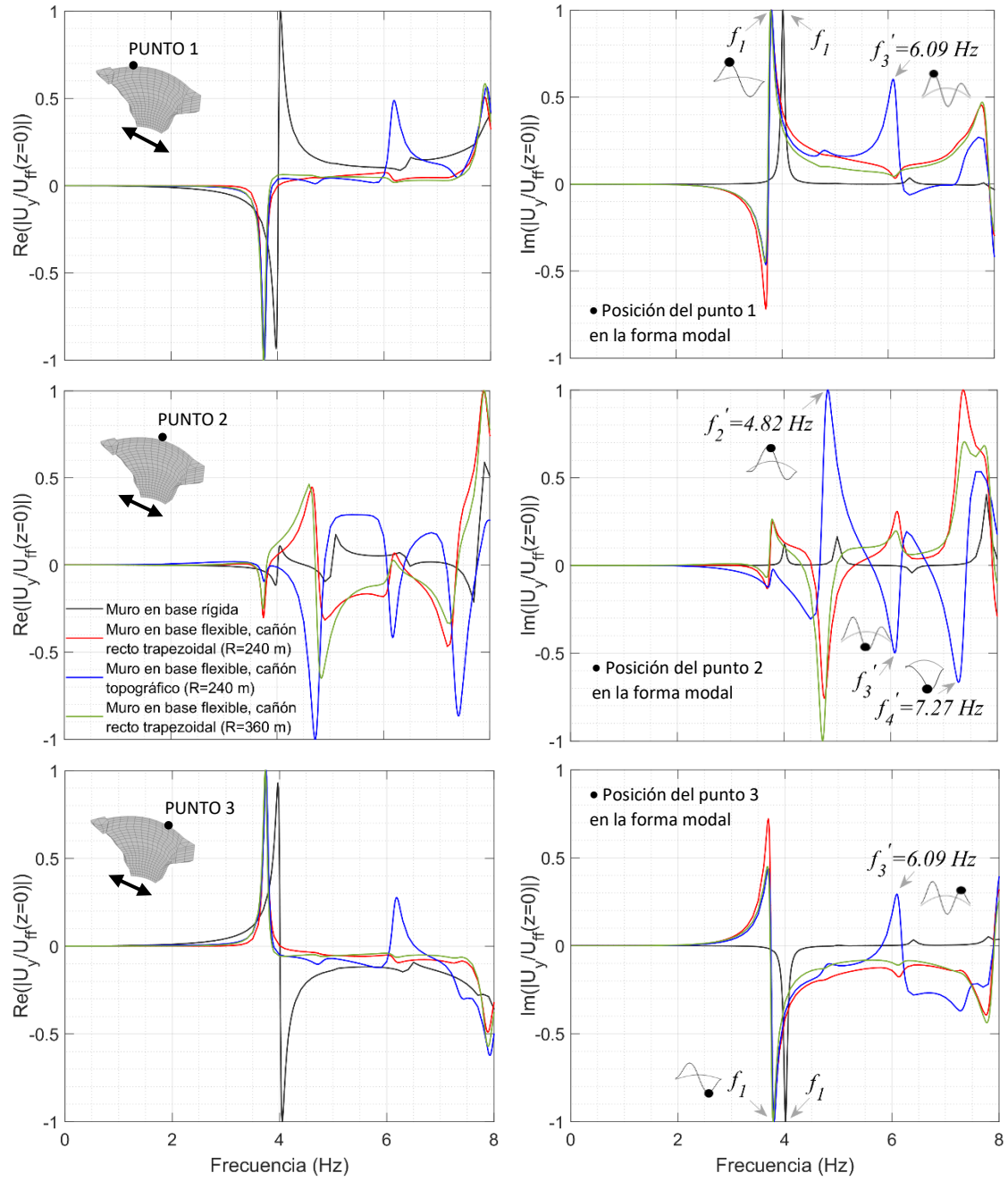


Figura 3.13: Parte real (columna izquierda) y parte imaginaria (columna derecha) de las FRFs del punto 1 (fila superior), punto 2 (fila intermedia) y punto 3 (fila inferior) bajo excitación transversal con diferentes representaciones del cañón

Para comprobar que dos formas modales corresponden al mismo modo de vibración, se empleará el Modal Assurance Criterion (MAC), indicador modal que indica el grado de correlación entre dos formas modales, estando delimitado entre 0 y 1, donde 1 indica una correlación perfecta entre las dos formas modales, es decir, que los vectores son múltiplos entre sí, mientras un valor cercano a 0 indica que no hay correlación entre las dos formas modales. En la práctica, dos vectores se consideran correlacionados cuando la diagonal principal de la matriz MAC es mayor a 0.90, y no correlacionados cuando es inferior a 0.60. La matriz MAC es el producto escalar normalizado de dos vectores, quedando estos vectores ordenados dentro de la matriz mediante la siguiente ecuación:

$$MAC_{ij} = \frac{(\phi_{base\ rígida,i}^T \cdot \phi_{base\ flexible,j})^2}{(\phi_{base\ rígida,i}^T \cdot \phi_{base\ rígida,i})(\phi_{base\ flexible,j}^T \cdot \phi_{base\ flexible,j})} \quad (3.1)$$

siendo:

i, j : modos de vibración ($i = 1, 2, 3$ y 4 ; $j = 1, 2, 3$ y 4).

$\phi_{base\ rígida/flexible,i/j}$: Vector modal que contiene 25 puntos de la coronación para el modelo de base rígida/flexible del modo de vibración i/j .

$\phi_{base\ rígida/flexible,i/j}^T$: Vector modal transpuesto que contiene 25 puntos de la coronación para el modelo de base rígida/flexible del modo de vibración i/j .

Para la obtención del indicador modal de este apartado se empleará el vector modal del modelo de muro en base rígida junto al vector modal del modelo de muro base flexible con cañón recto trapezoidal para una extensión de discretización de 240 m. Estos vectores modales contienen los desplazamientos de 25 puntos de la coronación del muro para las cuatro primeras frecuencias naturales, siendo estos desplazamientos la componente imaginaria de las FRFs en la dirección del cañón.

	$\phi_{base\ flexible,1}$ (3.79 Hz)	$\phi_{base\ flexible,2}$ (4.77 Hz)	$\phi_{base\ flexible,3}$ (6.16 Hz)	$\phi_{base\ flexible,4}$ (7.46 Hz)
$\phi_{base\ rígida,1}$ (4.01Hz)	0.9992	0.0046	3.2921e-07	0.0408
$\phi_{base\ rígida,2}$ (5.02 Hz)	4.3801e-06	0.9996	0.0020	0.9381
$\phi_{base\ rígida,3}$ (6.42 Hz)	0.0011	8.5096e-04	0.9955	0.0478
$\phi_{base\ rígida,4}$ (7.80 Hz)	0.0054	0.9528	0.0308	0.9963

Tabla 3.3: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas del modelo en base rígida y del modelo base flexible sin agua.

En la figura 3.14 se muestran las cuatro primeras formas modales para los modelos de base rígida y base flexible, donde la primera forma modal (antimétrica) se ha obtenido a partir del vector modal correspondiente a la frecuencia fundamental bajo excitación transversal, mientras que la segunda, tercera y cuarta formas modales (simétricas) se han obtenido partiendo de los vectores modales correspondientes a la segunda, tercera y cuarta frecuencias naturales, respectivamente, obtenidas bajo excitación anteroposterior.

Por una parte, en la matriz MAC resultante, mostrada en la tabla 3.3, se puede observar claramente una muy buena correlación entre las formas modales ya que los valores de la diagonal principal son cercanos a la unidad, y por otra, se puede ver en la figura 3.14 que las formas modales están muy cerca, casi superpuestas. También, cabe destacar la correlación que existe en los indicadores MAC correspondientes a la segunda y cuarta forma modal (0.9381 y 0.9528). Esto es debido a que las formas modales analizadas corresponden a las de la coronación del muro, y como se dijo en el apartado 3.3.3 de este capítulo, la segunda y cuarta forma modal son muy parecidas en la coronación del muro, no así a lo largo de la dirección vertical.

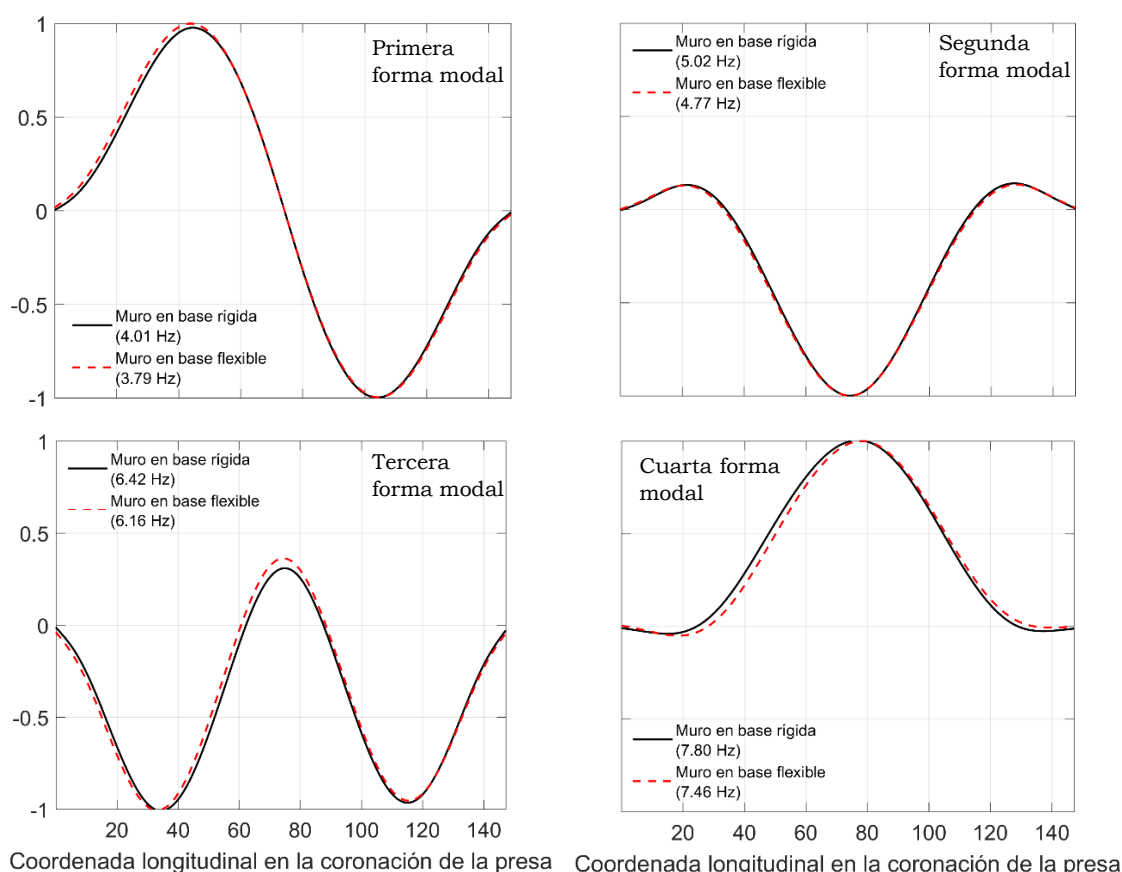


Figura 3.14: Primeras cuatro formas modales en coronación. Comparación entre los modelos en base rígida y en base flexible

Como se comentó anteriormente, debido a que las diferencias entre las frecuencias naturales de los distintos tipos de cañones utilizados son muy pequeñas, se empleará, en lo sucesivo (para modelar los casos de embalse con agua) el modelo de cañón recto trapezoidal con una extensión de discretización del campo libre de 240 m, dando lugar a una reducción importante del coste computacional.

3.5. Influencia de la condición de contorno de radiación en la respuesta dinámica obtenida

En el apartado 2.4 del capítulo 2 se estudiaron distintas condiciones de radiación definidas en el contorno de truncamiento de un problema de referencia con canal rectangular, obteniéndose que la condición de Humar y Roufaiel proporcionaba una solución adecuada. En este apartado se estudiará

la influencia de la condición de contorno de radiación en la respuesta dinámica del muro de la presa en base flexible cuando se aplican las condiciones de Sommerfeld y de Humar y Roufaiel en el contorno de truncamiento, considerando para el embalse una geometría trapezoidal recta que aproxima mejor la geometría real del cañón que un modelo de canal rectangular. En cañones trapezoidales, la frecuencia fundamental necesaria para resolver la ecuación (2.85), que depende de la geometría del canal, y principalmente del nivel de la cota de agua, se puede calcular aproximadamente utilizando las soluciones propuestas por Shul'man [61]. La solución de la ecuación (2.41) por separación de variables conduce a un problema de autovalores en el contorno de truncamiento del tipo: $\nabla^2 \varphi + \lambda^2 \varphi = 0$, siendo φ los autovectores y λ los autovalores, cuya resolución numérica conduce a λ_m y φ_m para cada modo m . Como la profundidad del agua del depósito es la variable más determinante en este cálculo, se evaluará si la solución para el canal rectangular ($\lambda_1 = \pi/2H$) puede ser utilizada como un autovalor para el caso de canal trapezoidal. Por ello, en este apartado, se analizará la influencia de la condición de radiación de Humar y Roufaiel considerando, por una parte, la frecuencia fundamental analítica para el caso de cañón con sección rectangular ($\tilde{f}_{ar}$), y por otra, la frecuencia fundamental numérica ($\tilde{f}_{nt}$) para el caso de cañón con sección trapezoidal. En la tabla 3.4 se muestran las frecuencias fundamentales analíticas y numéricas para los casos de sección rectangular y trapezoidal, respectivamente. También se incluirá en este estudio la condición de radiación de Sommerfeld para analizar su influencia en el caso de muro con canal recto trapezoidal.

	$H = 30 \text{ m}$	$H = 50 \text{ m}$	$H = 76 \text{ m}$	$H = 112 \text{ m}$
Frecuencia ($\tilde{f}_{ar}$)	11.98 Hz	7.19 Hz	4.73 Hz	3.21 Hz
Frecuencia ($\tilde{f}_{nt}$)	12.87 Hz	7.97 Hz	5.48 Hz	3.86 Hz

Tabla 3.4: Frecuencias fundamentales analíticas (cañón con sección rectangular) y numéricas (cañón con sección trapezoidal) según la cota de agua

En las figuras 3.15, 3.16 y 3.17 se representan las FRFs, en valor absoluto, para los tres puntos de estudio de la coronación del muro en base flexible, estando el sistema excitado mediante ondas armónicas planas tipo SH propagándose verticalmente desde el infinito, produciendo desplazamientos de campo libre en la dirección anteroposterior. Se comparan las respuestas obtenidas considerando las condiciones de radiación de Sommerfeld y la de Humar y Roufaiel, empleando las frecuencias analíticas y numéricas, del cañón recto y trapezoidal, respectivamente, mencionadas anteriormente (tabla 3.4).

En primer lugar, se puede observar que la influencia de la condición de radiación es menor que en el problema de referencia del capítulo anterior (apartado 2.8), destacándose que las diferencias entre las tres condiciones de radiación aplicadas en el contorno de truncamiento se pueden considerar despreciables, apareciendo diferencias a partir de la cota de 112 m, más concretamente en el punto 2 (Fig. 3.15), donde el primer pico en la FRF aparece ligeramente con mayor amplitud cuando se aplica la condición de Humar y Roufaiel con la frecuencia fundamental numérica. También, se destaca un pico en $\tilde{f} \cong 3.30 \text{ Hz}$ en el espectro del punto 3 para la misma cota de 112 m (Fig. 3.17) relacionado con una forma modal, tal y como se verá más adelante, que es captado tanto por la condición de radiación de Sommerfeld como por la de Humar y Roufaiel con la frecuencia fundamental numérica que, sin embargo, no es captado con la de Humar y Roufaiel con la frecuencia fundamental analítica. Por todo ello, la condición de Humar y Roufaiel con la frecuencia fundamental numérica con cañón trapezoidal será la condición de radiación que

se aplicará en el contorno de truncamiento del embalse para analizar la influencia de la altura del agua en la respuesta dinámica del muro de la presa.

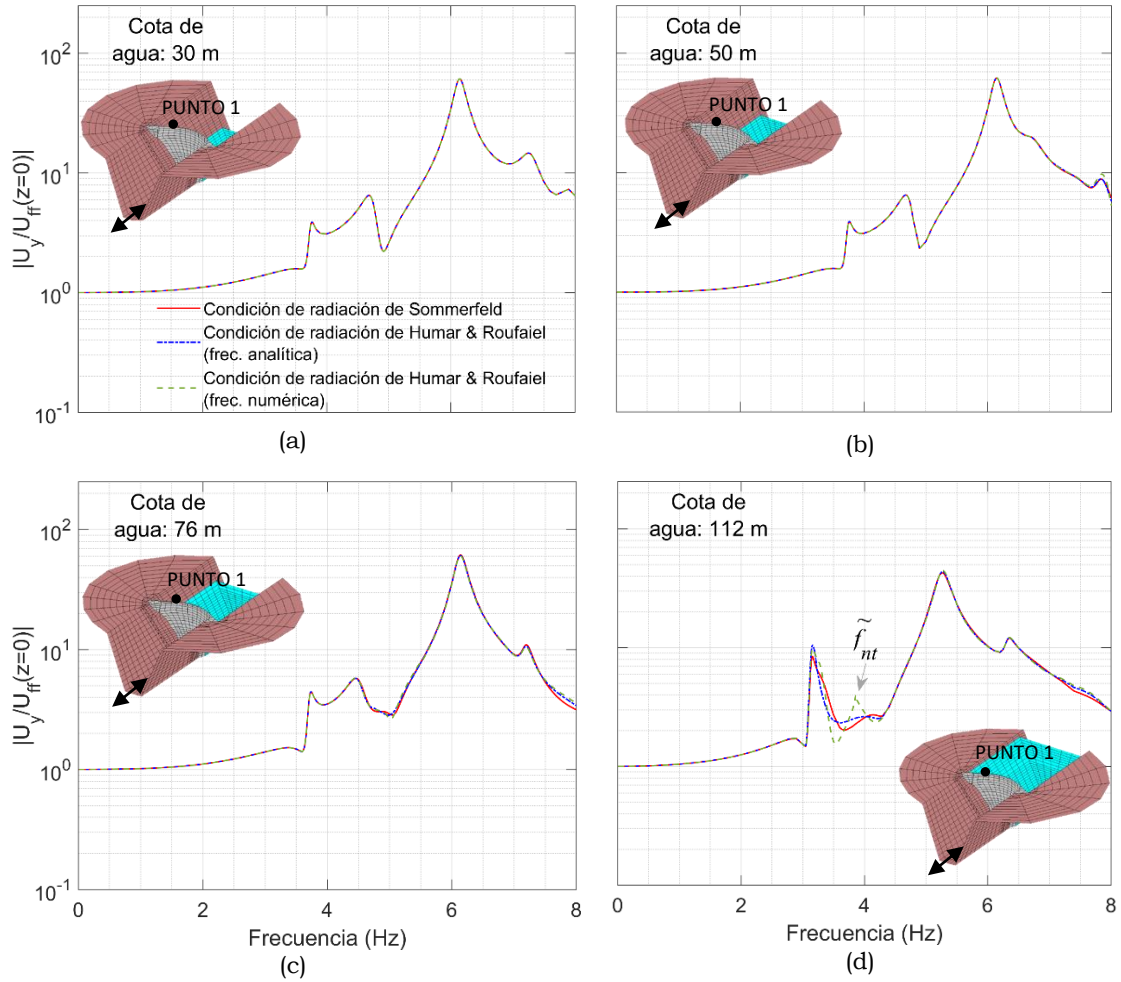


Figura 3.15: Funciones de respuesta en frecuencia en el punto 1 de la coronación del muro bajo la aplicación de diferentes condiciones de radiación en el contorno de truncamiento y para diferentes cotas de agua: (a) 30, (b) 50, (c) 76 y (d) 112 m

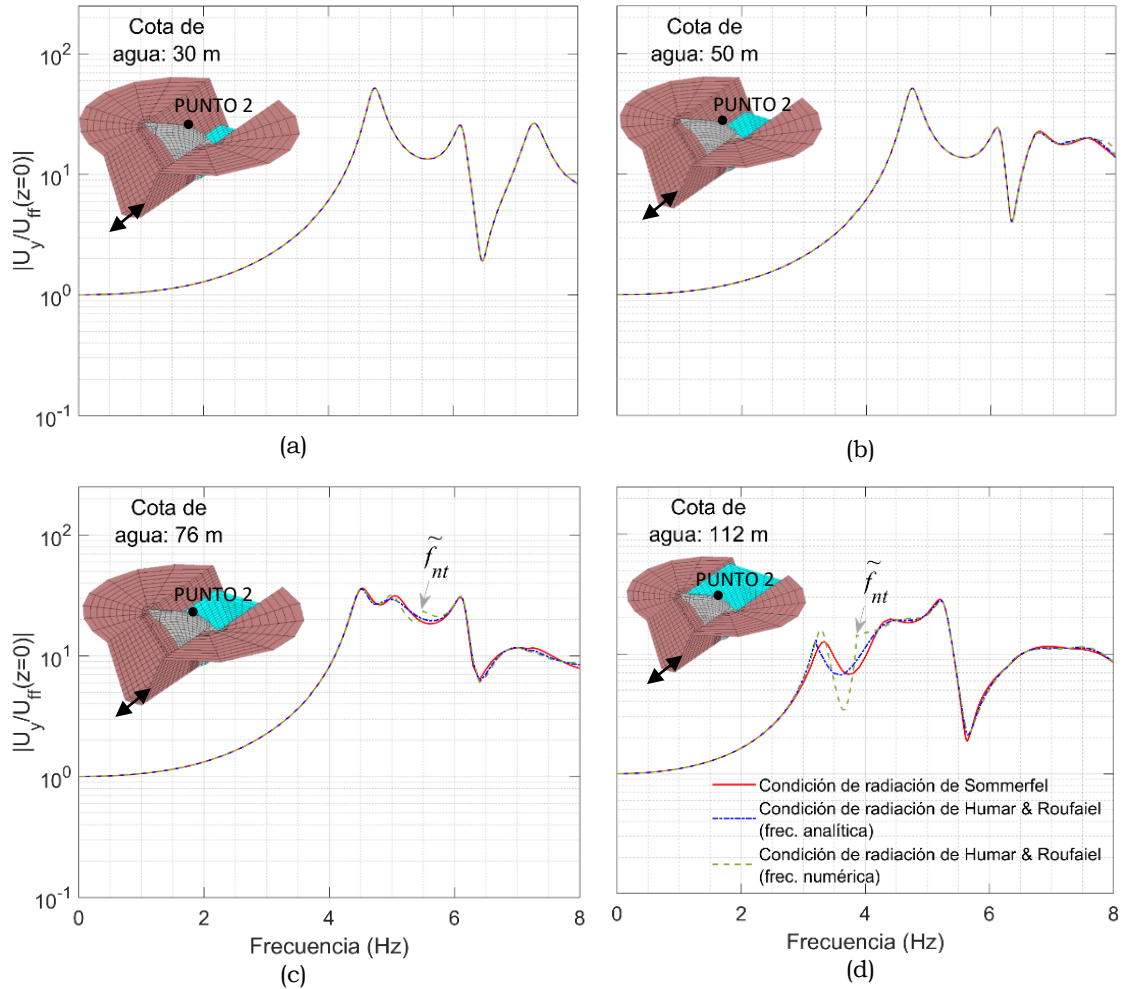


Figura 3.16: Funciones de respuesta en frecuencia en el punto 2 de la coronación del muro bajo la aplicación de diferentes condiciones de radiación en el contorno de truncamiento y para diferentes cotas de agua: (a) 30, (b) 50, (c) 76 y (d) 112 m

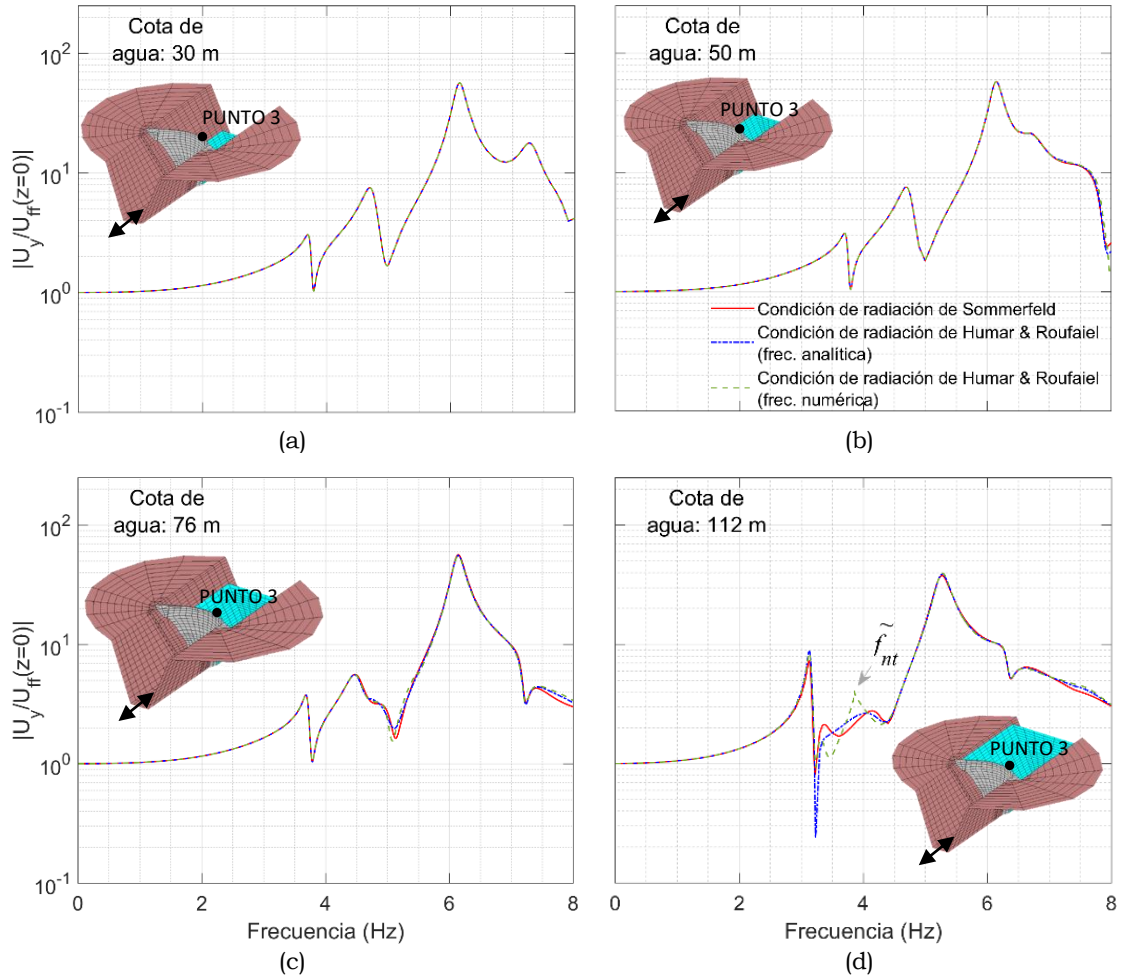


Figura 3.17: Funciones de respuesta en frecuencia en el punto 3 de la coronación del muro bajo la aplicación de diferentes condiciones de radiación en el contorno de truncamiento y para diferentes cotas de agua: (a) 30, (b) 50, (c) 76 y (d) 112 m

3.6. Influencia de la interacción dinámica suelo-estructura-agua sobre la respuesta dinámica del muro para distintos niveles de agua en el embalse

En este apartado se analizará la influencia de la cota de agua en la respuesta dinámica del muro empleando cinco cotas de agua diferentes en el embalse: 0, 30, 50, 76 y 112 m, correspondientes a ratios de 0%, 25%, 42%, 63% y 93% respecto a la altura total del muro, respectivamente. Para llevar a cabo este análisis, se empleará un cañón trapezoidal recto, y se aplicará en el contorno de truncamiento la condición de Humar y Roufaiel con la frecuencia fundamental numérica para cada cota de agua (tabla 3.4). Se han construido 2 discretizaciones de elementos de contorno para las diferentes cotas de agua, una en base rígida (Fig. 3.18), y otra en base flexible (Fig. 3.19) siendo la longitud de la superficie libre $r'=240$ m. Las FRFs se obtendrán con excitación en la dirección anteroposterior y transversal en los tres puntos de la coronación, tanto para el modelo de base rígida (Fig. 3.20) como para el modelo de base flexible (Fig. 3.21).

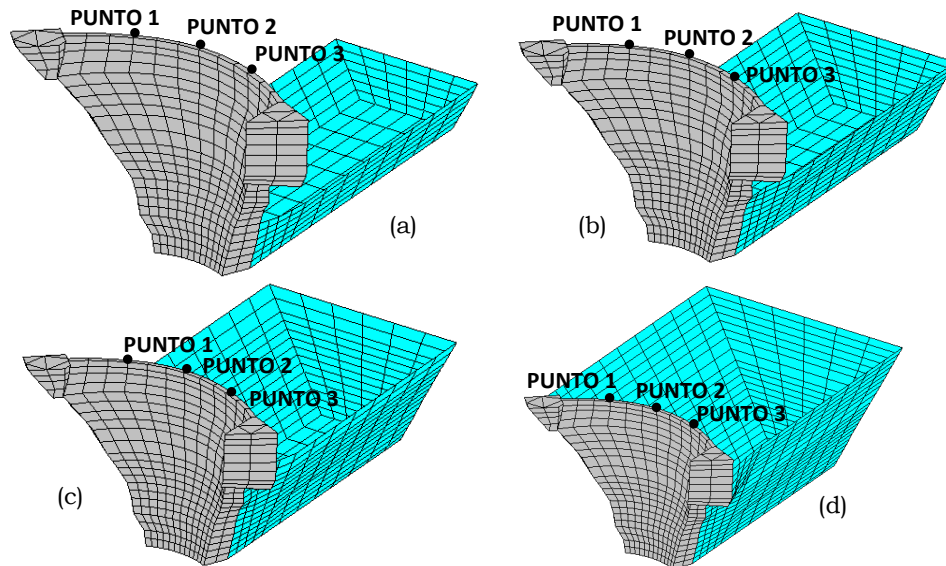


Figura 3.18: Discretización de elementos de contorno de la presa en base rígida con diferentes cotas de agua. (a) 30, (b) 50, (c) 76 y (d) 112 m

A grosso modo, comparando entre sí cada uno de los puntos de estudio pertenecientes a los modelos de base rígida frente a los de base flexible, bajo una misma excitación, se observa que, a medida que va aumentando la cota de agua se produce una disminución del valor de las frecuencias naturales, y de sus amplitudes, en los puntos de los modelos de base flexible respecto a los de base rígida. Esto pone de manifiesto los efectos de la interacción dinámica suelo-estructura-agua en el muro de la presa de Soria.

Al igual que sucedía en el apartado 3.4, bajo excitación transversal, el primer modo, principalmente asimétrico, es capturado mejor en los puntos 1 y 3 en ambos modelos, y no en el punto 2 que está situado en el plano de simetría del muro.

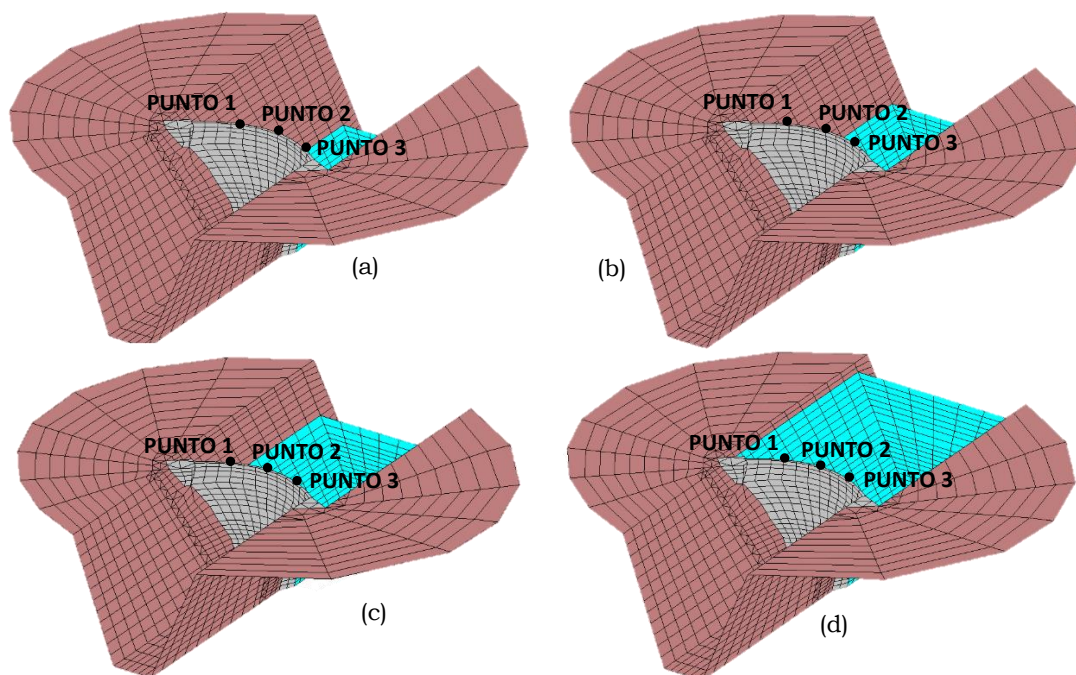


Figura 3.19: Discretización de elementos de contorno de la presa en base flexible con diferentes cotas de agua. (a) 30, (b) 50, (c) 76 y (d) 112 m

Llevando a cabo un análisis más detallado de la influencia de las cotas de agua para ambos modelos, se observa que para una cota de agua de 30 m (25% de la altura del muro), la respuesta del muro se ve inalterada respecto al caso de embalse vacío para el rango de frecuencias considerado. Para una cota de agua de 50 m (42% de la altura del muro), se observan, tanto en base rígida como en base flexible, diferencias en los puntos analizados respecto al caso de embalse vacío a partir de $f > 6.2$ Hz. Cabe destacar que, para esta cota de agua en el modelo de base rígida, la frecuencia $\tilde{f}_4$ se desplaza hacia la izquierda aumentando su amplitud respecto al caso de embalse vacío y al de cota de 30 m, sin embargo, la frecuencia $\tilde{f}_4$ en el modelo de base flexible se amortigua tanto que es muy difícil localizarla en el espectro.

Para la cota de 76 m (63% de la altura del muro), se observa en los dos modelos analizados, y en los puntos 1 y 3, que los picos de las FRFs marcados con $\tilde{f}_1$, bajo excitación transversal, y $\tilde{f}_3$, bajo excitación anteroposterior, prácticamente se superponen con los de las cotas inferiores. Para el punto 2 se tiene que el pico de la FRF marcado con $\tilde{f}_2$ presenta en el modelo de base rígida una disminución del valor numérico de la frecuencia, así como un aumento de la amplitud respecto a las cotas de agua menores, mientras que, en el modelo de base flexible, se observa una disminución, tanto del valor numérico de la frecuencia como de la amplitud respecto a cotas inferiores, destacando que la disminución del valor numérico de esta frecuencia es ligeramente mayor en base flexible que en base rígida. Se resalta que la respuesta para la cota de agua de 76 m, tanto en base rígida como en base flexible, no presenta un pico claro para el cuarto modo en el espectro.

Por último, para la cota de 112 m, la respuesta del sistema se ve alterada a lo largo de todo el rango de frecuencias analizado, pudiéndose observar una disminución significativa en el valor numérico de las frecuencias en los picos de las FRFs, así como también una mayor amplitud del pico marcado con $\tilde{f}_1$ bajo excitación anteroposterior, tanto en base rígida como en base flexible, todo ello respecto a las otras cotas analizadas.

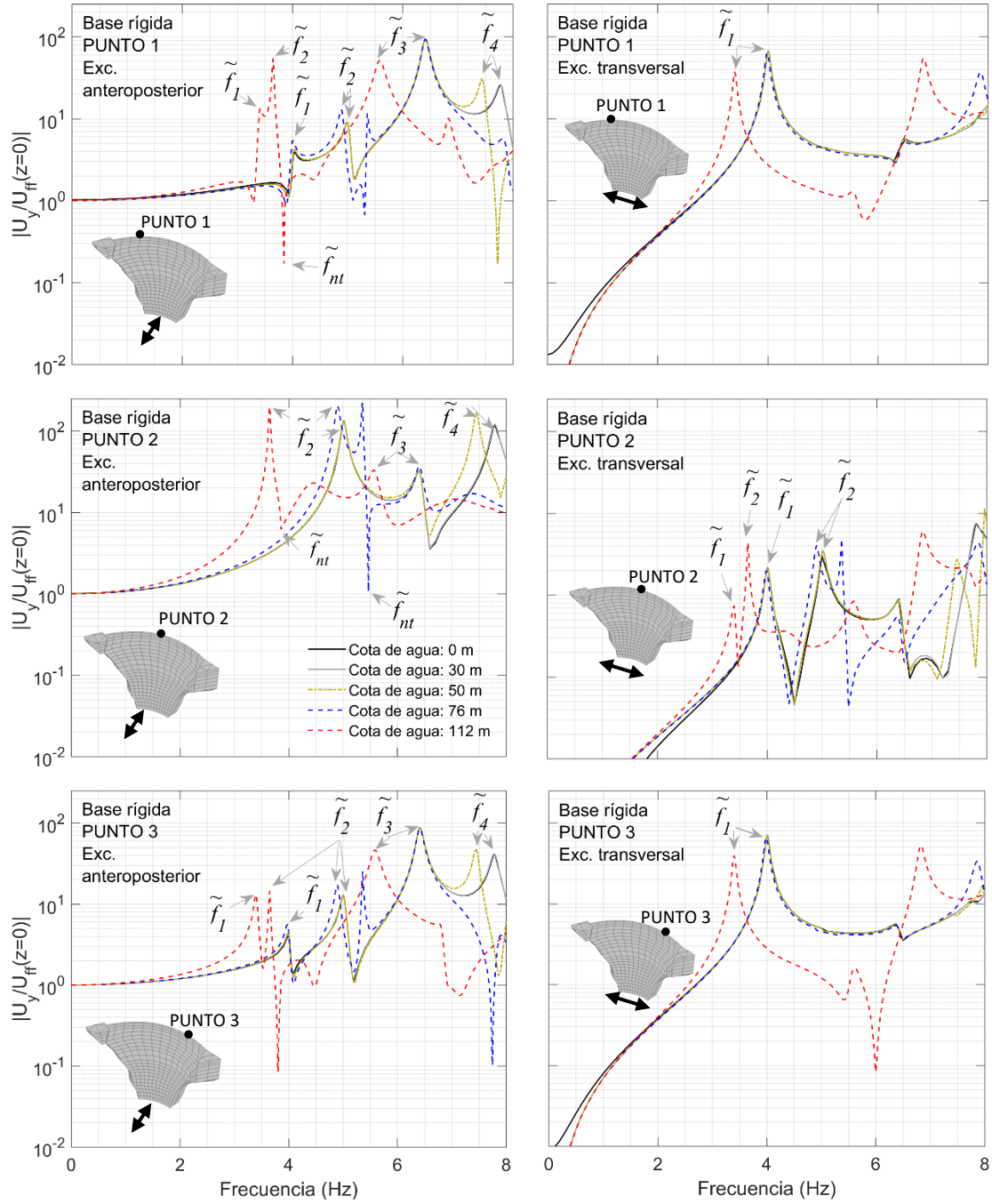


Figura 3.20: FRFs en tres puntos de la coronación del muro de la presa para diferentes cotas de agua considerando el modelo de muro en base rígida bajo excitación anteroposterior (columna izquierda) y excitación transversal (columna derecha); punto 1 (espectros superiores), punto 2 (espectros intermedios) y punto 3 (espectros inferiores)

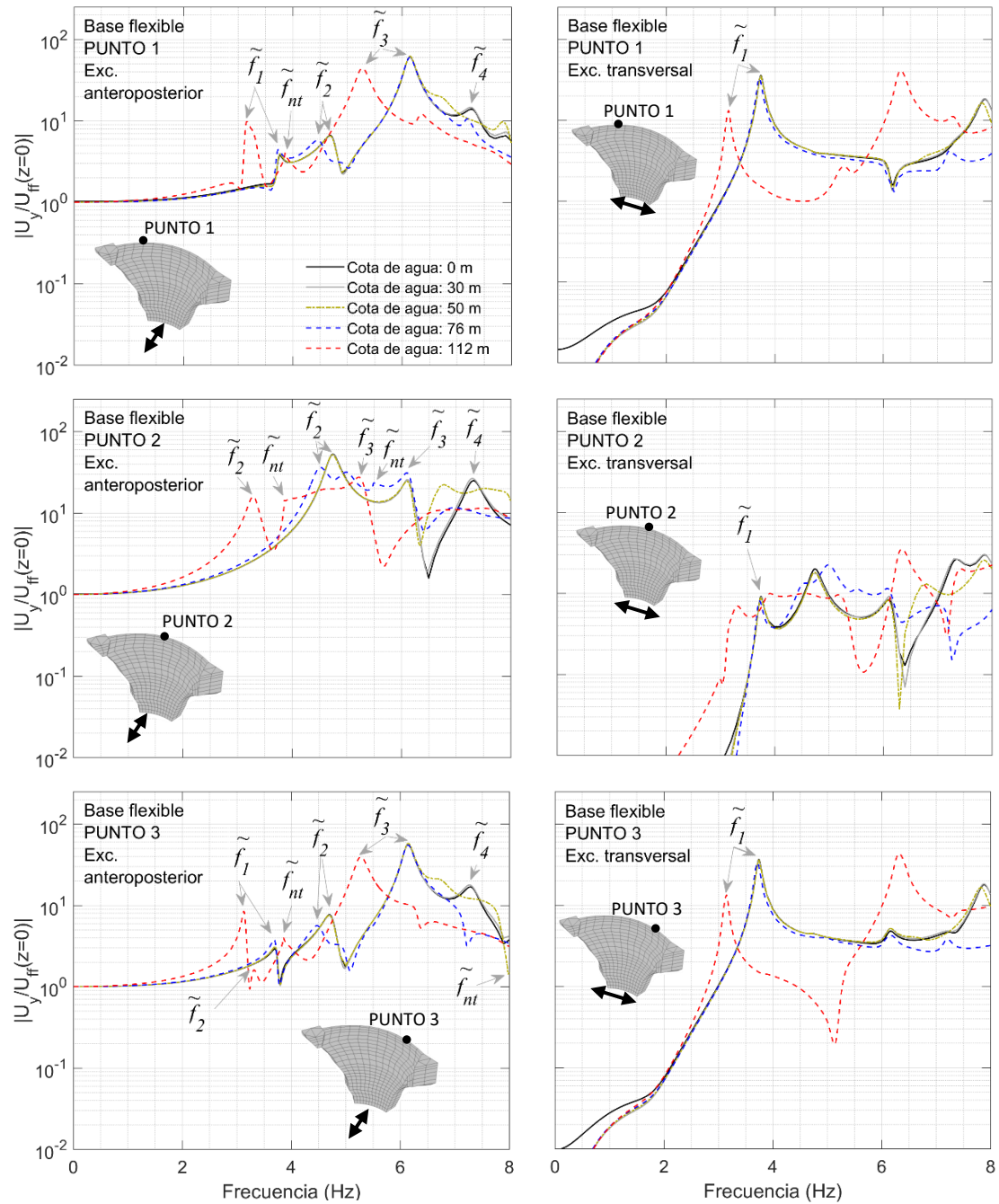


Figura 3.21: FRFs en tres puntos de la coronación del muro de la presa para diferentes cotas de agua considerando el modelo de muro en base flexible bajo excitación anteroposterior (columna izquierda) y excitación transversal (columna derecha); punto 1 (espectros superiores), punto 2 (espectros intermedios) y punto 3 (espectros inferiores)

En la figura 3.22 se muestra la evolución de las cuatro primeras frecuencias naturales para las diferentes cotas de agua, tanto para el caso de base rígida como para el caso de base flexible, visualizándose mejor lo mencionado anteriormente. La evolución observada está también en la línea de los resultados experimentales obtenidos por otros autores como Pereira et al. [44].

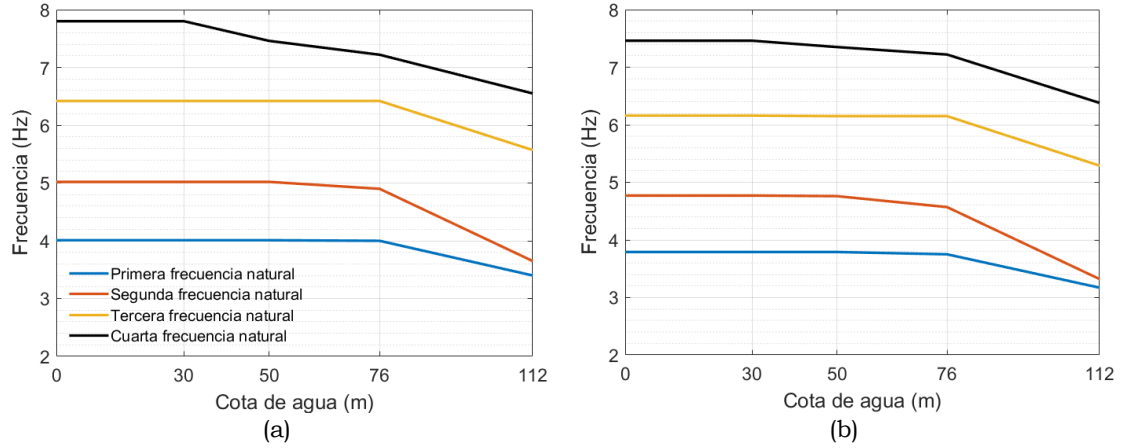


Figura 3.22: Evolución de las cuatro primeras frecuencias naturales respecto a la cota de agua para los modelos de muro en base rígida (a) y muro en base flexible (b)

3.6.1. Función de autocorrelación MAC en el modelo de muro en base rígida

A continuación, se estudia la correlación entre las formas modales obtenidas para el muro de la presa sin agua y las obtenidas para los diferentes niveles de llenado del embalse en el modelo de muro en base rígida. Las figuras 3.23 y 3.24 muestran la parte real (columna izquierda) y la parte imaginaria (columna derecha) de las FRFs de la figura 3.20 para el modelo de muro en base rígida de los tres puntos de estudio bajo excitación anteroposterior (Fig 3.23) y transversal (Fig 3.24). De los picos de las partes imaginarias marcados, $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$ y $\tilde{f}_4$, se obtienen las frecuencias de las formas modales 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

Para llevar a cabo este estudio se evalúan las matrices MAC, tal y como se hizo en el apartado 3.4.1. Las tablas 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8 muestran las matrices MAC obtenidas a partir de las formas modales obtenidas para el modelo de embalse vacío y para el modelo de embalse con cotas de agua de 30 m (tabla 3.5), 50 m (tabla 3.6), 76 m (tabla 3.7) y 112 m (tabla 3.8). A partir de la diagonal principal de las matrices MAC se evalúa la correlación entre las formas modales, siendo los valores numéricos de estas matrices obtenidos mediante la siguiente expresión:

$$MAC_{ij} = \frac{(\phi_{\text{base rígida sin agua}, i}^T \cdot \phi_{\text{base rígida con agua}, j})^2}{(\phi_{\text{base rígida sin agua}, i}^T \cdot \phi_{\text{base rígida sin agua}, i})(\phi_{\text{base rígida con agua}, j}^T \cdot \phi_{\text{base rígida con agua}, j})} \quad (3.2)$$

siendo:

i, j : modos de vibración ($i = 1, 2, 3$ y 4 ; $j = 1, 2, 3$ y 4).

$\phi_{\text{base rígida sin/con agua}, i/j}$: Vector modal que contiene 25 puntos de la coronación para el modelo de base rígida sin/con agua del modo de vibración i/j .

$\Phi_{\text{base rígida sin/con agua}, i/j}^T$: Vector modal transpuesto que contiene 25 puntos de la coronación para el modelo de base rígida sin/con agua del modo de vibración i/j .

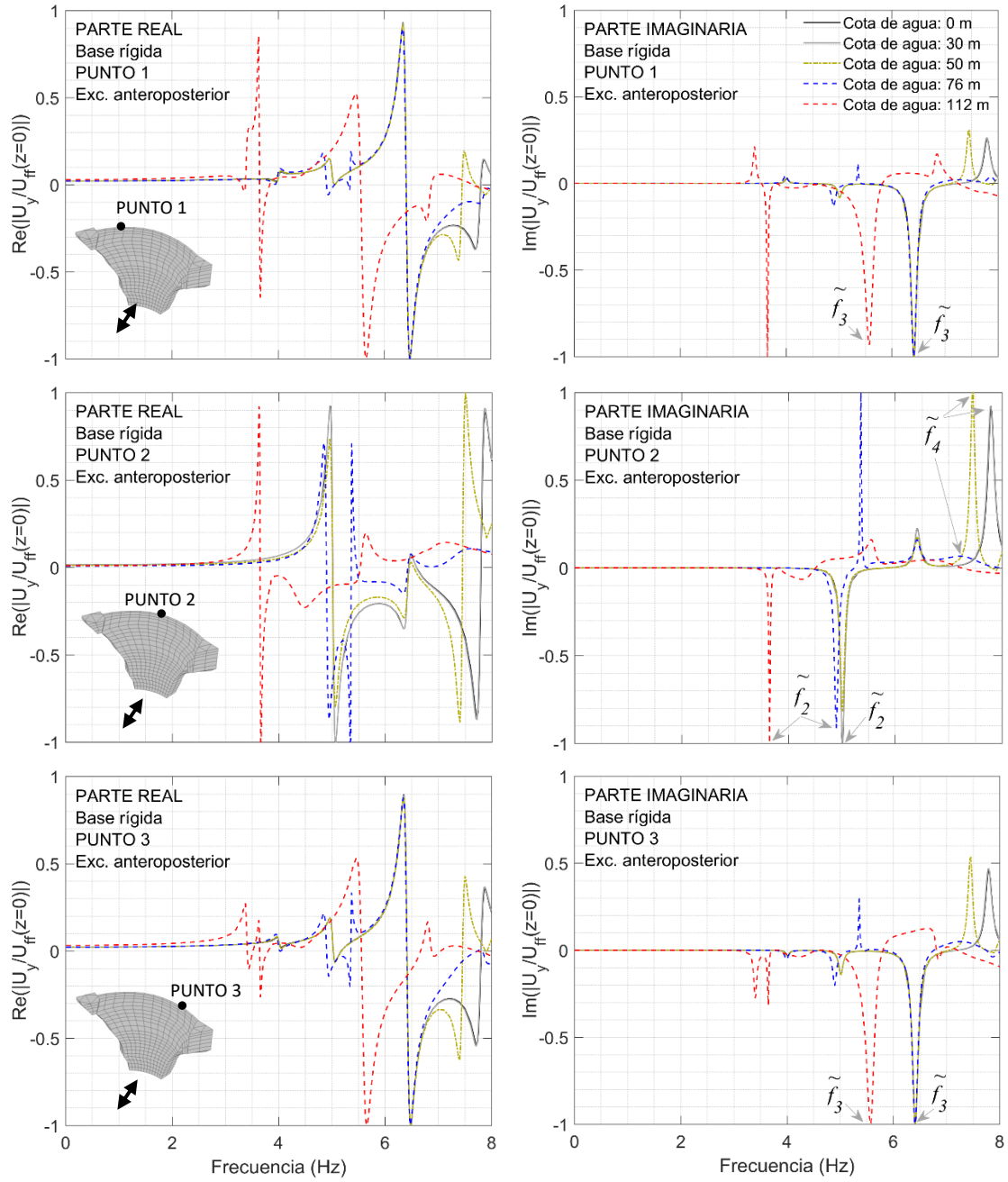


Figura 3.23: Parte real (columna izquierda) y parte imaginaria (columna derecha) de las FRFs con el modelo de muro en base rígida del punto 1 (fila superior), punto 2 (fila intermedia) y punto 3 (fila inferior) bajo excitación anteroposterior con diferentes cotas de agua

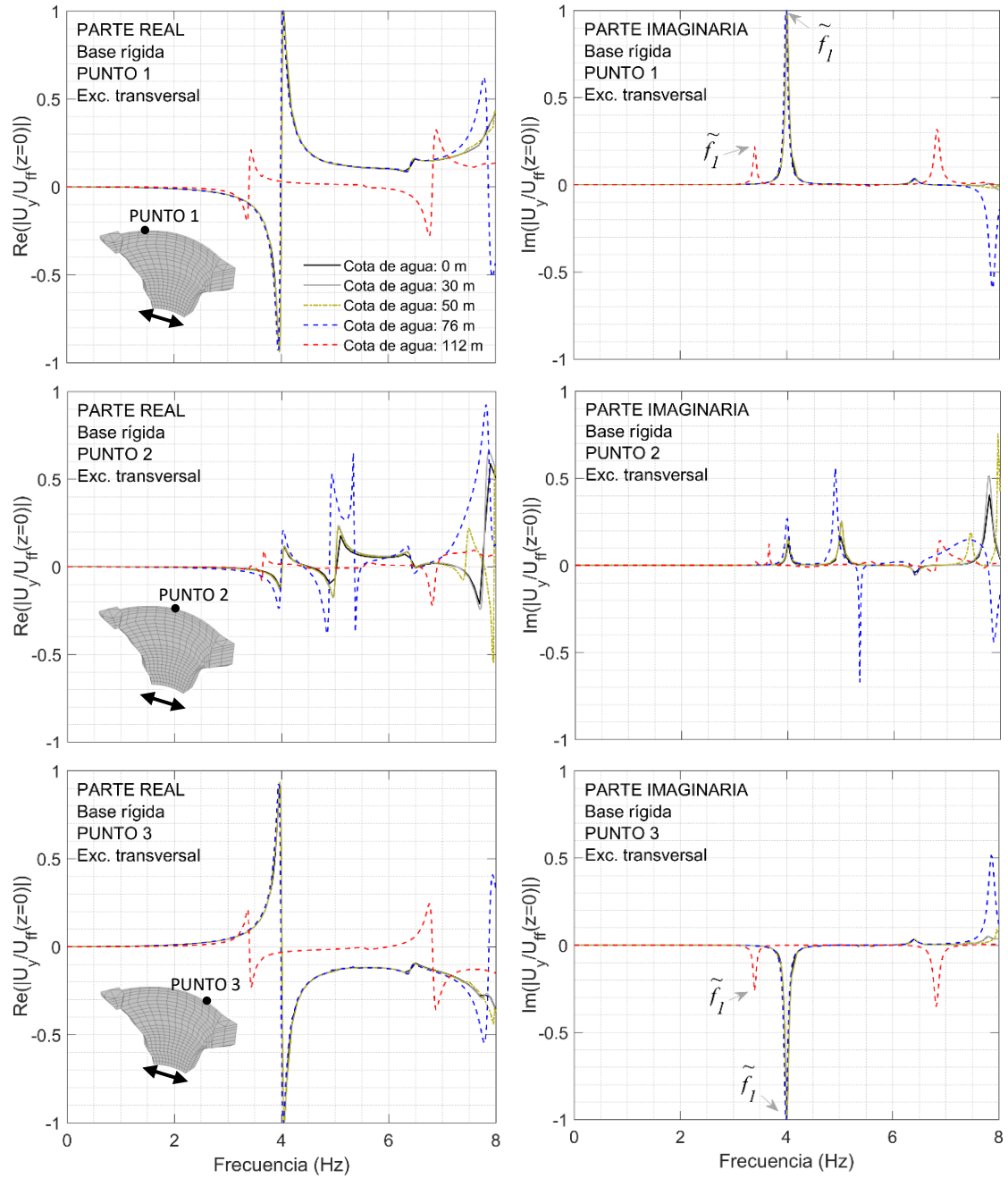


Figura 3.24: Parte real (columna izquierda) y parte imaginaria (columna derecha) de las FRFs con el modelo de muro en base rígida del punto 1 (fila superior), punto 2 (fila intermedia) y punto 3 (fila inferior) bajo excitación transversal con diferentes cotas de agua

	$\emptyset_{\text{base rígida cota 30,1}}$ (4.01 Hz)	$\emptyset_{\text{base rígida cota 30,2}}$ (5.02 Hz)	$\emptyset_{\text{base rígida cota 30,3}}$ (6.42 Hz)	$\emptyset_{\text{base rígida cota 30,4}}$ (7.80 Hz)
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,1}}$ (4.01 Hz)	1.0000	2.0976e-05	3.3600e-04	0.0062
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,2}}$ (5.02 Hz)	2.1763e-05	1.0000	1.2462e-04	0.9462
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,3}}$ (6.42 Hz)	3.3177e-04	1.2481e-04	1.0000	0.0524
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,4}}$ (7.80 Hz)	0.0063	0.9456	0.0527	1.0000

Tabla 3.5: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas para embalse vacío y para $H=30$ m, considerando el modelo en base rígida.

	$\emptyset_{\text{base rígida cota 50,1}}$ (4.01 Hz)	$\emptyset_{\text{base rígida cota 50,2}}$ (5.02 Hz)	$\emptyset_{\text{base rígida cota 50,3}}$ (6.42 Hz)	$\emptyset_{\text{base rígida cota 50,4}}$ (7.46 Hz)
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,1}}$ (4.01 Hz)	1.0000	1.9798e-05	3.3507e-04	0.0037
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,2}}$ (5.02 Hz)	2.2000e-05	1.0000	9.5615e-05	0.9657
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,3}}$ (6.42 Hz)	3.3196e-04	1.2254e-04	1.0000	0.0345
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,4}}$ (7.80 Hz)	0.0063	0.9455	0.0521	0.9976

Tabla 3.6: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas para embalse vacío y para $H=50$ m, considerando el modelo en base rígida.

	$\emptyset_{\text{base rígida cota 76,1}}$ (4.00 Hz)	$\emptyset_{\text{base rígida cota 76,2}}$ (4.90 Hz)	$\emptyset_{\text{base rígida cota 76,3}}$ (6.42 Hz)	$\emptyset_{\text{base rígida cota 76,4}}$ (7.30 Hz)
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,1}}$ (4.01 Hz)	1.0000	0.0230	7.2982e-04	0.0079
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,2}}$ (5.02 Hz)	2.8124e-05	0.9999	0.9995	0.9683
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,3}}$ (6.42 Hz)	3.3989e-04	5.5785e-05	0.9952	0.0275
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,4}}$ (7.80 Hz)	0.0064	0.9427	0.0263	0.9956

Tabla 3.7: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas para embalse vacío y para $H=76$ m, considerando el modelo en base rígida.

	$\emptyset_{\text{base rígida cota 112,1}}$ (3.40 Hz)	$\emptyset_{\text{base rígida cota 112,2}}$ (3.65 Hz)	$\emptyset_{\text{base rígida cota 112,3}}$ (5.57 Hz)	$\emptyset_{\text{base rígida cota 112,4}}$ (6.55 Hz)
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,1}}$ (4.01 Hz)	0.9999	0.023	7.2982e-04	0.0262
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,2}}$ (5.02 Hz)	1.8149e-04	0.9621	0.0553	0.8270
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,3}}$ (6.42 Hz)	3.2985e-04	0.0169	0.9393	0.1536
$\emptyset_{\text{base rígida cota 0,4}}$ (7.80 Hz)	0.0077	0.9364	2.7924e-04	0.9623

Tabla 3.8: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas para embalse vacío y para $H=112$ m, considerando el modelo en base rígida.

Se observa que la diagonal principal de las tablas 3.5 y 3.6 es prácticamente unitaria, lo que significa que las formas modales no se ven modificadas en absoluto para cotas de llenado de hasta, al menos, 50 m de altura. Para una cota de 76 m, se observa una pequeña variación de las formas modales correspondientes a los modos 3 y 4 (valores MAC del entorno de 0.995), mientras que para una cota de llenado de 112 m, se obtiene una modificación relativamente importante del modo 3 (con un valor MAC que ha descendido hasta el 0.94). Aún así, se aprecia que las formas modales de estos primeros cuatro modos se ven muy poco alteradas por la presencia del agua. Las formas modales dibujadas a partir de los picos de las partes imaginarias de las figuras 3.23 y 3.24 se muestran en la figura 3.25, observándose una buena correlación de cada forma modal para las diferentes cotas de agua propuestas.

Por otra parte, se observa una buena correlación en los indicadores MAC correspondientes a la segunda y cuarta forma modal, lo cual es debido a que la segunda y cuarta forma modal son muy parecidas en la coronación del muro, tal y como se ha explicado en el apartado 3.4.1. Este mismo hecho se dará en los apartados 3.6.2 y 3.6.3 por lo que se obviará comentarlo.

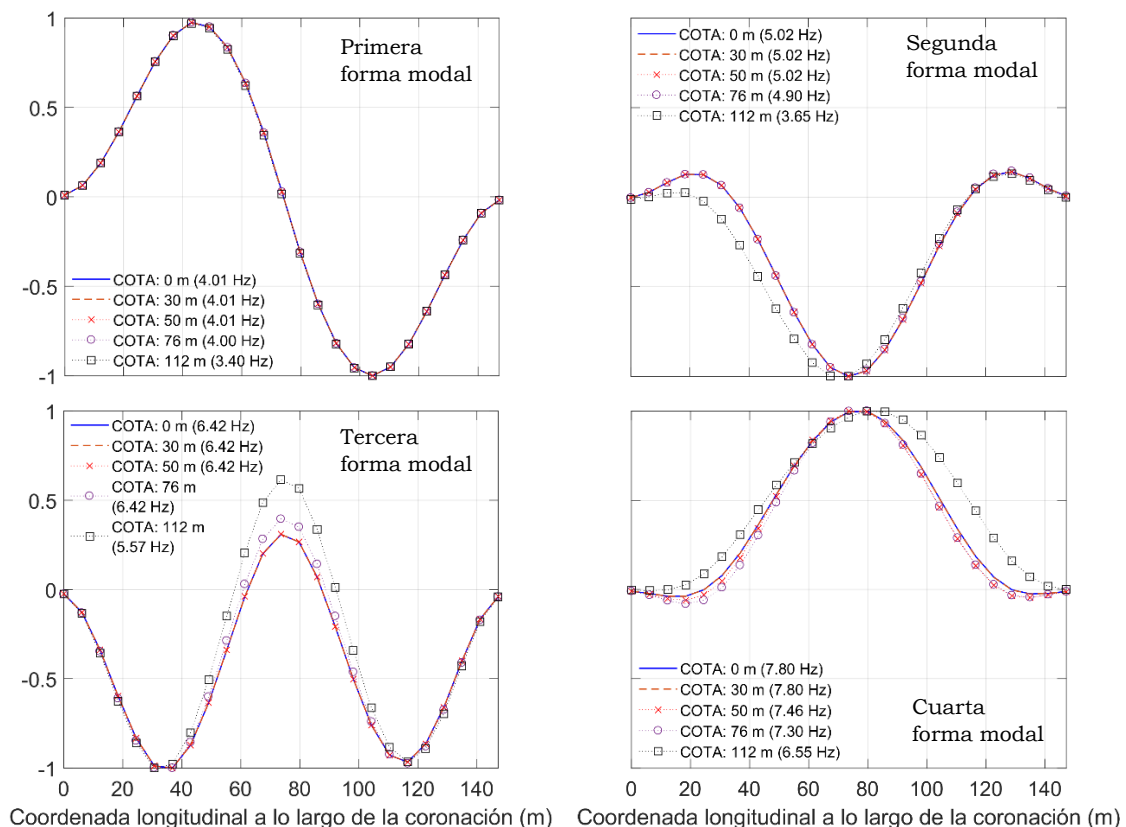


Figura 3.25: Primeras cuatro formas modales en coronación para el modelo de muro en base rígida con diferentes cotas de agua

3.6.2. Función de autocorrelación MAC en el modelo de muro en base flexible

Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior, en este apartado se estudia la correlación entre las formas modales obtenidas para el muro de la presa sin agua y las obtenidas para los diferentes niveles de llenado del embalse en el modelo de muro en base flexible. En las figuras 3.26 y 3.27 se

muestran la parte real (columna izquierda) y la parte imaginaria (columna derecha) de las FRFs de la figura 3.21 con excitación anteroposterior (Fig 3.26) y transversal (Fig 3.27). Como se ha hecho en apartados anteriores, de los picos de las partes imaginarias marcados, $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3$ y $\tilde{f}_4$, se obtienen las frecuencias naturales correspondientes a las formas modales 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

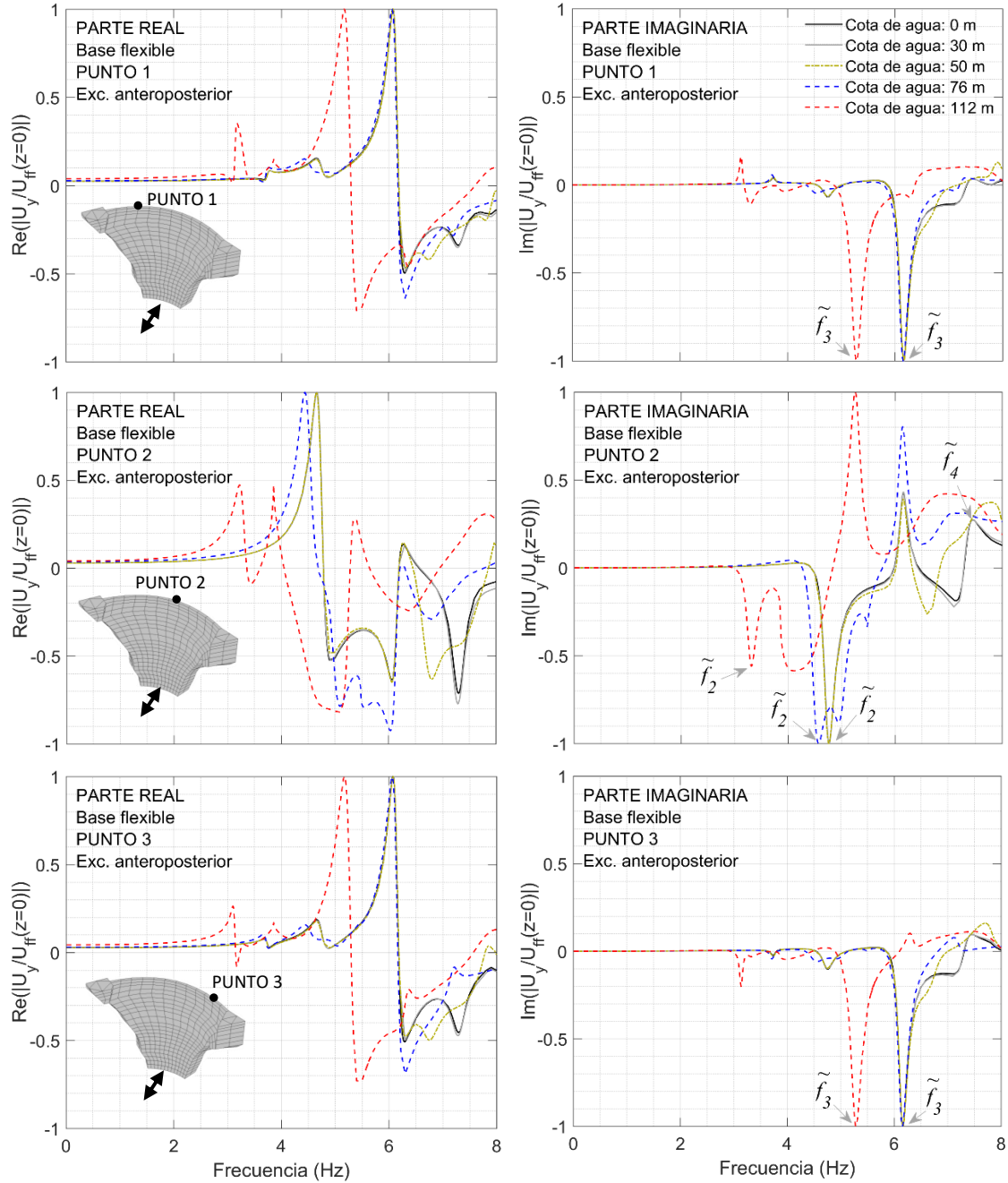


Figura 3.26: Parte real (columna izquierda) y parte imaginaria (columna derecha) de las FRFs con el modelo de muro en base flexible del punto 1 (fila superior), punto 2 (fila intermedia) y punto 3 (fila inferior) bajo excitación anteroposterior con diferentes cotas de agua

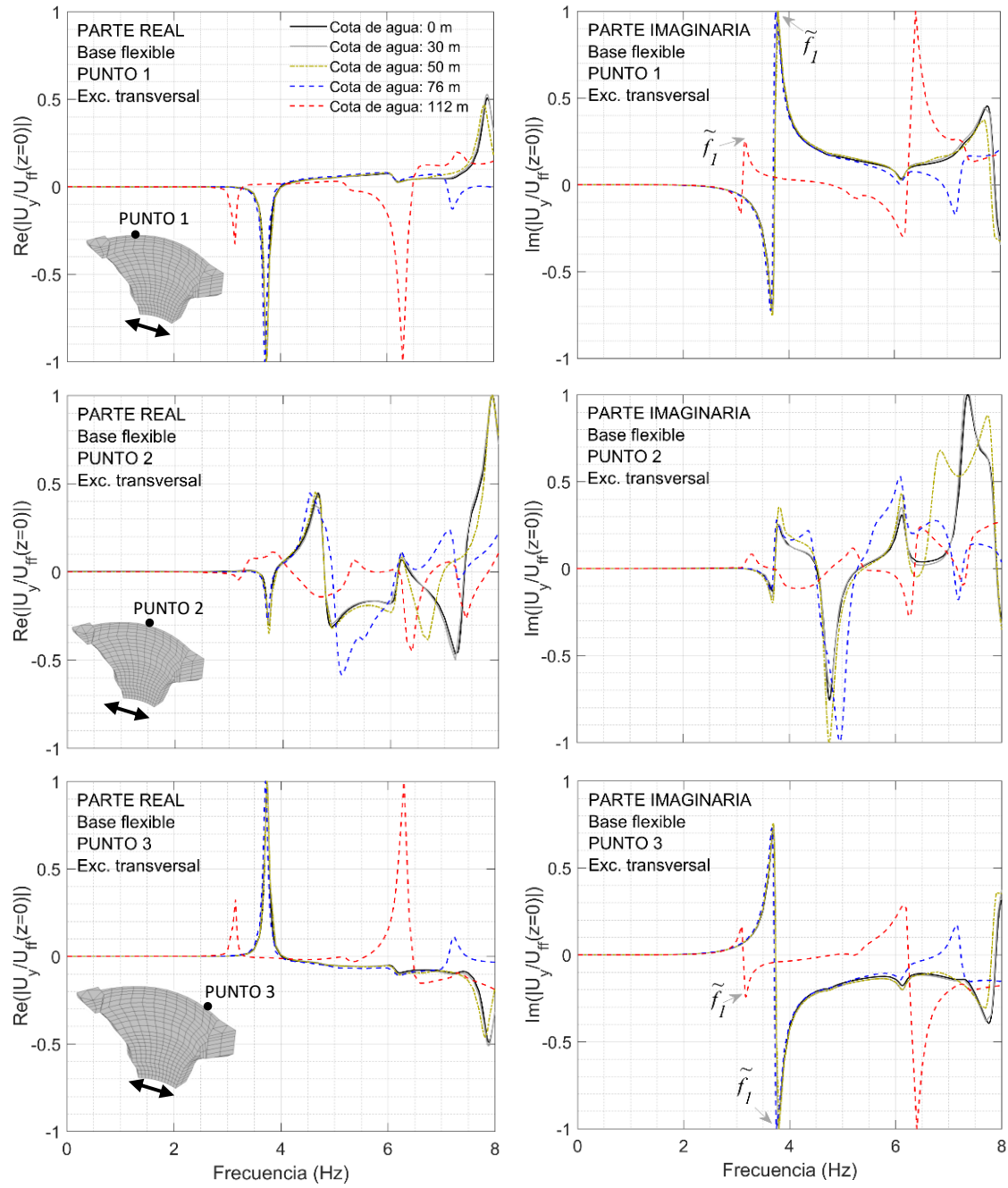


Figura 3.27: Parte real (columna izquierda) y parte imaginaria (columna derecha) de las FRFs con el modelo de muro en base flexible del punto 1 (fila superior), punto 2 (fila intermedia) y punto 3 (fila inferior) bajo excitación transversal con diferentes cotas de agua

Las tablas 3.9, 3.10, 3.11 y 3.12 muestran las matrices MAC en base flexible obtenidas a partir de las formas modales obtenidas para el modelo de embalse vacío y para el modelo de embalse con cotas de agua de 30 m (tabla 3.9), 50 m (tabla 3.10), 76 m (tabla 3.11) y 112 m (tabla 3.12), utilizando la siguiente expresión:

$$MAC_{ij} = \frac{(\phi_{\text{base flexible sin agua},i}^T \cdot \phi_{\text{base flexible con agua},j})^2}{(\phi_{\text{base flexible sin agua},i}^T \cdot \phi_{\text{base flexible sin agua},i})(\phi_{\text{base flexible con agua},j}^T \cdot \phi_{\text{base flexible con agua},j})} \quad (3.3)$$

siendo:

i, j : modos de vibración ($i=1, 2, 3$ y 4 ; $j=1, 2, 3$ y 4).

$\Phi_{\text{base flexible sin/con agua}, i/j}$: Vector modal que contiene 25 puntos de la coronación para el modelo de base flexible sin/con agua del modo de vibración i/j .

$\Phi_{\text{base flexible sin/con agua}, i/j}^T$: Vector modal transpuesto que contiene 25 puntos de la coronación para el modelo de base flexible sin/con agua del modo de vibración i/j .

	$\Phi_{\text{base flexible cota 30,1}}$ (3.79 Hz)	$\Phi_{\text{base flexible cota 30,2}}$ (4.77 Hz)	$\Phi_{\text{base flexible cota 30,3}}$ (6.16 Hz)	$\Phi_{\text{base flexible cota 30,4}}$ (7.46 Hz)
$\Phi_{\text{base flexible cota 0,1}}$ (3.79 Hz)	1.0000	3.9984e-07	7.1195e-04	0.0183
$\Phi_{\text{base flexible cota 0,2}}$ (4.77 Hz)	4.5575e-05	1.0000	6.0000e-04	0.9424
$\Phi_{\text{base flexible cota 0,3}}$ (6.16 Hz)	7.0286e-04	7.0000e-04	1.0000	0.0282
$\Phi_{\text{base flexible cota 0,4}}$ (7.46 Hz)	0.0173	0.9443	0.0281	1.0000

Tabla 3.9: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas para embalse vacío y para $H=30$ m, considerando el modelo en base flexible.

	$\Phi_{\text{base flexible cota 50,1}}$ (3.79 Hz)	$\Phi_{\text{base flexible cota 50,2}}$ (4.76 Hz)	$\Phi_{\text{base flexible cota 50,3}}$ (6.15 Hz)	$\Phi_{\text{base flexible cota 50,4}}$ (7.35 Hz)
$\Phi_{\text{base flexible cota 0,1}}$ (3.79 Hz)	1.0000	1.6417e-07	6.6137e-04	0.0168
$\Phi_{\text{base flexible cota 0,2}}$ (4.77 Hz)	4.3636e-07	1.0000	1.0000e-05	0.9580
$\Phi_{\text{base flexible cota 0,3}}$ (6.16 Hz)	7.0248e-04	7.0000e-04	0.9991	0.0164
$\Phi_{\text{base flexible cota 0,4}}$ (7.46 Hz)	0.0173	0.9447	0.0381	0.9986

Tabla 3.10: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas para embalse vacío y para $H=50$ m, considerando el modelo en base flexible.

	$\Phi_{\text{base flexible cota 76,1}}$ (3.75 Hz)	$\Phi_{\text{base flexible cota 76,2}}$ (4.57 Hz)	$\Phi_{\text{base flexible cota 76,3}}$ (6.15 Hz)	$\Phi_{\text{base flexible cota 76,4}}$ (7.22 Hz)
$\Phi_{\text{base flexible cota 0,1}}$ (3.79 Hz)	1.0000	1.7036e-04	8.9845e-04	0.0015
$\Phi_{\text{base flexible cota 0,2}}$ (4.77 Hz)	2.9204e-06	0.9998	0.0058	0.9961
$\Phi_{\text{base flexible cota 0,3}}$ (6.16 Hz)	7.0156e-04	7.1000e-04	0.9976	1.9903e-04
$\Phi_{\text{base flexible cota 0,4}}$ (7.46 Hz)	0.0176	0.9411	0.0136	0.9672

Tabla 3.11: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas para embalse vacío y para $H=76$ m, considerando el modelo en base flexible.

	$\phi_{\text{base flexible cota 112,1}}$ (3.17 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota 112,2}}$ (3.32 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota 112,3}}$ (5.29 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota 112,4}}$ (6.38 Hz)
$\phi_{\text{base flexible cota 0,1}}$ (3.79 Hz)	1.0000	0.0341	0.0019	0.0223
$\phi_{\text{base flexible cota 0,2}}$ (4.77 Hz)	3.7399e-06	0.9477	0.0290	0.9647
$\phi_{\text{base flexible cota 0,3}}$ (6.16 Hz)	8.1973e-04	0.0120	0.9792	0.0053
$\phi_{\text{base flexible cota 0,4}}$ (7.46 Hz)	0.0165	0.8991	4.5204e-04	0.9894

Tabla 3.12: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas para embalse vacío y para $H=112$ m, considerando el modelo en base flexible.

Al igual que en el apartado anterior, se puede concluir que las formas modales se ven muy poco alteradas con el incremento de la cota de agua en el embalse, presentándose la mayor desviación en el modo 2 para la cota de 112 m (tabla 3.12). En la figura 3.28 se muestran las primeras cuatro formas modales para el modelo de muro en base flexible con las diferentes cotas de agua, y al igual que en el apartado anterior, las formas modales casi se superponen.

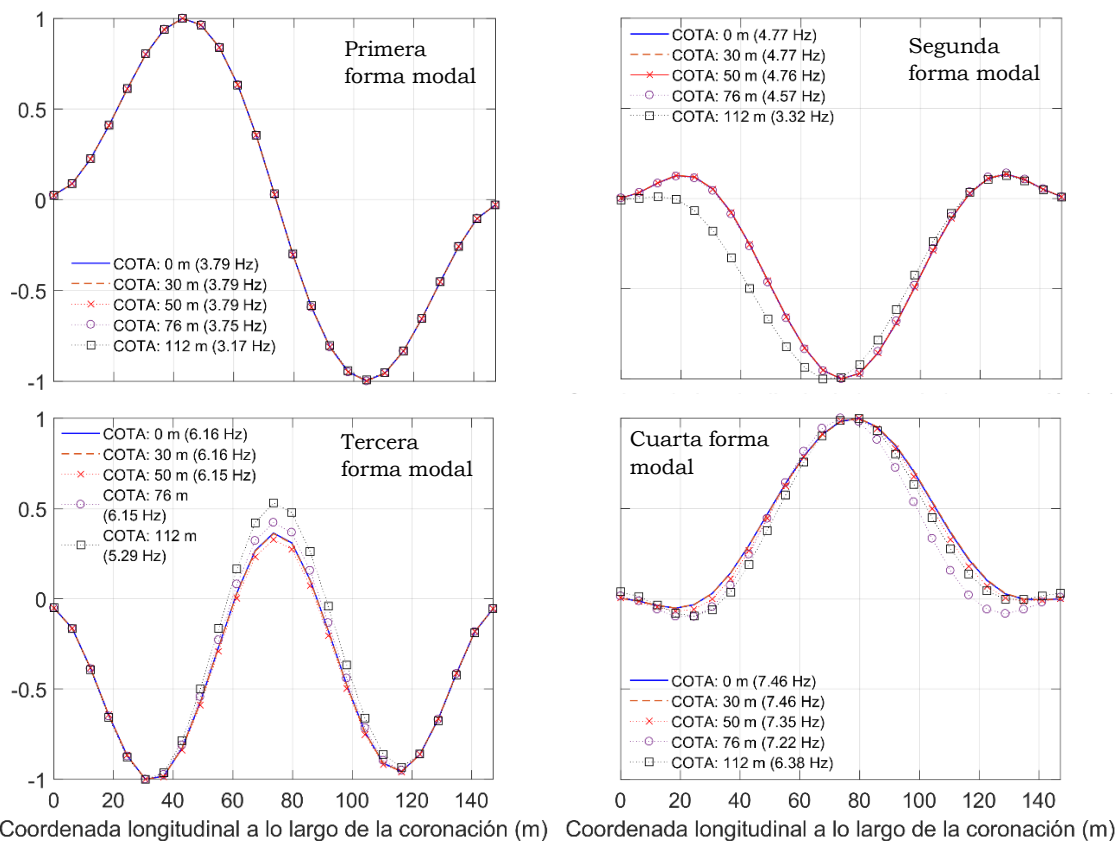


Figura 3.28: Primeras cuatro formas modales en coronación para el modelo de muro en base flexible con diferentes cotas de agua

3.6.3. Función de autocorrelación MAC entre los modelos de base rígida y base flexible para diferentes alturas de llenado del embalse

En los dos apartados anteriores, se estudiaron las correlaciones entre las formas modales obtenidas para el modelo de embalse vacío y para los modelos con distintas alturas de llenado. En este caso, se van a comparar entre sí las formas modales obtenidas de los modelos en base rígida y base flexible para una misma altura de llenado, todo ello con el fin de evaluar la influencia de la interacción suelo-estructura en las formas modales de la estructura. Las tablas 3.13, 3.14, 3.15 y 3.16 muestran las matrices MAC en base rígida frente a base flexible obtenidas a partir de las formas modales obtenidas para el modelo de embalse con las cotas de agua de 30 m (tabla 3.13), 50 m (tabla 3.14), 76 m (tabla 3.15) y 112 m (tabla 3.16), utilizando la siguiente ecuación:

$$MAC_{ij} = \frac{(\phi_{\text{base rígida cota } x, i}^T \cdot \phi_{\text{base flexible cota } x, j})^2}{(\phi_{\text{base rígida cota } x, i}^T \cdot \phi_{\text{base rígida cota } x, i})(\phi_{\text{base flexible cota } x, j}^T \cdot \phi_{\text{base flexible cota } x, j})} \quad (3.4)$$

siendo:

i, j : modos de vibración ($i = 1, 2, 3$ y 4 ; $j = 1, 2, 3$ y 4).

$\phi_{\text{base rígida/flexible cota } x, i/j}$: Vector modal que contiene 25 puntos de la coronación para el modelo de base rígida/flexible para la cota x del modo de vibración i/j .

$\phi_{\text{base rígida/flexible cota } x, i/j}^T$: Vector modal transpuesto que contiene 25 puntos de la coronación para el modelo de base rígida/flexible para la cota x del modo de vibración i/j .

$x = 30, 50, 76$ y 112 m.

Puede observarse que los valores de las diagonales de las diferentes matrices MAC son todos muy cercanos a la unidad, siempre por encima de 0.9958 para la primera, segunda y tercera forma modal, e inferior a este valor sólo para la cuarta forma modal, para la que se obtiene un MAC mínimo de 0.9221 para la cota de llenado de 112 m. Por lo tanto, puede concluirse que la influencia de la interacción suelo-estructura sobre las formas modales del muro de la presa es despreciable en el caso de las tres primeras formas modales, pudiendo ser relevante únicamente en el caso de la cuarta forma para grandes alturas de llenado.

	$\phi_{\text{base flexible cota } 30,1}$ (3.79 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota } 30,2}$ (4.77 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota } 30,3}$ (6.16 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota } 30,4}$ (7.46 Hz)
$\phi_{\text{base rígida cota } 30,1}$ (4.01 Hz)	0.9992	1.1254e-05	1.1212e-04	0.0200
$\phi_{\text{base rígida cota } 30,2}$ (5.02 Hz)	5.9838e-06	0.9996	0.0018	0.9359
$\phi_{\text{base rígida cota } 30,3}$ (6.42 Hz)	0.0011	7.9346e-04	0.9958	0.0489
$\phi_{\text{base rígida cota } 30,4}$ (7.80 Hz)	0.0053	0.9530	0.0312	0.9958

Tabla 3.13: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas del modelo en base rígida y del modelo base flexible para $H=30$ m.

	$\phi_{\text{base flexible cota 50,1}}$ (3.79 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota 50,2}}$ (4.76 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota 50,3}}$ (6.15 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota 50,4}}$ (7.35 Hz)
$\phi_{\text{base rígida cota 50,1}}$ (4.01 Hz)	0.9992	1.0074e-05	9.1160e-06	0.0182
$\phi_{\text{base rígida cota 50,2}}$ (5.02 Hz)	5.3017e-06	0.9996	2.0789e-04	0.9528
$\phi_{\text{base rígida cota 50,3}}$ (6.42 Hz)	0.0011	7.8725e-04	0.9981	0.0326
$\phi_{\text{base rígida cota 50,4}}$ (7.46 Hz)	0.0031	0.9716	0.0259	0.9941

Tabla 3.14: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas del modelo en base rígida y del modelo base flexible para $H=50$ m.

	$\phi_{\text{base flexible cota 76,1}}$ (3.75 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota 76,2}}$ (4.57 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota 76,3}}$ (6.15 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota 76,4}}$ (7.22 Hz)
$\phi_{\text{base rígida cota 76,1}}$ (4.00 Hz)	0.9992	9.3612e-05	2.0555e-04	0.0018
$\phi_{\text{base rígida cota 76,2}}$ (4.90 Hz)	1.7520e-05	0.9994	0.0095	0.9937
$\phi_{\text{base rígida cota 76,3}}$ (6.42 Hz)	6.2780e-04	0.0016	0.9974	0.0046
$\phi_{\text{base rígida cota 76,4}}$ (7.30 Hz)	0.0073	0.9710	0.0038	0.9873

Tabla 3.15: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas del modelo en base rígida y del modelo base flexible para $H=76$ m.

	$\phi_{\text{base flexible cota 112,1}}$ (3.17 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota 112,2}}$ (3.32 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota 112,3}}$ (5.29 Hz)	$\phi_{\text{base flexible cota 112,4}}$ (6.38 Hz)
$\phi_{\text{base rígida cota 112,1}}$ (3.40 Hz)	0.9989	0.0293	8.6612e-04	0.0265
$\phi_{\text{base rígida cota 112,2}}$ (3.65 Hz)	0.0250	0.9975	0.0043	0.9074
$\phi_{\text{base rígida cota 112,3}}$ (5.57 Hz)	0.0018	0.0054	0.9962	0.0146
$\phi_{\text{base rígida cota 112,4}}$ (6.55 Hz)	0.0228	0.8338	0.0409	0.9221

Tabla 3.16: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación obtenidas del modelo en base rígida y del modelo base flexible para $H=112$ m.

3.7. Resultados experimentales y calibración del modelo numérico

Una vez se han obtenido numéricamente las cuatro primeras frecuencias naturales del muro, así como sus correspondientes formas modales, se presenta en esta sección la calibración del modelo numérico a partir de la frecuencia fundamental estimada mediante el Análisis Modal Operacional (OMA) realizado a partir de la medición de las vibraciones ambientales de bajo nivel a lo largo de la coronación del muro de la presa. Los detalles de esta campaña de mediciones experimentales, y de la metodología utilizada, pueden encontrarse en el capítulo 5. Cabe destacar que, en esta campaña, llevada a cabo para calibrar las

propiedades mecánicas del muro, se emplearon dos equipos de medición sincronizados. También, es importante destacar que el embalse estaba prácticamente sin agua, por ello, estas medidas experimentales se compararán con las numéricas para los casos de embalse sin agua. La estimación del valor experimental de la segunda y cuarta frecuencia natural del muro se expone en el capítulo 4, estando la cota de agua en dicha campaña sobre los 50 m. No obstante, como se ha demostrado numéricamente, para esta cota de agua, no hay prácticamente variación en las tres primeras frecuencias naturales del muro respecto al caso de embalse sin agua. En este apartado se mostrarán únicamente algunos resultados, con el fin de explorar la validez del modelo y de calibrar las propiedades mecánicas del muro de la presa.

En las tablas 3.17 y 3.18 se presentan sendas comparativas entre las frecuencias naturales obtenidas experimentalmente (f_{AV}) y las obtenidas con el modelo numérico (f_{MEC}), para el modelo de cañón recto trapezoidal (tabla 3.17) y para el modelo de cañón topográfico (tabla 3.18). Cabe enfatizar que las frecuencias numéricas han sido obtenidas de los picos máximos del valor absoluto de las FRFs, para el caso de embalse sin agua. Ello permite una comparación directa con las frecuencias estimadas experimentalmente. Se ha partido de la frecuencia fundamental experimental para adaptar el módulo de elasticidad transversal, siendo su nuevo valor $G = 7.7$ GPa ($G = (3.65/3.77)^2 \cdot 8.16 = 7.7$ GPa), es decir, un 5.6% más bajo que el inicial. Utilizando este módulo de elasticidad transversal calibrado para el material del muro de la presa, se obtienen las tres primeras frecuencias naturales numéricas correspondientes a las tres primeras formas modales (tablas 3.17 y 3.18).

Resultados experimentales		Propiedades iniciales		Propiedades actualizadas	
MODO	f_{AV} (Hz)	f_{MEC} (Hz)	ε (%)	f_{MEC} (Hz)	ε (%)
1	3.65	3.77	3.28	3.65	0
2	4.65	4.75	2.15	4.62	0.64
3	5.87	6.15	4.77	5.95	1.36

Tabla 3.17: Comparación entre frecuencias experimentales (f_{AV}) y numéricas (f_{MEC}) para cañón recto trapezoidal. ε denota el error relativo.

Resultados experimentales		Propiedades iniciales		Propiedades actualizadas	
MODO	f_{AV} (Hz)	f_{MEC} (Hz)	ε (%)	f_{MEC} (Hz)	ε (%)
1	3.65	3.76	3.01	3.65	0
2	4.65	4.76	2.36	4.63	0.43
3	5.87	6.15	4.77	5.98	1.87

Tabla 3.18: Comparación entre frecuencias experimentales (f_{AV}) y numéricas (f_{MEC}) para cañón topográfico. ε denota el error relativo.

El error de cada frecuencia (ε) que se muestra en las tablas anteriores se contabiliza mediante el error relativo definido como:

$$\varepsilon(\%) = \frac{|f_{AV} - f_{MEC}|}{f_{AV}} \cdot 100 \quad (3.5)$$

Con el fin de verificar el modelo, se comparan, a continuación, las formas modales numéricas correspondientes a la primera y tercera formas modales con las estimadas a partir de los resultados experimentales del capítulo 5, ya que,

estas formas modales pudieron ser identificadas, claramente, de forma experimental con los 2 equipos de medición sincronizados.

La primera y tercera formas modales numéricas en coronación para el muro en cañón trapezoidal y en cañón topográfico se muestran en la figura 3.29, donde los círculos huecos negros representan las medidas experimentales en los ocho puntos de medición dispuestos según la figura 4.16.a del capítulo 4. La concordancia entre las formas modales numéricas y experimentales es bastante buena, especialmente para la primera. En relación a la tercera forma modal, se observa que la forma numérica obtenida con el cañón trapezoidal es principalmente simétrica, mientras que la obtenida experimentalmente muestra cierta asimetría tal y como sucede con la forma modal numérica obtenida empleando el cañón topográfico, lo que sugiere que tener en cuenta la asimetría del cañón es relevante para una representación más precisa de las formas modales del muro.

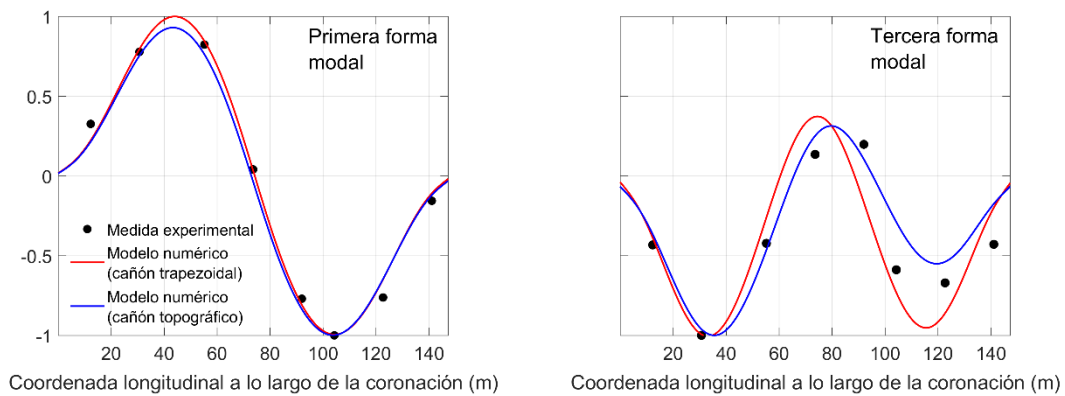


Figura 3.29: Comparación entre las primeras y terceras formas modales experimentales y numéricas en coronación

Para cuantificar la correlación entre las formas modales experimentales y numéricas se presentan en las tablas 3.19 y 3.20 las matrices MAC obtenidas con las formas modales experimentales y las numéricas con cañón recto trapezoidal (tabla 3.19) y topográfico (tabla 3.20). Los vectores modales se han obtenido con los valores de frecuencias correspondientes a los picos de mayor amplitud de las FRFs. Se observa una buena correlación entre las formas modales numéricas y las experimentales, con valores en la diagonal superiores al 90%, destacando que el valor MAC mejora en la tercera forma modal cuando se emplea el cañón topográfico, del 90.32% con cañón trapezoidal al 92.54% con cañón topográfico.

	$\phi_{e,1}$ (3.65 Hz)	$\phi_{e,3}$ (5.87 Hz)
$\phi_{n,1}$ (3.65 Hz)	0.9901	0.0089
$\phi_{n,3}$ (5.95 Hz)	0.0229	0.9032

Tabla 3.19: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación experimentales (e) y numéricas con cañón trapezoidal recto (n).

	$\phi_{e,1}$ (3.65 Hz)	$\phi_{e,3}$ (5.87 Hz)
$\phi_{n,1}$ (3.65 Hz)	0.9891	0.0090
$\phi_{n,3}$ (5.98 Hz)	0.0556	0.9254

Tabla 3.20: Matriz MAC de correlación entre las formas modales en coronación experimentales (e) y numéricas con cañón topográfico (n).

Por otra parte, en la campaña experimental explicada en el capítulo 5, la segunda forma modal no pudo ser identificada adecuadamente por encontrarse el modo muy poco excitado. No obstante, en la figura 3.30 se muestra una forma modal experimental frente a las segundas formas modales numéricas. La forma modal experimental se ha obtenido a partir de los espectros experimentales a unos 4.84 Hz, apreciándose una cierta similitud entre las segundas formas modales numéricas con la experimental. Esta forma modal experimental se puede dibujar porque, como se comentó anteriormente, la campaña experimental se llevó a cabo con 2 equipos de medición sincronizados, a diferencia de la campaña experimental del capítulo 4, en la que solamente se empleó un equipo de medición.

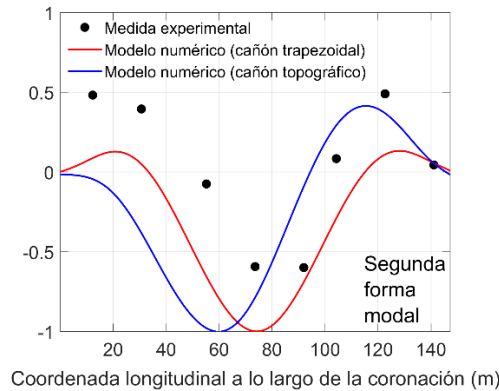


Figura 3.30: Comparación entre las segundas formas modales en coronación experimental, numérica con cañón trapezoidal y numérica con cañón topográfico

Para finalizar, la frecuencia correspondiente a la cuarta forma modal no pudo ser localizada en la campaña explicada en el capítulo 5. Sin embargo, en una de las campañas experimentales descritas en el capítulo 4, se identifica una frecuencia a unos 6.71 Hz, en el punto experimental que corresponde al punto de estudio 1. En la figura 3.31 se muestran las FRFs, con el módulo de elasticidad transversal calibrado, correspondientes al punto de estudio 1 para el modelo de cañón recto trapezoidal y cota de agua de 50 m (aproximadamente igual a la del día de recogida de datos). En esta figura se puede observar claramente una cuarta frecuencia a 6.63 Hz, muy cercana a los 6.71 Hz experimentales ($\varepsilon = 1.19\%$).

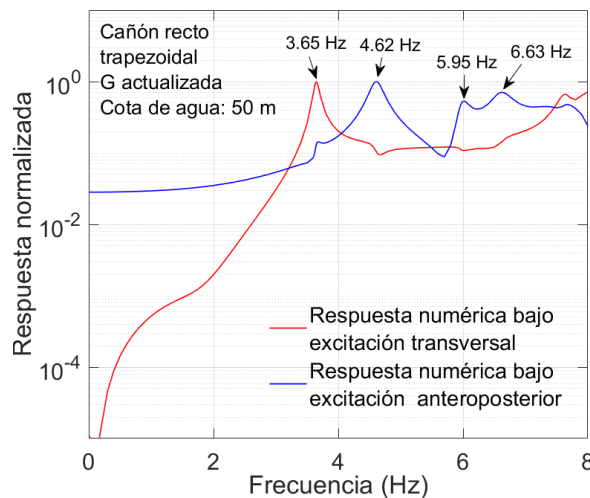


Figura 3.31: Respuestas numéricas en frecuencia normalizadas en el punto de estudio 1, para el modelo de cañón recto trapezoidal con una cota de agua de 50 m y propiedades actualizadas

3.8. Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado y validado un modelo numérico que puede ser empleado para futuros estudios basados en el comportamiento dinámico del muro de la presa de Soria, y especialmente, en aplicaciones de vigilancia o monitorización del estado estructural del muro de la presa. Las conclusiones extraídas de este estudio son:

- Se encuentra que la interacción suelo-estructura tiene una influencia significativa en la respuesta dinámica del sistema.
- La utilización de un cañón recto prismático en lugar de un cañón topográfico no da lugar a diferencias significativas en las frecuencias naturales del muro.
- Como era de esperar, las interacciones estructura-agua y suelo-estructura-agua, también tienen influencia en la respuesta del muro, apareciendo esta influencia a partir de la cota de agua de 50 m (42% de la altura del muro) y a la frecuencia de $f > 6.2$ Hz.
- La influencia de la condición de contorno de radiación en la respuesta dinámica es despreciable hasta la cota de agua estudiada de 76 m, sin embargo, para la cota de agua más alta del embalse, la consideración de la condición de contorno de radiación de Humar y Roufaiel con la frecuencia fundamental numérica proporciona mejores resultados que con la frecuencia fundamental analítica, destacando que la condición de contorno de radiación de Sommerfeld también da muy buenos resultados.
- El modelo numérico sin agua en el embalse se comprueba con mediciones experimentales, identificándose la primera y tercera frecuencias naturales del muro, así como sus formas modales. Se realiza una calibración del modelo numérico tomando como referencia la frecuencia fundamental del muro de la presa, siendo suficiente una actualización pequeña del valor del módulo de elasticidad transversal del muro de la presa.
- La buena correlación entre las frecuencias naturales numéricas y experimentales primera y tercera, así como entre sus formas modales, sugiere que el modelo numérico es apto para representar el comportamiento dinámico del muro bajo vibraciones de bajo nivel, si bien los modos segundo y cuarto no han podido ser validados porque no han podido ser identificados a partir de los resultados experimentales.
- La tercera forma modal obtenida con el modelo numérico empleando el cañón topográfico presenta una mejor correlación con la tercera forma modal experimental que la tercera forma modal obtenida con el modelo numérico con cañón trapezoidal recto. Ello es debido a que la tercera forma modal experimental presenta cierta asimetría, igual que la obtenida con el modelo numérico con cañón topográfico, mientras que la tercera forma modal para el modelo simplificado de cañón recto es prácticamente simétrica.

CAPÍTULO 4

SENSOR HORIZONTAL Y SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS DE BAJO COSTE PARA LA MEDICIÓN DE VIBRACIONES AMBIENTALES DE BAJO NIVEL

4.1. Introducción

Cuando la estructura en estudio es muy rígida, como en el caso de las presas de hormigón, y el nivel de excitación ambiental es muy pequeño debido a la ausencia de viento, descarga de agua u otras fuentes de vibración, los requisitos y los costos de los equipos necesarios para captar y procesar las vibraciones para la actualización de modelos numéricos y/o para monitorizar la salud estructural de estas infraestructuras tienden a ser elevados. Sin embargo, la disponibilidad de plataformas abiertas para la construcción de equipos para realizar este tipo de mediciones sería muy útil, no solo en la investigación sino también en marcos educativos, ya que permitiría a los estudiantes no solo usar la tecnología sino también participar en su desarrollo y aprender en los diferentes campos como son la dinámica estructural, electrónica o programación. Además, la accesibilidad a nuevos componentes electrónicos y microcontroladores, y sus precios, han ayudado a desarrollar sistemas donde los geófonos y los acelerómetros son los sensores más utilizados.

En este capítulo se presentan un sensor horizontal de bajo costo y un sistema de adquisición de datos para mediciones de vibraciones ambientales de bajo nivel. El sensor mecánico se basa en el diseño del péndulo de Lehman, también denominado Garden Gate, utilizando como transductor un imán de neodimio dentro de una bobina y un sistema de adquisición de datos basado en la plataforma Arduino. Para validarlo se han realizado dos pruebas de campo mediante vibración ambiental comparando las señales registradas por el sistema propuesto con las obtenidas por un sismógrafo comercial de alta precisión y alta sensibilidad. El resultado de esas pruebas ha demostrado la capacidad del sistema propuesto para adquirir y registrar señales de baja intensidad y también han puesto de manifiesto algunas de las limitaciones y áreas de mejora del sistema.

El contenido de este capítulo comienza en el apartado 4.2, con una descripción detallada de cada una de las cuatro partes de las que consta el sistema propuesto. A continuación, en el apartado 4.3, se deducen las ecuaciones matemáticas que conducen a la obtención de la frecuencia fundamental del péndulo. Posteriormente, en el apartado 4.4 se presentan los

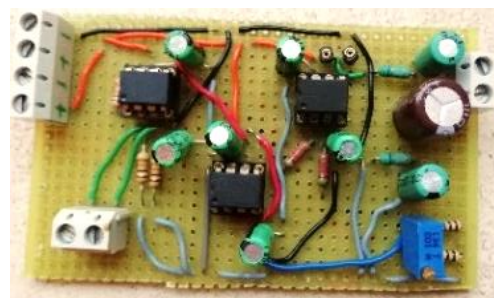
resultados obtenidos con el sistema de adquisición propuesto junto con los obtenidos por un sismógrafo comercial con el objetivo de validar el sistema propuesto. En el apartado 4.5 se identifican las primeras frecuencias naturales del muro de la presa de Soria con el sensor propuesto, y en el 4.6 se especifica el coste de los materiales y componentes empleados para la construcción del sistema. Por último, en el apartado 4.7. se exponen las conclusiones.

4.2. Descripción del sistema propuesto

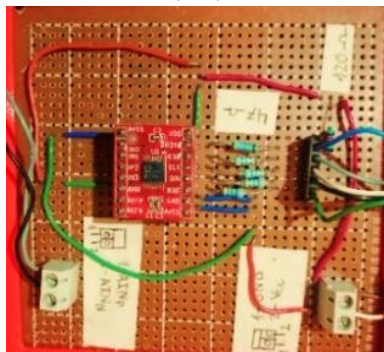
El sistema propuesto consta de cuatro partes diferentes: a) sensor; b) amplificadores, c) conversor analógico-digital; y d) un microcontrolador. Este diseño modular permite una mayor flexibilidad para futuras modificaciones (Fig.4.1).



(a.1)



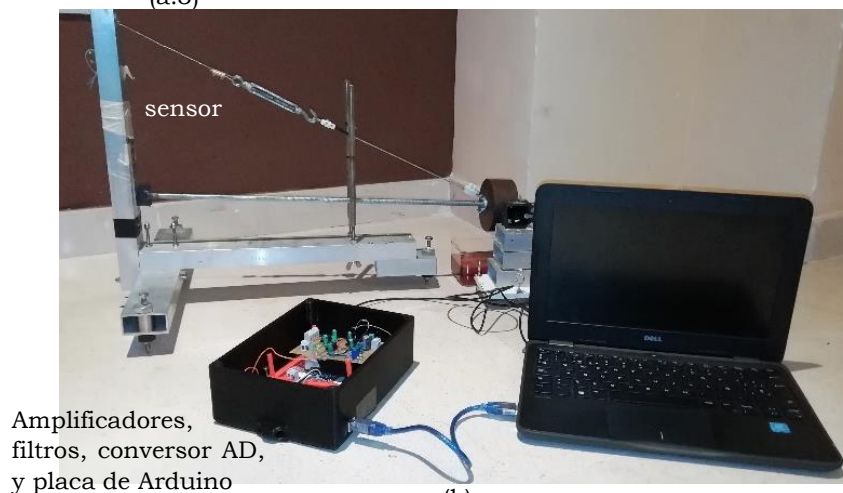
(a.2)



(a.3)



(a.4)



(b)

Figura 4.1: Componentes del sistema propuesto: (a.1) sensor, (a.2) amplificadores y filtros para acondicionar la señal, (a.4) convertidor analógico-digital, (a.4) convertidor analógico-digital conectado a la placa de Arduino. (b) Sensor y sistema de adquisición de datos controlado por ordenador

4.2.1. Sensor

Como se sabe, un acelerómetro es un instrumento que mide la aceleración de un cuerpo en vibración, pudiéndose ilustrar el concepto mediante un sistema de un grado de libertad (SDOF) de masa-resorte-amortiguador montado dentro de una caja unida a la superficie cuyo movimiento se va a medir, tal y como se muestra en la figura 4.2. La masa está conectada a la caja por un resorte y un amortiguador, mientras que la caja está unida al suelo. Como el resorte y el amortiguador no son rígidos, el movimiento de la masa será diferente al movimiento del suelo. El movimiento relativo entre la masa y la caja estará relacionado con el movimiento del suelo. Así, como se ilustra en la figura 3.2, los puntos 1 y 2 del resorte y el amortiguador, respectivamente, tendrán el mismo movimiento que la caja (que se va a medir, x_g) y su vibración excita la masa en movimiento.

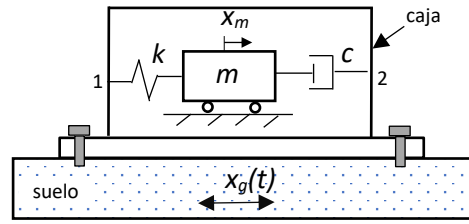


Figura 4.2: Simple sensor de masa-resorte-amortiguador para registrar movimientos horizontales

Siendo el desplazamiento de la masa relativo al de la caja $x = x_m - x_g$, donde x_m denota el desplazamiento horizontal de la masa, la ecuación de movimiento de la masa puede ser escrita como (ver p.e. [62]):

$$m\ddot{x}_m + c(\dot{x}_m - \dot{x}_g) + k(x_m - x_g) = 0 \quad (4.1)$$

Como se ha mencionado,

$$x = x_m - x_g \quad (4.2)$$

así que, la ecuación (4.1) puede ser escrita de la forma

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g(t) \quad (4.3)$$

Si se asume el movimiento de x_g armónico,

$$x_g(t) = X_g(\omega)\sin(\omega t) \quad (4.4)$$

donde ω es la frecuencia circular y $X_g(\omega)$ es la amplitud del desplazamiento de la base. La ecuación (4.3) se puede escribir como

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\omega^2 X_g(\omega) \sin(\omega t) \quad (4.5)$$

La solución particular de la ecuación (4.5) es también armónica. Se asume una solución particular de la forma

$$x_p(t) = X(\omega) \sin(\omega t - \phi) \quad (4.6)$$

donde $X(\omega)$ y ϕ , amplitud y ángulo de fase de la respuesta, respectivamente, son constantes para ser determinadas. Sustituyendo la ecuación (4.6) en la ecuación (4.5), llegamos a:

$$X(\omega)[(k - m\omega^2) \sin(\omega t - \phi) + c\omega \cos(\omega t - \phi)] = m\omega^2 X_g(\omega) \sin(\omega t - \phi) \quad (4.7)$$

Aplicando en la ecuación (4.7) las relaciones trigonométricas $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$ y $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$, donde $a = \omega t$ y $b = \phi$, e igualando los coeficientes de $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$ se tiene:

$$X(\omega)[(k - m\omega^2) \cos(\phi) + c\omega \sin(\phi)] = m\omega^2 X_g(\omega) \quad (4.8)$$

$$X(\omega)[-(k - m\omega^2) \sin(\phi) + c\omega \cos(\phi)] = 0 \quad (4.9)$$

La solución del sistema de ecuaciones correspondiente a las ecuaciones (4.8) y (4.9) da

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right) \quad (4.10)$$

$$\frac{X(\omega)}{X_g(\omega)} = \frac{m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (4.11)$$

Las ecuaciones (4.10) y (4.11) se pueden expresar en diferente forma introduciendo la notación

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.12)$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (4.13)$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (4.14)$$

donde ω_n es la frecuencia natural (no amortiguada), ξ es la fracción de amortiguamiento y r es la relación de frecuencias. Así, la ecuación (4.10) y la ecuación (4.11), pueden ser reescritas como

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1 - r^2} \right) \quad (4.15)$$

$$\frac{X(\omega)}{X_g(\omega)} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (4.16)$$

Por lo tanto, cuando $r \rightarrow \infty$, la ecuación (4.16) se puede escribir como

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{X(\omega)}{X_g(\omega)} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \approx 1 \quad (4.17)$$

Así, de acuerdo con la ecuación (4.17), para valores grandes de r , la amplitud del desplazamiento relativo ($X(\omega)$) y la del desplazamiento de la base ($X_g(\omega)$) es la misma, con lo que, para satisfacer la ecuación (4.17), la frecuencia natural del sensor debe ser más baja que las frecuencias de interés de la vibración a medir.

Las variaciones de $X(\omega)/X_g(\omega)$ con respecto a r se muestran en la figura 4.3 para diferentes valores de ξ . Como puede verse, la relación de amortiguamiento no necesita estar presente para satisfacer la ecuación (4.17),

pero su presencia mejorará el rango de aplicación del instrumento. Por ejemplo, para $\xi = 0.7$, $X(\omega) \cong X_g(\omega)$ si r es mayor que 2.

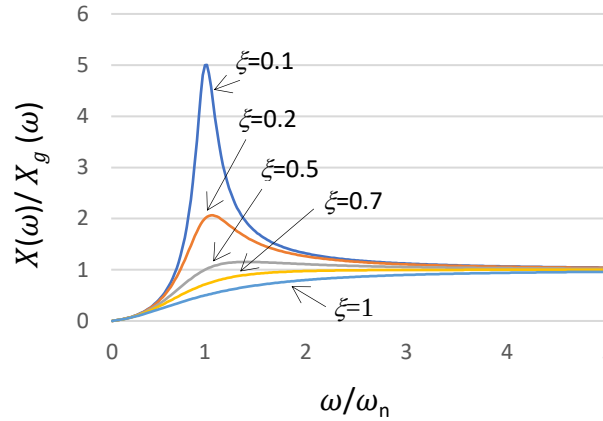


Figura 4.3: Respuesta de un instrumento de medición de vibraciones

El dispositivo propuesto en esta tesis se basa en el péndulo de Lehman [63], también llamado configuración Garden Gate, que es un péndulo horizontal basado en un sistema ligeramente inclinado respecto a la horizontal donde la masa del sistema tiende a permanecer suspendida. Cuando el suelo se mueve debido a las vibraciones provocadas por cualquier excitación, la masa suspendida del sistema tiende a permanecer estacionaria, por lo que podemos medir directamente el movimiento relativo entre el suelo y la masa suspendida mediante una bobina que convierte ese movimiento en una corriente eléctrica.

La estructura del sensor está realizada con aluminio extrusionado rectangular (5.00 cm x 2.50 cm) con dos barras horizontales y una barra vertical unidas entre sí mediante tornillos y tuercas. La figura 4.4.a muestra una imagen de la estructura del sensor, así como de la vista superior (Fig. 4.4.b), lateral izquierda (Fig. 4.4.c) y frontal (Fig. 4.4.d) de la estructura.

La figura 4.5 muestra una imagen del sensor. El brazo móvil, de 40 cm de longitud, descansa sobre una hoja de cúter que se sujeta contra la barra vertical [64]. La hoja de cúter es una parte muy importante del sistema ya que impide las oscilaciones torsionales del brazo móvil. El otro lado del brazo móvil, donde puede girar libremente, está sostenido por un freno de cable que está sujeto a la parte superior de la barra vertical [65]. En este lado se aprecia la masa unida al brazo móvil cuyo peso es de 1.65 kg. Para convertir la magnitud física que se desea medir en una señal eléctrica que pueda ser registrada, se utiliza una bobina (anclada al suelo) cuyo eje está alineado con un imán de neodimio (pegado a la masa vibrante del péndulo), de modo que el movimiento relativo de ambos genere una señal eléctrica proporcional a la velocidad del movimiento. Más concretamente, la bobina se ha montado sobre una base independiente de la estructura del sensor. Cuando el suelo se mueve, la estructura del sensor y la bobina se mueven al mismo tiempo mientras la masa permanece estacionaria. De esta forma, el movimiento relativo entre el imán (montado sobre la masa inercial) y la bobina induce una tensión eléctrica en la bobina que será amplificada y filtrada. (Fig. 4.6.a).

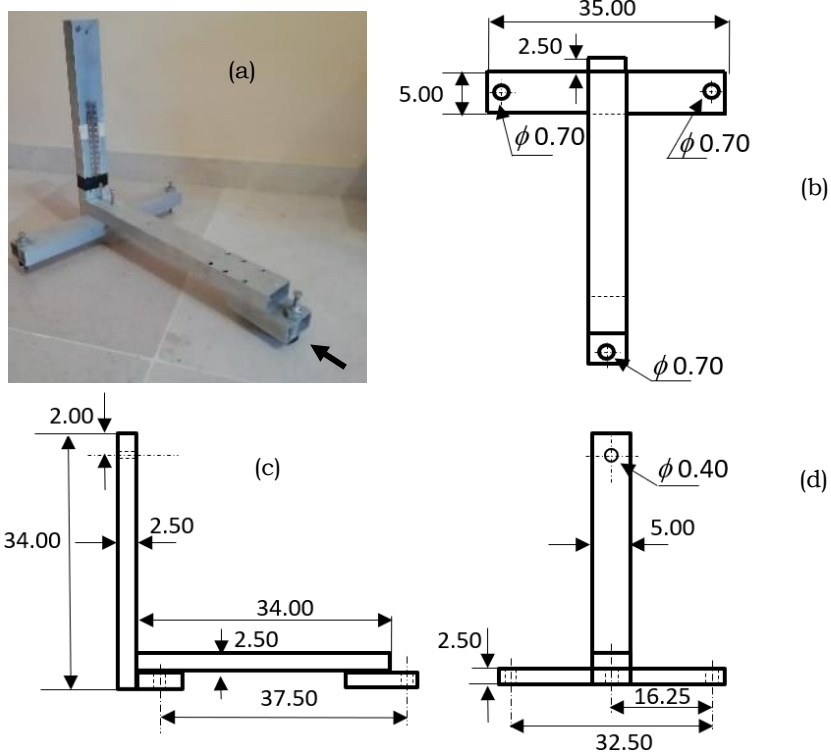


Figura 4.4: (a) Fotografía de la estructura del sensor. Vistas: (b) planta, (c) vista lateral izquierda, (d) alzado (cotas en cm)

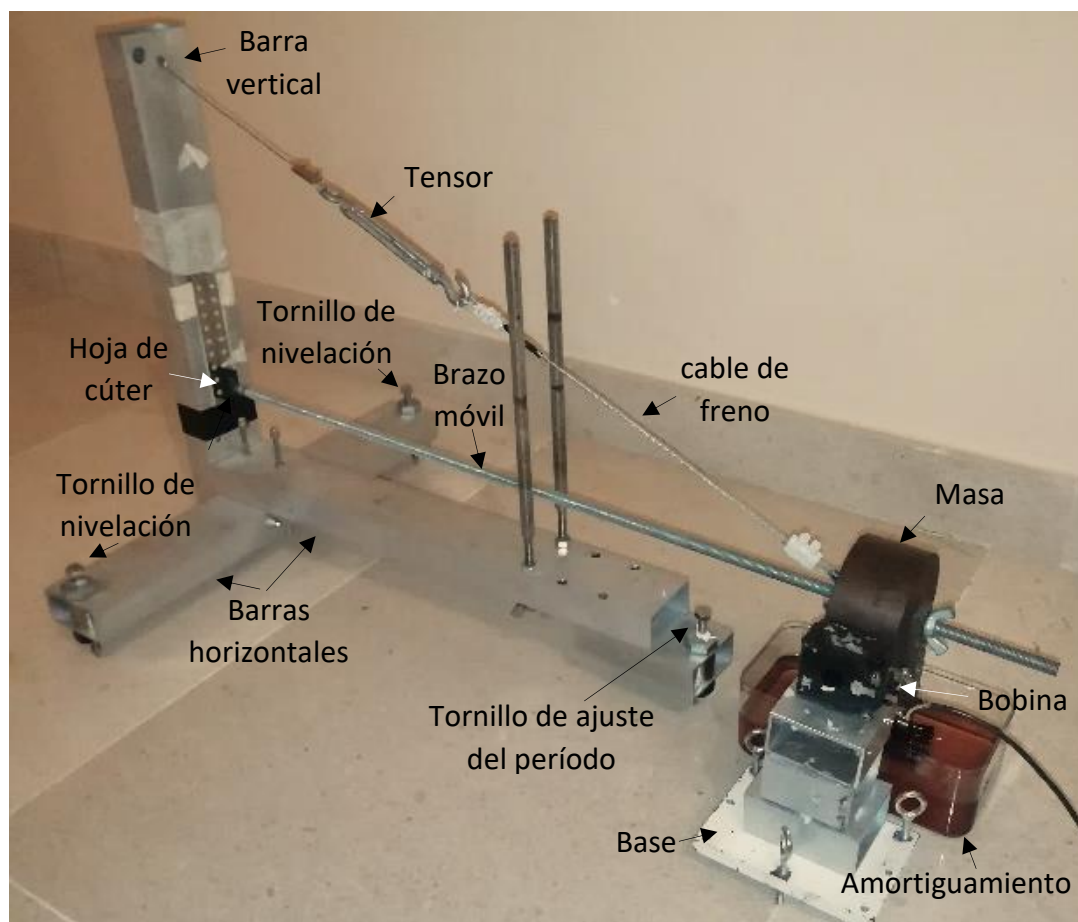


Figura 4.5: Sensor propuesto

Como se vio anteriormente, la introducción de amortiguamiento mejora el rango de aplicación del instrumento. Por esta razón, las oscilaciones del brazo móvil deben ser amortiguadas. Existen diferentes técnicas de amortiguación, pero en este trabajo la amortiguación se obtiene mediante amortiguamiento viscoso. Para ello, se dota al brazo móvil del péndulo de una pletina en donde se han soldado dos aletas que se sumergen en una cubeta llena con aceite de motor diésel monogrado (SAE 30) (Fig. 4.6.b). Una alternativa posible es la utilización de amortiguación magnética [63], pero durante las pruebas del prototipo se encontró que este tipo de amortiguamiento, a pesar de ser más limpio, es más complicado de controlar y ajustar, mientras que el amortiguamiento viscoso en aceite ofreció muy buenos resultados.

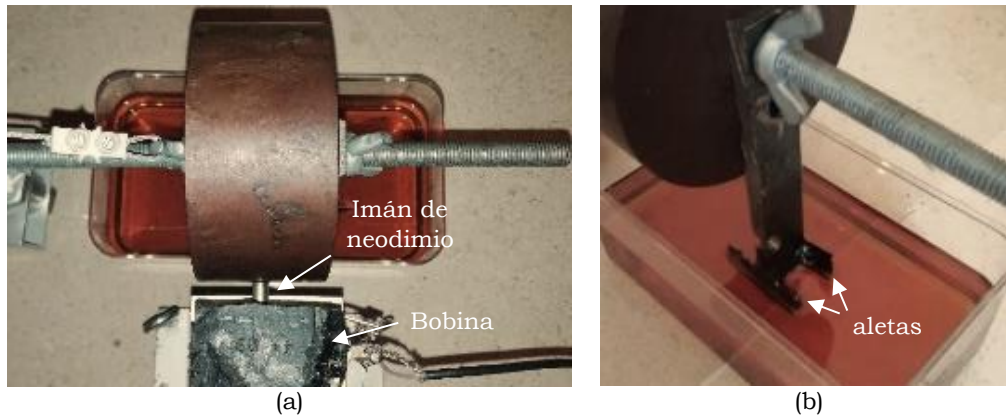


Figura 4.6. a) Imán de neodimio en la masa y bobina. b) aletas sumergidas en un recipiente con aceite de motor diesel

El sistema cuenta con dos tornillos de nivelación que tienen la finalidad de nivelar el brazo móvil, y con un tornillo de ajuste permite regular la inclinación del brazo móvil. Esta inclinación determina la frecuencia cíclica fundamental del sensor (ver apartado 4.3). Con este sensor, hemos alcanzado períodos de hasta 10 segundos (0.10 Hz), lo que permite medir vibraciones en estructuras con frecuencias naturales muy bajas.

4.2.2. Amplificador y filtros para el acondicionamiento de la señal

En la figura 4.7 se muestra el esquema electrónico diseñado y utilizado para realizar el acondicionamiento de la señal procedente de la bobina. El circuito está formado por cuatro etapas: 1) un amplificador de instrumentación de precisión; 2) un circuito de ajuste del offset; 3) un amplificador operacional; y 4) un filtro de entrada al conversor analógico-digital analógico. Estas cuatro etapas se alimentan con los mismos suministros duales, al menos ± 3.0 V, utilizando baterías externas.

4.2.2.1. Amplificador de instrumentación de precisión

La pequeña señal inducida en la bobina, proporcional a la velocidad del suelo, se amplifica utilizando un amplificador de instrumentación (Fig. 4.7 – etiqueta 1 o Fig. 4.8) que proporciona una señal de salida amplificada (V_o). El INA 114, que es amplificador de instrumentación de precisión de bajo costo, se ha seleccionado por ofrecer una precisión excelente y un ruido muy

bajo. La colocación de una resistencia externa (R_G) establece cualquier ganancia de 1 a 10000 [66], obteniéndose el valor de esta ganancia mediante la ecuación

$$G = 1 + \frac{50 \text{ k}\Omega}{R_G} \quad (4.18)$$

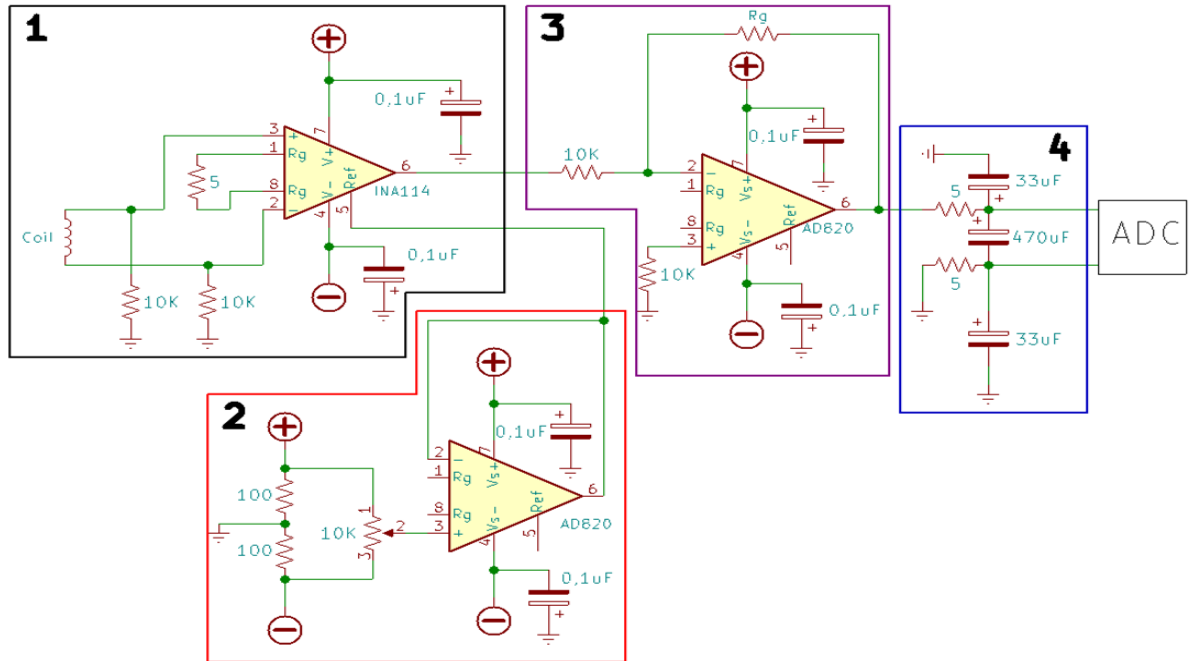


Figura 4.7. Esquema electrónico para el acondicionamiento de la señal

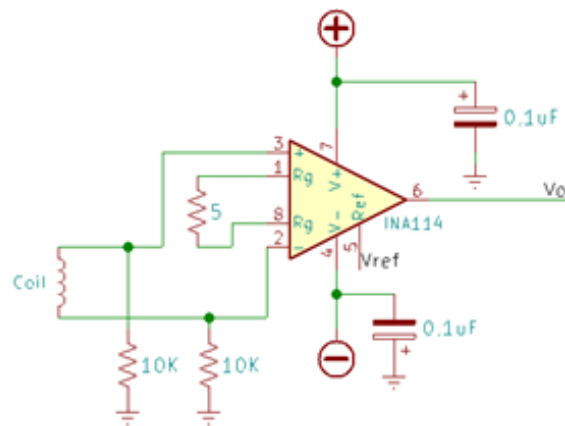


Figura 4.8: Amplificador de instrumentación de precisión

Se ha instalado una resistencia de 5Ω dando lugar a una ganancia de 10000 V/V, aproximadamente. La salida (V_0) se refiere al terminal de referencia de salida (Ref) que está conectada a tierra a través del circuito de ajuste del offset.

4.2.2.2. Circuito de ajuste del offset

La tensión de compensación se ajusta con el circuito de ajuste del offset que se muestra en la figura 4.7 - etiqueta 2 o en la figura 4.9, sumando la tensión aplicada al terminal Ref a la salida.

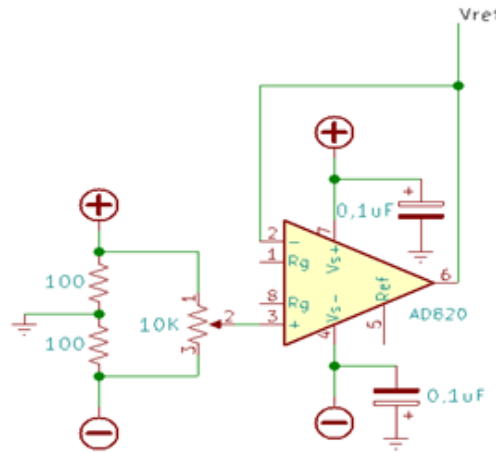


Figura 4.9: Circuito de ajuste del offset

4.2.2.3. Amplificador operacional

A continuación, se lleva a cabo una segunda amplificación. La señal de salida del INA114 (V_o) es amplificada por un amplificador operacional (Fig. 4.7 – etiqueta 3) donde el valor de esta ganancia se obtiene a través de la siguiente ecuación:

$$G' = \frac{R'}{10 \text{ k}\Omega} \quad (4.19)$$

Esta ganancia dependerá del valor de la resistencia R' que se instale. Se ha elegido como amplificador el AD820, que es un amplificador operacional de entrada FET de precisión y baja potencia que puede funcionar con un suministro único de 5 V a 36 V, o suministros duales de $\pm 2,5 \text{ V}$ a $\pm 18 \text{ V}$. En el AD820, los JFET de canal N se utilizan para proporcionar una etapa de entrada de alta impedancia, bajo nivel de ruido y bajo desplazamiento [67].

4.2.2.4. Filtro de entrada analógico

El filtrado de entrada analógica tiene tres propósitos: primero, limitar el efecto del aliasing durante el proceso de muestreo, segundo, reducir el ruido externo para que no sea parte de la medición y tercero, filtrar señales de alta frecuencia. Por tanto, se colocará un filtro resistencia-condensador (RC) de paso bajo en la entrada del convertidor analógico a digital para mejorar el rendimiento (Fig. 4.10). R_1/R_2 y C_1/C_2 forman un circuito de puente, por lo que cualquier desajuste entre C_1 y C_2 desequilibrará el puente y reducirá el rechazo de modo común; para evitarlo, se coloca un condensador de

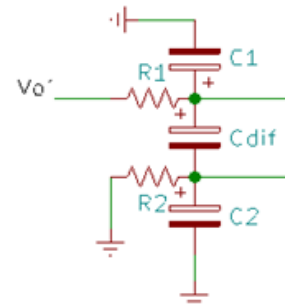


Figura 4.10: Filtro RC de paso bajo

entrada diferencial, C_{dif} , que mitiga los efectos de desajuste en C_1 y C_2 , reduciéndose el efecto de desajuste con un C_{dif} mayor ($C_{dif} \geq 10 \cdot C_1$, $C_1 = C_2$) [68].

Considerando que las frecuencias que nos interesan están por debajo de los 10 Hz, la frecuencia de corte ha sido configurada aproximadamente a 35 Hz, por lo tanto, al aplicar la ecuación (4.20) resulta un C_{dif} de 470 μF , y podemos seleccionar un $C_1(=C_2)$ de 33 μF (Fig. 4.7 – etiqueta 4 o Fig. 4.11). Esta señal de salida se conectará directamente al convertor analógico-digital.

$$f_{cut\ off} = [2\pi(R_1 + R_2) \cdot C_{dif}] \quad (4.20)$$

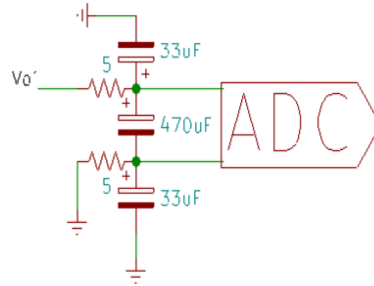


Figura 4.11: Filtro de entrada analógico

4.2.3. Conversor analógico-digital

A continuación, tras el proceso de amplificación y filtrado, la señal es digitalizada gracias a un convertidor analógico-digital (ADC). Se ha seleccionado el convertidor analógico-digital ADS1220, de precisión de 24 bits, con muchas características integradas para reducir el costo del sistema y la cantidad de componentes en aplicaciones que miden señales de sensores pequeños, con un amplio rango de suministro, de 2.30 a 5.50 V. En el sistema propuesto, la alimentación del ADC es proporcionada con el pin de 3.30 V del Arduino UNO. Además, presenta bajo ruido, alta impedancia de entrada y cuenta con un amplificador de ganancia programable la cual se cambia dentro del dispositivo con una resistencia variable [68]. En este caso, se ha seleccionado una ganancia de 128 obteniendo una escala completa de tensión de entrada de ± 0.016 V. Las principales conexiones de la interfaz para el ADS1220 se muestran en la figura 4.12.

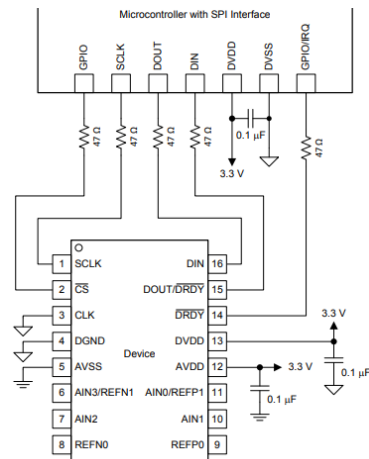


Figura 4.12: Conexiones de la interfaz del ADS 1220 [68]

Es importante remarcar que durante las pruebas se encontraron desviaciones en el reloj interno del ADS1220 de alrededor del 2%, lo que implica la necesidad de una corrección posterior de la tasa de muestreo de dicho -2%, es decir, que tasas de muestreo especificadas digitalmente a 90.00 Hz, producen muestreos cuya frecuencia real es 88.20 Hz. Sobre la tasa de muestreo, es necesario también destacar que, aunque el convertidor ADS1220 permite tasas de muestreo de hasta 2000 muestras por segundo, su utilización para este fin utilizando la placa Arduino UNO no permite trabajar de manera fiable con tasas de muestreo superiores a 90Hz. Durante los ensayos se constató que a tasas

superiores se producen pérdidas de registros (medidas que no llegan a ser registradas por falta de velocidad del microprocesador montado en el Arduino UNO). Estas tasas de muestro pueden aumentarse, pero utilizando placas Arduino superiores.

4.2.4. Microcontrolador

La placa Arduino UNO se ha empleado para comandar al convertidor analógico-digital, procesar la información y enviar los datos al ordenador a través del puerto USB. Arduino Uno es una placa de microcontrolador de código abierto basada en el microcontrolador Microchip ATmega 328P y desarrollada por Arduino.cc, la cual está equipada con conjuntos de pines de entrada/salida digitales y analógicas que pueden ser conectados a varias placas y a otros circuitos.

La comunicación entre Arduino y el conversor analógico-digital ADS1220 se realiza a través de las librerías específicas facilitadas por *Protocentral* a través del repositorio https://github.com/Protocentral/Protocentral_ADS1220. Para este proyecto en particular, se hizo uso de la versión 1.0.0 de esta librería, que contiene los ficheros *Protocentral_ADS1220.cpp* y *Protocentral_ADS1220.h*, y un ejemplo de uso a partir del que se desarrolló el código *.ino* utilizado para la realización de las medidas, que se muestra a continuación:

```
#include <SPI.h>
#include "Protocentral_ADS1220.h"
#define PGA 1          // Programmable Gain = 1
#define VREF 2.048     // Internal reference of 2.048V
#define VFSR VREF/PGA
#define FSR (((long int)1<<23)-1)

volatile byte MSB;
volatile byte data;
volatile byte LSB;
volatile byte *SPI_RX_Buff_Ptr;
Protocentral_ADS1220 ADS1220;

void setup()
{
    pinMode(ADS1220_CS_PIN, OUTPUT);
    pinMode(ADS1220_DRDY_PIN, INPUT);
    ADS1220.begin();
    ADS1220.set_data_rate(DR_90SPS);
    Serial.begin(9600);
    delay(2000);
}

void loop()
{
    long int bit32;
    long int bit24;
    byte *config_reg;
    SPI_RX_Buff_Ptr = ADS1220.Read_Data();
    if (ADS1220.NewDataAvailable == true)
    {
        ADS1220.NewDataAvailable = false;
        MSB = SPI_RX_Buff_Ptr[0];
        data = SPI_RX_Buff_Ptr[1];
    }
}
```

```

LSB = SPI_RX_Buff_Ptr[2];
bit24 = MSB;
bit24 = (bit24 << 8) | data;
bit24 = (bit24 << 8) | LSB;
bit24 = ( bit24 << 8 );
bit32 = ( bit24 >> 8 );
float Vout = (float)((bit32 * VFSR * 1000) / FSR);
Serial.println(Vout,4);
}
}

```

4.3. Modelo matemático del péndulo de Lehman

Para obtener la frecuencia circular natural del sensor y la relación de amortiguamiento, se considerará el modelo que se muestra en la figura 4.13, que consta de una masa m que oscila en el extremo de una barra rígida sin masa pivotada en el punto O con una longitud l . Dicha barra va anclada a un chasis rígido (representado en color azul en la figura 4.13) formado por una base casi horizontal y un mástil perpendicular a dicha base, siendo posible controlar la inclinación de la barra y del chasis respecto a la horizontal (ángulo α). El sistema, montado de esta manera, se comporta como un péndulo de suspensión clásico con una longitud l' mucho mayor que l . Teniendo en cuenta que el objetivo es obtener un péndulo con una frecuencia propia lo más baja posible, y que el periodo de un péndulo simple de suspensión es directamente proporcional a la raíz de su longitud, un péndulo de Lehman con un ángulo de inclinación α muy pequeño pero superior a cero, será equivalente a un péndulo simple de una longitud muy grande. Dicho péndulo simple estaría suspendido de un punto de suspensión imaginario O' (ver figura 4.13).

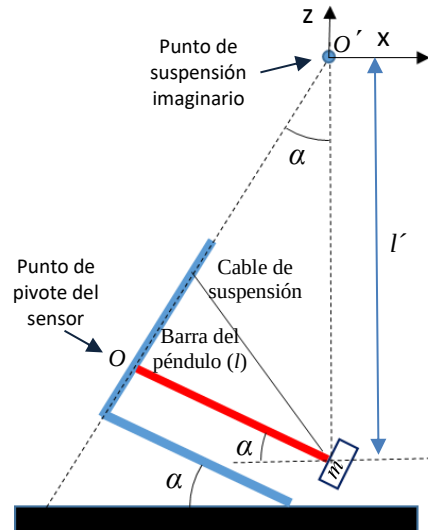


Figura 4.13: Esquema del sensor con ángulo de inclinación (α) exagerado [63]

En la figura 4.14.a, el péndulo está en su posición de equilibrio; cuando la masa es desplazada de su posición de equilibrio un ángulo pequeño θ' y liberada, aparece una fuerza restauradora (Fig.4.14.b), siendo la fuerza de amortiguamiento que actúa en el extremo de la barra rígida $\vec{f}_d = -c \cdot \vec{v}$, donde c es el coeficiente de amortiguamiento viscoso y $\vec{v}$ es la velocidad de la masa, cuya magnitud puede expresarse como $v = l' \cdot \dot{\theta}'$, siendo $\dot{\theta}'$ la velocidad angular de la masa ($\dot{\theta}' = d\theta'/dt$). Por otra parte, a_t es la componente tangencial de la

aceleración de la masa m , cuya expresión viene dado por $a_t = l' \cdot \ddot{\theta}'$, siendo $\ddot{\theta}'$ la aceleración angular de la masa ($\ddot{\theta}' = d\dot{\theta}'/dt$). Tomando sumatoria de momentos respecto a O' :

$$-mg \sin(\theta') l' - c\dot{\theta}' l' l' = m\ddot{\theta}' l' l' \quad (4.21)$$

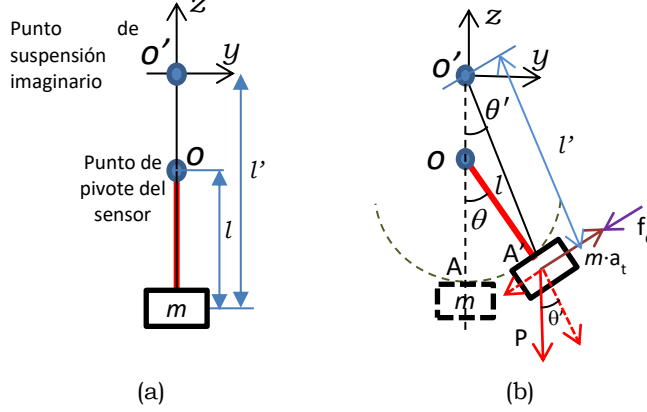


Figura 4.14: Péndulo desde el plano y - z : (a) posición de equilibrio (b) masa desplazada un ángulo pequeño θ'

El movimiento puede ser considerado como un movimiento armónico simple. Por otro lado, al ser θ' pequeño, puede asumirse que $\sin \theta' \cong \theta'$, por lo que operando con la ecuación (4.18) tenemos:

$$\ddot{\theta}' + \frac{c}{m} \cdot \dot{\theta}' + \frac{g}{l'} \cdot \theta = 0 \quad (4.22)$$

De la figura 4.13 se obtiene que $\sin \alpha = l/l'$, y de la figura 4.14.b se llega a la relación $\theta' = \theta \cdot l/l'$. Así, operando con la ecuación (4.22) se obtiene la relación

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m} \cdot \dot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \sin \alpha \cdot \theta = 0 \quad (4.23)$$

siendo la ecuación (4.23) la ecuación que gobierna el movimiento libre del péndulo de Lehman. La frecuencia natural (no amortiguada) del sensor se obtendrá de la ecuación (4.23) cuando $c = 0$, por tanto,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \sin \alpha \cdot \theta = 0 \quad (4.24)$$

La solución de la ecuación diferencial lineal, homogénea, de segundo orden con coeficientes constantes (4.24), tiene la forma $\theta = e^{\lambda t}$. Así, sustituyendo en la ecuación (4.24) se llega a:

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} \cdot \sin \alpha = 0; \lambda_{1,2} = \pm i\omega_n \quad (4.25)$$

donde ω_n es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l} \sin \alpha} \quad (4.26)$$

Así, la ecuación diferencial de movimiento, ecuación (4.23), tras realizar algunas operaciones básicas de reordenamiento y simplificación, y teniendo en cuenta la ecuación (4.13), se convierte en:

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \quad (4.27)$$

De acuerdo con la ecuación (4.26), la frecuencia de resonancia en un péndulo Lehman depende de la longitud del brazo móvil y del ángulo de la estructura α con respecto al plano horizontal.

4.4. Validación experimental del sensor

Con el fin de verificar el comportamiento del sistema, en este apartado se presenta una comparación entre medidas tomadas utilizando el sistema descrito, y medidas obtenidas haciendo uso de un equipo científico comercial de referencia. El equipo comercial utilizado es el Tromino Blu® de MoHo s.r.l., que es un sistema de alta resolución y bajo ruido para la identificación y monitorización de estructuras y suelos. Se han realizado dos campañas experimentales bajo excitación ambiental, la primera en un edificio situado en la ciudad de Las Palmas de Gran Canaria y la segunda en la coronación del muro de la presa de Soria.

4.4.1. Medidas de vibraciones en un edificio de cinco plantas

La primera campaña tuvo lugar el 20 de junio de 2019. Los equipos de medición se instalaron en el tercer piso de un edificio de cinco plantas ubicado en la ciudad de Las Palmas de Gran Canaria. En la figura 4.15.b. se especifican los puntos de la vivienda donde se tomaron medidas, donde las flechas indican la orientación de las mismas. Ambos equipos se instalaron en el mismo lugar pero las mediciones se realizaron en diferentes momentos con una diferencia de 30 minutos entre una y otra. El tiempo de toma de datos fue de 15 minutos y las frecuencias de muestreo fueron de 128 y 88.20 Hz para el Tromino Blu® y sensor descrito, respectivamente.

En la columna izquierda de la figura 4.15 se presentan los espectros de densidad espectral de potencia (PSD) de Welch correspondientes a las mediciones de vibración en tres dependencias de la vivienda. Nótese que la amplitud de la señal obtenida con el sensor propuesto ha sido escalada de manera que la magnitud de la primera frecuencia natural sea comparable en ambos sistemas. Puede observarse una muy buena concordancia entre los dos sistemas, estando las frecuencias de ambos dispositivos muy cercanas, con una divergencia máxima aproximada de 0.05 Hz.

Cabe señalar un pico de frecuencia resaltado en rectángulo negro con valores de 0.121, 0.129 y 0.161 Hz (equivalentes a 8.26, 7.75 y 6.21 s). Este pico corresponde a la frecuencia fundamental del sensor registrada en cada medida, que como se mostró en la ecuación (4.26), depende del ángulo de la estructura con respecto al plano horizontal α y de la longitud del brazo móvil (en el sensor utilizado, la longitud del brazo móvil es de 40 cm). Estas frecuencias fundamentales del sensor nos muestran la variabilidad entre una configuración y otra, si bien cabe enfatizar que estas variaciones no influyen en el valor numérico de las vibraciones obtenidas con el sensor descrito ya que las

frecuencias fundamentales del sensor presentan valores muy inferiores a los de las vibraciones de interés.

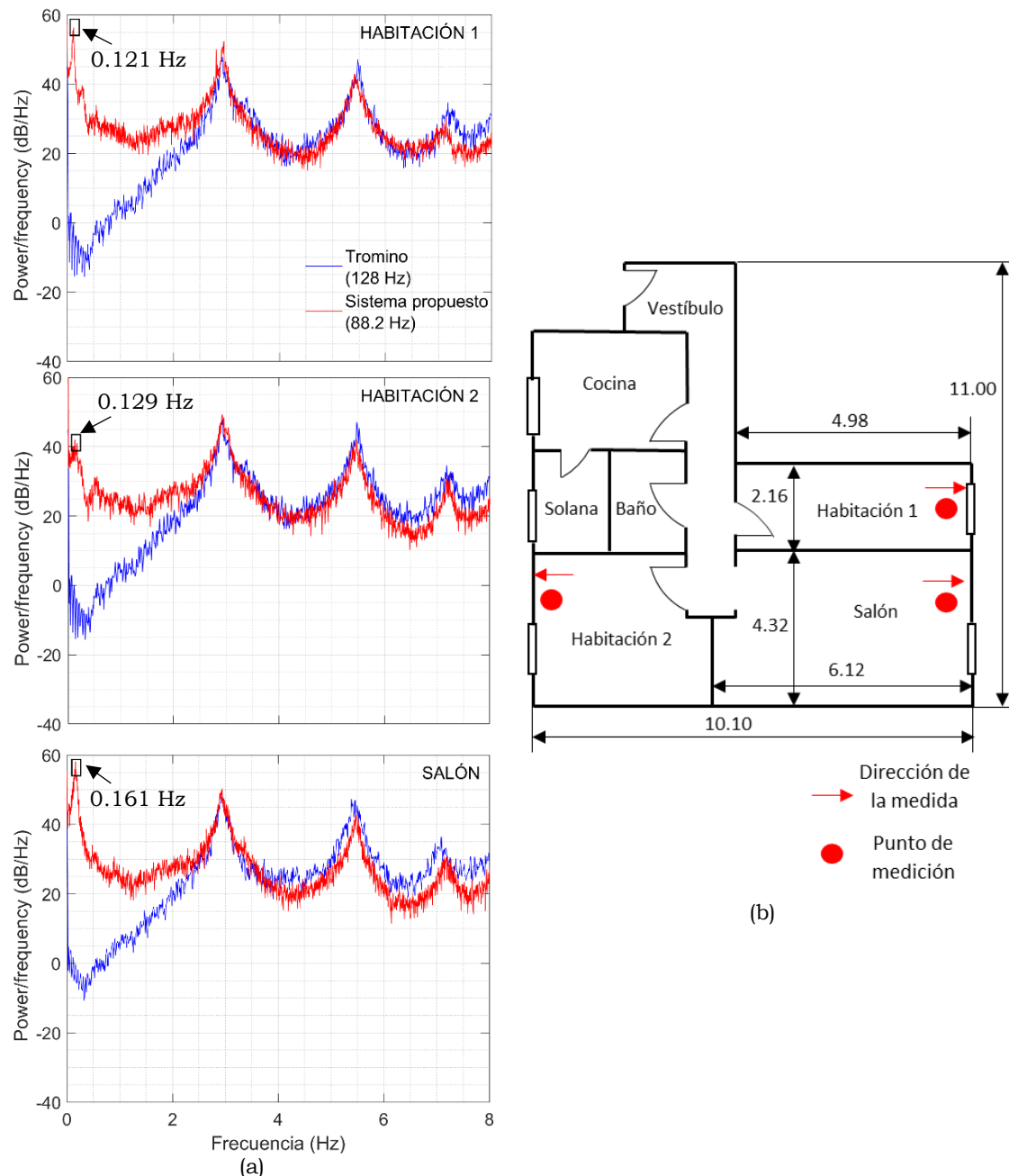


Figura 4.15: (a) Comparación entre los espectros PSD de Welch de las vibraciones medidas con el sistema propuesto y con el sensor comercial de referencia Tromino Blu®. (b) Plano de la vivienda (cotas en m)

4.4.2. Medidas de vibraciones en la coronación del muro de la presa de Soria

La segunda campaña se realizó en el muro de la presa de Soria y tuvo lugar el 27 de junio de 2019, con una altura aproximada de agua de 50 m. Los puntos donde se colocaron los equipos de medición fueron el P2, P3, P4, P6 y P7 (Fig 4.16.a), ya que en estos puntos se producen los mayores

desplazamientos modales, tal y como se desprende del análisis modal y/o armónico expuesto en el capítulo 3 (ver Fig. 3.9); en la figura 4.16.b se muestra una perspectiva del muro de la presa. Como esta campaña se llevó a cabo en el exterior, el sistema propuesto se ha protegido del viento mediante una caja (Fig. 4.17). Los equipos de medición se instalaron cerca uno del otro, realizándose las mediciones en el mismo tiempo. Es importante señalar que las mediciones se realizaron en la dirección perpendicular al muro. En esta campaña, el tiempo de toma de datos fue de 15 minutos en cada una de las dos mediciones realizadas en cada punto, mientras que las frecuencias de muestreo fueron de 512 y 88.20 Hz para el Tromino Blu® y sistema propuesto, respectivamente.

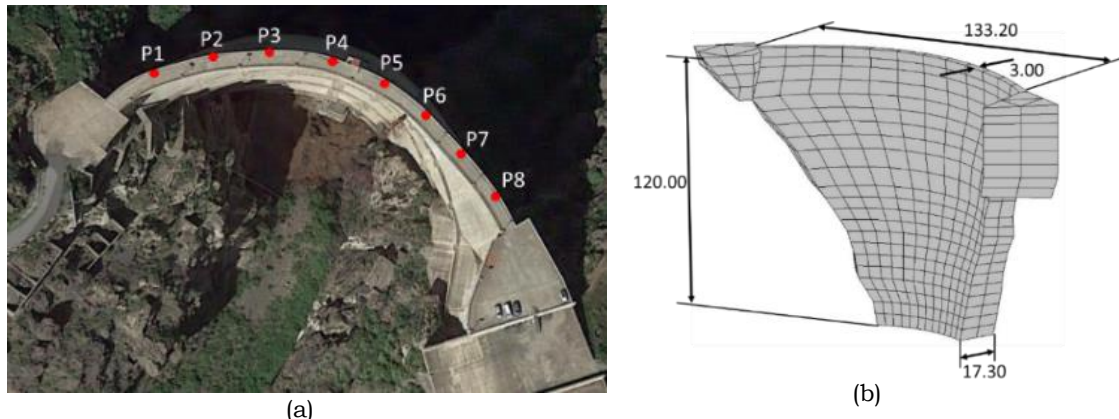


Figura 4.16: (a) Puntos de medición en el muro de la presa de Soria. (b) Perspectiva del muro de la presa (cotas en m)



Figura 4.17: (a) Sistema propuesto dentro de la caja de protección. (b) Caja de protección del sistema propuesto y Tromino Blu®

Las figuras 4.18 y 4.19 muestran los espectros PSD de Welch de los cinco puntos de medición nombrados anteriormente. Como se dijo con anterioridad, el pico de frecuencia que está resaltado en rectángulo negro corresponde a la frecuencia fundamental del sensor, llegándose a alcanzar una frecuencia fundamental de 0.091 Hz (11 s, aproximadamente). Al igual que en el apartado anterior, la amplitud de la señal obtenida con el sensor propuesto ha sido escalada de manera que la magnitud de la primera frecuencia natural sea comparable en ambos sistemas. En algunos de los espectros mostrados en las figuras 4.18 y 4.19, aparece un pico en torno a los 2 Hz que podría relacionarse con una forma modal, pero tal y como se explicará en el capítulo 5, este pico corresponde a la frecuencia natural de los postes de las luminarias instaladas en la coronación del muro. La primera frecuencia natural del muro de la presa se localiza en torno a 3.65 Hz.

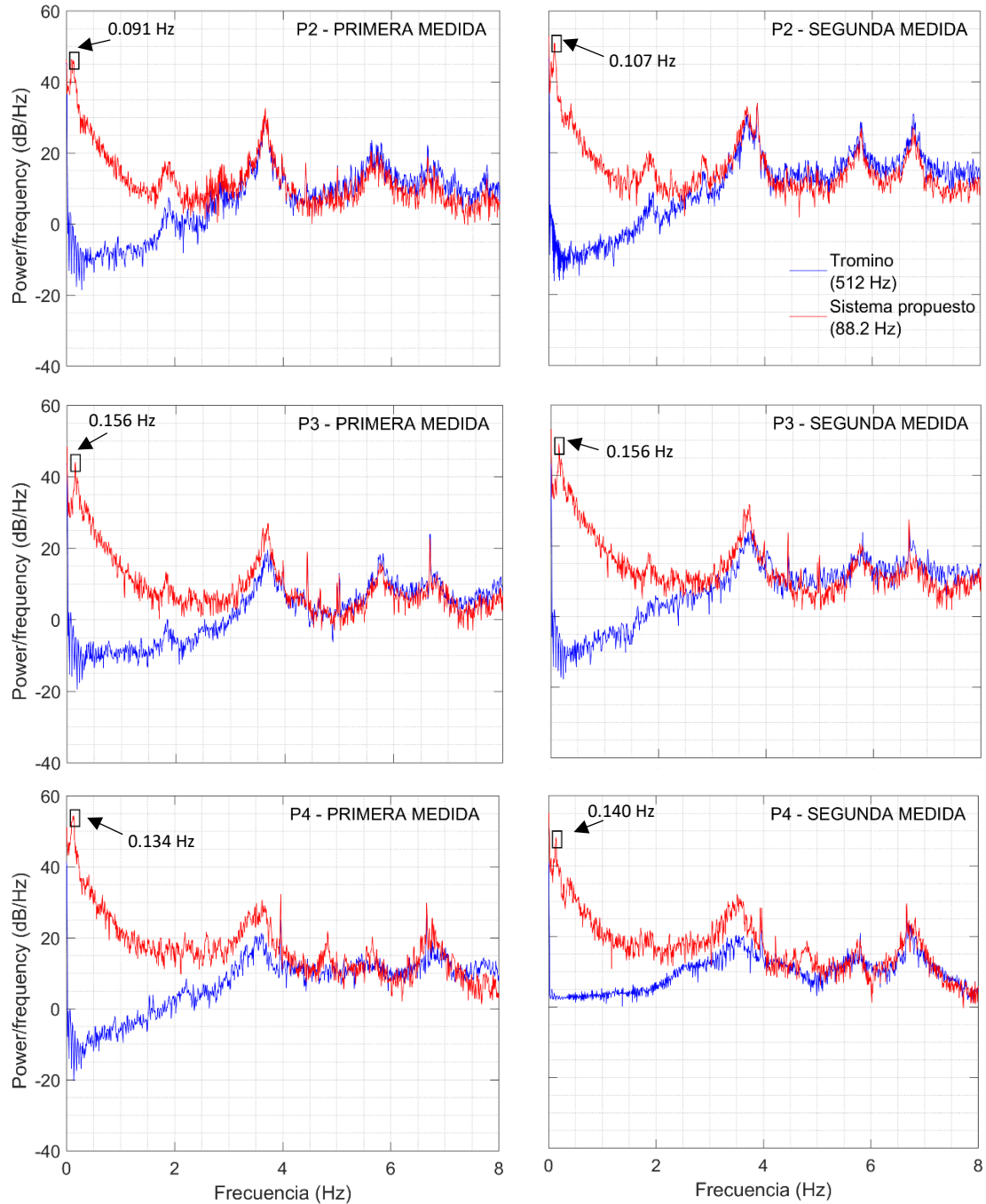


Figura 4.18: Comparación entre los espectros PSD de Welch de las vibraciones medidas con el sistema propuesto y con el sensor comercial de referencia Tromino Blu® en los puntos P2, P3 y P4

Igual que en el apartado anterior, se observa una muy buena concordancia entre los resultados obtenidos con ambos sistemas. Sin embargo, hay que destacar un pico en torno a 4.65 Hz en el punto P4 de la figura 4.19 que podría corresponderse con la segunda forma modal, pero que no es captado por el dispositivo comercial, lo que pondría de manifiesto la sensibilidad del equipo de medición propuesto.

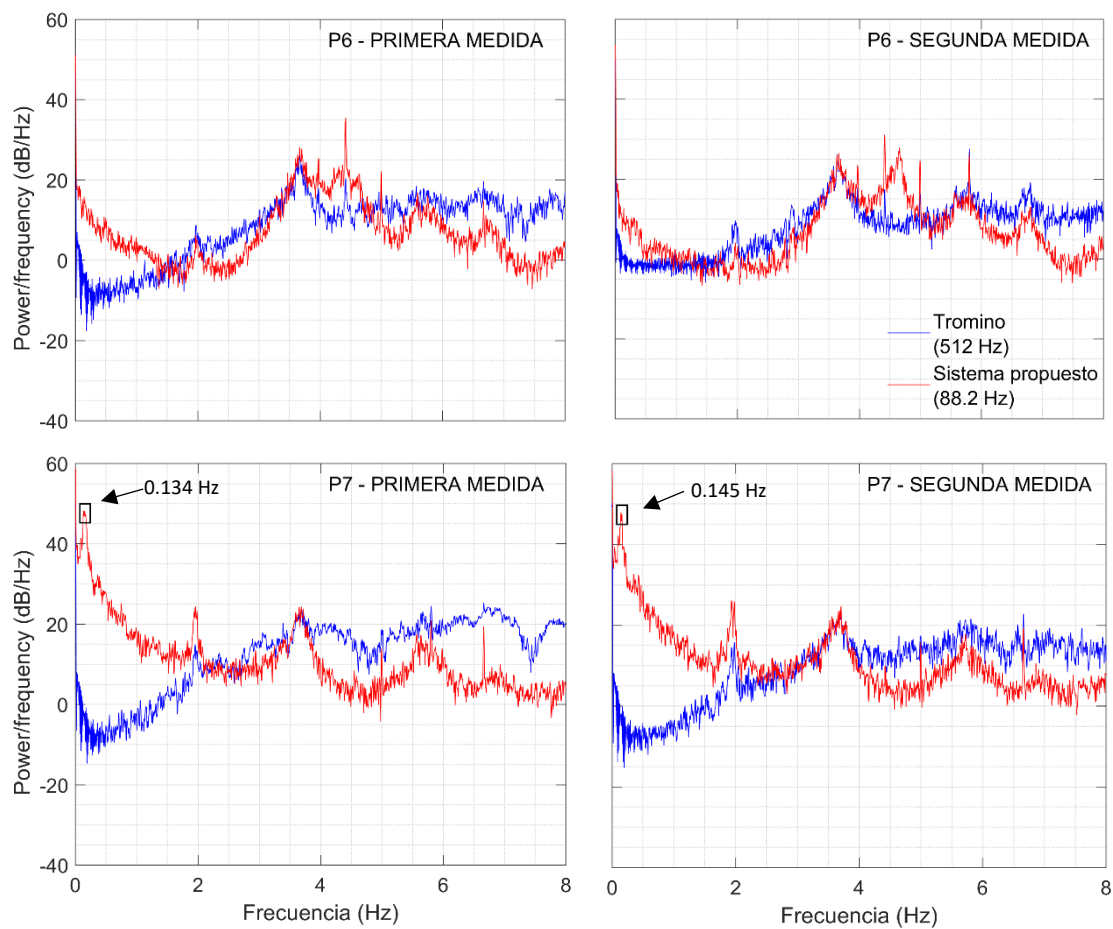


Figura 4.19: (a) Comparación entre los espectros PSD de Welch de las vibraciones medidas con el sistema propuesto y con el sensor comercial de referencia Tromino Blu® en los puntos P6 y P7

Como se comentó en el apartado anterior, el pico de frecuencia que aparece resaltado en el rectángulo negro corresponde a la frecuencia fundamental del sensor en cada medida, que como se puede observar, varía entre las diferentes configuraciones del sensor propuesto, tal y como se ha dicho anteriormente.

4.5. Identificación de las primeras frecuencias naturales del muro de la presa de Soria con el sensor propuesto

En este apartado se procede a estimar las frecuencias naturales del muro aplicando el algoritmo SSI-COV a los resultados obtenidos en dos campañas experimentales con el sensor propuesto: una realizada el 20 de junio de 2019, con mediciones en la coronación del muro (y ya descrita anteriormente), y otra realizada el 7 de octubre de 2020, con una altura de agua de aproximadamente 40 m, y llevando a cabo las mediciones en la galería superior que se encuentra, aproximadamente, a 20 m por debajo de la coronación del muro. Hay que señalar que los espectros de los diagramas de estabilización presentados en este apartado no han sido escalados en amplitud, como en el apartado anterior, y, por otra parte, que las mediciones han sido asíncronas, siendo el único objetivo determinar las frecuencias relacionadas con

formas modales utilizando el equipo descrito para determinar la capacidad del mismo. En el capítulo 5 se explica con detalle la campaña experimental llevada a cabo con la que el modelo numérico del muro de la presa ha sido actualizado.

4.5.1. Primera campaña experimental

La figura 4.20 muestra los diagramas de estabilización obtenidos en la campaña del 27 de junio del 2019 en cuatro puntos de la coronación (P2, P3, P4 y P7, Fig. 4.16.a), y en la tabla 4.1 se muestra el valor aproximado de las frecuencias asociadas a los cuatro primeros modos de vibración. En los diagramas de estabilización de los puntos P2 y P3 (Figs. 4.20.a y 4.20.b) se pueden observar las frecuencias asociadas a los modos de vibración 1, 3 y 4, mientras que en el diagrama de estabilización del punto P4 (Fig. 4.20.c) se obtienen las cuatro primeras frecuencias asociadas a los cuatro primeros modos de vibración. Es importante destacar, por una parte, que es en este punto donde el segundo modo adquiere mayor amplitud, y por otra, que el dispositivo comercial no logró captar esta frecuencia, tal y como se puede ver en el punto P4 de la figura 4.19. Por último, en el diagrama del punto P7 (Fig. 4.20.d) se captan las frecuencias asociadas al primer y tercer modo. Cabe resaltar que en los diagramas de estabilización (a), (b) y (d) de la figura 4.21 se observa un pico en torno a los 2 Hz el cual podría asociarse a un modo de vibración del muro, pero como se verá en el capítulo próximo, esta frecuencia es debida a los postes de las luminarias instaladas en la coronación del muro.

	1 ^{era} forma modal	2 ^{nda} forma modal	3 ^{era} forma modal	4 ^{ta} forma modal
P2 - primera medida	3.64 Hz	-	5.79 Hz	6.75 Hz
P3 - primera medida	3.65 Hz	-	5.77 Hz	6.71 Hz
P4 - primera medida	3.65 Hz	4.65 Hz	5.72 Hz	6.72 Hz
P7 - segunda medida	3.67 Hz	-	5.79 Hz	

Tabla 4.1: Valor aproximado de las frecuencias asociadas a los cuatro primeros modos de vibración estimadas a partir de las aceleraciones registradas en la coronación del muro.

4.5.2. Segunda campaña experimental

Como se ha comentado, la segunda campaña se llevó a cabo en la galería superior situada a 20 m de la coronación del muro (Figs. 4.21.a y 4.21.b). Como se puede observar en la figura 4.21.c, en esta campaña el sensor no pudo ser protegido debido al reducido espacio de la galería. Cada una de las tres mediciones efectuadas en los puntos x_1 , x_2 y x_3 (Figs. 4.22.d y 4.22.e) tuvo una duración de unos 25 minutos. Observando los diagramas de estabilización de la figura 4.22, se aprecia que en el punto de medición x_2 es donde mejor se detectan las frecuencias que se pueden relacionar con el primer y tercer modo. También se puede apreciar en los diagramas que la no utilización de la caja de protección del sensor ha dado lugar a unos diagramas de estabilización no tan claros como los obtenidos en la coronación del muro.

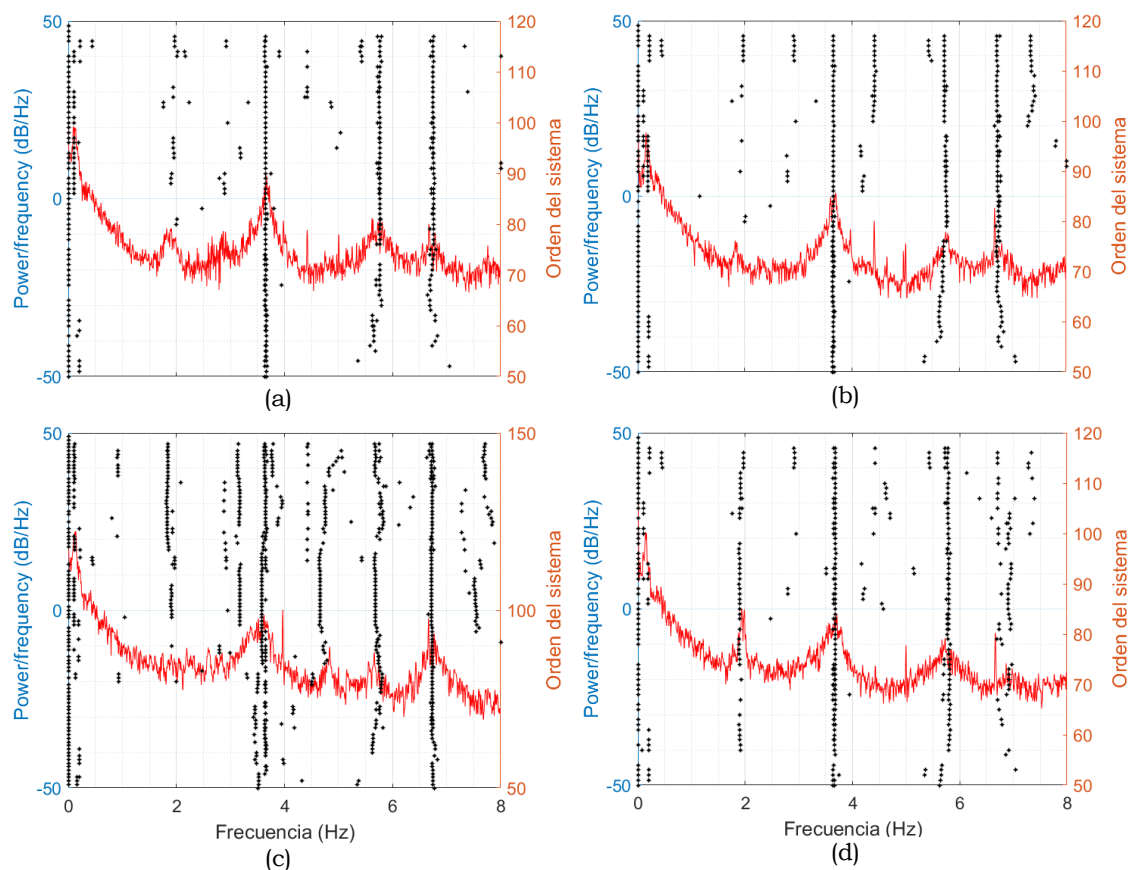


Figura 4.20: Diagramas de estabilización, campaña experimental del 27 de junio del 2019. a) P2-primer medida, b) P3-primer medida, c) P4-primer medida, d) P7-segunda medida.

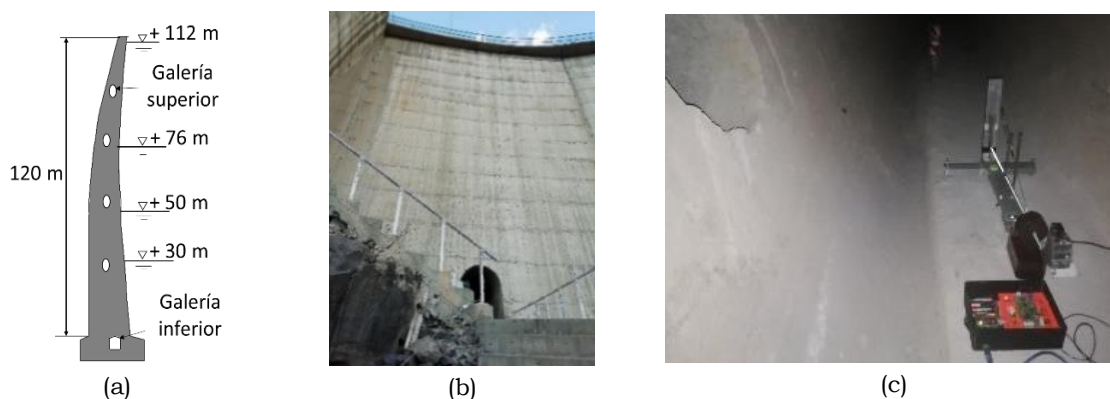


Figura 4.21: a) Sección transversal del muro. b) Entrada/salida a la galería superior. c) Sistema propuesto operando en el interior de la galería.

	1 ^{era} forma modal	2 ^{nda} forma modal	3 ^{era} forma modal	4 ^{ta} forma modal
Punto x_1	3.71 Hz	-	-	-
Punto x_2	3.71 Hz	-	5.80 Hz	-
Punto x_3	3.70 Hz	-	5.87 Hz	-

Tabla 4.2: Valor aproximado de las frecuencias asociadas a la primera y tercera forma modal obtenidas en la galería superior.

Como era de esperar, comparando los diagramas de estabilización de la figura 4.20 con los de la figura 4.22, es en la coronación donde mejor se detectan las frecuencias que pueden estar relacionadas con modos de vibración. En la tabla 4.2 se muestra el valor aproximado de las frecuencias asociadas al primer y tercer modo de vibración captadas en esta campaña.

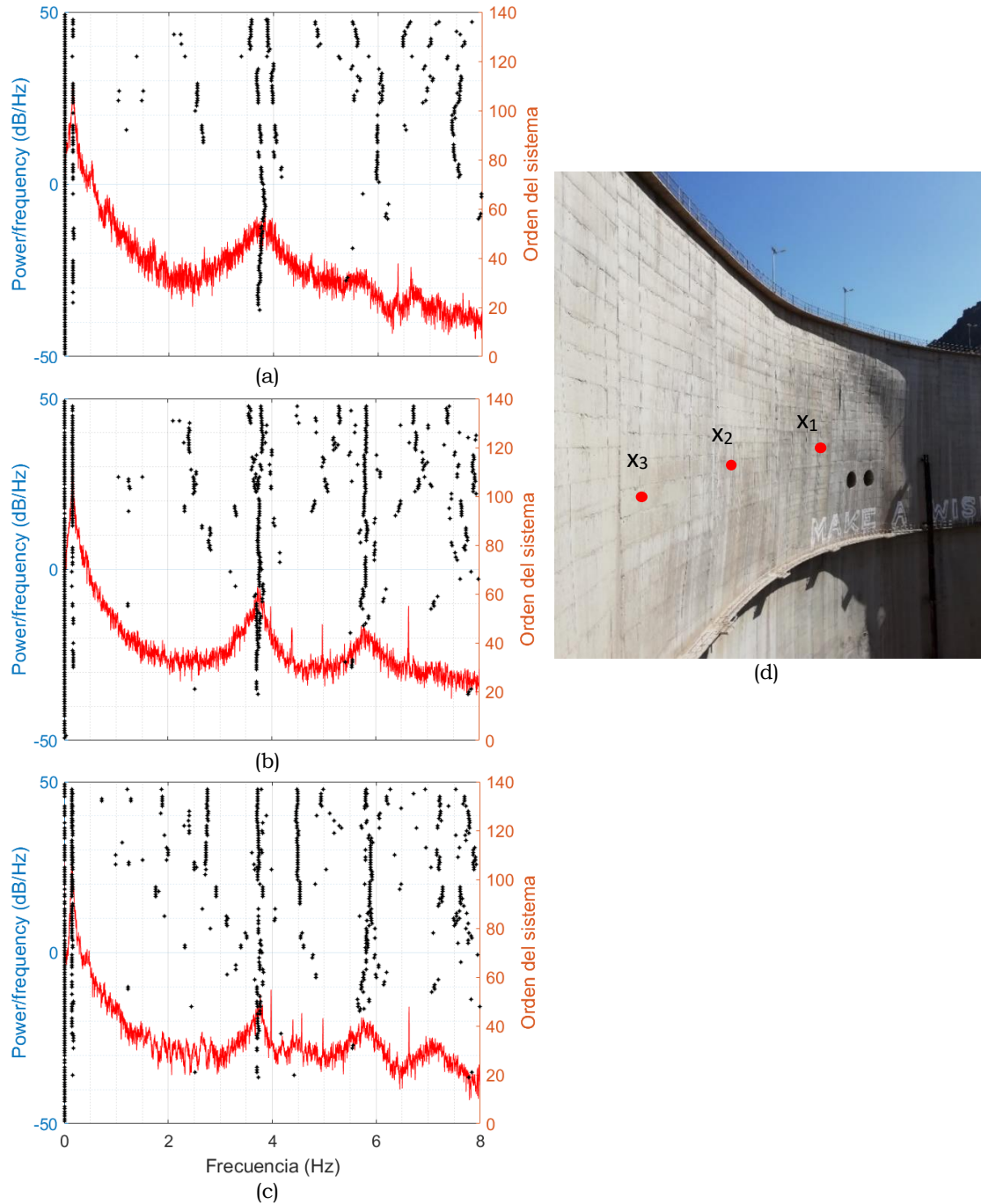


Figura 4.22: Diagramas de estabilización, campaña experimental del 7 de octubre del 2020. Espectros en los puntos de recogida de datos x_1 (a), x_2 (b) y x_3 (c). (d) Puntos de toma de datos en el interior de la galería

4.6. Coste de los materiales

En la tabla 4.3 se presenta una lista de materiales y costos aproximados al momento del montaje del prototipo, siendo el coste total del material inferior a 100 €.

	Unidades	Coste unitario	Coste
Partes del sensor			
Alumnio extruido (estructura)	2.00 m	5.00 €/m	10.00 €
Masa de acero	1.65 kg	2.50 €/kg	4.12 €
Tensor	1	2.50 €	2.50 €
Tornillos	1 pack	1.50 €	1.50 €
Brazo móvil	1	1.50 €	1.50 €
Cable de freno	1	1.00 €	1.00 €
Imán (neodimio)	1 pack	4.60 €	4.60 €
Amplificadores, componentes electrónicos y conversor digital			
Resistencias, condensadores, potenciómetros y cables de conexión			4.00 €
INA 114 (amplificador de instrumentación)	1	12.00 €	12.00 €
AD820 (amplificador operacional)	2	8.00 €	16.00 €
ADS1220 (conversor analógico-digital)	1	12.00 €	12.00 €
Baterías externas – AA, 1.5 V	4	0.50 €	2.00 €
Arduino UNO	1	11.00 €	11.00 €
COSTE TOTAL			82.22 €

Tabla 4.3: Costo de materiales.

4.7. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado el diseño, así como los resultados preliminares de un sistema prototipo de bajo costo basado en Arduino para medir vibraciones estructurales de bajo nivel. El coste del sistema propuesto es inferior a 100 €. Para probar la precisión del sistema, se realizaron dos campañas experimentales, donde se compararon los datos obtenidos con el sistema propuesto con los datos registrados por un dispositivo comercial (Tromino Blu®). Los resultados obtenidos de estas campañas muestran que la coincidencia en términos de respuesta de frecuencia es muy alta, y también que la sensibilidad del dispositivo también es muy buena.

El sistema presenta varios inconvenientes en relación a la parte física. Se destaca que es necesario un tiempo relativamente elevado para el montaje/desmontaje del mismo, siendo el tiempo de montaje de, aproximadamente, 20 minutos, mientras que el desmontaje es de unos 10 minutos. En este tiempo se ha contabilizado el montaje/desmontaje de la caja de protección, necesaria debida a la sensibilidad del sistema frente a viento y corrientes de aire. Otros inconvenientes son su tamaño y peso. En relación a su tamaño, el sistema montado y protegido con la caja, abarca una superficie de unos 1.20 m² (1.00 m × 1.20 m) aproximadamente; y sobre su peso, el

conjunto supera los 5 kg. Además, debido al elevado volumen de todo el conjunto, su transporte es bastante incómodo.

Por último, se remarca que el sistema propuesto se puede utilizar como base para enseñar, aprender, medir vibraciones y desarrollar otro tipo de dispositivos para tal fin.

CAPÍTULO 5

IDENTIFICACIÓN MODAL EXPERIMENTAL DEL MURO DE LA PRESA DE SORIA

5.1. Introducción

El capítulo 3 se centró en el desarrollo de un modelo numérico para el estudio de la respuesta dinámica del muro de la presa de Soria, y en la utilización de dicho modelo para estudiar distintos aspectos del sistema. El presente capítulo, por su parte, se dedica a resumir los resultados experimentales que han permitido la identificación modal parcial del muro de la presa, y la calibración del modelo numérico. Para ello, se empleó una metodología basada en el análisis modal operacional (OMA) del sistema, la cual permite determinar las características dinámicas del sistema (frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y formas modales) mientras la estructura se encuentra en condiciones de operación. Este enfoque es especialmente ventajoso teniendo en cuenta que el coste de plantear una excitación artificial generada expresamente para su identificación modal sería demasiado elevado, aunque también es cierto que el análisis modal operacional es difícil de llevar a cabo en esta estructura debido al bajo nivel de las vibraciones que experimenta debido a la ubicación de la presa (alejada de cualquier núcleo urbano o carretera relevante, y protegida del viento), y debido al bajo nivel del agua que retiene en la actualidad. En este sentido, es interesante resaltar que el aliviadero de la presa no ha sido utilizado nunca, y que la altura del agua de la presa no ha rebasado los 89.66 m de altura, alcanzados en 2011.

De este modo, la identificación modal se realiza a partir de las vibraciones ambientales experimentadas por el muro de la presa, siendo dichas vibraciones de muy bajo nivel, por lo que se requieren instrumentos de suficiente sensibilidad. Así, para realizar la identificación modal de la estructura se colocaron dos sismógrafos en diferentes puntos de la coronación, y se realizó la identificación dinámica del muro a partir de los registros obtenidos en esta campaña mediante los métodos de multi-dataset pre-scaled Frequency Domain Decomposition (MD-PS-FDD) [69, 70] y Peak-Picking (PP) [71], dando lugar a la identificación de dos de sus frecuencias naturales. Estas frecuencias naturales fueron ya utilizadas en el capítulo 3 para actualizar el modelo numérico mediante el ajuste de la rigidez del muro de la presa.

Este capítulo se ha organizado de la siguiente manera. A continuación, en el segundo apartado, se describe la campaña experimental llevada a cabo

para la identificación modal del muro de la presa de Soria, y, por otra parte, se analizan determinadas frecuencias para justificar su origen no estructural. En el apartado 5.3 se muestran los resultados obtenidos en esta campaña experimental, y en el 5.4 se comparan las respuestas experimentales con las numéricas. Por último, en el apartado 5.5 se exponen las conclusiones.

5.2. Descripción de la campaña experimental

La actualización del modelo numérico presentada en el capítulo 3 se llevó a cabo a partir de los resultados de una campaña experimental realizada en el muro de la presa de Soria el 27 de junio de 2022, en un momento en que el embalse estaba casi vacío. Lamentablemente, y debido a la falta de lluvias, no ha sido posible medir la respuesta de la presa con una cantidad significativa de agua. Se tomaron medidas de vibraciones ambientales. La presa se encuentra alejada de poblaciones o carreteras, donde además el viento suele ser muy débil, por lo que se esperan niveles muy bajos de excitaciones ambientales. Por esta razón, se emplearon dos sismógrafos que constan de velocímetros y acelerómetros 3D de alta sensibilidad y bajo ruido, contruidos para la identificación y monitorización de estructuras y suelos, Tromino Blu®. Con estos dos sismógrafos se midió la respuesta de la estructura en ocho puntos, P1 a P8 (Fig. 5.1.a), a lo largo de la cresta de la presa, con un espacio entre estaciones de aproximadamente 20 m. Los modos y frecuencias se han estudiado en la coronación, primero, por la facilidad de acceso a la misma, y segundo, por ser la zona donde se esperan los mayores niveles de vibración. También se tomaron medidas sobre un punto localizado sobre la roca de cimentación, a modo de referencia. En relación a la toma de datos en la coronación, uno de los sismógrafos se colocó en una posición fija en P5 y se usó como referencia, mientras que la segunda unidad se usó como sismógrafo móvil a lo largo de las otras siete posiciones, registrando las vibraciones del muro de la presa durante 10 min en cada lugar. En todos los casos, las medidas registradas con el sensor fijo de referencia y con el sensor móvil se tomaron de manera simultánea, y estando ambos instrumentos sincronizados vía GPS (Fig. 5.1.c). Con el objetivo de minimizar el ruido de las medidas, y siguiendo las recomendaciones de Miquel y Verret [72], los equipos se protegieron mediante una caja de cartón, tal y como se observa en la figura 5.1.d. Sobre cada una de las cajas se colocó un peso con el objetivo de evitar su movimiento respecto al suelo de la coronación, y, por tanto, la transmisión de estas vibraciones a los sismógrafos. Por otra parte, en la toma de datos se empleó una frecuencia de muestreo de 512 Hz. Los sismógrafos siempre se orientaron de modo que un canal fuera perpendicular a la línea media de la cresta de la presa. Se utilizaron los métodos MD-PS-FDD y PP, con los primeros valores singulares de la densidad espectral de potencia (Power Spectral Density, PSD) de Welch calculados a través del FDD. Se empleó para la identificación de las frecuencias naturales estructurales el PP. Se descartaron aquellos picos producidos por elementos distintos a la propia estructura del muro de la presa, como son la frecuencia fundamental de los postes de luz a lo largo de la cresta de la presa (f_l) y las frecuencias asociadas al sistema de bombeo y tuberías (f_b).

Tal y como se ha comentado en el capítulo 4, hay una frecuencia f_l en torno a los 2 Hz que se ha asociado a los postes de las luminarias instalados en

la coronación del muro. Para corroborar esta afirmación, a continuación, se muestran resultados de la campaña experimental llevada a cabo el 10 de julio de 2019 cuyo objetivo fue, precisamente, la identificación de esta frecuencia. En primer lugar, el sismógrafo se colocó en la luminaria 3, y posteriormente en la luminaria 5 (Fig.5.2). En ambos casos, el sismógrafo se colocó en la base de los postes de las luminarias y en el muro de la presa próximo a estos postes, tal y como se puede apreciar en las imágenes que aparecen en los espectros de la figura 5.3.

Para la medición de las frecuencias producidas por las luminarias, se golpearon los postes a una altura suficiente y, pasados 5 segundos, se procedió a medir la respuesta producida por los mismos durante 1 minuto. Cabe resaltar que los golpes se aplicaron de forma manual, lo que explica las diferencias entre las cuatro mediciones mostradas en los espectros de la figura 5.3.

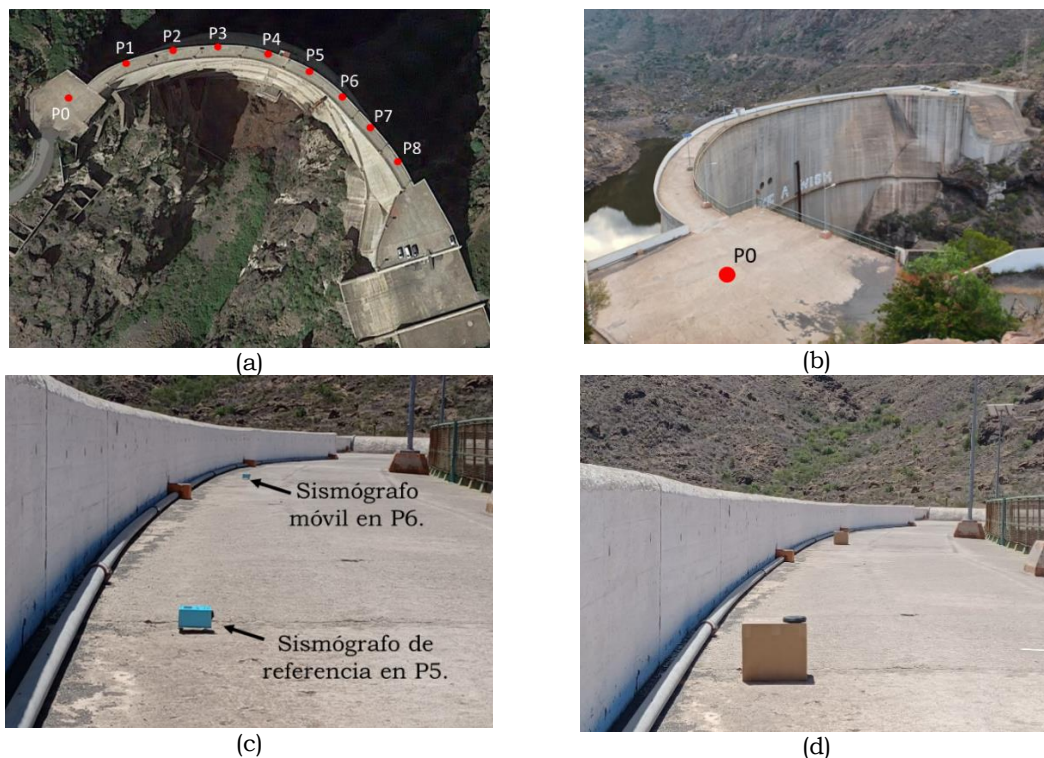


Figura 5.1: (a) Disposición de los sismógrafos a lo largo de la coronación. (b) Vista del estado de la presa el día de la toma de medidas (27/06/2022). (c) Sismógrafos durante la sincronización, antes del inicio de la medida. (d) Sismógrafos protegidos del viento mediante una caja de cartón inmovilizada



Figura 5.2: Posición de las luminarias 3 y 5

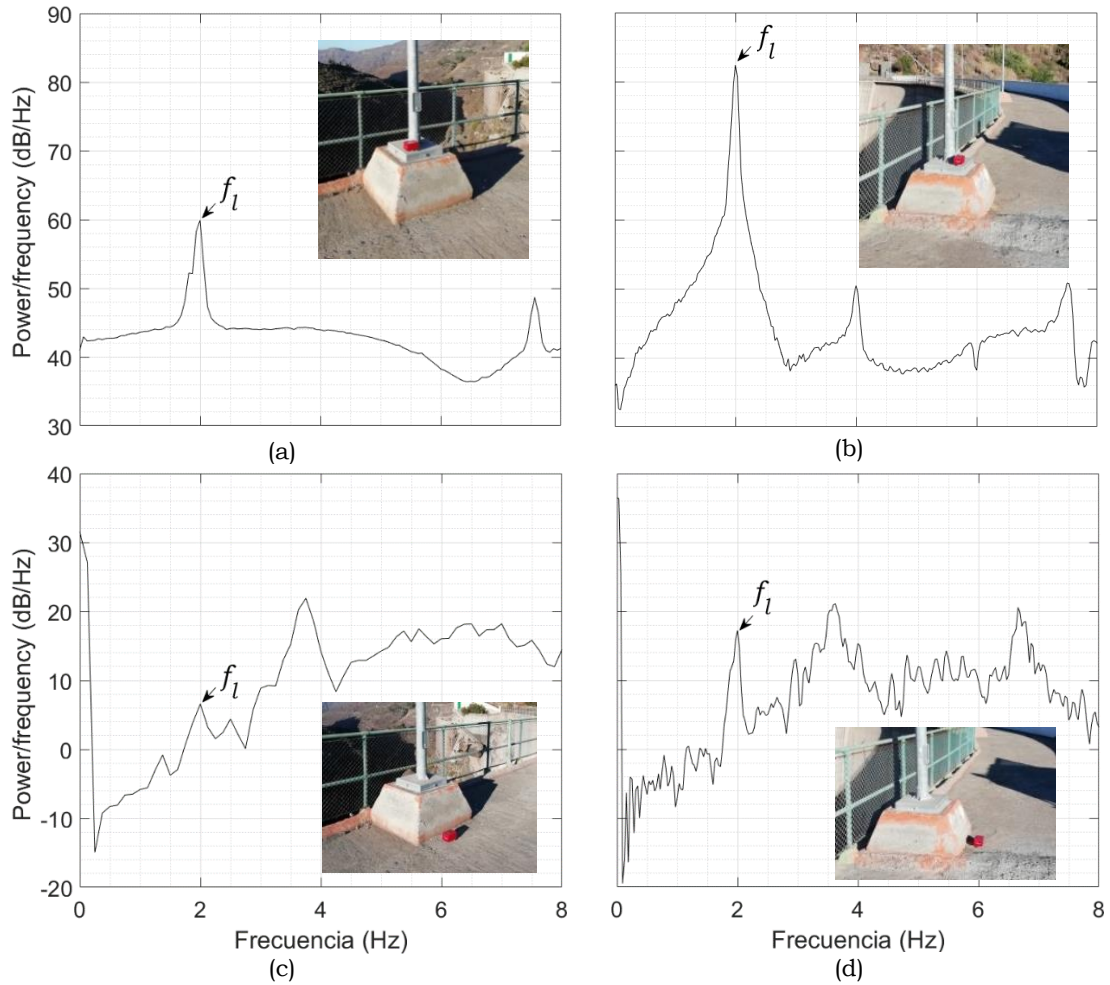


Figura 5.3: PSDs según la colocación del sismógrafo. a) En la base del poste de la luminaria 3, b) en la base del poste de la luminaria 5, c) en el muro de la presa próximo al poste de la luminaria 3, d) en el muro de la presa próximo al poste de la luminaria 5

Tal y como se puede observar en los espectros de la figura 5.3, al medir la vibración libre tras golpear los postes de las luminarias, se observa claramente una frecuencia sobre los 2 Hz, con mayor amplitud en los casos en los que el sismógrafo está en la base de los postes (Fig. 5.3.a y 5.3.b). Se observa también que la vibración es transmitida al muro de la presa, como era de esperar, y, por tanto, será captada por los instrumentos en las mediciones posteriores (Fig. 5.3.c y 5.3.d). Por otra parte, en los espectros de las figuras 5.8 y 5.9 se observan una serie de picos marcados como f_b que se han podido asociar al sistema de bombeo situado en la coronación del muro de la presa (Fig. 5.4).



Figura 5.4: (a) Caseta en cuyo interior se encuentra un sistema de bombeo. (b) Sistema de bombeo

5.3. Resultados

En este apartado se muestran, y analizan, los datos recogidos en la campaña experimental llevada a cabo el 27 de junio de 2022, siendo el objetivo de la campaña identificar las frecuencias naturales y las formas modales del muro. En primer lugar, se realizará un análisis de los registros temporales, para pasar, posteriormente, a un análisis de las vibraciones ambientales.

En la figura 5.5 se representa una muestra de los registros temporales de velocidades (a) y de aceleraciones (b) en un intervalo de 4 segundos, para los puntos P0 y P6, simultáneamente, en la dirección N-S. Las aceleraciones mostradas se obtuvieron mediante derivación numérica de las velocidades captadas durante la campaña.

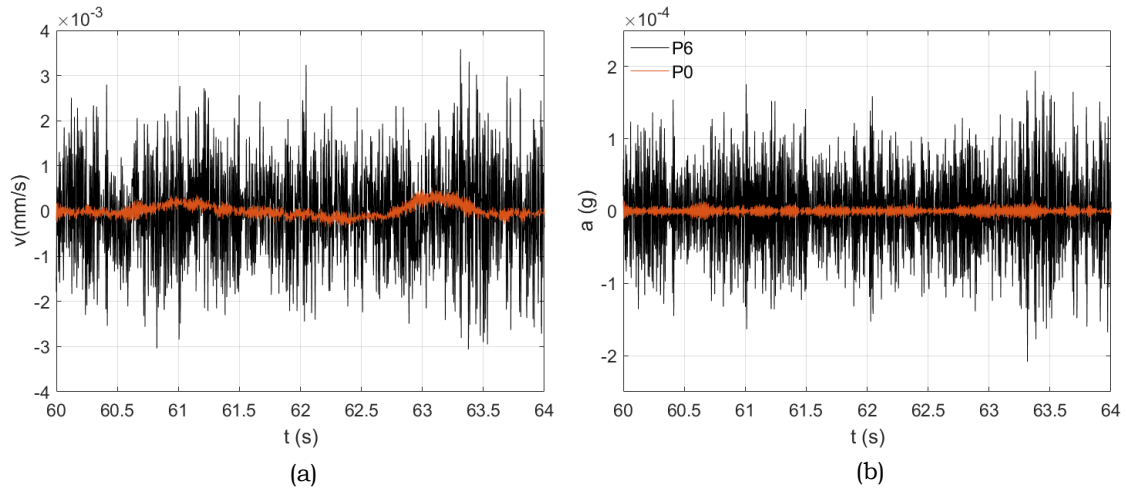


Figura 5.5: Registros temporales de velocidades (a) y de aceleraciones (b), en los puntos P0 y P6 en dirección N-S, perpendicular al muro de la presa

Para realizar un análisis más detallado de los registros temporales, se exponen en la figura 5.6 los valores máximos absolutos de velocidades y aceleraciones, para cada una de las 8 posiciones de medición en la coronación (de P1 a P8) así como para el punto P0. Las siglas N-S, E-W y Z que aparecen en la leyenda se refieren a las direcciones norte-sur, este-oeste y vertical, respectivamente. La dirección del sismógrafo N-S se ha situado en la dirección radial del muro. En la figura 5.6 se observa claramente que las vibraciones máximas se registran en la posición central, en dirección perpendicular al muro (N-S), tal y como era de esperar. También se observa que el nivel de las vibraciones medidas es muy bajo, con velocidades pico por debajo de los $25 \mu\text{m/s}$, y aceleraciones pico no superiores a, aproximadamente, 1.70 mg .

Por otra parte, en las figuras 5.7.a y 5.7.b se muestran, para cada una de las 9 posiciones de medición, el valor efectivo rms (root mean square) de las velocidades y aceleraciones, respectivamente, el cual representa el valor medio cuadrático de una señal periódica y tiene una relación directa con el contenido de energía de la misma. Al igual que en la figura 5.6, las siglas N-S, E-W y Z que aparecen en la leyenda se refieren a la toma de datos en la dirección norte-sur, este-oeste y dirección vertical, respectivamente. Cabe destacar que el bajo nivel de velocidades y aceleraciones; respecto a las velocidades, el valor rms no supera nunca los $1.2 \mu\text{m/s}$, mientras que para las aceleraciones es inferior a $80 \mu\text{g}$.

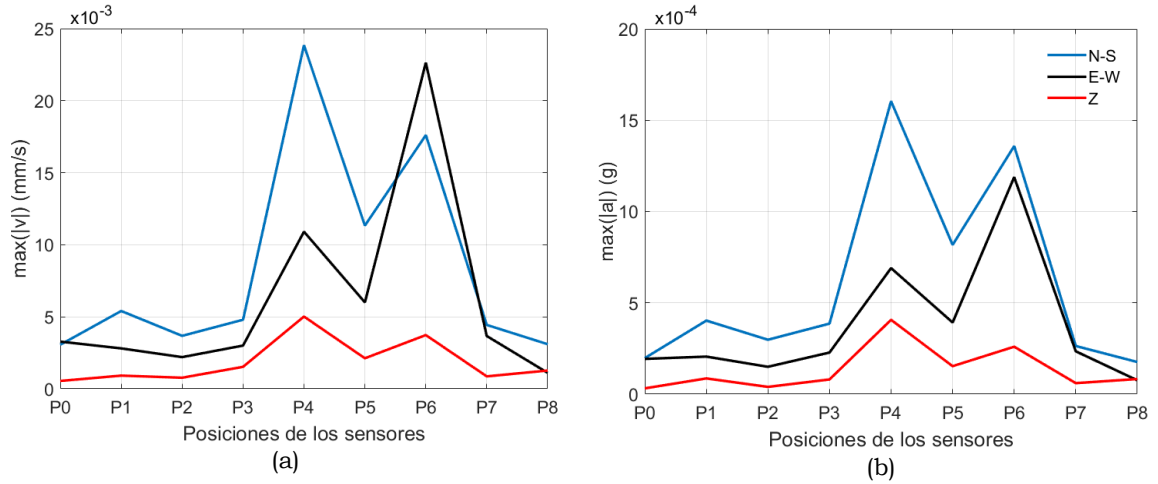


Figura 5.6: Velocidades (a) y aceleraciones (b) máximas absolutas en cada una de las 9 posiciones de los sismógrafos

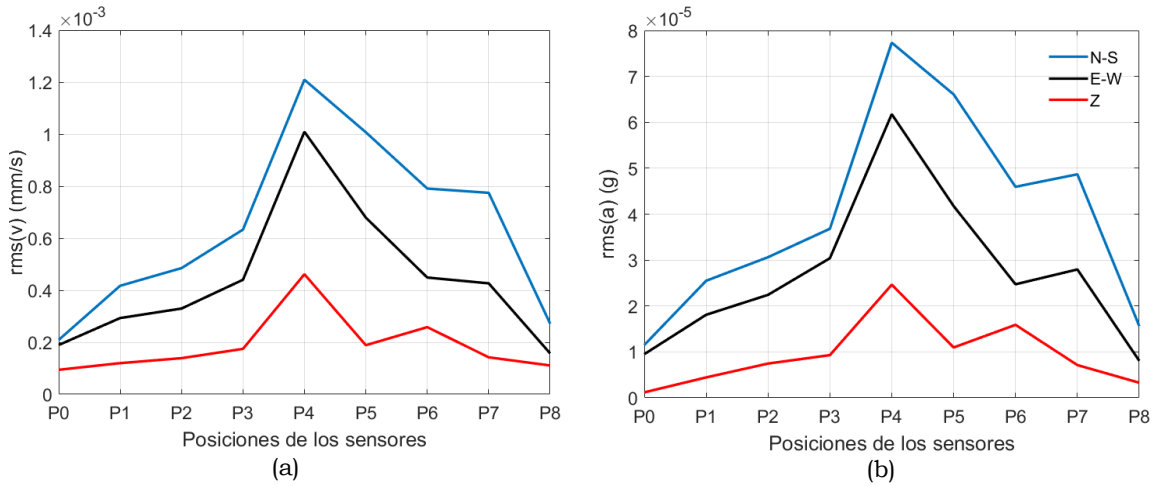


Figura 5.7: Valores rms de los registros de velocidades (a) y aceleraciones (b) en cada una de las 9 posiciones de los sismógrafos

Los resultados experimentales de esta campaña pueden resumirse a través de la representación de las estimaciones de densidad espectral de potencia (PSD) de Welch de las mediciones experimentales en los puntos P1 a P8, tal y como se muestra en la figura 5.8. Puede observarse que las características principales de la respuesta en frecuencia en todos los puntos siguen patrones similares, si bien, por ejemplo, la frecuencia fundamental del muro (f_1), destaca con mayor claridad en las vibraciones registradas en el punto P4, mientras en ese punto, las vibraciones de las luminarias (f_l) pasan desapercibidas.

Los resultados pueden también representarse a través de los primeros valores singulares de la matriz PSD obtenida de la aplicación, a los registros experimentales, de la metodología multi-dataset pre-scaled FDD mencionada anteriormente. La curva resultante es la mostrada en la figura 5.9. La inspección de esta figura permitió identificar claramente las frecuencias de la primera y tercera forma modal, cuyas frecuencias naturales estimadas (f_{AV}) y las relaciones de amortiguamiento (ξ_{AV}) se muestran en la tabla 5.1.

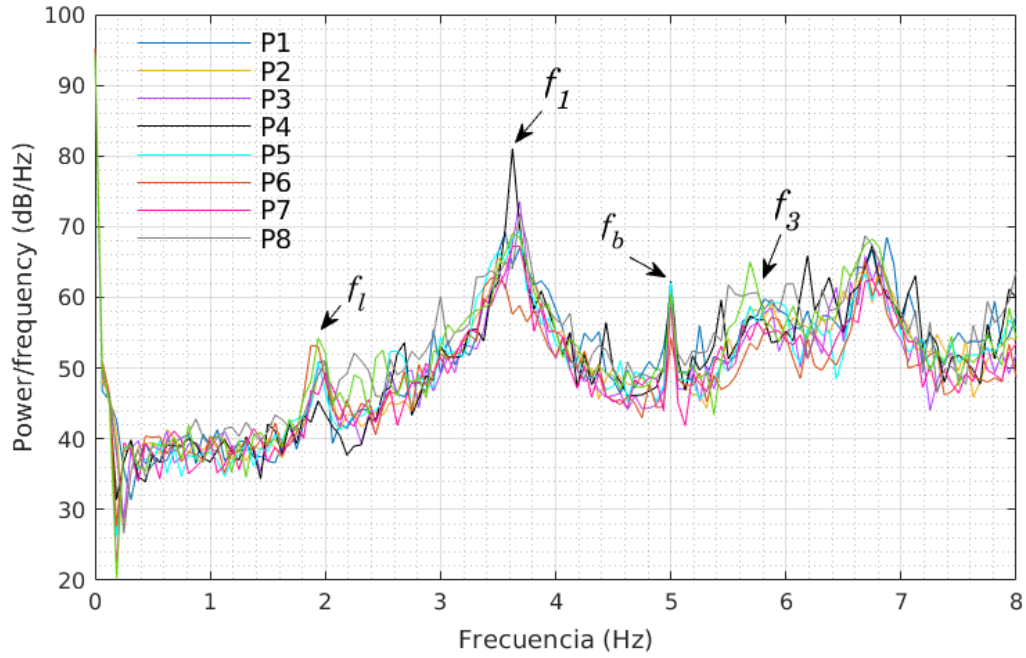


Figura 5.8: Estimaciones de densidad espectral de potencia (PSD) de Welch de las mediciones experimentales en los puntos P1 a P8

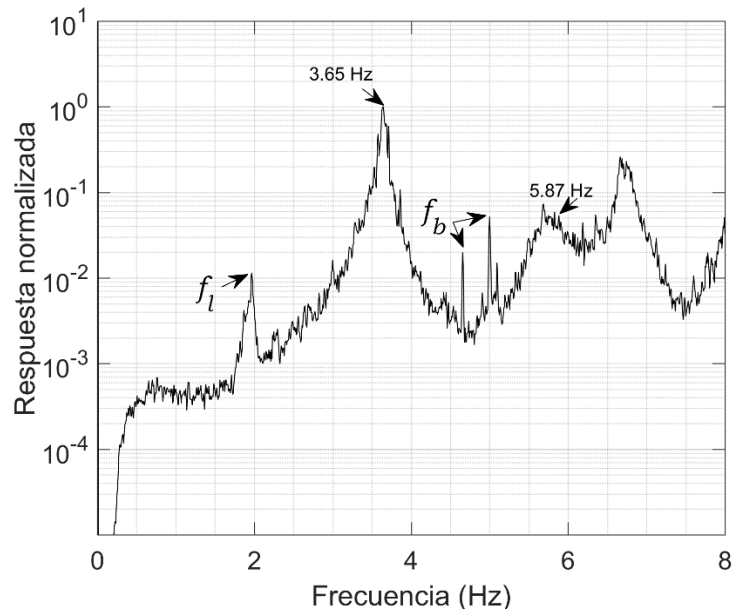


Figura 5.9: Primeros valores singulares de la matriz PSD obtenida de la aplicación, a los registros experimentales, de la metodología multi-dataset pre-scaled FDD

MODO	f_{AV} (Hz)	ξ_{AV} (%)
1 ^{ero}	3.65	1.1
3 ^{ero}	5.87	3.5

Tabla 5.1: Frecuencias experimentales (f_{AV}) y relaciones de amortiguamiento (ξ_{AV}).

Por último, cabe enfatizar que se investigaron las formas modales de diferentes picos, candidatos potenciales a representar frecuencias naturales de la estructura, y finalmente se seleccionaron aquellas que presentaban formas modales factibles. En la figura 5.10 se muestran la primera y tercera formas modales obtenidas experimentalmente, y como se dijo en el capítulo 3 respecto a las formas modales numéricas, estas formas modales experimentales están en línea con las formas modales usuales para este tipo de presas (Haribi-Ardebili et al [25]).

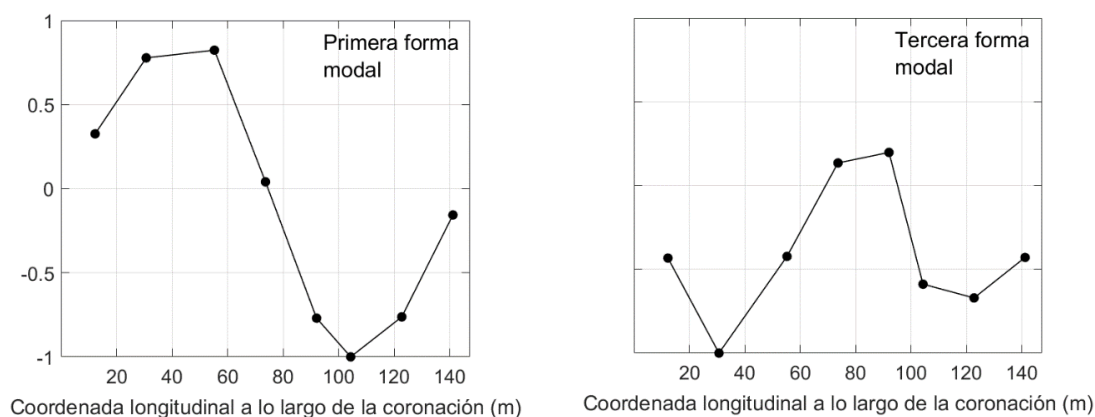


Figura 5.10: Primera y tercera formas modales en coronación estimadas a partir de los resultados experimentales para las frecuencias de 3.65 y 5.87 Hz

En cambio, las frecuencias naturales correspondientes a la segunda y cuarta formas modales no pudieron ser identificadas a partir de estos resultados experimentales. De la exploración de las formas modales que pueden extraerse de los resultados experimentales en el entorno de la segunda frecuencia natural numérica, se observa que, a pesar de no existir picos claros en las funciones de respuesta en frecuencia, sí pueden identificarse formas modales cercanas a las formas modales obtenidas numéricamente para el modo 2. Por ejemplo, la figura 5.11 muestra la forma modal experimental que se observa en el entorno de los 4.84 Hz, con una clara semejanza a la segunda forma modal numérica (ver Fig. 3.28). Aún así, el valor de correlación MAC entre esta forma modal experimental y la numérica es muy baja, inferior a 0.50, por lo que no puede afirmarse que el modo haya sido identificado.

Por tanto, las formas modales segunda y cuarta no pudieron ser identificadas a partir de los resultados experimentales. Aunque no ha sido posible aún determinar con certeza la razón, se estima que puede deberse a que estos modos no estuvieran lo suficientemente excitados durante las medidas, o a que, por alguna razón, se trate de dos formas modales altamente amortiguadas. Se trata este de un aspecto que deberá seguir estudiándose en el futuro.

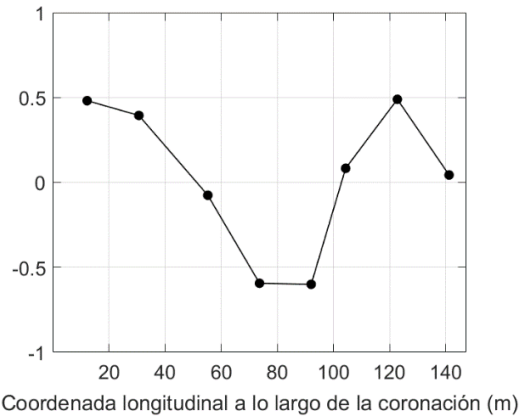


Figura 5.11: Deformada estimada a una frecuencia de 4.84 Hz, y cercana a la segunda forma modal numérica

5.4. Comparación de las respuestas experimentales con las numéricas

Las figuras 5.12 y 5.13 comparan los primeros valores singulares de la matriz PSD obtenidos de las mediciones ambientales con las funciones de respuesta en frecuencia numéricas obtenidas empleando el cañón trapezoidal (Fig. 5.12) y el cañón topográfico (Fig. 5.13), en los puntos P2 y P4. En cada una de las figuras se muestran, a la izquierda, los resultados numéricos obtenidos con las propiedades elásticas asumidas inicialmente para el muro de la presa y, a la derecha, los obtenidos con el módulo de elasticidad transversal ajustado tras la calibración con los resultados experimentales. Todas las funciones se representan normalizadas respecto al valor máximo. En los espectros mostrados en estas figuras se pueden identificar claramente los picos correspondientes a las frecuencias del primer y tercer modo de vibración, tanto empleando el cañón recto trapezoidal como el cañón topográfico. La primera frecuencia natural está claramente presente en los espectros experimentales, siendo esta frecuencia natural la que se ha empleado para ajustar el módulo de elasticidad transversal (ver sección 3.7). Así, su frecuencia coincide con la del primer pico de la FRF numérica bajo excitación transversal. La tercera frecuencia natural numérica (5.95 Hz con las propiedades ajustadas) es cercana a la frecuencia a la que se ha podido identificar experimentalmente la tercera forma modal (5.85 Hz). Por el contrario, el pico correspondiente al segundo modo se puede observar en las FRF numéricas, pero no a partir de los resultados experimentales. Finalmente, en los resultados experimentales se observa claramente un pico en el entorno de los 6.7 Hz, para el que, sin embargo, no ha sido posible estimar una forma modal coherente con la forma modal esperada para la coronación del muro de la presa según los resultados numéricos propios para de este muro, o los resultados publicados por otros autores para este tipo de estructuras. El origen de este pico no ha podido ser identificado y, aunque no puede descartarse que pueda estar relacionados con un modo propio de la presa, este extremo no ha podido verificarse aún.

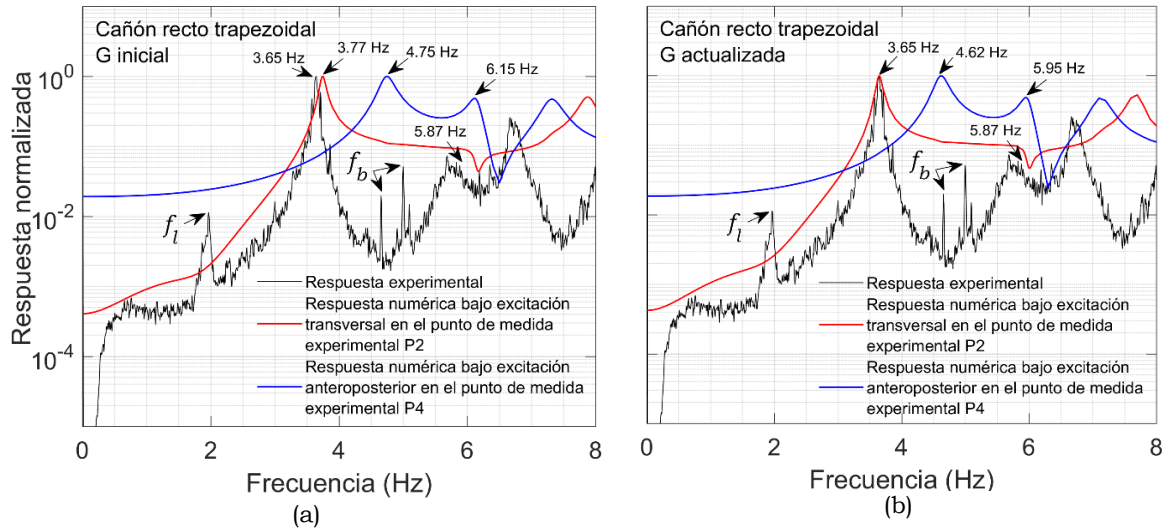


Figura 5.12: Comparación entre la respuesta medida experimentalmente (primeros valores singulares de la matriz PSD obtenidos de las mediciones) y respuestas numéricas (FRFs) con cañón trapezoidal de los puntos P2 y P4. (a) Propiedades iniciales, (b) propiedades ajustadas

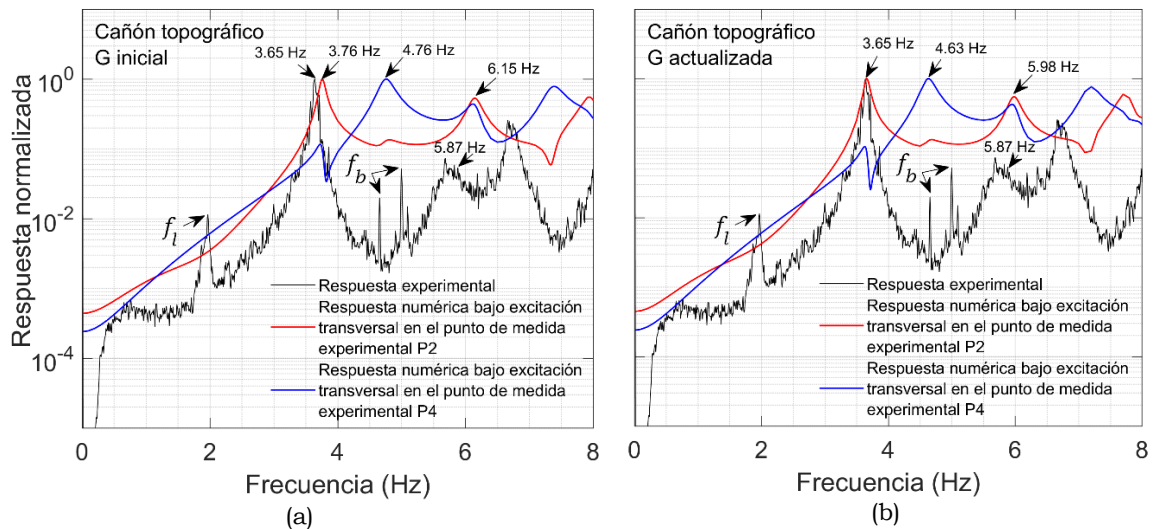


Figura 5.13: Comparación entre la respuesta medida experimentalmente (primeros valores singulares de la matriz PSD obtenidos de las mediciones) y respuestas numéricas (FRFs) con cañón topográfico de los puntos P2 y P4. (a) Propiedades iniciales, (b) propiedades ajustadas

5.5. Conclusiones

En este capítulo se han resumido los resultados de la campaña experimental llevada a cabo con el objetivo de identificar dinámicamente el muro de la presa de Soria. Las medidas se tomaron en la coronación del muro de la presa de Soria, por una parte, por la facilidad de acceso a la misma, y, por otra, y por ser la zona donde se esperan los mayores niveles de vibración.

Analizando los registros temporales se pudo observar el bajo nivel de excitación al que estaba sometida la estructura durante esta campaña. Para el estudio de las vibraciones ambientales, se ha comparado la respuesta numérica con la experimental, pudiéndose identificar claramente las frecuencias correspondientes al primer y tercer modo de vibración, mientras que el segundo

y cuarto modo parecen estar muy débilmente excitados o altamente amortiguados. Por otra parte, también se analizó el origen no estructural de determinadas frecuencias.

Según lo expuesto en este capítulo, es necesario trabajar más en este sentido en el futuro, con el fin de obtener una caracterización experimental más completa de la estructura.

CAPÍTULO 6

REVISIÓN Y CONCLUSIONES. DESARROLLOS FUTUROS

6.1. Revisión y conclusiones

En esta tesis se ha estudiado el comportamiento dinámico de una de las grandes presas abovedadas que existen en las Islas Canarias, la presa de Soria, sita en Gran Canaria. Para ello, se construyó un modelo geométrico tridimensional del muro de la presa, así como de su entorno. La respuesta del muro se analizó, por una parte, numéricamente en el dominio de la frecuencia bajo diferentes condiciones utilizando técnicas y herramientas basadas en el Método de los Elementos de Contorno, y, por otra parte, experimentalmente.

Para llevar a cabo los objetivos establecidos en el primer capítulo, en primer lugar, en el capítulo 2 se expusieron las ecuaciones de gobierno, tanto en elastodinámica lineal como en medios escalares, así como las ecuaciones para los casos de propagación de ondas en estos medios. También se presentó un estudio de las condiciones de radiación de aplicación en los modelos numéricos de esta tesis. Además, se desarrolló la formulación del MEC y se expuso como dichas formulaciones se acoplan para resolver de manera conjunta un problema en el que regiones de distintas naturalezas están presentes en el mismo. Por último, se aplicó toda la formulación planteada a un problema de referencia (una pared plana) y se analizaron las respuestas obtenidas.

A continuación, en el capítulo 3 se desarrollaron los modelos numéricos empleados para el análisis armónico. En primer lugar, se analizó la influencia de la interacción suelo-estructura, así como la de la geometría del cañón sobre la respuesta dinámica muro de la presa. Posteriormente, se aplicaron las condiciones de radiación en el contorno de truncamiento de la presa presentadas en el capítulo anterior y se justificó la elección de una de ellas para estudiar la influencia de la interacción dinámica suelo-estructura-agua para distintas cotas de agua. Por último, se calibró el modelo numérico partiendo de los datos obtenidos en una campaña experimental. En relación a los resultados obtenidos, se observa que la interacción suelo-estructura tiene una influencia significativa en la respuesta dinámica del sistema, mientras que la utilización de un cañón recto prismático en lugar de un cañón topográfico no da lugar a diferencias significativas en las frecuencias naturales del muro. Por otra parte, las interacciones estructura-agua y suelo-estructura-agua (cuando se utiliza un cañón recto trapezoidal) tienen influencia en la respuesta del muro de la presa de estudio a partir de la cota de agua de 50 m y a frecuencias superiores a 6.2 Hz. En relación a la influencia de la condición de contorno de radiación, para cotas de agua mayores a 76 m, la consideración de la condición de contorno de radiación de Humar y Roufaiel [54] con la frecuencia fundamental

numérica proporciona buenos resultados, al igual que la condición de radiación de Sommerfeld. A continuación, se compararon los resultados del modelo numérico sin agua en el embalse con las mediciones obtenidas experimentalmente, pudiéndose identificar la primera y tercera frecuencias naturales del muro, así como sus formas modales. Posteriormente, partiendo de los modelos numéricos desarrollados en este capítulo, se llevó a cabo la calibración del modelo numérico. Para ello se tomó como referencia la frecuencia fundamental del muro de la presa, obtenida experimentalmente. Para la calibración del modelo numérico, fue suficiente una actualización pequeña del valor del módulo de elasticidad transversal del muro de la presa, obteniéndose una buena correlación entre las frecuencias naturales numéricas y experimentales primera y tercera, así como entre sus formas modales. Por ello, se considera que el modelo numérico podría ser apto para representar el comportamiento dinámico del muro bajo vibraciones de bajo nivel. Sin embargo, los modos segundo y cuarto no pudieron ser validados porque no pudieron ser identificados claramente a partir de los resultados experimentales.

En el capítulo 4 se presentó un sensor horizontal, así como un sistema de adquisición de datos de bajo coste para medir vibraciones ambientales de bajo nivel. Se llevó a cabo una descripción detallada de cada una de las cuatro partes de las que consta el sistema propuesto, deduciendo las ecuaciones matemáticas que conducen a la obtención de la frecuencia fundamental del sensor y planteando todas aquellas relacionadas con la parte electrónica. El coste del sistema propuesto es inferior a 100 €. Para probar la precisión del sistema, se realizaron dos campañas experimentales, donde se compararon los datos obtenidos con el sistema propuesto con los datos registrados por un dispositivo comercial. Los resultados obtenidos de estas campañas muestran que la coincidencia en términos de respuesta en frecuencia es muy alta, y también que la sensibilidad del dispositivo también es muy buena. Por ello, el sistema propuesto se empleó para identificar las primeras frecuencias naturales del muro de la presa de Soria. El sistema presenta varios inconvenientes, como el tiempo necesario para el montaje/desmontaje del mismo (aproximadamente, 30 minutos). Otros inconvenientes son su tamaño (1.20 m²) y peso (superior a los 5 kg).

Por último, en el capítulo 5 se describió la campaña experimental llevada a cabo para la identificación modal del muro de la presa de Soria. En esta campaña se utilizaron equipos comerciales con capacidad de sincronización entre ellos. Por otra parte, también se analizaron determinadas frecuencias para justificar su origen no estructural. Las medidas se tomaron en la coronación del muro de la presa de Soria, tanto por la facilidad de acceso a la misma, como por ser la zona donde se esperan los mayores niveles de vibración. Tras el análisis de los registros temporales se pudo constatar el bajo nivel de excitación al que estaba sometida la estructura durante esta campaña. Se comparó la respuesta numérica con la experimental, y, se identificaron claramente las frecuencias correspondientes al primer y tercer modo de vibración, mientras que el segundo y cuarto modo podrían, o estar muy débilmente excitados, o altamente amortiguados.

6.2. Desarrollos futuros

Como desarrollos futuros, en relación a los modelos numéricos, se propone analizar la respuesta dinámica del muro de la presa de Soria cuando:

- Ondas sísmicas incidentes tipo P, SV y de Rayleigh llegan a la superficie con diferentes ángulos de incidencia.
- El muro se encuentra embebido en un cañón trapezoidal con inclinación similar a la del cañón topográfico con distintas cotas de agua.
- El embalse incluye capas de sedimentos de fondo, con diferentes cotas de agua, ya que estos sedimentos absorben energía, y, por tanto, la amortiguación del sistema suelo-estructura-agua se verá afectada. El modelo numérico propuesto permite el acoplamiento de esta nueva región la cual se comporta como un medio poroelástico.

En relación a la parte experimental, se propone:

- En relación al sistema propuesto del capítulo 4, sobre la parte electrónica, hay que estudiar la manera de mejorar la reproducibilidad en términos de amplitud de las vibraciones medidas, ya que después de desmontar, y volver a montar el sistema, es muy difícil garantizar la misma posición relativa entre la bobina e imán. Otro aspecto a estudiar es analizar la sensibilidad del sistema.
- También, sobre el sistema del capítulo 4, dado el bajo coste para su construcción, se propone un estudio de la sincronización vía GPS de varios dispositivos con la finalidad de desplegar un número suficiente para llevar a cabo un análisis modal operacional.
- En relación al análisis modal operacional, llevar a cabo una monitorización del muro a diferentes alturas durante períodos de tiempo más largos, con el objetivo de aclarar, entre otras cuestiones: a) el origen del pico en frecuencias que se observa claramente en los espectros experimentales en el entorno de los 6.7 Hz (y que no ha podido ser asignado a un modo concreto), b) la frecuencia y forma modal asociadas al segundo modo de la presa, c) la influencia de parámetros tales como temperatura o altura de llenado sobre las frecuencias y formas modales observadas en la presa, o d) la influencia de posibles fenómenos no-lineales, no incluidos en el modelo numérico propuesto, como, por ejemplo, los asociados a las juntas de hormigonado del muro de la presa o a las propiedades mecánicas del hormigón en masa que conforma el muro. La resolución de estas cuestiones pendientes permitirá avanzar en el desarrollo y puesta en funcionamiento de un sistema de monitorización estructural del muro de la presa preciso y eficiente.

Finalmente, se estima también necesario seguir profundizando en aspectos tales como:

- La aplicación de estrategias avanzadas para la identificación automática y más precisa de frecuencias y modos propios a partir de los resultados experimentales [73, 74, 75, 76].
- La aplicación de estrategias numéricas más avanzadas para llevar a cabo la calibración de las propiedades del modelo (model updating) cuando se disponga de mayor cantidad de datos experimentales [25, 77, 78].

- La aplicación de técnicas de aprendizaje automático e inteligencia artificial al análisis de las vibraciones registradas en el muro de la presa [76, 79, 80, 81, 82].

APÉNDICE

INTRODUCCIÓN A LA IDENTIFICACIÓN MODAL MEDIANTE EL ALGORITMO SSI-COV

A.1. Introducción

La identificación de los parámetros modales de sistemas estructurales a partir de medidas experimentales de su respuesta puede afrontarse de diversas maneras. Cuando la excitación del sistema es conocida, se pueden construir las Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRFs) que relacionan la respuesta del sistema con la excitación que la provoca, e identificar los parámetros modales del sistema a través de dichas funciones. Sin embargo, cuando no es posible conocer la excitación con suficiente precisión, por ejemplo porque el uso de excitaciones artificiales controladas queda descartado por su coste, y aprovechamos en su lugar las excitaciones de origen natural y/o de operación, no conocidas (como es el caso de la presente tesis doctoral, donde la identificación de la presa se realiza a través de las vibraciones ambientales del sistema, originadas por el viento, el agua, el tráfico, o las operaciones en la propia presa), ya no es posible utilizar esta misma metodología, y es necesario recurrir a otras capaces de tener en cuenta la aleatoriedad inherente a esta situación. Para estos casos, los métodos de subespacio que incorporan la naturaleza estocástica de las señales han demostrado ser una alternativa eficiente, robusta y capaz de proporcionar resultados suficientemente precisos en gran cantidad de situaciones.

Los métodos de subespacio utilizados actualmente para la identificación de sistemas a partir de señales con componentes estocásticos (Stochastic Subspace Identification, SSI) se basan fundamentalmente en los trabajos de Ljung [83], Van Overschee y De Moor [84], y Peeters y De Roeck [85]. El carácter estocástico tiene en cuenta de manera intrínseca la existencia de ruido y de variabilidad, es decir, que la respuesta del sistema tiene una componente predecible y otra componente aleatoria. Son métodos planteados en el espacio de estados que se plantean directamente en el dominio del tiempo (utilizan directamente las series temporales sin necesidad de transformarlos a otros dominios), y que no requieren procedimientos de optimización iterativos para la estimación de los parámetros del sistema, y que por tanto no muestran los problemas de convergencia, inicialización, coste computacional excesivo o de existencia de soluciones locales que son propios de otras metodologías. Además, la implementación de estos algoritmos puede ser muy eficiente cuando se basan en procedimientos de descomposición en valores singulares (SVD, singular value decomposition).

Estos métodos también requieren la estimación del número mínimo de variables de estado necesarias para representar adecuadamente el sistema que trata de identificarse. Este parámetro recibe el nombre de orden del sistema y su valor es inicialmente desconocido. Dado que el sistema puede tratar de identificarse para órdenes del sistema diferentes, y dado que existe siempre un sistema mínimo que tiene el orden mínimo necesario para poder representar adecuadamente la señal tratada, el orden del sistema es generalmente tratado como un hiperparámetro, de modo que el proceso de estimación de las características del sistema se realiza de manera repetida para órdenes del sistema crecientes, hasta que se observa una estabilización en la solución obtenida. Este proceso se plasma en los denominados diagramas de estabilización.

Existen diversos métodos de subespacio que varían entre sí en la manera en que incorporan la componente estocástica de las señales, en la técnica utilizada para estimar la denominada matriz de observabilidad extendida, y en cómo esta se utiliza para estimar las matrices del sistema. Dos implementaciones de estos métodos son el SSI-DATA, basada en datos y el SSI-COV, basada en la covarianza. La principal diferencia es que el SSI-DATA trata directamente con datos de salida sin procesar, mientras que el SSI-COV trabaja con las correlaciones de salida proporcionando una manera fácil de identificar los parámetros modales de la estructura (frecuencias naturales, relaciones de amortiguamiento y formas modales). Aplicaciones exitosas del SSI-COV en la identificación de sistemas de estructuras civiles se pueden encontrar en la literatura existente (ver, por ejemplo, [86–93]), quedándose demostrada en ella la solidez y eficacia del algoritmo en el análisis modal operacional.

En este apéndice se presenta, de manera resumida, el algoritmo SSI-COV empleado en el capítulo 4 de esta tesis, siguiendo el enfoque planteado por Van Overschee y De Moor [84] y Peeters y De Roeck [85].

A.2. Modelo espacio-estado de sistemas dinámicos

A.2.1. Forma en tiempo continuo

Para entender el procedimiento de este método partimos del comportamiento dinámico de un sistema mecánico que consta de n masas conectadas a través de resortes y amortiguadores [85]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (\text{A.1})$$

donde $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son las matrices de masa, amortiguación y rigidez, respectivamente; $\ddot{\mathbf{U}}(t)$ y $\dot{\mathbf{U}}(t)$ son el vector de aceleración y el vector de velocidad, respectivamente, mientras que $\mathbf{U}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de desplazamiento. El vector $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{R}^n$ es la fuerza de excitación. Por otra parte, como bien es sabido, tanto las frecuencias $\mathbf{X}$ como los modos de vibración $\boldsymbol{\psi}$ se obtienen a partir de

$$|\mathbf{M}\mathbf{X}^2 + \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{K}| = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$(\mathbf{M}\mathbf{X}^2 + \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{K})\boldsymbol{\psi} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Ahora bien, asumiendo que las mediciones son evaluadas en p puntos donde se ubican l sensores, el vector de salida viene dado por:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{U}(t) \quad (\text{A.4})$$

donde $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ son las salidas; $\mathbf{C}_a, \mathbf{C}_v$ y $\mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{p \times n}$ son las matrices de aceleración, velocidad y desplazamientos, respectivamente.

Mediante el cambio de variable $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{U}(t) \ \dot{\mathbf{U}}(t))^T$, las ecuaciones (A.1) y (A.4) pueden ser escritas como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \quad (\text{A.6})$$

siendo $\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c$ y $\mathbf{D}_c$ las matrices de estado, de ruido del proceso, de salida y de transmisión directa, respectivamente, mientras que $\mathbf{x}(t)$ representa el vector de estado.

A.2.2. Forma en tiempo discreto

Las ecuaciones (A.5) y (A.6) representan el modelo espacio-estado en tiempo continuo, pudiéndose expresar en forma discreta como

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \quad (\text{A.8})$$

En la ecuación anterior, $\mathbf{x}_k$ es el vector de estado de tiempo discreto que contiene los desplazamientos y velocidades, $\mathbf{u}_k$ e $\mathbf{y}_k$ son la entrada y la salida muestreadas, $\mathbf{A}$ es la matriz de estado discreta, $\mathbf{B}$ es la matriz input (de ruido) discreta, $\mathbf{C}$ es la matriz de salida discreta y $\mathbf{D}$ es la matriz de transmisión directa.

A.2.3. Modelo espacio-estado estocástico

En un modelo de espacio estocástico (Fig. A.1) se puede controlar la input determinista $\mathbf{u}_k$, mientras que las perturbaciones $\mathbf{v}_k$ que pueden ser causadas por errores en la medida, no. Por otra parte, las señales medidas $\mathbf{y}_k$ proporcionarán información sobre el sistema a medir. Llamando $\mathbf{w}_k$ al ruido causado por el ambiente exterior, las ecuaciones (A.7) y (A.8) se pueden expresar como [85]

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \quad (\text{A.10})$$



Figura A.1: Modelo espacio-estado estocástico.

Como es sabido, en el campo de la ingeniería civil es difícil cuantificar las excitaciones y/o fuerzas externas (por ejemplo, la carga de viento). Por ello, en los modelos estocásticos se considera, por comodidad práctica, que la entrada $\mathbf{u}_k$ es un proceso de ruido blanco ($\mathbf{u}_k = 0$) [85], por tanto, no existe correlación entre sus valores en instantes diferentes, dando lugar a que su densidad espectral de potencia sea constante. De esta manera, las ecuaciones (A.9) y (A.10) quedan como

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (\text{A.12})$$

A.3. Identificación modal a través del método SSI-COV

En este apartado se explicará brevemente la teoría básica del método SSI-COV. A este respecto, se pueden considerar dos pilares fundamentales, el primero es la obtención de la matriz del sistema, y el segundo, la identificación los parámetros modales del sistema de estudio.

A.3.1. Matriz de Hankel

El primer paso es crear una matriz de Hankel [85] que incluye los vectores que contienen las mediciones simultáneas en un instante k dado $\mathbf{y}_k$.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{j}} \mathbf{Y}_{0/2i-1} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \cdots & \mathbf{y}_{j-1} \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}_{i-1} & \mathbf{y}_i & \cdots & \mathbf{y}_{i+j-2} \\ \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \cdots & \mathbf{y}_{i+j-1} \\ \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \cdots & \mathbf{y}_{i+j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}_{2i-1} & \mathbf{y}_{2i} & \cdots & \mathbf{y}_{2i+j-2} \end{bmatrix}_{2li \times j} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{0/i-1} \\ \mathbf{Y}_{i/2i-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

donde la matriz de Hankel es una matriz que consta de $2i$ bloques de filas y j columnas, estando cada fila compuesta de l sub-filas, siendo l el número de canales de salida, es decir, de sensores ($\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$). Hay que destacar que tanto i como j son dos parámetros claves en el método, de tal manera que pueden influir de forma destacada en los resultados. Para garantizar que el algoritmo es estadísticamente significativo, es necesario que j sea infinitamente largo, lo cual puede ser aproximadamente satisfecho ya que las señales de salida tienen una longitud finita. Por otra parte, $\mathbf{Y}_{0/2i-1}$ se divide en dos, $\mathbf{Y}_p$ e $\mathbf{Y}_f$, donde los subíndices p y f denotan pasado y futuro, respectivamente.

A.3.2. Matriz de covarianza de salida

Definiendo la matriz de covarianza de salida como $\mathbf{\Lambda}_i = E[\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^t]$ y asumiendo que los datos de salida pertenecen a un proceso ergódico, $\mathbf{\Lambda}_i$ puede estimarse a través de la siguiente expresión [85]

$$\mathbf{\Lambda}_i = E[\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^t] = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^t \quad (\text{A.14})$$

por lo que a partir de la ecuación (A.13) se ensambla la matriz de bloques de Toeplitz que contiene estas matrices,

$$\mathbf{T}_{l/i} = \mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_p^T = \begin{bmatrix} \Lambda_i & \Lambda_{i-1} & \cdot & \cdot & \Lambda_1 \\ \Lambda_{i+1} & \Lambda_i & \cdot & \cdot & \Lambda_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Lambda_{2i-1} & \Lambda_{2i-2} & \cdot & \cdot & \Lambda_i \end{bmatrix}_{li \times li} \quad (\text{A.15})$$

de tal manera que los datos de salida de una matriz Hankel de dimensión $2li \times j$ pasan a una matriz de Toeplitz de dimensión $li \times li$.

A.3.3. Descomposición de la matriz de Toeplitz

Las matrices de covarianza de salida presentan la siguiente propiedad $\Lambda_i = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G}$, siendo $\mathbf{G} = E[\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{y}_k^T]$ la matriz de covarianza entre el vector estado y el vector salida [85]. Operando con (A.14) se llega a

$$\mathbf{T}_{l/i} = \mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_p^T = \begin{bmatrix} \Lambda_i & \Lambda_{i-1} & \cdot & \cdot & \Lambda_1 \\ \Lambda_{i+1} & \Lambda_i & \cdot & \cdot & \Lambda_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Lambda_{2i-1} & \Lambda_{2i-2} & \cdot & \cdot & \Lambda_i \end{bmatrix}_{ixi} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-2}\mathbf{G} & \cdot & \cdot & \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^i\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} & \cdot & \cdot & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{G} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{2i-2}\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{2i-1}\mathbf{G} & \cdot & \cdot & \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}_{ixi} \quad (\text{A.16})$$

que se puede escribir como

$$\mathbf{T}_{1/i} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \end{pmatrix} (\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} \quad \cdot \quad \cdot \quad \mathbf{A}\mathbf{G} \quad \mathbf{G}) = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{\Delta}_i \quad (\text{A.17})$$

donde

$$\mathbf{\Gamma}_i = (\mathbf{C} \quad \mathbf{C}\mathbf{A} \quad \cdot \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1})^T \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{\Delta}_i = (\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} \quad \cdot \quad \cdot \quad \mathbf{A}\mathbf{G} \quad \mathbf{G}) \quad (\text{A.19})$$

siendo $\mathbf{\Gamma}_i$ y $\mathbf{\Delta}_i$ las matrices de observabilidad y de controlabilidad, respectivamente.

A continuación, operando de la misma manera se obtiene la segunda matriz de Toeplitz

$$\mathbf{T}_{2/i+1} = \begin{bmatrix} \Lambda_{i+1} & \Lambda_i & \cdot & \cdot & \Lambda_2 \\ \Lambda_{i+2} & \Lambda_{i+1} & \cdot & \cdot & \Lambda_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Lambda_{2i} & \Lambda_{2i-1} & \cdot & \cdot & \Lambda_{i+1} \end{bmatrix}_{ixi} = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{A} \mathbf{\Delta}_i \quad (\text{A.20})$$

Las matrices de observabilidad ($\mathbf{\Gamma}_i$) y de controlabilidad ($\mathbf{\Delta}_i$) se pueden obtener a partir de la primera matriz de Toeplitz usando la descomposición en valores singulares (SVD, single value decomposition) [92]

$$\mathbf{T}_{1/i} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T \quad (\text{A.21})$$

donde $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son matrices ortogonales, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{V}_1$ pertenecen a $\mathbb{R}$, y $\mathbf{S}$ es una matriz diagonal. Las matrices de observabilidad ($\mathbf{\Gamma}_i$) y de controlabilidad ($\mathbf{\Delta}_i$) pueden ser definidas como

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2} \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{\Delta}_i = \mathbf{S}_1^{1/2} \mathbf{V}_1^T \quad (\text{A.23})$$

por lo que sustituyendo (A.22) y (A.23) en (A.20) se llega a la obtención de la matriz modal del sistema ($\mathbf{A}$)

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_1^{-1/2} \mathbf{U}_1^T \mathbf{T}_{2/i+1} \mathbf{V}_1 \mathbf{S}_1^{-1/2} \quad (\text{A.24})$$

De la ecuación (A.18) se tiene que la matriz $\mathbf{C}$ es una submatriz, o las l primeras filas, de $\mathbf{r}_i$; mientras que de la ecuación (A.19) se tiene que la matriz $\mathbf{G}$ está constituida por las l últimas columnas de $\mathbf{\Delta}_i$. Así pues, tanto las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ pueden ser determinadas.

A.3.4. Parámetros modales. Frecuencias

A partir de la matriz $\mathbf{A}$ se pueden obtener las frecuencias naturales del muro. Para ello, se aplica la descomposición de valores propios a la matriz de estado $\mathbf{A}$ [92]

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\psi}^{-1} \quad (\text{A.25})$$

donde $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots$ es una matriz diagonal que contiene los autovalores del sistema discreto; $\boldsymbol{\psi}$ es una matriz cuyas columnas son los autovectores del sistema discreto. Los autovalores λ_i de $\mathbf{A}$ se convierten del dominio del tiempo discreto al dominio del tiempo continuo a través de

$$\lambda_{ci} = \frac{\ln(\lambda_i)}{\Delta t} \quad (\text{A.26})$$

Como los autovalores λ_{ci} son parejas de valores complejos conjugados, las frecuencias naturales del sistema en hercios se obtienen a partir de

$$f_i = \frac{\sqrt{\text{Re}(\lambda_{ci})^2 + \text{Im}(\lambda_{ci})^2}}{2\pi} \quad (\text{A.27})$$

A.3.5. Orden del sistema. Diagrama de estabilización

Para determinar las frecuencias de la estructura, y, por tanto, discriminar entre las físicas del sistema y las de ruido del modelo, se utilizan los diagramas de estabilización. El diagrama de estabilización representa la evolución de los parámetros estimados a medida que se incrementa el orden asumido para el sistema.

Se considerarán como polos estables y, por tanto, se mostrarán en el diagrama de estabilización, aquellas frecuencias que estén dentro de la tolerancia dada por

$$\frac{f_i^{(n)} - f_i^{(n+1)}}{f_i^{(n+1)}} 100\% \leq \Delta f_{lim} \quad (\text{A.25})$$

En esta tesis se ha asumido un valor de tolerancia $\Delta f_{lim} = 1\%$ [91].

A.4. Aplicación del método

A modo de ilustración, en este apartado se muestran los resultados de la aplicación del algoritmo SSI-COV a un caso concreto, siendo el procedimiento mostrado el mismo que se aplicó para la obtención de los espectros del apartado 4.5 correspondiente al capítulo 4 de esta tesis.

En las figuras A.2 y A.3 se presentan los diagramas de estabilización obtenidos a partir de la medición llevada a cabo en la habitación 2 de la figura 4.15.b (capítulo 4). Para la obtención de estos diagramas, las frecuencias estables entre 0 y 8 Hz se identifican usando una frecuencia de muestreo de 88.20 Hz; el mínimo y máximo orden del sistema para el cálculo del diagrama de estabilización son denotados por $N_{\min}$ y $N_{\max}$, respectivamente. Para un análisis mejor de los diagramas de estabilización, y a su vez, para ver las diferencias cuando se aplican diferentes órdenes del sistema en una misma medición, los cuatro diagramas presentan diferentes $N_{\min}$ y $N_{\max}$. Por último, un diagrama se considera estable y se grafica con asterisco “*” si la diferencia de frecuencia es menor a 1%, tal y como se comentó anteriormente.

En la figura A.2 se muestran los diagramas de estabilización para el caso que $N_{\min} = 1$, variando $N_{\max}$. En estos diagramas se identifican claramente las dos primeras frecuencias naturales del sistema, siendo los valores de estas frecuencias 2.94 y 5.45 Hz. En relación a la tercera frecuencia natural, se observa que se identifica más claramente en la figura A.2.b, con un valor de 7.19 Hz. Ello es debido a que en la figura A.2.b ha habido un aumento del orden del sistema respecto a la A.2.a, pero como se puede observar, ha aumentado la presencia de frecuencias espurias.

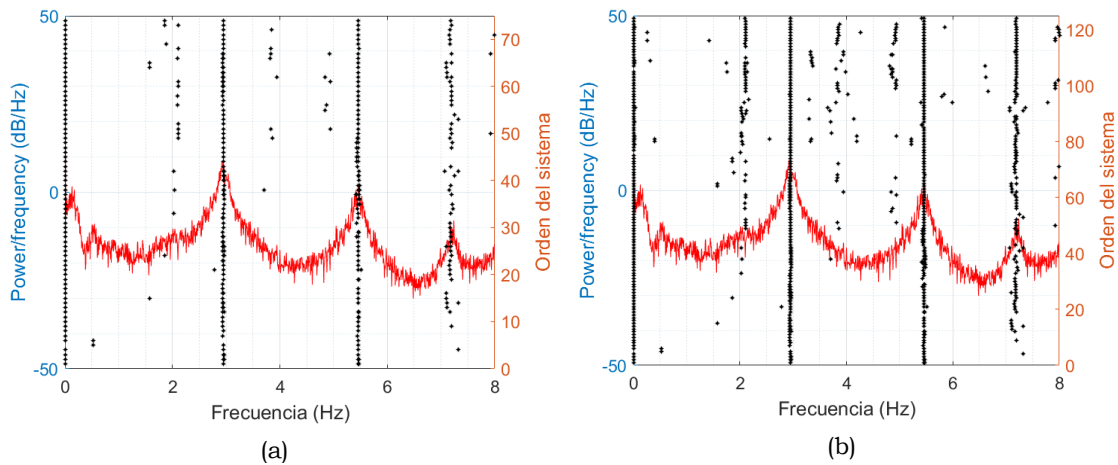


Figura A.2: Diagramas de estabilización. (a) $N_{\min} = 1$ y $N_{\max} = 75$; (b) $N_{\min} = 1$ y $N_{\max} = 125$

Por otra parte, en la figura A.3 se muestran los diagramas de estabilización partiendo de un valor mínimo $N_{\min} = 50$. Al igual que en la figura A.2, se identifican claramente las dos primeras frecuencias naturales del sistema. En relación a la tercera frecuencia natural, se observa que se identifica en los dos diagramas de la figura A.3, pero más claramente en el diagrama de la figura A.3.b, donde ha habido un aumento del orden del sistema. Al igual que en el diagrama de la figura A.2.b, el aumento del orden del sistema ha dado lugar a un aumento de frecuencias espurias, si bien se identifica de manera más nítida la tercera frecuencia natural en el diagrama de la figura A.3.b que en el diagrama de la figura A.2.b.

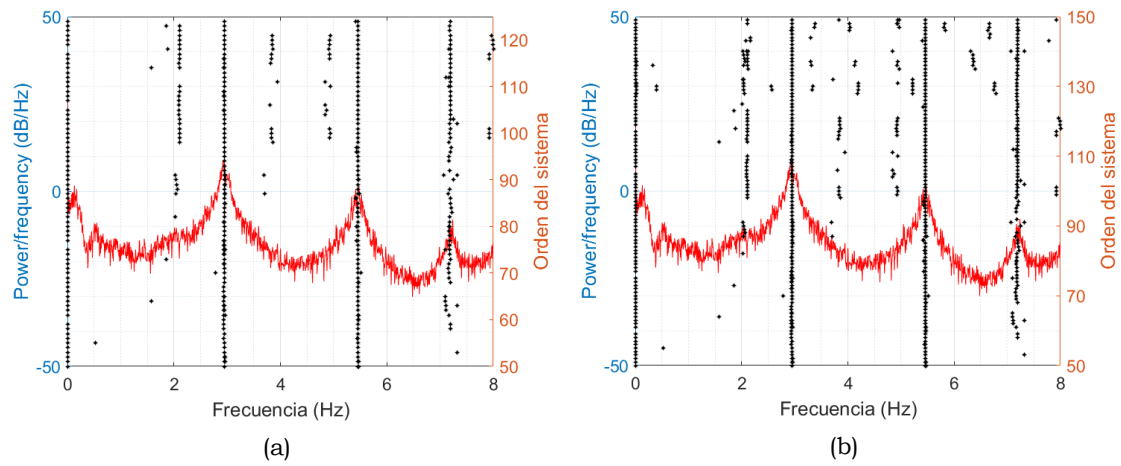


Figura A.3: Diagramas de estabilización. (a) $N_{\min} = 50$ y $N_{\max} = 125$; (b) $N_{\min} = 50$ y $N_{\max} = 150$

REFERENCIAS

- [1] González JJ. Presa de Soria. Una historia de proyectos, informes y notas informativas. Gran Canaria 1935-1972; 2010
- [2] Bukenya P, Moyo P, Beushausen H, Oosthuizen C. Health monitoring of concrete dams: a literature review. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, 2014;4:235–44
- [3] Fok KL, Chopra AK. Earthquake analysis of arch dams including dam-water interaction, reservoir boundary absorption and foundation flexibility. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 1986;14:155–84
- [4] Fok KL, Chopra AK. Frequency response functions for arch dams: hydrodynamic and foundation flexibility effects. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 1986;14:769–95
- [5] Tan H, Chopra AK. Earthquake analysis of arch dams including dam-waterfoundation rock interaction. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 1995;24:1453–74
- [6] Maeso O, Domínguez J. Earthquake analysis of arch dams I: Dam-foundation interaction. *Journal of Engineering Mechanics*, 1993;119(3):496–512
- [7] Domínguez J, Maeso O. Earthquake analysis of arch dams II: Dam-waterfoundation interaction. *Journal of Engineering Mechanics*, 1993;119(3):513–30
- [8] Maeso O, Aznárez JJ, Domínguez J. Effects of space distribution of excitation on seismic response of arch dams. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002;128:759–68
- [9] Maeso O, Aznárez JJ, Domínguez J. Three dimensional models of reservoir sediment and effects on the seismic response of arch dams. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 2004;33:1103–23
- [10] Aznárez JJ, Maeso O, Domínguez J. BE analysis of bottom sediments in dynamic fluid–structure interaction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2006;30:124–36
- [11] García F, Aznárez JJ, Cifuentes H, Medina F, Maeso O. Influence of reservoir geometry and conditions on the seismic response of arch dams. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2014;67:264–72
- [12] García F, Aznárez JJ, Padrón LA, Maeso O. Relevance of the incidence angle of the seismic waves on the dynamic response of arch dams. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2016;90:442–53
- [13] Seghir A, Tahakourt A, Bonnet G. Coupling FEM and symmetric BEM for dynamic interaction of dam–reservoir systems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2009;33(10):1201–10

- [14] Aftabi Sani A, Lotfi V. An effective procedure for seismic analysis of arch dams including dam-reservoir-foundation interaction effects. *Journal of Earthquake Engineering*, 2011;15(7):971–88
- [15] Li Z-Y, Hu Z-Q, Hong Z, Lin G. A novel scaled boundary finite element method for dynamic impedance of an arch dam foundation in a complex layered half-space. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2022;134(1):184–98
- [16] Concepción-Guodemar Y, Escuder-Bueno I, Morales-Torres A, Cervera-Miquel D. Numerical modeling for the design of monitoring in double-curvature arch dams for a change of use. Analysis for soria dam (Canary Islands-Spain). In: 26th international congress on large dams, 2018, pp. 1225–30
- [17] Humar J, Roufaiel M. Finite element analysis of reservoir vibration. *Journal of Engineering Mechanics*, 1983;109(1):215–30
- [18] Medina F, Domínguez J. Boundary elements for the analysis of the seismic response of dams including dam-water-foundation interaction effects. I. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1989;6(3):152–57
- [19] Medina F, Domínguez J. Boundary elements for the analysis of the seismic response of dams including dam-water-foundation interaction effects. II. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1989;6(3):158–63
- [20] Domínguez J, Meise T. On the use of the BEM for wave propagation in infinite domains. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1991;8(3):132–38
- [21] Szczesiak T, Weber B. Hydrodynamic effects in a reservoir with semi-circular cross-section and absorptive bottom. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1992; 11:203–12
- [22] Jafari M, Lotfi V. Dynamic analysis of concrete gravity dam-reservoir systems by a wavenumber approach for the general reservoir base condition. *Sci Iran*, 2018;25(6):3054–65
- [23] Mircevska V, Bickovski V, Aleksov I, Hristovski V. Influence of irregular canyon shape on location of truncation surface. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013;37:624-36
- [24] Mircevska V, Nastev M, Hristovski V, Bulajic I. Arch dam-fluid interaction considering reservoir topology. *Journal of Earthquake Engineering*, 2014, 18(7):1083–101
- [25] Hariri-Ardebili MA, Mahdi Seyed-Kolbadi S, Saouma VE, Salamon JW, Nuss LK. Anatomy of the vibration characteristics in old arch dams by random field theory. *Engineering Structures*, 2019; 179:460–75
- [26] Farzad R, Lotfi V. Modal analysis of concrete arch dam-reservoir-massed foundation system in frequency domain. In: *Proceedings of the institution of civil engineers - structures and buildings*, 2021; pp. 1–13
- [27] Rezaiee-Pajand M, Kazemiyan MS, Aftabi Sani A. A literature review on dynamic analysis of concrete gravity and arch dams. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2021; 28:4357–72

- [28] Brincker R, Ventura CE. Introduction to Operational Modal Analysis. John Wiley and Sons, 2015
- [29] Brincker R, Zhang L, Andersen P. Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition. Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC, 2000; 1, pp. 625–630
- [30] Brincker R, Zhang L, Andersen P. Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition. Smart Materials and Structures, 2001; 10(3):441
- [31] Brownjohn JMW, Dumanoglu AA, Severn RT. Ambient vibration survey of the fatih sultan mehmet (second Bosphorus) suspension bridge. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1992; 21(10):907–24
- [32] Brownjohn JMW, Magalhaes F, Caetano E, Cunha A. Ambient vibration re-testing and operational modal analysis of the Humber Bridge Engineering Structures, 2010; 32(8):2003–18
- [33] Magalhães F, Cunha A. Explaining operational modal analysis with data from an arch bridge. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011; 25(5):1431-50
- [34] Magalhães F, Cunha A, Caetano E. Vibration based structural health monitoring of an arch bridge: From automated OMA to damage detection. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012; 28: 212–28
- [35] Koo KY, Brownjohn JMW, List DI, Cole R. Structural health monitoring of the Tamar suspension bridge. Structural Control and Health Monitoring, 2013; 20(4):609–25
- [36] Oliveira G, Magalhães F, Cunha Á, Caetano E. Modal decomposition of the dynamic response of wind turbine during one year of continuous monitoring. Structural Control and Health Monitoring, 2021; 28(8), e2754
- [37] Galvín P, Romero A, Moliner E, De Roeck G, Martínez-Rodrigo MD. On the dynamic characterisation of railway bridges through experimental Testing. Engineering Structures, 2021; 226:111261
- [38] Tadeu A, Romero A, Bandeira F, Pedro F, Dias S, Serra M, Brett M, Galvín P. Theoretical and experimental analysis of the quasi-static and dynamic behaviour of the world's longest suspension footbridge in 2020. Engineering Structures, 2022; 253:113830
- [39] Darbre GR, de Smet CAM, Kraemer C. Natural frequencies measured from ambient vibration response of the arch dam of mauvoisin. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2000; 29:577–86
- [40] Darbre GR, Proulx J. Continuous ambient-vibration monitoring of the arch dam of Mauvoisin. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2002; 31:475–80
- [41] Calcina SV, Eltrudis L, Piroddi L, Ranieri G. Ambient vibration tests of an arch dam with different reservoir water levels: experimental results and comparison with finite element modelling. The Scientific World Journal, 2014; 2014, Article ID 692709

- [42] García-Palacios JH, Soria JM, Díaz IM, Tirado-Andrés F. Ambient modal testing of a double-arch dam: The experimental campaign and model updating. In: Journal of physics: conference series, Vol. 744. IOP Publishing; 2016, 012037
- [43] Yang J, Jin F, Wang J-T, Kou, L-H. System identification and modal analysis of an arch dam based on earthquake response records. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2016; 92(2017):109-21
- [44] Pereira S, Magalhães F, Gomes JP, Cunha A, Lemos JV. Vibration-based damage detection of a concrete arch dam. Engineering Structures, 2021; 235:112032
- [45] Pereira S, Magalhães F, Cunha A, Moutinho C, Pacheco J. Modal identification of concrete dams under natural excitation. Journal of Civil Structural Health Monitoring, 2021; 11:465–84
- [46] Brownjohn, JMW. Structural health monitoring of civil infrastructure. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2007; 365(1851):589–622
- [47] Soler-Llorens JL, Galiana-Merino JJ, Giner-Caturla J, Jauregui Eslava P, Rosa-Cintas S, Rosa-Herranz J. Development and programming of Geophonino: A low cost Arduino-based seismic recorder for vertical geophones. Computers & Geosciences, 2016; 94:1-10
- [48] Valenti S, Conti M, Pierleoni P, Zappelli L, Belli A, Gara F, Carbonari S, and Regni M. A low cost wireless sensor node for building monitoring. IEEE Workshop on Environmental, Energy, and Structural Monitoring Systems, 2018; art. no. 8405827
- [49] Domínguez J. Boundary elements in dynamics. 7th ed. Computational Mechanics Publications & Elsevier Applied Science; 1993
- [50] Achenbach JD. Wave propagation in elastic solids. North Holland; 1973
- [51] Maeso O. Modelo para el análisis sísmico de presas bóveda incluyendo los efectos de interacción suelo-agua-estructura. Tesis doctoral, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de G.C., España; 1992
- [52] Maeso O, Aznárez JJ. Estrategias para la reducción del impacto acústico en el entorno de carreteras. Una aplicación del Método de los Elementos de Contorno. Universidad de las Palmas de Gran Canaria; 2005
- [53] Eringen AC, Suhubi ES. Elastodynamics, Vol II. Linear theory. Academic Press; 1975
- [54] Humar J, Roufaiel M. Finite element analysis of reservoir vibration. Journal of Engineering Mechanics, 1983; 109(1):215–30
- [55] Aznárez JJ. Efectos de los fenómenos de interacción incluyendo los factores espaciales y sedimentos de fondo en la respuesta sísmica de presas bóveda. Tesis doctoral, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de G.C., España; 2002

- [56] París F. El método de los elementos de contorno en la teoría del potencial y la elasticidad. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, España; 1979
- [57] Andersen L. Linear elastodynamic analysis. Department of Civil Engineering, Aalborg University; 2006
- [58] Documento XYZT. Presa de Soria. Dirección General de Obras Hidráulicas. Ministerio de Obras Públicas y Transportes; 1991
- [59] Infraestructura de datos espaciales de canarias. Modelo de terreno LIDAR. <http://www.idecanarias.es>, 2017
- [60] Electricité de France R&D, Code_Aster software: Analysis of Structures and Thermomechanics for Studies & Research, 1989-2022
- [61] Shul'man SG. Seismic pressure of water on hydraulic structures. CRC Press; 1987
- [62] Singiresu S. Rao. Mechanical vibrations. Addison-Wesley Publishing Company; 1990
- [63] Denton P. Building a simple seismometer. British Geological Survey. Natural environment research council. http://ed-thelen.org/Seismo/Building_a_simple_seismometer.pdf, 2019
- [64] Knight K. Instructions for construction of a Lehman Seismometer. <http://www.seismicnet.com/lehman.html>, 2019
- [65] Ulmann, B. A simple Lehman type seismometer. http://www.vaxman.de/projects/lehman_seismometer/seismometer.html, 2019
- [66] Burr-Brown Corporation; INA 114. Precision instrumentation amplifier. Technical Datasheet printed in U.S.A., March, 1998
- [67] Analog devices; AD 820. Single-Supply, Rail-to-Rail, Low Power, FET Input Operational Amplifier. Technical Datasheet
- [68] Texas Instruments; ADS1220. 4-Channel, 2-kSPS, Low-Power, 24-Bit ADC with Integrated PGA and Reference. Technical Datasheet revised august 2016
- [69] Reynders E, Magalhães F, De-Roeck G, Cunha A. Merging strategies for multi-setup operational modal analysis: application to the Luiz I steel arch bridge. In: Proceedings of the 26th international modal analysis conference, Vol. 36; 2009:115–27
- [70] Amador SDR, Brincker R. Robust multi-dataset identification with frequency domain decomposition. Journal of Sound and Vibration, 2021;116207
- [71] Bendat JS, Piersol AG. Engineering applications of correlation and spectral analysis. New York: John Wiley & Sons; 1980
- [72] Miquel B, Verret D. The use of ambient vibration instrumentation for dams at Hydro-Québec. 12th Canadian Conference on Earthquake Engineering, Quebec City, June 17-20, 2019

- [73] Li S, Wang J-T, Jin A-Y, Luo G-H. Parametric analysis of SSI algorithm in modal identification of high arch dams. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2020; 129:105929
- [74] Yuan P-P, Zhang J, Feng J-Q, Wang H-H, Ren W-X, Wang C. An improved time-frequency analysis method for structural instantaneous frequency identification based on generalized S-transform and synchroextracting transform. *Engineering Structures*, 2022; 252: 113657
- [75] Li J, Bao T, Ventura CE. An automated operational modal analysis algorithm and its application to concrete dams. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022; 168:108707
- [76] Prakash G, Dugalam R, Barbosh M, Sadhu A. Recent advancement of concrete dam health monitoring technology: A systematic literature review. *Structures*, 2022; 44:766-84
- [77] Sevieri G, Andreini M, De Falco A, Matthies HG. Concrete gravity dams model parameters updating using static measurements. *Engineering Structures*, 2019; 196:109231
- [78] Diaz M, Charbonnel P-É, Chamoin L. Robust energy-based model updating framework for random processes in dynamics: Application to shaking-table experiments. *Computers & Structures*, 2022; 264:106746
- [79] Flah M, Nunez I, Chaabene WB, Nehdi ML. Machine Learning Algorithms in Civil Structural Health Monitoring: A Systematic Review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2021; 28:2621–43
- [80] González WM, Ferrada A, Boroschek RL, López-Droguett E. Characterization of the modal response using Deep recurrent neural networks. *Engineering Structures*, 2022; 256: 113915
- [81] Wedel F, Marx S. Application of machine learning methods on real bridge monitoring data. *Engineering Structures*, 2022; 250:113365
- [82] Mugnaini V, Zanotti-Fragonara L, Civera M. A machine learning approach for automatic operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022; 170: 108813
- [83] Ljung, L. (1999). *System Identification. Theory for the User*. 2nd edition. Prentice Hall
- [84] Van Overschee P, De Moor B. *Subspace Identification for Linear Systems. Theory – Implementation – Applications*. Kluwer Academic Publishers; 1996
- [85] Peeters B, De Roeck G. Reference-based Stochastic Subspace Identification for Output-Only modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1999; 13(6):855-78
- [86] Yu D-J, Ren W-X. EMD-based stochastic subspace identification of structures from operational vibration measurements. *Engineering Structures*, 2005; 27(12):1741–51
- [87] Magalhães F, Caetano E, Cunha A. Operational modal analysis and finite element model correlation of the Braga Stadium suspended roof. *Engineering Structures*, 2008; 30:1688–98

- [88] Magalhães F, Cunha A, Caetano E. Online automatic identification of the modal parameters of a long span arch bridge. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009; 23:316–29
- [89] Magalhães F, Cunha A, Caetano E, Brincker R. Damping estimation using free decays and ambient vibration tests. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2010; 24:1274-90
- [90] Liu Y-C, Loh C-H, Ni Y-Q. Stochastic subspace identification for output-only modal analysis: application to super high-rise tower under abnormal loading condition. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2013; 42(4):477–98
- [91] Li S, Wang J-T, Jin A-Y, Luo G-H. Parametric analysis of SSI algorithm in modal identification of high arch dams. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2020; 129:105929
- [92] Ardila-A. YV, Gómez-Araújo ID, Villalba-Morales JD, Aracayo LA. Validation of the uncertainty bounds on modal parameters identified with the SSI-COV method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2021; 18(07)
- [93] Li J, Bao T, Ventura CE. A robust methodology for output-only modal identification of civil engineering structures. *Engineering Structures*, 2022; 270:114764