UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Escuela de Ingenierías Industriales y Civiles

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

PROYECTO DE FIN DE TÍTULO

DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN INFORMÁTICA PARA LA AYUDA AL DISEÑO ESTRUCTURAL DE AEROGENERADORES OFFSHORE MONOPILOTADOS

AUTOR: ROMÁN QUEVEDO REINA

TUTOR: JUAN JOSÉ AZNÁREZ GONZÁLEZ

TUTOR: GUILLERMO M. ÁLAMO MENESES

CURSO 2016-2017

LAS PALMAS DE GRAN CANARIA, JULIO 2017

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Escuela de Ingenierías Industriales y Civiles

DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN INFORMÁTICA PARA LA AYUDA AL DISEÑO ESTRUCTURAL DE AEROGENERADORES OFFSHORE MONOPILOTADOS

Por Román Quevedo Reina

Trabajo presentado para la obtención del Grado en Ingeniería Mecánica

Autor:	Tutor:	Tutor:
Román Quevedo Reina	Juan José Aznárez González	Guillermo M. Álamo Meneses

Las Palmas de Gran Canaria, Julio de 2017

Agradecimientos

Antes de nada, quiero agradecer el gran interés y dedicación mostrados a mis tutores. A D. Juan José Aznárez González y D. Guillermo M. Álamo Meneses, quienes han constituido piezas indispensables en la realización de un trabajo de estas características. A Juan José Aznárez por haberme introducido dentro de la ingeniería estructural, hasta entonces descartada; descubriéndome un inmenso campo de desarrollo con un atractivo inicialmente oculto. A Guillermo Álamo por sus incontables horas de dedicación, que me han permitido adquirir un sinfín de conocimientos, incluso más allá de lo que concierne a este documento. A ambos, y a toda la División de Mecánica de los Medios Continuos del IUSIANI, el haber creado un ambiente de trabajo tan agradable donde poder iniciarse dentro del ámbito de la investigación científica y desarrollarse profesional y personalmente.

Por último, pero no menos importante, a toda mi familia y amigos, quienes durante todos estos años me han ayudado a formar la persona que soy hoy. Son quienes me han estado apoyando y animando, de forma absolutamente desinteresada, durante el trascurso de esta etapa. Muchas gracias a todos.

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación obtenida del Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO) y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional(FEDER) a través del Proyecto de Investigación BIA2014-57640-R.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

La generación eléctrica a través de aerogeneradores offshore se incrementa de manera notable en los países industrializados. Las necesidades energéticas y la preocupación por el creciente deterioro medioambiental del planeta motivan y hacen urgente la toma de decisiones y el compromiso de los gobiernos en la instalación y uso de formas de producción energética más limpias y respetuosas con el entorno. En este sentido, la producción de energía eléctrica mediante aerogeneradores es una de las opciones técnicamente más desarrolladas, fiables e implantadas en el momento actual. Su principal inconveniente es la necesidad de gran cantidad de espacio para su instalación en una escala que permita considerarlo una alternativa viable. Por este motivo, la opción de instalación offshore de estos dispositivos representa una posibilidad a explotar, si bien tiene el inconveniente del mayor costo en montaje y mantenimiento.

Con todo ello, hasta finales de 2016 ya se habían instalado más de 3500 aerogeneradores offshore en Europa, de los cuales el 81 % se han cimentado en el fondo marino haciendo uso de un sólo pilote [4]. Se prevé una expansión importante de esta alternativa y se hace necesario disponer de herramientas que permitan, entre otros aspectos, el análisis estructural de estos aparatos y su ayuda en el diseño mejorado de los mismos. Dentro de este ámbito, los fenómenos de interacción suelo-estructura y el carácter dinámico de la excitación son factores determinantes. Además de las cargas de viento y oleaje, los efectos dinámicos asociados al funcionamiento, suelos de baja calidad portante o incluso zonas de peligrosidad sísmica, son factores que debe incorporar el modelo que se desarrolle con este fin.

Actualmente las normas para el diseño de este tipo de estructuras considera principalmente las cargas debidas a viento y, en su caso, a olas, corrientes y hielo, además de las cargas propias de las distintas condiciones de operación del generador; tratando las cargas sísmicas de manera superficial y poco rigurosa. Esto se debe a que prácticamente la totalidad de los parques eólicos offshore están instalados en zonas con una baja actividad sísmica (principalmente en el mar del norte de Europa). No obstante, el creciente desarrollo de esta tecnología y el crecimiento del número de parques instalados obliga a ocupar zonas con suelos de peores características portantes o con mayor riesgo sísmico. Esta tendencia, junto con el aumento de las dimensiones de los aerogeneradores (y, con ello, de sus efectos inerciales), hace necesario el estudio de la respuesta de estos sistemas ante cargas de origen sísmico.

1.2. Objeto del trabajo

El Trabajo de Fin de Grado que se presenta pretende ser el primer paso en el desarrollo de una herramienta informática que sirva de soporte para el diseño estructural de aerogeneradores offshore ubicados en zonas con riesgo sísmico. Esta primera fase se centra en la formulación e implementación de un modelo matemático que permita simular el comportamiento dinámico y sísmico de la estructura del dispositivo y su cimentación (un único pilote –monopilote- en este caso). Se trata de un modelo simplificado basado en la teoría de vigas (fuste, pilote) que empleará estrategias tipo Winkler para representar la interacción pilote-fondo marino.

1.3. Contenido

En este trabajo se presenta el desarrollo e implementación de un modelo numérico que permita evaluar la respuesta dinámica estructural de aerogeneradores offshore monopilotados. Se trata de un modelo basado en teoría dinámica de vigas que permitiría abordar dos problemas en esta primera fase:

- Caracterizar dinámicamente la estructura del aerogenerador teniendo en cuenta los efectos de interacción suelo-estructura. Es decir, determinar las frecuencias naturales y amortiguamiento modal de la misma. El modelo cuantificará e informará al usuario de los cambios que experimentan estas variables asociados a los fenómenos de interacción con el fondo marino. Todos estos datos son importantes en la línea de evitar resonancias vinculadas con las cargas de operación (viento, oleaje, rotor, paso de palas,...) y, por tanto, son un punto crítico en la evaluación del diseño propuesto.

- Determinar la respuesta del fuste y pilote ante cargas de origen sísmico. Los datos correspondientes a la excitación sísmica son definidos por el usuario y la respuesta se presenta en forma de envolventes de esfuerzos a lo largo de todos los tramos de la estructura.

Es necesario, para esta primera fase de modelización, implementar un pre-procesador y un post-procesador preliminares para la utilización sencilla de la Aplicación. La herramienta resultante permite al usuario introducir la geometría y propiedades mecánicas del aerogenerador, del pilote y del fondo marino de forma sencilla. A partir de estos datos, el usuario puede optar por los análisis implementados y se generan los resultados del modelo de forma clara y amigable.

1.4. Estructura del documento

Este documento está constituido por cinco capítulos, siendo el primero de ellos la presente introducción. El capítulo 2 hace referencia al modelo, donde se detalla toda la formulación desarrollada para definir analíticamente el sistema. Además, define los procedimientos empleados para llevar a cabo los cálculo relativos a los dos problemas a resolver (la caracterización dinámica y la obtención de la envolvente de esfuerzos frente a cargas sísmicas). El capítulo 3 está orientado a explicar la Aplicación Informática presentada. Se indican claramente los procesos que ejecuta (apoyándose en un diagrama de flujo) y la manera de interactuar con ella. El capítulo 4 presenta un conjunto de resultados obtenidos mediante esta aplicación, a partir de los cuales se realiza su verificación con modelos más rigurosos y un estudio de la influencia de las características del sistema en su respuesta. El capítulo 5 recoge las conclusiones extraídas a lo largo del trabajo y los desarrollos futuros que se proponen.

Finalmente, se adjuntan dos anexos que incluyen un fichero de datos de entrada, a modo de ejemplo, y el código de las distintas funciones empleadas en la Aplicación Informática desarrollada, respectivamente.

Capítulo 2

Modelo

En este capítulo se desarrolla el modelo matemático que permite el cálculo de la frecuencia propia de un aerogenerador, así como su envolvente de esfuerzos ante cargas de origen sísmico. El problema presenta una eleva complejidad que impide abordarlo analíticamente de forma directa, por lo que se recurre a simplificaciones extendidas en el ámbito de trabajo en cuestión.

El tipo de estructura que se trata en este trabajo se ve representada en la figura 2.1, y consiste en un aerogenerador que es cimentado mediante un monopilote. Para poder tratar también aerogeneradores offshore, se incluye en el modelo la presencia de una subestructura sumergida que conecte el aerogenerador con la cimentación, desarrollándose ambas alternativas en paralelo. A continuación, se detalla cada uno de los procedimientos empleados en la caracterización del sistema.

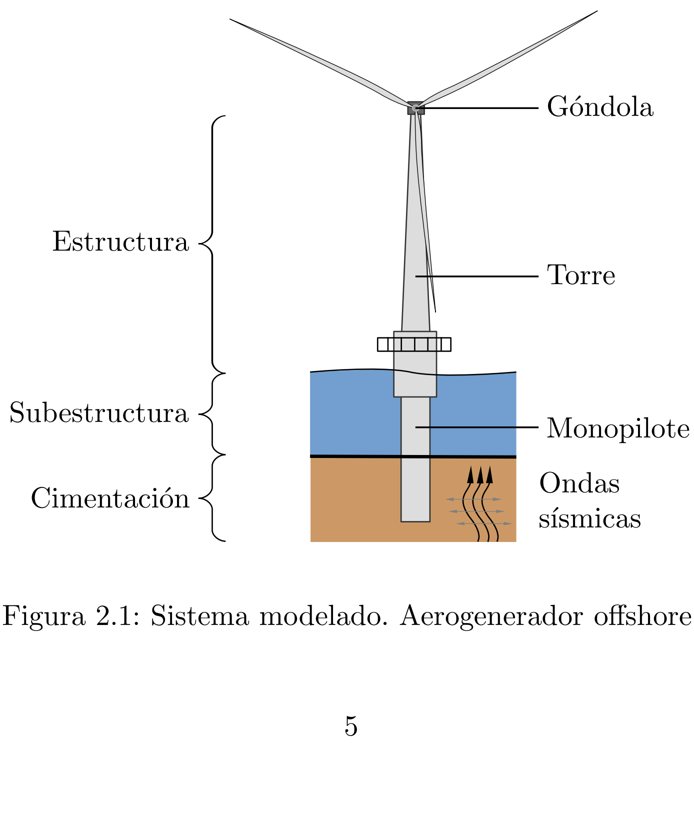

Figura 2.1: Sistema modelado. Aerogenerador offshore.

El modelo presentado se fundamenta en la teoría de vigas. Cada uno de los tramos que incluye el sistema se modela como vigas Bernoulli, resolviendo la ecuación de gobierno particularizada para cada caso. Los tramos de los que se compone el sistema completo son tres: torre, caracterizada por su sección variable; subestructura, añade la masa de agua para incluir efector hidrodinámicos; y la cimentación, definida por la interacción suelo estructura mediante un Modelo Winkler.

2.1. Caracterización analítica del sistema

2.1.1. Ecuación de gobierno

2.1.1.1. Definición general

Para la obtención de la ecuación diferencial que gobierna el sistema se plantea el equilibrio en el elemento diferencial Euler-Bernoulli, considerando tanto la masa como la inercia rotacional de dicho elemento diferencial:

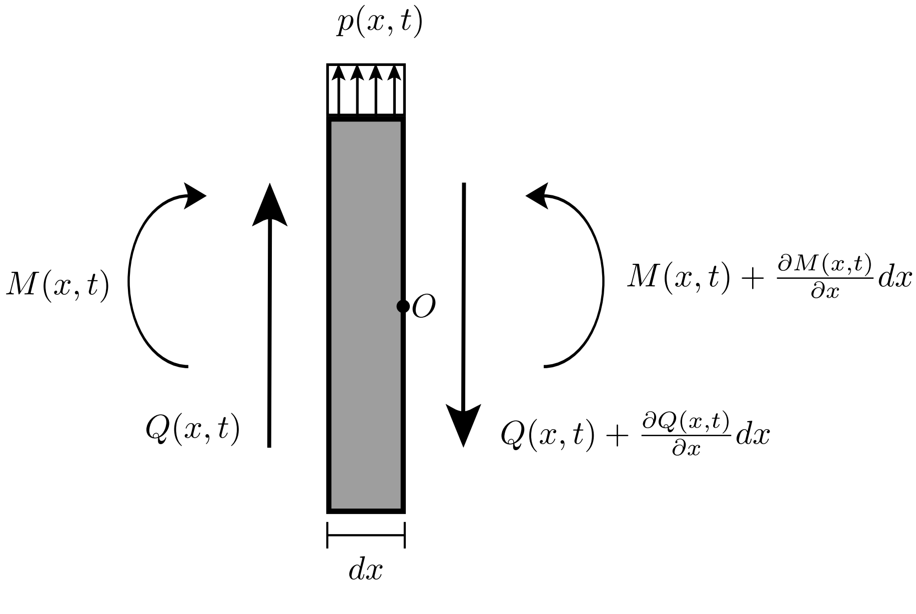

Figura 2.2: Elemento diferencial Euler-Bernoulli.

En primer lugar, se plantea el equilibrio de momentos con respecto al punto O:

$$M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}\, dx - M(x,t) - Q(x,t)\, dx - p(x,t)\, dx\, \frac{dx}{2} = m(x)\, r(x)^2\, dx\, \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\, \partial t^2} \quad (2.1)$$

Donde x representa la posición en la viga, t el instante de tiempo, $u(x,t)$ el desplazamiento que sufre e elemento diferencial, $M(x,t)$ el momento flector en la sección, $Q(x,t)$ el cortante e la sección, $p(x,t)$ la carga exterior que incide sobre el elemento diferencial, $r(x)$ el radio de giro de la sección y $m(x)$ la masa por unidad de longitud. Despreciando términos de segundo orden y simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - Q(x,t) = m(x)\, r(x)^2\, \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\, \partial t^2} \tag{2.2}$$

Teniendo en cuenta la ecuación constitutiva que relaciona el momento con el desplazamiento para esta teoría de vigas:

$$M(x,t) = EI(x)\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

Se sustituye en la ecuación (2.2) la relación (2.3) y se despeja el cortante:

$$Q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) - m(x)\, r(x)^2\, \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\, \partial t^2} \tag{2.4}$$

A continuación, se plantea el equilibrio de fuerzas verticales en el elemento diferencial de la figura 2.2:

$$p(x,t)\, dx + Q(x,t) - \left(Q(x,t) + \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\, dx\right) = m(x)\, dx\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{2.5}$$

Simplificando se obtiene:

$$p(x,t) - \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = m(x)\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

Sustituyendo el cortante que aparece en esta ecuación por la expresión obtenida en (2.4):

$$p(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(m(x)\, r(x)^2\, \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\, \partial t^2}\right) = m(x)\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{2.7}$$

Agrupando los términos relacionados con la deformada, se obtiene la ecuación diferencial que gobierna el sistema:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(m(x)\, r(x)^2\, \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x\, \partial t^2}\right) + m(x)\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \tag{2.8}$$

2.1.1.2. Sección constante

Una hipótesis común a la hora de tratar los elementos tipo viga es considerar que la sección es constante. En este caso, los términos $EI(x)$, $m(x)$ y $m(x)r(x)^2$ no tienen una dependencia de la coordenada x. Aplicando esta particularidad en la ecuación (2.8), se obtiene la ecuación de gobierno para la viga Euler-Bernoulli de sección constante considerando la inercia rotacional:

$$EI\, \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - m\, r^2\, \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2\, \partial t^2} + m\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \tag{2.9}$$

2.1.1.3. Interacción agua-estructura

Para modelizar la interacción agua-estructura se ha recurrido a la simplificación de que el efecto del agua en el sistema se puede representar mediante una masa traslacional adicional. El valor de esta masa adicional viene definida por el producto de la densidad del agua, el área delimitada por el límite exterior de la sección y el coeficiente de arrastre hidrodinámico C_m que permite variar su influencia. El valor de este coeficiente suele tomarse como la unidad. Por otro lado, en el caso de trabajar con una sección tubular, también se debe sumar la masa de agua contenida dentro de la sección considerada. Esta masa adicional se obtiene como el producto de la densidad del agua y el área delimitada por el limite interior de la sección.

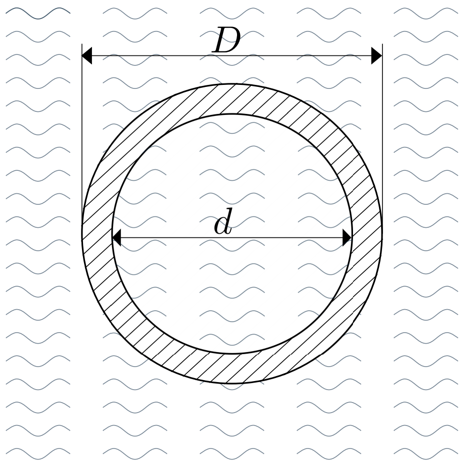

Figura 2.3: Sección sumergida.

Aplicando estas consideraciones, la masa por unidad de longitud que caracteriza la ecuación de gobierno en el tramo del pilote que se encuentra sumergido es:

$$\overline{m} = \rho\, A + \rho_{agua}\, A_{interior} + \rho_{agua}\, C_m\, A_{exterior} \tag{2.10}$$

Para simplificar esta expresión se hará uso del factor $\delta = d/D$, el cual representa la relación entre el diámetro interior y el exterior de la sección. Por medio de esta definición, se puede reformular la expresión clásica del área de la sección tubular como:

$$A = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - \delta^2\, D^2\right) = \frac{\pi}{4}\, D^2\left(1 - \delta^2\,\right) \tag{2.11}$$

Partiendo de esta nueva expresión, se puede escribir $A_{exterior}$ y $A_{interior}$ en función de A:

$$A_{exterior} = \frac{\pi}{4}\, D^2 = \frac{A}{(1-\delta^2\,)} \tag{2.12a}$$

$$A_{interior} = \frac{\pi}{4}\, d^2 = \frac{\pi}{4}\, \delta^2\, D^2 = \frac{\delta^2\, A}{(1-\delta^2\,)} \tag{2.12b}$$

Introduciendo estas expresiones en la ecuación (2.10):

$$\overline{m} = \rho\, A + \rho_{agua}\, \frac{\delta^2\, A}{(1-\delta^2\,)} + \rho_{agua}\, C_m\, \frac{A}{(1-\delta^2\,)} \tag{2.13}$$

Y sacando factor común:

$$\overline{m} = \left(\rho + \rho_{agua}\, \frac{\delta^2 + C_m}{(1-\delta^2\,)}\right) A \tag{2.14}$$

Esta ecuación permite obtener el valor de la masa por unidad de longitud que se debe considerar en la sección para considerar la interacción con el agua. Sin embargo, dado que la masa aportada por el agua únicamente se considera para el desplazamiento traslacional el momento de inercia de la sección debe permanecer constante por lo que:

$$\overline{m}\,\overline{r}^2 = m\, r^2 \tag{2.15}$$

De donde se deduce que:

$$\overline{r} = r\, \sqrt{\frac{m}{\overline{m}}} \tag{2.16}$$

Finalmente, para considerar los efectos de la interacción agua-estructura, se emplea la ecuación de gobierno para la sección constante (2.9) aplicando los cambios aquí comentados y anulando la carga exterior aplicada en la sección, ya que todas las fuerzas de interacción con el agua se modelan mediante la masa añadida anteriormente comentada. Con esto, la ecuación de gobierno para la subestructura sumergida queda:

$$EI\, \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - \overline{m}\,\overline{r}^2\, \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2\, \partial t^2} + \overline{m}\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.17}$$

2.1.1.4. Interacción suelo-estructura

El modelado de la interacción suelo-estructura es un problema de gran complejidad que muchas veces requiere del uso de formulaciones (y/o métodos numéricos) del medio continuo muy elaboradas. No obstante, y dependiendo del problema a resolver, existen aproximaciones más sencillas que permiten representar los fenómenos de interacción suelo-estructura de forma analítica y simplificada. Una de estas aproximaciones, cuyo uso está muy extendido para el cálculo de cimentaciones pilotadas, es el Modelo Winkler (ver p.ej. [9, 6, 12]). Dicho modelo sustituye el suelo por una serie de resortes distribuidos que ejercen una fuerza directamente proporcional al desplazamiento relativo entre el pilote enterrado y el suelo. Dichos resortes se definen mediante una rigidez compleja por unidad de longitud k que representa tanto los fenómenos de rigidez como de amortiguamiento de la interacción suelo-pilote. Dado que en el caso de un sismo el campo incidente produce un desplazamiento lateral a lo largo del perfil del suelo, también se considera esta aportación. Este modelo se muestra esquemáticamente en la figura 2.4.

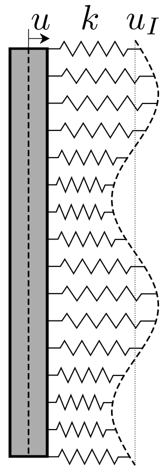

Figura 2.4: Representación del Modelo Winkler.

El valor de la rigidez asociada al suelo se ha obtenido del trabajo de Novak y otros [10]; considerando que no varía con la profundidad, lo que facilita considerablemente la resolución de la ecuación.

Por otro lado, al igual que ocurre con el tramo de la subestructura, en el pilote enterrado se debe considerar los efectos inerciales asociados a la masa de suelo que se queda en el interior. Para ello se introduce una masa y una inercia rotacional equivalentes. De modo que:

$$\overline{m} = \left(\rho + \rho_{terreno} \frac{\delta^2}{(1 - \delta^2\,)} \right) A \tag{2.18a}$$

$$\overline{r} = r \sqrt{\frac{m}{\overline{m}}} \tag{2.18b}$$

Partiendo de este modelo, la carga externa que recibe el elemento diferencial del pilote viene dada por:

$$p(x,t) = k \left(u_I(x,t) - u(x,t) \right) \tag{2.19}$$

Introduciendo este valor de la carga distribuida en la ecuación (2.9):

$$EI\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - \overline{m}\,\overline{r}^2\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2} + \overline{m}\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = k\,\big(u_I(x,t) - u(x,t)\big) \tag{2.20}$$

Y agrupando los términos relacionados con el desplazamiento del pilote por un lado y del campo incidente por el otro, se obtiene la ecuación de gobierno para el tramo de la cimentación:

$$EI\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - \overline{m}\,\overline{r}^2\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2\,\partial t^2} + \overline{m}\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + k\,u(x,t) = k\,u_I(x,t) \tag{2.21}$$

2.1.1.5. Suposición sin inercia rotacional

La solución analítica para una viga de sección variable que se utiliza para el tramo de la torre no permite considerar la inercia rotacional de la sección. Teniendo en cuenta que la inercia rotacional tiene poca influencia sobre la respuesta estructural, se ha desarrollado la solución del sistema sin considerarla. Para eliminar la contribución de la inercia rotacional en las ecuaciones ya planteadas, únicamente se debe anular el radio de giro de la sección r. De esta forma, la ecuación de gobierno general (2.8) queda:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) + m(x)\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \tag{2.22}$$

En el caso de sección constante, la ecuación (2.9) se reduce a:

$$EI\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + m\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \tag{2.23}$$

Para el caso del tramo del pilote sumergido, la ecuación (2.17) queda:

$$EI\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \overline{m}\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.24}$$

Por último, la ecuación (2.21), relativa a la interacción suelo-estructura del pilote, se presentaría de la siguiente forma:

$$EI\,\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \overline{m}\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + k\,u(x,t) = k\,u_I(x,t) \tag{2.25}$$

2.1.1.6. Sección variable

Para plantear la ecuación diferencial que gobierna la torre, primero se debe definir la variabilidad de su geometría. Como se aprecia en la figura 2.5, se trata de una estructura tubular troncocónica.

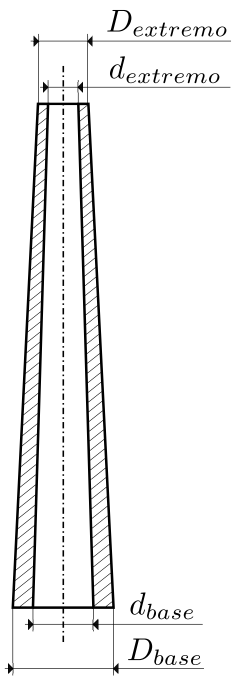

Figura 2.5: Geometría de la torre del aerogenerador.

Para definirla se hace uso de su diámetro exterior en la base y dos parámetros adimensionales: δ, ya definido al hablar de la interacción agua-estructura; y α, que indica la variación del diámetro a lo largo de la torre. Para poder realizar la resolución del problema presentado, ambos parámetros se asumen constantes.

$$\delta = \frac{d(x)}{D(x)} \tag{2.26a}$$

$$\alpha = \frac{D_{base} - D_{extremo}}{D_{base}} \tag{2.26b}$$

Partiendo de esto, se puede expresar la variación del diámetro a lo largo de la estructura de la siguiente forma:

$$D(x) = D_{base}\left(1 - \alpha\,\frac{x}{L}\right) \tag{2.27a}$$

$$d(x) = d_{base}\left(1 - \alpha\,\frac{x}{L}\right) \tag{2.27b}$$

Y también las expresiones del área y del momento de inercia de la sección:

$$A(x) = \frac{\pi}{4}\,D_{base}^2\left(1 - \alpha\,\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{\pi}{4}\,d_{base}^2\left(1 - \alpha\,\frac{x}{L}\right)^2 \tag{2.28a}$$

$$I(x) = \frac{\pi}{64}\,D_{base}^4\left(1 - \alpha\,\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{\pi}{64}\,d_{base}^4\left(1 - \alpha\,\frac{x}{L}\right)^4 \tag{2.28b}$$

Que pueden simplificarse a:

$$A(x) = A_{base} \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right)^2 \tag{2.29a}$$

$$I(x) = I_{base} \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right)^4 \tag{2.29b}$$

Para analizar un caso algo más general, y siguiendo la formulación propuesta por Taha y Abohadima [13], se estudiará el sistema con la siguiente definición del área y el momento de inercia de la sección, que coincide con la evolución troncocónica de la torre para $n = 2$.

$$A(x) = A_{base} \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right)^n \tag{2.30a}$$

$$I(x) = I_{base} \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right)^{n+2} \tag{2.30b}$$

Una vez definida por completo la geometría, se introducen las expresiones del área y del momento de inercia en la ecuación de gobierno general sin considerar la inercia rotacional (2.22) y se anula la carga exterior, obteniéndose así la ecuación de gobierno de la torre.

$$EI_{base} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right)^{n+2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho \, A_{base} \left(1 - \alpha \frac{x}{L}\right)^n \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.31}$$

2.1.2. Solución de la ecuación de gobierno

2.1.2.1. Sección constante

Suponiendo nulas las cargas distribuidas exteriores, se procede a la solución de la ecuación de gobierno de una viga de sección constante. Para ello, se elimina el término correspondiente a la carga distribuida en la ecuación (2.9), de modo que la ecuación a resolver es la siguiente:

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - m \, r^2 \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2 \, \partial t^2} + m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.32}$$

Por otro lado, debido al carácter armónico del problema a resolver, se considera que la deformada varía temporalmente siguiendo una función senoidal, siendo su expresión más general la siguiente:

$$u(x,t) = \mathcal{U}(x) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.33}$$

En esta expresión el término $\mathcal{U}(x)$ representa la amplitud compleja de la deformada en función de la posición, mientras que el término $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ muestra la variación temporal del conjunto (independiente de una posición concreta). Además, i hace referencia a la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$ y ω a la frecuencia angular de oscilación. Introduciendo la expresión (2.33) en (2.32):

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\mathcal{U}(x) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) - m \, r^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \, \partial t^2} \left(\mathcal{U}(x) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\mathcal{U}(x) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) = 0 \tag{2.34}$$

Sabiendo que las derivada temporal del la deformada en los términos en que se ha descompuesto en la relación (2.33) son:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{U}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) = \mathrm{i}\omega\,\mathcal{U}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.35a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathcal{U}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) = -\omega^2\,\mathcal{U}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2.35b}$$

En la ecuación (2.34) se puede aplicar las derivadas temporales halladas en (2.35):

$$EI\,\frac{d^4\mathcal{U}(x)}{dx^4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \omega^2\,m\,r^2\,\frac{d^2\mathcal{U}(x)}{dx^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \omega^2\,m\,\mathcal{U}(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = 0 \tag{2.36}$$

Sacando factor común $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$:

$$\left(EI\,\frac{d^4\mathcal{U}(x)}{dx^4} + \omega^2\,m\,r^2\,\frac{d^2\mathcal{U}(x)}{dx^2} - \omega^2\,m\,\mathcal{U}(x)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = 0 \tag{2.37}$$

Puesto que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = 0$ lleva a una solución trivial, la ecuación que permite conocer la amplitud de la deformada para cada punto en función de la frecuencia a la que vibre el sistema queda:

$$\mathcal{U}(x) = EI\,\frac{d^4\mathcal{U}(x)}{dx^4} + \omega^2\,m\,r^2\,\frac{d^2\mathcal{U}(x)}{dx^2} - \omega^2\,m\,\mathcal{U}(x) = 0 \tag{2.38}$$

De esta forma, se ha pasado de resolver el problema en el dominio del tiempo de la ecuación (2.32) a un problema en el dominio de la frecuencia en la ecuación (2.38). La solución de esta ecuación diferencial homogénea puede ensayarse mediante una función exponencial. Se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{U}(x) = \mathrm{e}^{sx} \tag{2.39}$$

Introduciendo esta solución en la ecuación (2.38), se pretende obtener el valor del exponente s que satisfaga la ecuación diferencial:

$$EI\,\frac{d^4\mathrm{e}^{sx}}{dx^4} + \omega^2\,m\,r^2\,\frac{d^2\mathrm{e}^{sx}}{dx^2} - \omega^2\,m\,\mathrm{e}^{sx} = 0 \tag{2.40}$$

Aplicando las derivadas:

$$EI\,s^4\,\mathrm{e}^{sx} + \omega^2\,m\,r^2\,s^2\,\mathrm{e}^{sx} - \omega^2\,m\,\mathrm{e}^{sx} = 0 \tag{2.41}$$

Sacando factor común de e^{sx}:

$$\left(EI\,s^4 + \omega^2\,m\,r^2\,s^2 - \omega^2\,m\right)\mathrm{e}^{sx} = 0 \tag{2.42}$$

Al igual que ocurría en la ecuación (2.37), $\mathrm{e}^{sx} = 0$ lleva a una solución trivial. De modo que se debe resolver la siguiente ecuación:

$$EI\, s^4 + \omega^2\, m\, r^2\, s^2 - \omega^2\, m = 0 \tag{2.43}$$

Por simplicidad se divide la ecuación por el factor EI:

$$s^4 + \frac{\omega^2\, m\, r^2}{EI}\, s^2 - \frac{\omega^2\, m}{EI} = 0 \tag{2.44}$$

Aplicando el siguiente cambio de variable:

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2\, m}{EI} \tag{2.45}$$

La ecuación (2.44) queda:

$$s^4 + \lambda^4\, r^2\, s^2 - \lambda^4 = 0 \tag{2.46}$$

Ésta es una ecuación de cuarto grado, por lo que debe tener cuatro soluciones. Dado que únicamente aparecen exponentes pares, se puede visualizar de la siguiente forma:

$$\left(s^2\right)^2 + \lambda^4\, r^2\, \left(s^2\right) - \lambda^4 = 0 \tag{2.47}$$

De donde se extrae que s^2 es igual a las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$s^2 = \frac{-\lambda^4\, r^2 \pm \sqrt{\lambda^8\, r^4 + 4\lambda^4}}{2} \tag{2.48}$$

Y las soluciones de la ecuación (2.46) serían las raíces cuadradas de las obtenidas en 2.48:

$$s = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{-\lambda^4\, r^2 + \sqrt{\lambda^8\, r^4 + 4\lambda^4}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^8\, r^4 + 4\lambda^4} - \lambda^4\, r^2}{2}} \\ \pm\sqrt{\frac{-\lambda^4\, r^2 - \sqrt{\lambda^8\, r^4 + 4\lambda^4}}{2}} = \pm\,\mathrm{i}\,\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^8\, r^4 + 4\lambda^4} + \lambda^4\, r^2}{2}} \end{cases} \tag{2.49}$$

Aplicando los siguientes cambios de variables:

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^8\, r^4 + 4\lambda^4} - \lambda^4\, r^2}{2}} \tag{2.50a}$$

$$b = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^8\, r^4 + 4\lambda^4} + \lambda^4\, r^2}{2}} \tag{2.50b}$$

Se puede resumir las soluciones a la ecuación (2.46) de la siguiente manera:

$$s = \begin{cases} a \\ -\,a \\ \mathrm{i}\, b \\ -\mathrm{i}\, b \end{cases} \tag{2.51}$$

Conocidas las cuatro soluciones, se puede considerar que la solución de la ecuación diferencial (2.38) es una combinación lineal de todas ellas, siendo las condiciones de contorno las que determinarán la ponderación de cada una de las componentes:

$$\mathcal{U}(x) = \widehat{A}\,\mathrm{e}^{ax} + \widehat{B}\,\mathrm{e}^{-ax} + \widehat{C}\,\mathrm{e}^{ibx} + \widehat{D}\,\mathrm{e}^{-ibx} \tag{2.52}$$

Aplicando la relación de Euler:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\alpha) \tag{2.53}$$

Se puede expresar la ecuación (2.52) sin exponentes imaginarios:

$$\mathcal{U}(x) = \widehat{A}\,\mathrm{e}^{ax} + \widehat{B}\,\mathrm{e}^{-ax} + \widehat{C}\,\left(\cos(bx) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(bx)\right) + \widehat{D}\,\left(\cos(-bx) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(-bx)\right) \tag{2.54}$$

Agrupando las funciones de seno y coseno:

$$\mathcal{U}(x) = \widehat{A}\,\mathrm{e}^{ax} + \widehat{B}\,\mathrm{e}^{-ax} + \left(\widehat{C} + \widehat{D}\right)\,\cos(bx) + \left(\widehat{C} - \widehat{D}\right)\,\mathrm{i}\,\mathrm{sen}(bx) \tag{2.55}$$

Y cambiando de coeficientes se puede expresar:

$$\mathcal{U}(x) = A\,\mathrm{e}^{ax} + B\,\mathrm{e}^{-ax} + C\cos(bx) + D\,\mathrm{sen}(bx) \tag{2.56}$$

Esta forma de expresarlo permite que, si las características del problema a resolver son número reales, los coeficientes de la solución serán reales.

Un vez definida la solución analítica del problema en cuanto a los desplazamientos, se procede a definir el resto de variables propias del sistema. En primer lugar, el giro de la sección:

$$\Theta(x) = \frac{d\mathcal{U}(x)}{dx} \tag{2.57}$$

El momento flector en la sección se obtiene a partir de la ecuación (2.3).

$$\mathcal{M}(x) = EI\,\frac{d^2\mathcal{U}(x)}{dx^2} \tag{2.58}$$

Por último, se obtiene el cortante en la sección a partir de la ecuación (2.4), aplicando las derivadas temporales de la ecuación (2.35).

$$\mathcal{Q}(x) = EI\,\frac{d^3\mathcal{U}(x)}{dx^3} + m\,r^2\,\omega^2\,\frac{d\mathcal{U}(x)}{dx} \tag{2.59}$$

2.1.2.2. Interacción agua-estructura

Para resolver la ecuación planteada anteriormente para la interacción agua-estructura únicamente se debe considerar el cambio de las magnitudes de masa por unidad de longitud y radio de giro ya comentados. De esta forma la solución en el dominio de la frecuencia de la ecuación diferencial (2.17) sería la misma que la obtenida para sección constante (2.56). Por tanto, los cambios de variables propuestos en (2.50) y (2.45) deben referirse como:

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^8\,\overline{r}^4 + 4\lambda^4} - \lambda^4\,\overline{r}^2}{2}} \tag{2.60a}$$

$$b = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^8\,\overline{r}^4 + 4\lambda^4} + \lambda^4\,\overline{r}^2}{2}} \tag{2.60b}$$

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2\,\overline{m}}{EI} \tag{2.60c}$$

Por último, también se debe considerar esta particularidad en la relación entre el cortante y el desplazamiento:

$$\mathcal{Q}(x) = EI\,\frac{d^3\mathcal{U}(x)}{dx^3} + \overline{m}\,\overline{r}^2\,\omega^2\,\frac{d\mathcal{U}(x)}{dx} \tag{2.61}$$

2.1.2.3. Interacción suelo-estructura

Para la resolución de la ecuación (2.21), se debe pasar al dominio de la frecuencia siguiendo un procedimiento análogo al desarrollado para la sección constante. De esta forma se llega a:

$$EI\,\frac{d^4\mathcal{U}(x)}{dx^4} + \omega^2\,\overline{m}\,\overline{r}^2\,\frac{d^2\mathcal{U}(x)}{dx^2} - \omega^2\,\overline{m}\,\mathcal{U}(x) + k\,\mathcal{U}(x) = k\,\mathcal{U}_I(x) \tag{2.62}$$

A continuación, se agrupan los términos relativos a $\mathcal{U}(x)$ y se divide por EI:

$$\frac{d^4\mathcal{U}(x)}{dx^4} + \frac{\omega^2\,\overline{m}\,\overline{r}^2}{EI}\,\frac{d^2\mathcal{U}(x)}{dx^2} - \frac{\omega^2\,\overline{m} - k}{EI}\,\mathcal{U}(x) = \frac{k}{EI}\,\mathcal{U}_I(x) \tag{2.63}$$

Por simplicidad se realizarán los siguientes cambios de variables:

$$\gamma_1 = \frac{\omega^2\,\overline{m}\,\overline{r}^2}{EI} \tag{2.64a}$$

$$\gamma_2 = \frac{\omega^2\,\overline{m} - k}{EI} \tag{2.64b}$$

$$\gamma_3 = \frac{k}{EI} \tag{2.64c}$$

De esta forma, la ecuación (2.63) queda:

$$\frac{d^4\mathcal{U}(x)}{dx^4} + \gamma_1\,\frac{d^2\mathcal{U}(x)}{dx^2} - \gamma_2\,\mathcal{U}(x) = \gamma_3\,\mathcal{U}_I(x) \tag{2.65}$$

Como se observa, se trata de una ecuación diferencial no homogénea, por lo que su solución será la suma de la solución de la ecuación homogénea y la solución particular. La ecuación homogénea a resolver sería:

$$\frac{d^4\mathcal{U}(x)}{dx^4} + \gamma_1 \frac{d^2\mathcal{U}(x)}{dx^2} - \gamma_2 \mathcal{U}(x) = 0 \tag{2.66}$$

Para el cálculo de la solución de la ecuación homogénea se sigue un procedimiento análogo al desarrollado para el caso de sección constante, concluyendo en la misma solución que se obtenía en (2.56), modificando las expresiones de las variables auxiliares a y b:

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_2} - \gamma_1}{2}} \tag{2.67a}$$

$$b = \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_2} + \gamma_1}{2}} \tag{2.67b}$$

Para el cálculo de la solución particular, se necesita conocer la expresión del campo incidente. la excitación sísmica se considera compuesta por ondas de corte (ondas S) propagándose verticalmente por el terreno. Los desplazamientos laterales producidos por este campo incidente se obtienen se obtienen como la suma de la onda incidente y la onda reflejada:

$$\mathcal{U}_I(x) = \underbrace{\beta_1 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k_s\, x}}_{\text{Onda incidente}} + \underbrace{\beta_2 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, k_s\, x}}_{\text{Onda reflejada}} \tag{2.68}$$

Donde $k_s = \omega / c_s$ es el número de onda; siendo c_s la velocidad de las ondas de corte en el medio, que es dependiente de las características del terreno. El valor de β_1 y β_2 se obtiene a partir de las condiciones de contorno en la superficie del terreno, donde se considera una tensión tangencial nula (superficie libre) y un desplazamiento lateral unitario.

Por simplicidad para pasos posteriores, conviene expresar las derivadas segunda y cuarta del campo incidente con respecto a la expresión original:

$$\frac{d^2\,\mathcal{U}_I(x)}{dx^2} = -\beta_1\, k_s^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k_s\, x} - \beta_2\, k_s^2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, k_s\, x} = -k_s^2\, \mathcal{U}_I(x) \tag{2.69a}$$

$$\frac{d^4\,\mathcal{U}_I(x)}{dx^4} = \beta_1\, k_s^4\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k_s\, x} + \beta_2\, k_s^4\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, k_s\, x} = k_s^4\, \mathcal{U}_I(x) \tag{2.69b}$$

Conociendo la expresión del campo incidente, ya se puede definir la solución particular de la ecuación (2.62) como el producto de una constante por el campo incidente, de modo que:

$$\mathcal{U}(x) = \widehat{s}\,\mathcal{U}_I(x) \tag{2.70}$$

Y las derivadas segunda y cuarta:

$$\frac{d^2\,\mathcal{U}(x)}{dx^2} = -\widehat{s}\,k_s^2\,\mathcal{U}_I(x) \tag{2.71a}$$

$$\frac{d^4\,\mathcal{U}(x)}{dx^4} = \widehat{s}\,k_s^4\,\mathcal{U}_I(x) \tag{2.71b}$$

Introduciendo las expresiones (2.70) y (2.71) en la ecuación (2.65), se obtiene:

$$\widehat{s}\,k_s^4\,\mathcal{U}_I(x) - \gamma_1\,\widehat{s}\,k_s^2\,\mathcal{U}_I(x) - \gamma_2\,\widehat{s}\,\mathcal{U}_I(x) = \gamma_3\,\mathcal{U}_I(x) \tag{2.72}$$

Agrupando términos:

$$\widehat{s}\,\mathcal{U}_I(x)\left(k_s^4 - \gamma_1\,k_s^2 - \gamma_2\right) = \gamma_3\,\mathcal{U}_I(x) \tag{2.73}$$

De donde se obtiene que:

$$\widehat{s} = \frac{\gamma_3}{k_s^4 - \gamma_1\,k_s^2 - \gamma_2} \tag{2.74}$$

Una vez definida la solución de la ecuación homogénea y la solución particular, se puede expresar la solución a la ecuación de gobierno con la interacción suelo-estructura (2.62). Al igual que en los casos anteriores, esta solución depende de cuatro coeficientes que se obtienen por medio de las condiciones de contorno.

$$\mathcal{U}(x) = \underbrace{A\,\mathrm{e}^{ax} + B\,\mathrm{e}^{-ax} + C\cos(bx) + D\,\mathrm{sen}(bx)}_{\substack{\text{Solución de la}\\ \text{ecuación homogénea}}} + \underbrace{\widehat{s}\,\mathcal{U}_I(x)}_{\substack{\text{Solución}\\ \text{particular}}} \tag{2.75}$$

Por último, se debe tener en cuenta que la relación del cortante con respecto a la deformada presenta la misma forma que para el caso de la interacción agua estructura (2.61).

2.1.2.4. Suposición sin inercia rotacional

Como ya se introdujo anteriormente, también se va a resolver el sistema omitiendo la consideración de la inercia rotacional de la sección. De igual forma que ya se hizo, se adaptan los resultados de la sección constante, la interacción agua-estructura y la interacción suelo-estructura a esta hipótesis. Comenzando por la sección constante, el cambio de variable propuesto en la ecuación (2.50) queda significativamente simplificado:

$$a = \lambda \tag{2.76a}$$

$$b = \lambda \tag{2.76b}$$

Por lo que la solución (2.56) quedaría:

$$\mathcal{U}(x) = A\,\mathrm{e}^{\lambda x} + B\,\mathrm{e}^{-\lambda x} + C\cos(\lambda x) + D\,\mathrm{sen}(\lambda x) \tag{2.77}$$

Además, la expresión del cortante (2.59) deja de guardar relación directa con la primera derivada de la deformada. Siendo esta expresión válida para el caso de la interacción agua-estructura y la interacción suelo-estructura.

$$\mathcal{Q}(x) = EI\,\frac{d^3\mathcal{U}(x)}{dx^3} \tag{2.78}$$

En cuanto a la interacción agua-estructura, la solución a la ecuación (2.24) presenta la misma forma que la descrita en este apartado para la sección constante (2.77), con la matización del cambio de variable ya descrito en la ecuación (2.60c).

Por último, con respecto a la interacción suelo-estructura, se anula la variable γ_1 propuesta en la ecuación (2.64a), por lo que se propone el cambio:

$$\lambda^4 = \gamma_2 = \frac{\omega^2\,\overline{m} - k}{EI} \tag{2.79}$$

De esta forma, las variables propuestas en (2.67) se simplifican a:

$$a = \sqrt[4]{\gamma_2} = \lambda \tag{2.80a}$$

$$b = \sqrt[4]{\gamma_2} = \lambda \tag{2.80b}$$

Por otro lado, el factor $\widehat{s}$ (2.74) que aparece en la solución particular se ve afectado de la siguiente manera:

$$\widehat{s} = \frac{\gamma_3}{k_s^4 - \gamma_2} = \frac{\gamma_3}{k_s^4 - \lambda^4} \tag{2.81}$$

Con todo esto, la solución (2.75) obtenida anteriormente queda:

$$\mathcal{U}(x) = \underbrace{A\,\mathrm{e}^{\lambda x} + B\,\mathrm{e}^{-\lambda x} + C\cos(\lambda x) + D\,\mathrm{sen}(\lambda x)}_{\substack{\text{Solución de la}\\ \text{ecuación homogénea}}} + \underbrace{\widehat{s}\,\mathcal{U}_I(x)}_{\substack{\text{Solución}\\ \text{particular}}} \tag{2.82}$$

2.1.2.5. Sección variable

Para la resolución de la ecuación de gobierno de la torre, se comienza transformando la ecuación (2.31) del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, siguiendo un procedimiento análogo al desarrollado en la solución para la sección constante.

$$EI_{base}\frac{d^2}{dx^2}\left(\left(1-\alpha\,\frac{x}{L}\right)^{n+2}\,\frac{d^2\mathcal{U}(x)}{dx^2}\right) - \omega^2\,\rho\,A_{base}\left(1-\alpha\,\frac{x}{L}\right)^n\,\mathcal{U}(x) = 0 \tag{2.83}$$

A continuación se propone el siguiente cambio de variable:

$$\eta = \frac{x}{L} \tag{2.84a}$$

$$\text{de modo que:} \qquad dx = L\, d\eta \tag{2.84b}$$

Introduciéndolo en la ecuación (2.83):

$$\frac{EI_{base}}{L^4}\frac{d^2}{d\eta^2}\left((1-\alpha\,\eta)^{n+2}\ \frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2}\right) - \omega^2\,\rho\,A_{base}\,(1-\alpha\,\eta)^n\ \mathcal{U}(\eta) = 0 \tag{2.85}$$

Con el objetivo de reducir la expresión, se divide por $\frac{EI_{base}}{L^4}$:

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\left((1-\alpha\,\eta)^{n+2}\ \frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2}\right) - \frac{\omega^2\,\rho\,A_{base}\,L^4}{EI_{base}}\,(1-\alpha\,\eta)^n\ \mathcal{U}(\eta) = 0 \tag{2.86}$$

Y se realiza un nuevo cambio de variable:

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2\,\rho\,A_{base}\,L^4}{EI_{base}} \tag{2.87}$$

Obteniéndose la expresión:

$$\frac{d^2}{d\eta^2}\left((1-\alpha\,\eta)^{n+2}\ \frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2}\right) - \lambda^4\,(1-\alpha\,\eta)^n\ \mathcal{U}(\eta) = 0 \tag{2.88}$$

Con esta expresión más reducida, se comienza a desarrollar las derivadas. Debido al tamaño de la expresión se realizarán aparte. Se comienza por la primera derivada:

$$\frac{d}{d\eta}\left((1-\alpha\,\eta)^{n+2}\ \frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2}\right) = -\alpha(n+2)(1-\alpha\,\eta)^{n+1}\,\frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2} + (1-\alpha\,\eta)^{n+2}\,\frac{d^3\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^3} \tag{2.89}$$

Y partiendo de este resultado, la segunda derivada es:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\eta^2}\left((1-\alpha\,\eta)^{n+2}\ \frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2}\right) &= \alpha^2(n+2)(n+1)(1-\alpha\,\eta)^n\,\frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2} - \\ -\alpha(n+2)(1-\alpha\,\eta)^{n+1}\,\frac{d^3\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^3} - \alpha(n+2)(1-\alpha\,\eta)^{n+1}\,\frac{d^3\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^3} &+ (1-\alpha\,\eta)^{n+2}\,\frac{d^4\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^4}\end{aligned} \tag{2.90}$$

Pudiendo reducirse a:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\eta^2}\left((1-\alpha\,\eta)^{n+2}\ \frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2}\right) &= \alpha^2(n+2)(n+1)(1-\alpha\,\eta)^n\,\frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2} - \\ &-2\alpha(n+2)(1-\alpha\,\eta)^{n+1}\,\frac{d^3\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^3} + (1-\alpha\,\eta)^{n+2}\,\frac{d^4\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^4}\end{aligned} \tag{2.91}$$

A continuación, se introduce la expresión de la segunda derivada en la ecuación (2.88):

$$\begin{aligned}(1-\alpha\,\eta)^{n+2}\,\frac{d^4\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^4} - 2\alpha(n+2)(1-\alpha\,\eta)^{n+1}\,\frac{d^3\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^3} &+ \\ +\alpha^2(n+2)(n+1)(1-\alpha\,\eta)^n\,\frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2} - \lambda^4\,(1-\alpha\,\eta)^n\ \mathcal{U}(\eta) &= 0\end{aligned} \tag{2.92}$$

Y se divide por $(1-\alpha\,\eta)^n$:

$$(1-\alpha\,\eta)^2\,\frac{d^4\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^4}-2\alpha(n+2)(1-\alpha\,\eta)\,\frac{d^3\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^3}+\alpha^2(n+2)(n+1)\,\frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2}-$$
$$-\lambda^4\,\mathcal{U}(\eta)=0 \qquad (2.93)$$

Partiendo de esta ecuación, se pretende buscar un operador diferencial Δ que permita factorizar a la siguiente expresión (ver p.ej. [7]):

$$(\Delta+\lambda^2)(\Delta-\lambda^2)\,\mathcal{U}(\eta)=0 \qquad (2.94)$$

Donde Δ responde a:

$$\Delta=\phi_1\,(1-\alpha\,\eta)\,\frac{d^2}{d\eta^2}+\phi_2\,\frac{d}{d\eta} \qquad (2.95)$$

Desarrollando la expresión (2.94) se obtiene:

$$\phi_1^2\,(1-\alpha\,\eta)^2\,\frac{d^4\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^4}+\phi_1^2\,(1-\alpha\,\eta)(-2\,\alpha\,\phi_1+2\,\phi_2)\,\frac{d^3\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^3}+$$
$$+(\phi_2^2-\alpha\,\phi_1\,\phi_2)\,\frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2}-\lambda^4\,\mathcal{U}(\eta)=0 \qquad (2.96)$$

De donde se concluye el valor de ϕ_1 y ϕ_2 comparando términos con la ecuación (2.93):

$$\phi_1=1 \qquad (2.97a)$$

$$\phi_2=-\alpha\,(n+1) \qquad (2.97b)$$

Partiendo de la ecuación factorizada (2.94), se puede descomponer la solución $\mathcal{U}(\eta)$ en la suma de las soluciones $\mathcal{U}_1(\eta)$ y $\mathcal{U}_2(\eta)$ a las siguientes ecuaciones que se extraen:

$$(\Delta+\lambda^2)\,\mathcal{U}_1(\eta)=0 \qquad (2.98a)$$

$$(\Delta-\lambda^2)\,\mathcal{U}_2(\eta)=0 \qquad (2.98b)$$

De forma abreviada, se puede agrupar ambas ecuaciones:

$$(\Delta\pm\lambda^2)\,\mathcal{U}(\eta)=0 \qquad (2.99)$$

Que desarrollando mediante el factor Δ:

$$(1-\alpha\,\eta)\,\frac{d^2\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2}-\alpha\,(n+1)\,\frac{d\mathcal{U}(\eta)}{d\eta}\pm\lambda^2\,\mathcal{U}(\eta)=0 \qquad (2.100)$$

Para continuar con la resolución de la ecuación, se propone otro cambio de variable. A pesar de que en un principio complique el desarrollo, permitirá la adaptación a una familia de ecuaciones concreta.

$$\Omega(\eta)^2 = \left(\frac{2\,\lambda}{\alpha}\right)^2 (1 - \alpha\,\eta) \tag{2.101a}$$

$$\varphi(\eta) = \Omega(\eta)^n\,\mathcal{U}(\eta) \tag{2.101b}$$

Siendo las derivadas de $\Omega(\eta)$ frente a η:

$$2\,\Omega(\eta)\,d\Omega = -\left(\frac{2\,\lambda}{\alpha}\right)^2 \alpha\,d\eta \tag{2.102a}$$

$$\frac{d\Omega(\eta)}{d\eta} = -\frac{2}{\alpha}\,\lambda^2\,\frac{1}{\Omega(\eta)} \tag{2.102b}$$

$$\frac{d^2\Omega(\eta)}{d\eta^2} = -\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 \lambda^4\,\frac{1}{\Omega(\eta)^3} \tag{2.102c}$$

Por otro lado, también conviene cambiar la variable con respecto a la que se deriva $\mathcal{U}(\eta)$:

$$\frac{d\mathcal{U}(\eta)}{d\eta} = \frac{d\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega}\,\frac{d\,\Omega(\eta)}{d\eta} \tag{2.103a}$$

$$\frac{d^2\,\mathcal{U}(\eta)}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{d\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega}\,\frac{d\,\Omega(\eta)}{d\eta}\right) = \frac{d^2\,\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega^2}\left(\frac{d\Omega(\eta)}{d\eta}\right)^2 + \frac{d\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega}\,\frac{d^2\,\Omega(\eta)}{d\eta^2} \tag{2.103b}$$

Introduciendo las expresiones (2.101a) y (2.103) en la ecuación (2.100):

$$\begin{aligned}\Omega(\eta)^2 \left(\frac{\alpha}{2\,\lambda}\right)^2 \left[\frac{d^2\,\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega^2}\left(\frac{d\Omega(\eta)}{d\eta}\right)^2 + \frac{d\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega}\,\frac{d^2\,\Omega(\eta)}{d\eta^2}\right] - \\ -\alpha\,(n+1)\left[\frac{d\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega}\,\frac{d\,\Omega(\eta)}{d\eta}\right] \pm \lambda^2\,\mathcal{U}(\eta) = 0\end{aligned} \tag{2.104}$$

Y agrupando términos relacionados con las derivadas de $\mathcal{U}(\eta)$ con respecto de Ω:

$$\begin{aligned}\Omega(\eta)^2 \left(\frac{\alpha}{2\,\lambda}\right)^2 \left(\frac{d\Omega(\eta)}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2\,\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega^2} + \\ + \left[\Omega(\eta)^2 \left(\frac{\alpha}{2\,\lambda}\right)^2 \frac{d^2\,\Omega(\eta)}{d\eta^2} - \alpha\,(n+1)\,\frac{d\Omega(\eta)}{d\eta}\right] \frac{d\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega} \pm \lambda^2\,\mathcal{U}(\eta) = 0\end{aligned} \tag{2.105}$$

A continuación, se sustituyen las derivadas de $\Omega(\eta)$ con respecto de η obtenidas en las ecuaciones (2.102b) y (2.102c):

$$\begin{aligned}\Omega(\eta)^2 \left(\frac{\alpha}{2\,\lambda}\right)^2 \left[-\frac{2}{\alpha}\,\lambda^2\,\frac{1}{\Omega(\eta)}\right]^2 \frac{d^2\,\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega^2} + \\ + \left[\Omega(\eta)^2 \left(\frac{\alpha}{2\,\lambda}\right)^2 \left(-\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 \lambda^4\,\frac{1}{\Omega(\eta)^3}\right) - \alpha\,(n+1)\left(-\frac{2}{\alpha}\,\lambda^2\,\frac{1}{\Omega(\eta)}\right)\right] \frac{d\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega} \pm \\ \pm \lambda^2\,\mathcal{U}(\eta) = 0\end{aligned} \tag{2.106}$$

Cancelando términos:

$$\lambda^2 \frac{d^2\,\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega^2} + \left[-\frac{\lambda^2}{\Omega(\eta)} + (n+1)\,\left(2\,\lambda^2\,\frac{1}{\Omega(\eta)}\right)\right] \frac{d\,\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega} \pm \lambda^2\,\mathcal{U}(\eta) = 0 \tag{2.107}$$

Que se puede reducir a:

$$\frac{d^2\,\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega^2} + \frac{1}{\Omega(\eta)}\,(2n+1)\,\frac{d\,\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega} \pm \mathcal{U}(\eta) = 0 \tag{2.108}$$

Partiendo de la relación (2.101b), se sabe que:

$$\mathcal{U}(\eta) = \Omega(\eta)^{-n}\,\varphi(\eta) \tag{2.109}$$

Y sus derivadas con respecto de Ω:

$$\frac{d\,\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega} = -n\,\Omega(\eta)^{-(n+1)}\,\varphi(\eta) + \Omega(\eta)^{-n}\,\frac{d\,\varphi(\eta)}{d\Omega} \tag{2.110a}$$

$$\frac{d^2\,\mathcal{U}(\eta)}{d\Omega^2} = n(n+1)\,\Omega(\eta)^{-(n+2)}\,\varphi(\eta) - 2n\,\Omega(\eta)^{-(n+1)}\,\frac{d\,\varphi(\eta)}{d\Omega} + \Omega(\eta)^{-n}\,\frac{d^2\,\varphi(\eta)}{d\Omega^2} \tag{2.110b}$$

Introduciendo las expresiones de las derivadas en la ecuación (2.108)

$$\begin{aligned}&\left[n(n+1)\,\Omega(\eta)^{-(n+2)}\,\varphi(\eta) - 2n\,\Omega(\eta)^{-(n+1)}\,\frac{d\,\varphi(\eta)}{d\Omega} + \Omega(\eta)^{-n}\,\frac{d^2\,\varphi(\eta)}{d\Omega^2}\right] + \\ &+ \frac{1}{\Omega(\eta)}\,(2n+1)\,\left[-n\,\Omega(\eta)^{-(n+1)}\,\varphi(\eta) + \Omega(\eta)^{-n}\,\frac{d\,\varphi(\eta)}{d\Omega}\right] \pm \Omega(\eta)^{-n}\,\varphi(\eta) = 0\end{aligned} \tag{2.111}$$

Agrupando los términos con respecto a la variable $\varphi(\eta)$:

$$\begin{aligned}&\Omega(\eta)^{-n}\,\frac{d^2\,\varphi(\eta)}{d\Omega^2} + \left[-2n\,\Omega(\eta)^{-(n+1)} + (2n+1)\Omega(\eta)^{-(n+1)}\right]\,\frac{d\,\varphi(\eta)}{d\Omega} + \\ &+ \left[n(n+1)\,\Omega(\eta)^{-(n+2)} - n\,(2n+1)\,\Omega(\eta)^{-(n+2)} \pm \Omega(\eta)^{-n}\right]\,\varphi(\eta) = 0\end{aligned} \tag{2.112}$$

Multiplicando la expresión por $\Omega(\eta)^{n+2}$:

$$\begin{aligned}\Omega(\eta)^2\,\frac{d^2\,\varphi(\eta)}{d\Omega^2} + [-2n\,\Omega(\eta) + (2n+1)\Omega(\eta)]\,\frac{d\,\varphi(\eta)}{d\Omega} + \\ + \left[n(n+1) - n\,(2n+1) \pm \Omega(\eta)^2\right]\,\varphi(\eta) = 0\end{aligned} \tag{2.113}$$

Pudiendo simplificarse a:

$$\Omega(\eta)^2\,\frac{d^2\,\varphi(\eta)}{d\Omega^2} + \Omega(\eta)\,\frac{d\,\varphi(\eta)}{d\Omega} + \left(-n^2 \pm \Omega(\eta)^2\right)\,\varphi(\eta) = 0 \tag{2.114}$$

Descomponiendo esta ecuación en los términos de la ecuación (2.98) se obtiene dos ecuaciones diferenciales pertenecientes a la familia de las Ecuaciones de Bessel Modificadas:

$$\Omega(\eta)^2\,\frac{d^2\,\varphi_1(\eta)}{d\Omega^2} + \Omega(\eta)\,\frac{d\,\varphi_1(\eta)}{d\Omega} + \left(\Omega(\eta)^2 - n^2\right)\,\varphi_1(\eta) = 0 \tag{2.115a}$$

$$\Omega(\eta)^2\,\frac{d^2\,\varphi_2(\eta)}{d\Omega^2} + \Omega(\eta)\,\frac{d\,\varphi_2(\eta)}{d\Omega} - \left(\Omega(\eta)^2 + n^2\right)\,\varphi_2(\eta) = 0 \tag{2.115b}$$

Las soluciones a la ecuación (2.115a) vienen definidas por las funciones de Bessel de primera especie y segunda especie de orden n:

$$J_n\big(\Omega(\eta)\big) \tag{2.116a}$$

$$Y_n\big(\Omega(\eta)\big) \tag{2.116b}$$

Las soluciones a la ecuación (2.115b) vienen definidas por las funciones de Bessel modificadas de primera especie y segunda especie de orden n:

$$I_n\big(\Omega(\eta)\big) \tag{2.117a}$$

$$K_n\big(\Omega(\eta)\big) \tag{2.117b}$$

De modo que la solución a la ecuación (2.83) sería la combinación lineal de estas cuatro soluciones, siendo ponderadas por coeficientes obtenidos a partir de las condiciones de contorno:

$$\mathcal{U}(x) = A\, J_n\Big(\Omega\big(\eta(x)\big)\Big) + B\, Y_n\Big(\Omega\big(\eta(x)\big)\Big) + C\, I_n\Big(\Omega\big(\eta(x)\big)\Big) + D\, K_n\Big(\Omega\big(\eta(x)\big)\Big) \tag{2.118}$$

Para terminar de definir el sistema, se debe formular el resto de variables propias. En primer lugar, el giro presenta la misma expresión que en el caso de sección constante (2.57). Por otro lado, las expresiones del momento y el cortante presentan la siguiente forma:

$$\mathcal{M} = EI_{base}\left(1-\alpha\frac{x}{L}\right)^{n+2}\frac{d^2\mathcal{U}(x)}{dx^2} \tag{2.119a}$$

$$\mathcal{Q} = EI_{base}\frac{d}{dx}\left(\left(1-\alpha\frac{x}{L}\right)^{n+2}\frac{d^2\mathcal{U}(x)}{dx^2}\right) \tag{2.119b}$$

2.1.3. Concepto de impedancia

Ante la conveniencia de simplificar sistemas con diversos elementos, se recurre a un proceso de subestructuración. Mediante este proceso se sustituye la influencia de parte del sistema por una impedancia que resume la interacción de los elementos eliminados con la estructura a estudiar. Este procedimiento aparece reflejado en la figura 2.6.

En valor de la impedancia que aparece es tal que cumple la siguiente relación para aquella parte del sistema que se desea excluir:

$$\begin{bmatrix} F_h \\ M_g \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{hh} & K_{hg} \\ K_{gh} & K_{gg} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz de}\\ \text{impedancia}}} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{U} \\ \Theta \end{bmatrix} \tag{2.120}$$

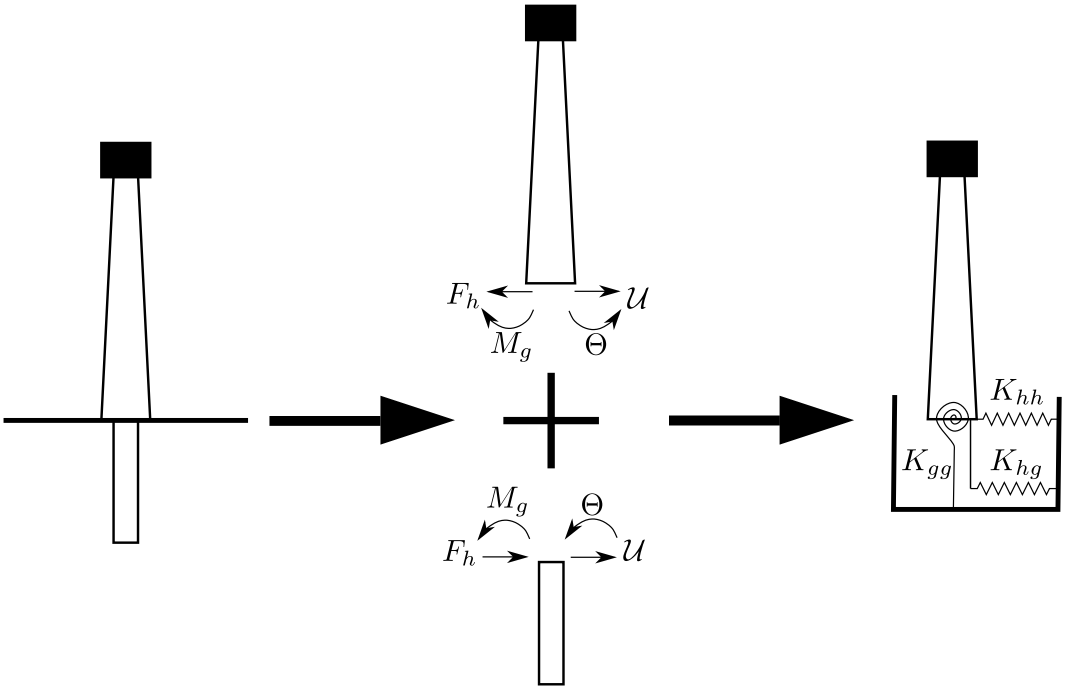

Figura 2.6: Representación de subestructuración.

Donde $\mathcal{U}$ representa el desplazamiento lateral de la base, Θ el giro de la base, F_h la fuerza horizontal en la base y M_g el momento en la base.

Esta matriz de impedancia es tal que cuando el sistema a estudio sufre un desplazamiento cualquiera en en dicho punto, se ejercen sobre él las mismas cargas a las que se vería sometido si se agregase la porción extraída. Debido a la propiedad de simetría, el valor de K_{hg} debe ser igual a K_{gh}.

Para obtener el valor de los elementos de la matriz de impedancia se debe resolver la parte del sistema a extraer de forma aislada. Las condiciones de contorno son las mismas que tenía en el problema inicial, exceptuando las del punto de estudio, las cuales variarán en función de los términos de la matriz a calcular. Se necesitan resolver tantos problemas como variables, en los que se obliga un valor unitario en una de ellas y nulo en el resto, obteniéndose así las cargas que permiten dicha condición. Aplicado al caso de dos grados de libertad comentado anteriormente:

- Se impone un desplazamiento horizontal unitario y se anula el giro:

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{U} = 1 \\ \Theta = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{bmatrix} F_h \\ M_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{hh} \\ K_{gh} \end{bmatrix} \tag{2.121}$$

- Se impone un giro unitario y se anula el desplazamiento horizontal:

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{U}=0\\ \Theta=1\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{bmatrix} F_h \\ M_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{hg} \\ K_{gg} \end{bmatrix} \tag{2.122}$$

2.1.4. Condiciones de contorno

Hallar la solución a la ecuación de gobierno de cada uno de los elementos del sistema únicamente corresponde a una parte del problema. Para completar su resolución se debe definir cómo interaccionan entre ellos y con otros elementos externos que puedan aparecer. Éstas son las llamadas condiciones de contorno, que definen el valor de los coeficientes A, B, C y D comentados en la sección anterior. Como es lógico, se requiere de cuatro condiciones de contorno por cada tramo que componga el sistema. A continuación, se irán detallando las condiciones de contorno que delimitan cada una de las siguientes situaciones.

2.1.4.1. Torre en base rígida

Se considera que la torre se encuentra en base rígida cuando se suponga que está unida de forma infinitamente rígida a una base, como podría ser un suelo con una dureza muy elevada. En este caso, las condiciones de contorno que definen la base consisten en el desplazamiento y giro a los que se ve sometida esta sección debido directamente a los desplazamientos del terreno.

Por otro lado, en el extremo superior, se debe considerar la interacción con la góndola. Este elemento se puede modelar como una masa puntual $M_{góndola}$ y una inercia rotacional puntual $J_{góndola}$, de modo que para equilibrarla aparecerán una fuerza y un momento directamente proporcionales a la aceleración lineal y a la aceleración angular que sufre la góndola, respectivamente.

$$f_{inercia}(t) = -M_{góndola}\,\frac{d^2 u_{torre}(L_{torre},t)}{dt^2} \tag{2.123a}$$

$$m_{inercia}(t) = -J_{góndola}\,\frac{d^2 \theta_{torre}(L_{torre},t)}{dt^2} \tag{2.123b}$$

Transformando estas expresiones al dominio de la frecuencia:

$$\mathcal{F}_{inercia} = \omega^2\, M_{góndola}\, \mathcal{U}_{torre}(L_{torre}) \tag{2.124a}$$

$$\mathcal{M}_{inercia} = \omega^2\, J_{góndola}\, \Theta_{torre}(L_{torre}) \tag{2.124b}$$

Para cumplir el equilibrio, las cargas que actúan en el extremo superior de la torre deben ser iguales a las fuerzas de inercia. De este modo, y considerando también las condiciones de la base, se puede definir las condiciones de contorno en base rígida:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{U}_{torre}(0) & = & \mathcal{U}_{base} \\ \Theta_{torre}(0) & = & \Theta_{base} \\ -\mathcal{Q}_{torre}(L_{torre}) - \omega^2\, M_{góndola}\, \mathcal{U}_{torre}(L_{torre}) & = & 0 \\ \mathcal{M}_{torre}(L_{torre}) - \omega^2\, J_{góndola}\, \Theta_{torre}(L_{torre}) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2.125}$$

2.1.4.2. Torre en base flexible

En contraposición al caso explicado anteriormente, se considera que la torre se encuentra en base flexible cuando se produce un desplazamiento relativo con respecto al desplazamiento del suelo. Este caso se modela mediante la aparición de una impedancia (ya explicada en la sección 2.1.3) que ejerce una fuerza proporcional al desplazamiento relativo. La relación entre las cargas que recibe y los desplazamientos que sufre se puede extraer de la relación matricial (2.120), teniendo en cuenta que las cargas son en sentido contrario a los desplazamientos.

$$\mathcal{F}_{impedancia} = -K_{hh}\, \mathcal{U}_{torre}(0) - K_{hg}\, \Theta_{torre}(0) \tag{2.126a}$$

$$\mathcal{M}_{impedancia} = -K_{gh}\, \mathcal{U}_{torre}(0) - K_{gg}\, \Theta_{torre}(0) \tag{2.126b}$$

Igualando estas fuerzas a las cargas que recibe la torre en la base y considerando la interacción con la góndola de igual manera que en el caso de base rígida, se obtienen las condiciones de contorno en base flexible:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}_{torre}(0) + K_{hh}\, \mathcal{U}_{torre}(0) + K_{hg}\, \Theta_{torre}(0) & = & 0 \\ -\mathcal{M}_{torre}(0) + K_{gh}\, \mathcal{U}_{torre}(0) + K_{gg}\, \Theta_{torre}(0) & = & 0 \\ -\mathcal{Q}_{torre}(L_{torre}) - \omega^2\, M_{góndola}\, \mathcal{U}_{torre}(L_{torre}) & = & 0 \\ \mathcal{M}_{torre}(L_{torre}) - \omega^2\, J_{góndola}\, \Theta_{torre}(L_{torre}) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2.127}$$

2.1.4.3. Torre sobre subestructura en base rígida

Este caso es muy similar al descrito para la torre en base rígida. Únicamente se debe diferenciar que la unión rígida con la base se encuentra en la subestructura en lugar de la torre, además de aplicar las condiciones de continuidad. Dichas condiciones de continuidad consisten en igualar el desplazamiento, el giro, el cortante y el momento en el punto de unión entre la torre y la subestructura.

$$\left.\begin{array}{rcl}
\mathcal{U}_{subestructura}(0) & = & \mathcal{U}_{base} \\
\Theta_{subestructura}(0) & = & \Theta_{base} \\
\mathcal{U}_{subestructura}(L_{subestructura}) - \mathcal{U}_{torre}(0) & = & 0 \\
\Theta_{subestructura}(L_{subestructura}) - \Theta_{torre}(0) & = & 0 \\
\mathcal{Q}_{subestructura}(L_{subestructura}) - \mathcal{Q}_{torre}(0) & = & 0 \\
\mathcal{M}_{subestructura}(L_{subestructura}) - \mathcal{M}_{torre}(0) & = & 0 \\
-\mathcal{Q}_{torre}(L_{torre}) - \omega^2 \, M_{góndola} \, \mathcal{U}_{torre}(L_{torre}) & = & 0 \\
\mathcal{M}_{torre}(L_{torre}) - \omega^2 \, J_{góndola} \, \Theta_{torre}(L_{torre}) & = & 0
\end{array}\right\} \quad (2.128)$$

2.1.4.4. Torre sobre subestructura en base flexible

Esta última disposición del aerogenerador que se aborda en este trabajo es conceptualmente equivalente al descrito para la torre en base flexible. Al igual que en el anterior caso, se debe considerar la continuidad entre la subestrurctura y la torre. Las condiciones de contorno resultan:

$$\left.\begin{array}{rcl}
\mathcal{Q}_{subestructura}(0) + K_{hh} \, \mathcal{U}_{subestructura}(0) + K_{hg} \, \Theta_{subestructura}(0) & = & 0 \\
-\mathcal{M}_{subestructura}(0) + K_{gh} \, \mathcal{U}_{subestructura}(0) + K_{gg} \, \Theta_{subestructura}(0) & = & 0 \\
\mathcal{U}_{subestructura}(L_{subestructura}) - \mathcal{U}_{torre}(0) & = & 0 \\
\Theta_{subestructura}(L_{subestructura}) - \Theta_{torre}(0) & = & 0 \\
\mathcal{Q}_{subestructura}(L_{subestructura}) - \mathcal{Q}_{torre}(0) & = & 0 \\
\mathcal{M}_{subestructura}(L_{subestructura}) - \mathcal{M}_{torre}(0) & = & 0 \\
-\mathcal{Q}_{torre}(L_{torre}) - \omega^2 \, M_{góndola} \, \mathcal{U}_{torre}(L_{torre}) & = & 0 \\
\mathcal{M}_{torre}(L_{torre}) - \omega^2 \, J_{góndola} \, \Theta_{torre}(L_{torre}) & = & 0
\end{array}\right\} \quad (2.129)$$

2.1.4.5. Cimentación

Para terminar de definir el problema, se debe determinar las condiciones de contorno de la cimentación. Se ha optado por considerar la punta del pilote libre, esto quiere decir que en el extremo inferior se anulan el cortante y el momento. Además, en el extremo superior se debe imponer las condiciones de desplazamiento o giro necesarias para poder realizar el procedimiento de cálculo de la impedancia descrito en la sección 2.1.3. De este modo, las condiciones de contorno serían de forma general:

$$\left.\begin{array}{rcl}\mathcal{U}_{cimentación}(0) & = & \mathcal{U}_{base}\\ \Theta_{cimentación}(0) & = & \Theta_{base}\\ \mathcal{Q}_{cimentación}(-L_{cimentación}) & = & 0\\ \mathcal{M}_{cimentación}(-L_{cimentación}) & = & 0\end{array}\right\} \tag{2.130}$$

Empleando los valores de $\mathcal{U}_{base}$ y Θ_{base} correspondientes a la impedancia que se desee calcular.

2.1.5. Terreno estratificado

Suponer que las propiedades del terreno permanecerán constantes a lo largo de toda la longitud del pilote no se ajusta a la realidad. Es probable que aparezcan diferentes estratos claramente diferenciados o un perfil que varía paulatinamente con la profundidad. Para poder abordar estos problemas se va a considerar la introducción de diferentes estratos. A pesar de que el caso del perfil variable no consiste en múltiples estratos, sino que presenta una evolución continua, se puede modelar de esta manera dividiendo el terreno en un número suficiente de estratos de dimensión reducida con las propiedades medias a cada profundidad.

Para cada estrato, el modo de definir y resolver la ecuación de gobierno para la interacción suelo-estructura no presenta ninguna diferencia a lo presentado en la sección 2.1.2.3 siempre y cuando las propiedades dentro de cada estrato se mantengan constantes. Sin embargo, la imposición de las condiciones de contorno necesaria para obtener los coeficientes de ponderación para cada estrato (j A_j, B_j, C_j y D_j) debe de realizarse de manera acoplada teniendo en cuenta todos los estratos del terreno. Estas condiciones de contorno corresponden por un lado a las condiciones exteriores de la cimentación (condiciones en la cabeza y punta del pilote), y por otro a las condiciones de continuidad entre los tramos correspondientes a distintos estratos. Esta última condición de continuidad impone que, en el punto de unión entre estratos, el desplazamiento, giro, cortante y momento coincidan independientemente del tramo que se emplee para su cálculo:

$$\left.\begin{array}{rcl}\mathcal{U}_j(-l_j) - \mathcal{U}_{j+1}(0) & = & 0\\ \Theta_j(-l_j) - \Theta_{j+1}(0) & = & 0\\ \mathcal{Q}_j(-l_j) - \mathcal{Q}_{j+1}(0) & = & 0\\ \mathcal{M}_j(-l_j) - \mathcal{M}_{j+1}(0) & = & 0\end{array}\right\} \tag{2.131}$$

Donde el subíndice j hace alusión al tramo de la cimentación que se estudia, siendo el tramo $j+1$ el tramo contiguo situado a más profundidad.

Además, en el caso de un terreno estratificado, se debe tener en cuenta que la expresión del campo incidente depende del estrato en el que se compute. Así, para obtener los valores de las amplitudes de las ondas que suben y bajan por cada estrato j (β_{1_j}, β_{2_j}), deben imponerse tanto las condiciones de contorno de superficie libre, como las de continuidad de desplazamientos y tensiones entre cada interfase:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{U}_{I_j}(-l_j) - \mathcal{U}_{I_{j+1}}(0) & = & 0 \\ \tau_{xz_j}(-l_j) - \tau_{xz_{j+1}}(0) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2.132}$$

2.1.6. Introducción del amortiguamiento. Amortiguamiento histerético

Definir el amortiguamiento de un sistema es una tarea de gran complejidad para la que todavía no se poseen procedimientos teóricos. La forma de conocerlo consiste en realizar ensayos y comparar los resultados con modelos teóricos de donde se pueda extraer sus propiedades. Debido al carácter experimental del proceso, se busca introducir el amortiguamiento dentro de las propiedades del material, de forma que la formulación ya contrastada no se vea alterada.

En cuanto a las propiedades del amortiguamiento con respecto a la respuesta frente a una excitación periódica, se destaca la aparición de un desfase entre la excitación y la respuesta. La forma de producir este fenómeno en el ámbito teórico es forzando a que la relación directa entre la excitación y la respuesta sea mediante un valor en el dominio de los números complejos.

Un modelo extendido en la implementación del amortiguamiento del material es el amortiguamiento histerético. Este tipo de amortiguamiento, independiente de la frecuencia, se introduce simplemente redefiniendo las propiedades elásticas del material tal que:

$$E = E_{material}\ (1 + 2\,\xi\,\mathrm{i}) \tag{2.133}$$

Donde ξ representa el factor de amortiguamiento histerético del material en tanto por uno.

2.2. Sistema equivalente de un grado de libertad

Independientemente de la complejidad del sistema, e incluso, del modo de aplicación del amortiguamiento, puede resultar interesante la obtención de un sistema equivalente de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso. La respuesta de dicho sistema de un único grado de libertad constituye un problema clásico de dinámica cuya solución analítica conlleva expresiones sencillas que permiten la caracterización dinámica del sistema complejo estudiado. La principal forma de caracterizar el sistema es a partir de su frecuencia natural de vibración, por lo que el objetivo será hallar la equivalencia entre la frecuencia natural que se obtenga en el problema completo y en el sistema equivalente de un grado de libertad.

La ecuación de gobierno de un sistema de un único grado de libertad en vibración libre es (ver p.ej. [3]):

$$\widehat{k}\, u(t) + \widehat{c}\, \frac{du(t)}{dt} + \widehat{m}\, \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = 0 \tag{2.134}$$

Donde $\widehat{k}$ representa la rigidez del sistema, $\widehat{c}$ la relación entre la fuerza viscosa y la velocidad del sistema y $\widehat{m}$ su masa. Si se pasa esta ecuación al dominio de la frecuencia:

$$\widehat{k}\, U + \mathrm{i}\, \omega\, \widehat{c} U - \omega^2\, \widehat{m}\, U = 0 \tag{2.135}$$

Dividiendo la ecuación por $\widehat{m}$ y sacando factor común de U:

$$\left(\frac{\widehat{k}}{\widehat{m}} + \mathrm{i}\, \omega\, \frac{\widehat{c}}{\widehat{m}} - \omega^2 \right) U = 0 \tag{2.136}$$

Debido a que el desplazamiento U no puede valer 0 para un sistema oscilando, se debe cumplir que:

$$\frac{\widehat{k}}{\widehat{m}} + \mathrm{i}\, \omega\, \frac{\widehat{c}}{\widehat{m}} - \omega^2 = 0 \tag{2.137}$$

Por medio de las definiciones de frecuencia natural y factor de amortiguamiento para estos sistemas:

$$\omega_n^2 = \frac{\widehat{k}}{\widehat{m}} \tag{2.138a}$$

$$\xi = \frac{\widehat{c}}{2\, \widehat{m}\, \omega_n} \tag{2.138b}$$

Se introducen en la ecuación (2.137) y cambiando el signo:

$$-\omega_n^2 - \mathrm{i}\, \omega\, \left(2\, \xi\, \omega_n\right) + \omega^2 = 0 \tag{2.139}$$

Se obtiene una ecuación de segundo grado de variable ω. Resolviendo:

$$\omega = \frac{2\, \xi\, \omega_n\, \mathrm{i} \pm \sqrt{-4\, \xi^2\, \omega_n^2 + 4\, \omega_n^2}}{2} \tag{2.140}$$

Que se reduce a:

$$\omega = \xi\, \omega_n\, \mathrm{i} \pm \sqrt{-\xi^2\, \omega_n^2 + \omega_n^2} \tag{2.141}$$

Debido a las características del problema, únicamente resultan de interés las frecuencias de vibración positivas. De este modo, se descarta la solución con parte real negativa y se extrae factor común de ω_n:

$$\omega = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} + \xi\, \omega_n\, \mathrm{i} \tag{2.142}$$

De esta forma, se ha resuelto el problema de autovalores relativo al sistema de un grado de libertad. Analizando la solución (2.142), se observa que aquella frecuencia que resuelve la ecuación (2.135) presenta una parte real y una parte compleja. De este modo, igualando esta expresión a la frecuencia que se obtenga en el problema completo permite conocer el valor de ω_n y ξ que presentaría el sistema equivalente de un grado de libertad. Para hallar las relaciones de estas propiedades con la frecuencia compleja obtenida se comienza por calcular su valor absoluto:

$$|\omega| = \sqrt{\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)^2 + \left(\xi\, \omega_n\right)^2} = \omega_n \sqrt{1-\xi^2+\xi^2} = \omega_n \tag{2.143}$$

Por otro lado, separando la parte imaginaria de ω:

$$\mathrm{Im}\,(\omega) = \xi\, \omega_n = \xi\, |\omega| \tag{2.144}$$

De esta forma, por medio de las ecuaciones (2.143) y (2.144) se obtiene el valor de la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento del sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso equivalente al sistema completo:

$$\omega_n = |\omega| \tag{2.145a}$$

$$\xi = \frac{\mathrm{Im}\,(\omega)}{|\omega|} \tag{2.145b}$$

2.3. Cálculo del modo propio de vibración

2.3.1. Notación matricial

Como se ha visto al hallar las soluciones analíticas para las distintas hipótesis consideradas, todas ellas dependen de cuatro coeficientes que delimitan las condiciones de contorno. Este hecho permite que todas ellas se puedan expresar en notación matricial. A modo de ejemplo, para el paso a notación matricial se partirá de la solución de la ecuación de gobierno de la interacción suelo estructura sin inercia rotacional (2.82), debido a que posee un término independiente.

$$\mathcal{U}(x) = A\,\mathrm{e}^{\lambda x} + B\,\mathrm{e}^{-\lambda x} + C\cos(\lambda x) + D\,\mathrm{sen}(\lambda x) + \widehat{s}\,\mathcal{U}_I(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{U}(x) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda x} & \mathrm{e}^{-\lambda x} & \cos(\lambda x) & \mathrm{sen}(\lambda x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} + \widehat{s}\,\mathcal{U}_I(x) \tag{2.146}$$

Esta transformación es completamente válida para ser aplicada a las otras variables del sistema: Θ, $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{M}$; ya que se componen de relaciones lineales con respecto a $\mathcal{U}$. De este modo, es posible expresar cualquier condición de contorno de las explicadas en la sección 2.1.4 en forma matricial, obteniéndose una expresión del tipo:

$$\left(\begin{smallmatrix}\text{Condición}\\\text{externa}\end{smallmatrix}\right)^i = \sum_{j=1}^{n}\left(\begin{bmatrix} h_1^{ij} & h_2^{ij} & h_3^{ij} & h_4^{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^j \\ B^j \\ C^j \\ D^j \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}\text{Término}\\\text{independiente}\end{smallmatrix}\right)^i \tag{2.147}$$

Donde i representa la ecuación de la condición de contorno que se esté representando, n el número de elementos que componen el sistema, j el elemento que participa en el cálculo y h_k^{ij} se obtiene de las expresiones correspondientes a los desplazamientos, giros, flectores y cortantes obtenidas con anterioridad, y particularizadas al punto donde se aplique la condición de contorno. Restando la ecuación por el término independiente, se puede expresar como:

$$\left[cc^i\right] = \sum_{j=1}^{n}\left(\begin{bmatrix} h_1^{ij} & h_2^{ij} & h_3^{ij} & h_4^{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^j \\ B^j \\ C^j \\ D^j \end{bmatrix}\right) \tag{2.148}$$

Donde cc^i incorpora tanto el valor de la condición de contorno como la posible contribución del término libre a la variable en cuestión. Combinando todas las ecuaciones que definen las condiciones de contorno, se puede componer el sistema de ecuaciones en notación matricial. De forma ilustrativa, se presenta la forma que presentaría el sistema de ecuaciones para un sistema con un sólo elemento:

$$\begin{bmatrix} cc^1 \\ cc^2 \\ cc^3 \\ cc^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^{11} & h_2^{11} & h_3^{11} & h_4^{11} \\ h_1^{21} & h_2^{21} & h_3^{21} & h_4^{21} \\ h_1^{31} & h_2^{31} & h_3^{31} & h_4^{31} \\ h_1^{41} & h_2^{41} & h_3^{41} & h_4^{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^1 \\ B^1 \\ C^1 \\ D^1 \end{bmatrix} \tag{2.149}$$

Cabe destacar que, dado que sólamente participa un elemento, el superíndice j vale 1. Por otro lado, el superínidice i va creciendo desde 1 hasta 4, dependiendo de la ecuación en la que actúe.

A continuación, se mostrará el sistema de ecuaciones en el caso de que el sistema conste de dos elementos:

$$\begin{bmatrix} cc^1 \\ cc^2 \\ cc^3 \\ cc^4 \\ cc^5 \\ cc^6 \\ cc^7 \\ cc^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^{11} & h_2^{11} & h_3^{11} & h_4^{11} & h_1^{12} & h_2^{12} & h_3^{12} & h_4^{12} \\ h_1^{21} & h_2^{21} & h_3^{21} & h_4^{21} & h_1^{22} & h_2^{22} & h_3^{22} & h_4^{22} \\ h_1^{31} & h_2^{31} & h_3^{31} & h_4^{31} & h_1^{32} & h_2^{32} & h_3^{32} & h_4^{32} \\ h_1^{41} & h_2^{41} & h_3^{41} & h_4^{41} & h_1^{42} & h_2^{42} & h_3^{42} & h_4^{42} \\ h_1^{51} & h_2^{51} & h_3^{51} & h_4^{51} & h_1^{52} & h_2^{52} & h_3^{52} & h_4^{52} \\ h_1^{61} & h_2^{61} & h_3^{61} & h_4^{61} & h_1^{62} & h_2^{62} & h_3^{62} & h_4^{62} \\ h_1^{71} & h_2^{71} & h_3^{71} & h_4^{71} & h_1^{72} & h_2^{72} & h_3^{72} & h_4^{72} \\ h_1^{81} & h_2^{81} & h_3^{81} & h_4^{81} & h_1^{82} & h_2^{82} & h_3^{82} & h_4^{82} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^1 \\ B^1 \\ C^1 \\ D^1 \\ A^2 \\ B^2 \\ C^2 \\ D^2 \end{bmatrix} \qquad (2.150)$$

En este segundo caso, el superíndice j toma valor de 1 en las primeras cuatro columnas de la matriz y en las primeras cuatro filas del vector al que multiplica, siendo éstos los términos provenientes de la solución del primer elemento del sistema; mientras que toma valor de 2 en las últimas cuatro columnas de la matriz y en las últimas cuatro filas del vector al que multiplica, siendo éstos los términos provenientes de la solución del segundo elemento del sistema. Por otro lado, el superínidice i va creciendo desde 1 hasta 8, dependiendo de la ecuación en la que actúe. Como es lógico, el superínice i debe crecer hasta $4\,n$, ya que debe haber cuatro ecuaciones por cada elemento que componga el sistema.

De forma esquemática, se va a representar el sistema de la siguiente forma general:

$$\{\mathcal{CC}\} = [\mathcal{H}] \cdot \{\mathcal{A}\} \qquad (2.151)$$

Donde el vector $\{\mathcal{CC}\}$ representa las condiciones de contorno que afectan al problema en cuestión (incluyendo la contribución del término libre, en su caso), el vector $\{\mathcal{A}\}$ los coeficientes que definen por completo la solución de cada elemento y la matriz $[\mathcal{H}]$ la relación que guardan ambos vectores entre ellos. Esta notación permite obtener el valor de los coeficientes de cada elemento de una manera muy simple:

$$\{\mathcal{A}\} = [\mathcal{H}]^{-1} \cdot \{\mathcal{CC}\} \qquad (2.152)$$

2.3.2. Cálculo de la frecuencia propia

Se define como frecuencia propia de un sistema aquella a la que tiende a oscilar en vibración libre. Dicha frecuencia se caracteriza porque supone un máximo para la amplitud de la respuesta. Partiendo de esta propiedad, y relacionándola con la ecuación (2.151), se puede deducir que la frecuencia propia será aquella que produzca la vibración del sistema cuando la excitación se reduzca al mínimo. Desde un punto de vista teórico, se puede plantear que el sistema oscilará incluso cuando la excitación externa se haya visto reducida a 0, matemáticamente queda así:

$$\{0\} = [\mathcal{H}] \cdot \{\mathcal{A}\} \tag{2.153}$$

Cabe destacar que al anular completamente la excitación externa, también se hace necesario anular la aportación de la excitación sísmica en la formulación de la cimentación.

Este sistema de ecuaciones se trata de un sistema homogéneo. Este tipo de sistemas presentan la particularidad de que si el rango de la matriz $[\mathcal{H}]$ es igual al número de variables la solución del sistema es la trivial. Sin embargo, si el rango de la matriz es menor que el número de variables, existen infinitas soluciones, todas ellas proporcionales entre sí.

La manera de comprobar que el rango de la matriz es menor que el número de variables es calculando su determinante y observar si da 0. De forma inversa, se podría calcular el determinante e igualarlo a 0, siendo todas aquellas frecuencias que cumplan la ecuación las llamadas frecuencias propias o naturales del sistema. De esta forma se resuelve el problema de autovalores.

$$|\mathcal{H}| = f(\omega) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_\infty \end{cases} \tag{2.154}$$

Un sistema continuo como el descrito en este trabajo presenta infinitos modos de vibración, cada uno a una frecuencia diferente; aunque en la respuesta frente a una excitación dada los primeros modos suelen ser los únicos relevantes. El valor de la frecuencia obtenida será un número real si todas las propiedades del sistema son números reales; en caso contrario, se debe emplear las relaciones obtenidas en la sección 2.1.6. Por último, este procedimiento es completamente válido para las distintas disposiciones comentadas en la sección 2.1.4, únicamente siendo necesaria la correcta aplicación de las condiciones de contorno comentadas.

2.3.3. Cálculo del modo de vibración

Como ya se comentó anteriormente, a la frecuencia propia existen infinitas soluciones a la ecuación (2.153), todas ellas proporcionales entre sí. La manera de conocer cuánto valen los coeficientes que definen la solución de cada elemento es asignar un valor aleatorio (por simplicidad se suele tomar la unidad) a uno de los coeficientes y resolver el sistema de $4\,n-1$ ecuaciones que resulta. De esta forma se obtiene el valor que deben tener el resto de variables con respecto a la primera, pudiendo obtenerse cualquiera de las infinitas soluciones multiplicando todas las variables por una constante.

Debido a que no se sigue ningún criterio para asignar el valor inicial a la primera variable, la amplitud de la respuesta presentará un valor imprevisible, siendo bastante probable que resulte fuera de escala. Por este motivo, se tiende a normalizar el resultado. Para ello se obtiene el valor de la deformada a lo largo de todo el sistema y se obtiene el valor de la máxima amplitud que se registre. Dividiendo la respuesta por este valor se garantiza que todos los modos presenten una amplitud máxima de 1, pudiendo compararse entre ellos.

2.4. Cálculo de envolventes de esfuerzos

La envolvente de esfuerzos de una estructura representa el valor máximo de dicho esfuerzo al que se ve sometida la estructura en cada uno de sus puntos ante una solicitación determinada, sin necesidad de simultaneidad.

2.4.1. Resolución en el dominio del tiempo

Para hallar la envolvente de esfuerzos de una estructura es necesario trabajar en el dominio del tiempo. Sin embrago, este enfoque presenta una mayor complejidad analítica. Por este motivo, y fundamentado en la linealidad del problema, se hace uso del dominio de la frecuencia para su resolución. El paso de un dominio a otro se explica a continuación, aplicándolo desde el punto de vista del tratamiento del sismo y del tratamiento de la respuesta. Este procedimiento de resolución es análogo al standard frequency-domain method [3].

2.4.1.1. Tratamiento del sismo

La excitación sísmica es registrada mediante una serie de datos que recogen la aceleración medida en la superficie del terreno y el paso de tiempo que trascurre entre cada medición. Este registro temporal se transforma al dominio de la frecuencia por medio de la Transformada de Fourier, obteniendo la amplitud de la aceleración en la superficie del terreno para cada frecuencia de excitación.

2.4.1.2. Tratamiento de la respuesta

Conociendo la amplitud de la aceleración del terreno para cada una de las frecuencias y el valor del cortante y el momento a lo largo del sistema para cada frecuencia suponiendo un desplazamiento unitario de la superficie del terreno (ver sección 2.4.2), se puede aplicar la linealidad del sistema para conocer el cortante y el momento en el sistema para cada una de las frecuencias de excitación:

$$\mathcal{Q}_i(x) = \mathcal{Q}_{desplazamiento\,unitario_i}(x)\,\frac{a_{terreno_i}}{-\omega_i^2} \tag{2.155a}$$

$$\mathcal{M}_i(x) = \mathcal{M}_{desplazamiento\,unitario_i}(x)\,\frac{a_{terreno_i}}{-\omega_i^2} \tag{2.155b}$$

Donde el subíndice i indica la frecuencia de excitación para la que se realiza el cálculo.

Por último, se aplica la Transformada de Fourier Inversa para obtener el cortante y el momento en el dominio del tiempo. De este modo, para formar la envolvente de esfuerzos, únicamente interesa recoger el máximo valor absoluto del cortante y del momento en cada uno de los puntos de la estructura.

2.4.2. Resolución en el dominio de la frecuencia

Para conocer el valor del cortante y del momento para cada una de las frecuencias que se requieren en el procedimiento anterior, suponiendo que la excitación sísmica produce un desplazamiento unitario en la superficie del terreno, se siguen los pasos detallados a continuación.

2.4.2.1. Impedancia de la estructura

En primer lugar, se obtiene la impedancia del aerogenerador, con el fin de introducirla como condición de contorno para la cimentación. Ya sea la torre de forma aislada o colocada sobre la subestructura, se parte de su hipótesis de base rígida mediante las condiciones de contorno (2.125) o (2.128), respectivamente. Siguiendo el procedimiento explicado en la sección 2.1.3:

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{U}_{base}=1\\ \Theta_{base}=0\end{array}\right\}\Longrightarrow\left[\begin{array}{c}F_h\\ M_g\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}K_{hh}\\ K_{gh}\end{array}\right] \tag{2.156a}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{U}_{base}=0\\ \Theta_{base}=1\end{array}\right\}\Longrightarrow\left[\begin{array}{c}F_h\\ M_g\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}K_{hg}\\ K_{gg}\end{array}\right] \tag{2.156b}$$

Obteniendo así su impedancia:

$$\mathcal{K}_{Aerogenerador}=\left[\begin{array}{cc}K_{hh} & K_{hg}\\ K_{gh} & K_{gg}\end{array}\right] \tag{2.157}$$

2.4.2.2. Solución de la cimentación

Una vez obtenida la matriz de impedancia del aerogenerador, se debe introducir como condición de contorno en la cabeza de la cimentación, de forma análoga a como se hacía en la disposición de base flexible. De modo que las condiciones de contorno son:

$$\left.\begin{array}{rcl}-\mathcal{Q}_{cimentación}(0)+K_{hh}\mathcal{U}_{cimentación}(0)+K_{hg}\,\Theta_{cimentación}(0) & = & 0\\ \mathcal{M}_{cimentación}(0)+K_{gh}\mathcal{U}_{cimentación}(0)+K_{gg}\,\Theta_{cimentación}(0) & = & 0\\ \mathcal{Q}_{cimentación}(-L_{cimentación}) & = & 0\\ \mathcal{M}_{cimentación}(-L_{cimentación}) & = & 0\end{array}\right\} \tag{2.158}$$

Al contrario que para hallar la frecuencia propia, en este paso se debe considerar la excitación sísmica, que será la fuente de excitación del problema. De esta forma, se puede resolver la cimentación, hallando el desplazamiento, giro, cortante y momento a lo largo de toda su longitud.

2.4.2.3. Esfuerzos en la estructura

Una vez resuelto el problema en la cimentación, se puede hallar la solución del resto del sistema. Para ello, únicamente se debe aplicar las condiciones de contorno expuestas para base rígida (2.125) o (2.128) y asignar como desplazamientos de la base los desplazamientos y giros que sufre la cabeza del pilote, que han sido obtenidos en el paso anterior:

$$\left.\begin{array}{rcl}\mathcal{U}_{base} & = & \mathcal{U}_{cimentación}(0)\\ \Theta_{base} & = & \Theta_{cimentación}(0)\end{array}\right\} \tag{2.159}$$

De este modo, se obtiene el resto de la solución, conociendo el valor del cortante y el momento a lo largo de todo el sistema para cada una de las frecuencias que se precisen.

2.4.3. Comparación de resultados (sistema desacoplado)

Una vez obtenidas las envolventes de esfuerzos del sistema en su conjunto, puede resultar interesante calcular también la que presentarían el aerogenerador y la cimentación de forma aislada. De este modo, se analiza fácilmente el efecto que produce cada elemento al acoplarse al otro. Para realizar el cálculo de las envolventes de esfuerzos del sistema desacoplado, se sigue un procedimiento análogo al empleado para el sistema acoplado, modificando las condiciones de contorno.

2.4.3.1. Aerogenerador desacoplado

Para el estudio de las envolventes de esfuerzos del aerogenerador desacoplado, se consideran las condiciones de contorno expuestas para base rígida (2.125) o (2.128) y se fuerza que el desplazamiento de la base coincida con el desplazamiento de la superficie del terreno, impidiendo el giro:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{U}_{base} & = & \mathcal{U}_I(0) \\ \Theta_{base} & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2.160}$$

2.4.3.2. Cimentación desacoplada

En el cálculo de las envolventes de esfuerzos de la cimentación desacoplada, se debe eliminar la impedancia proporcionada por el aerogenerador. De esta forma quedaría que las condiciones de contorno en la cabeza imponen que se anule el cortante y el momento. En este tipo de estructuras, el criterio de dimensionamiento más exigente suele proceder del momento flector; por lo que imponer que valga 0 en la cabeza no proporciona una referencia relevante. Para evitar esto, se suele considerar que se empotra el giro en cabeza, anulándolo, lo que se resume en las siguientes condiciones de contorno:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{Q}_{cimentación}(0) & = & 0 \\ \Theta_{cimentación}(0) & = & 0 \\ \mathcal{Q}_{cimentación}(-L_{cimentación}) & = & 0 \\ \mathcal{M}_{cimentación}(-L_{cimentación}) & = & 0 \end{array}\right\} \tag{2.161}$$

Capítulo 3

Aplicación Informática

En este capítulo se trata la arquitectura general y el funcionamiento la Aplicación Informática desarrollada para este trabajo. En ella se aplican los conceptos formulados en el modelo matemático presentado en el capítulo anterior, y se da respuesta a los cálculos de la frecuencia propia y envolvente de esfuerzos para un aerogenerador offshore monopilotado.

Esta aplicación está elaborada en Lenguaje M, empleando como entorno de trabajo el programa Matlab. Este programa presenta una gran versatilidad para el cálculo computacional, simplificando considerablemente la implementación. Este hecho lo convierte en una herramienta de programación y prototipado ampliamente extendida.

3.1. Descripción general

3.1.1. Problemas a resolver

La Aplicación Informática que aquí se presenta está desarrollada para el análisis de un aerogenerador cimentado mediante un monopilote. Además, permite introducir una subestructura para la torre, de modo que se puede aplicar a aerogeneradoes offshore, cimentados en el lecho marino.

Para el aerogenerador introducido, se pueden ejecutar dos cálculos diferenciados. Siendo decisión del usuario si se desea realizar ambos o únicamente uno de los dos.

- Frecuencia propia del aerogenerador en base rígida y en base flexible y, si se incluye una subestructura, de la torre en base rígida.
- Envolvente de esfuerzos (cortante y momento flector) frente a un sismo suministrado

en los datos para ciertos puntos de muestreo a lo largo de la torre, la subestructura (si se incluye) y la cimentación; comparando los resultados con el aerogenerador en base rígida y la cimentación con el giro en cabeza empotrado.

3.1.2. Funcionamiento de la Aplicación Informática

La figura 3.1 muestra un diagrama de flujo que representa el funcionamiento global de la Aplicación Informática. El programa se divide en dos bloques claramente diferenciados, cada uno de ellos enfocado a realizar uno de los cálculos que se han incluido en el programa. Los bloques son independientes el uno del otro, por lo que en cada ejecución se decide si se realiza el cálculo en cuestión; dependiendo de la información introducida en la entrada de datos.

El primer bloque se compone de los procesos 1.1., 1.2. y 1.3.; donde se siguen procedimientos bastante similares. En primer lugar se obtienen las expresiones, en forma vectorial, del desplazamiento, giro, cortante y momento dependientes de los coeficientes $\{\mathcal{A}\}$ para cada uno de los tramos implicados. A continuación, se construye la matriz $[\mathcal{H}]$ y se busca el primer valor de ω que anule su determinante. Para reducir el coste computacional, conviene emplear la frecuencia en base rígida como punto de partida para buscar la frecuencia en base flexible; ya que esta será siempre menor que la primera, alejándose de ella en mayor o menor medida en función de la rigidez del soporte. En el cálculo de la frecuencia en base rígida se fuerza a que las propiedades del problema sean reales, por lo que se omite la influencia del amortiguamiento. Sin embargo, en el cálculo de la frecuencia en base flexible el resultado será, por lo general, un número complejo, por lo que se obtiene el valor de la frecuencia natural y el factor de amortiguamiento del sistema equivalente de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso.

En cuanto al segundo bloque, se comienza calculando la Transformada de Fourier del registro del sismo (2.1.). Seguidamente, empieza un bucle (2.2.) en el que se realiza una serie de subprocesos para cada frecuencia de excitación proveniente del sismo. Dicho bucle se inicia calculando el valor de los coeficientes que definen la solución del sistema para dos situaciones: desplazamiento unitario en la base y giro unitario en la base (2.2.1.). Para estas condiciones de contorno, se obtienen los esfuerzos a lo largo de la torre y la subestructura (2.2.2. y 2.2.3.). Estos procesos se aplican ya que la solución definitiva se obtendrá por superposición (explicado más adelante). A continuación, se buscan los esfuerzos en la cimentación, comenzando su cálculo cuando se encuentra desacoplada (2.2.4.). Tras este paso, se calcula la impedancia suministrada por el aerogenerador (2.2.5.) y se introduce como condición de contorno en la

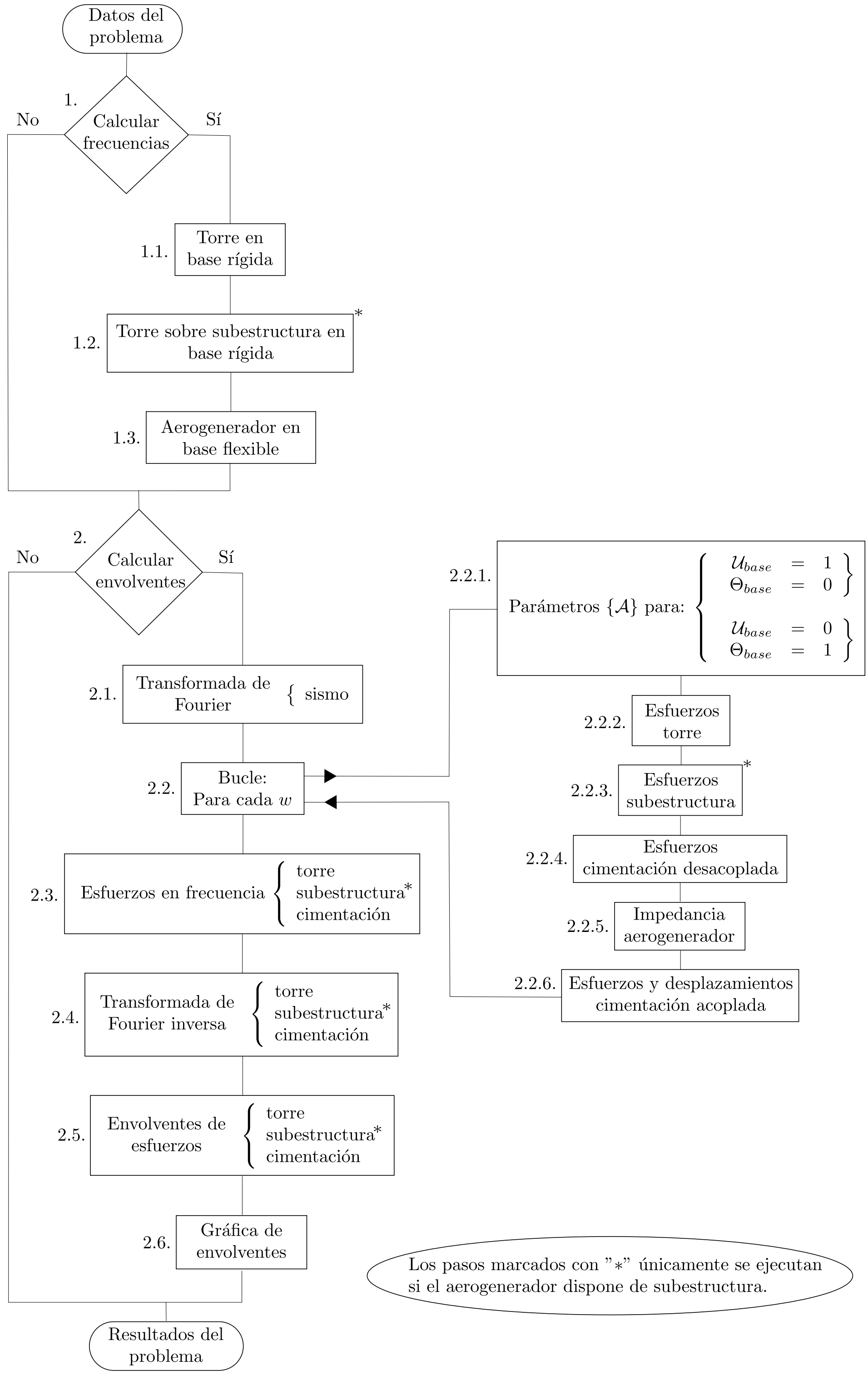

Figura 3.1: Diagrama de flujo de la Aplicación desarrollada.

cimentación para obtener sus esfuerzos cuando se encuentra acoplada al sistema (2.2.6.).

Finalizado el bucle 2.2., se calculan los esfuerzos del sistema en el dominio de la frecuencia. En el caso de la cimentación, únicamente se debe multiplicar los esfuerzos obtenidos durante el bucle por la amplitud que posee la excitación sísmica a cada frecuencia (2.3.). Por otro lado, se emplea la superposición para conocer los esfuerzos a lo largo de la torre y la subestructura (2.3.). Para ello, se multiplican los esfuerzos para un desplazamiento unitario por el desplazamiento de la base y los esfuerzos para un giro unitario por el giro de la base, sumando ambos resultados. Cabe destacar que, en el caso del sistema desacoplado, el desplazamiento de la base es el desplazamiento producido en la superficie del terreno por el sismo y el giro es nulo; mientras que, en el caso del sistema acoplado, el desplazamiento y giro de la base serían los obtenidos en la cabeza de la cimentación multiplicados por la amplitud que posee la excitación sísmica a cada frecuencia. Seguidamente, se aplica la Transformada de Fourier inversa para conocer los esfuerzos en el dominio del tiempo (2.4.). Con estos resultados, se calculan las envolventes de esfuerzos (2.5.), buscando el máximo valor absoluto que registra cada punto. Por último, se grafican los resultados (2.6.), diferenciando el sistema acoplado del desacoplado.

3.2. Descripción detallada

3.2.1. Entrada y salida de datos

La Aplicación Informática ha sido diseñada de forma que se le introducen una serie de estructuras de datos de entrada y devuelve una estructura de datos de salida. Para simplificar la entrada de datos por parte del usuario, se ha definido un fichero de datos en el que se introducen las características del problema y del que se obtendrán las estructuras de datos de entrada ya mencionadas. Estos elementos serán descritos a continuación.

3.2.1.1. Fichero de datos del problema

El fichero de datos que define las características del problema debe seguir un formato determinado, adjuntándose un ejemplo en el apéndice A (el fichero de datos adjunto recoge las propiedades relativas a la ejecución del aerogenerador 1 en el suelo 1, empleado en el capítulo de resultados). Este fichero se divide en una serie de bloques, siendo el primero de ellos el que designa los cálculos que se realizan y el resto donde se introducen las propiedades del sistema.

El primer bloque del fichero de datos contiene cuatro puntos. Los dos primeros indican qué cálculos se ejecutan, debiendo escribir *Sí* o *No* para tomar la decisión. Seguidamente, se introduce el nombre del fichero que recoge la señal del sismo y el paso de tiempo de la señal.

Los cuatro bloques siguientes se corresponden con las propiedades de la góndola, la torre, la subestructura y el pilote. En ellos únicamente se debe introducir el valor de la característica que se solicita. Con respecto a la línea de *Número_de_puntos*, se introduce el número de puntos de muestreo que se desea que considere el programa al realizar el cálculo de las envolventes. Por otro lado, en el bloque relativo a la subestructura, se comienza con *Activar:*, donde se indica con *Sí* o *No* en función de si se va a considerar que el aerogenerador dispone o no dispone de subestructura.

Con respecto al último bloque, se introducen las propiedades del terreno. Se comienza indicando el número de estratos que se va a considerar en el problema, y se repite el conjunto de seis filas por cada estrato que halla. En dicho conjunto se coloca el identificador del estrato y sus propiedades.

3.2.1.2. Estructuras de datos de entrada

Partiendo del fichero de datos de entrada, la función *Leer_datos.m* genera las estructuras de datos de entrada necesarias para la Aplicación Informática. Dichas estructuras son cinco: *gondola*, *torre*, *subestructura*, *pile* y *suelo*; recogiendo, cada una de ellas, toda la información necesaria para la correcta aplicación del procedimiento.

3.2.1.3. Estructura de datos de salida

La Aplicación Informática devuelve una estructura de datos de salida (*resul*) donde aparecen los resultados que devuelve el programa. En el caso de que únicamente se solicite el cálculo de la frecuencia propia, la estructura se compone de los siguientes campos:

- *w_aero*: frecuencia propia de la torre en base rígida.
- *w_rigido*: frecuencia propia de la torre sobre la subestructura en base rígida, si se incluye. Si no hay subestructura coincide con *w_aero*.
- *w*: frecuencia propia compleja del aerogenerador en base flexible.
- *w_natural*: frecuencia natural del sistema equivalente de un grado de libertad.
- *xi*: factor de amortiguamiento del sistema equivalente de un grado de libertad.

En el caso de que se solicite el cálculo de las envolventes de esfuerzos, la estructura de datos de salida se compone de los siguientes campos:

- Q: estructura de datos que contiene la envolvente de cortantes del sistema acoplado para los distintos puntos de muestreo.
- Qs: estructura de datos que contiene la envolvente de cortantes del sistema desacoplado para los distintos puntos de muestreo.
- M: estructura de datos que contiene la envolvente de momentos flectores del sistema acoplado para los distintos puntos de muestreo.
- Ms: estructura de datos que contiene la envolvente de momentos flectores del sistema desacoplado para los distintos puntos de muestreo.
- z: estructura de datos que contiene la altura de los distintos puntos de muestreo.

Cada una de estas estructuras de datos se compone de los siguientes campos:

- *torre*: vector con los resultados de la torre.
- *subestructura*: vector con los resultados de la subestructura. Este campo no se incluye si no se considera la subestructura.
- *pile*: vector con los resultados de la cimentación

Por último, si se solicita que el programa realice los dos cálculos para los que se ha diseñado, la estructura de datos de salida dispondrá de todos los campos comentados para cada caso.

3.2.2. Descripción de las funciones

Dentro de la Aplicación Informática se incluyen cuatro funciones que realizan tareas específicas. En el apéndice B se adjunta el código detallado de cada una de ellas y, a continuación, se explican brevemente.

[gondola,torre,subestructura,pile,suelo] = Leer_datos(nomfich)

Esta función genera las estructuras de datos de entrada *góndola*, *torre*, *subestructura*, *pile* y *suelo* a partir del fichero de datos del problema con nombre *nomfich*. Para ello registra las características indicadas en el fichero y genera los datos que se derivan de ellas y que son necesarios para la ejecución del programa.

resul = calculo_aero(gondola,torre,subestructura,pile,suelo)

Esta función es la principal de la Aplicación Informática. Introduciendo en ella las estructuras de datos de entrada *góndola*, *torre*, *subestructura*, *pile* y *suelo*; devuelve la estructura de datos de salida *resul*. Para ello, sigue el procedimiento indicado en la sección 3.1.2.

[respil,resci] = calcula_winkler(pile,suelo,w,cc)

Esta función es la encargada de desarrollar la solución de la cimentación, aplicando para ello el modelo Winkler. No es necesario ejecutarla, ya que la función anterior llama a ésta cuando se requiere. Para su funcionamiento, se debe introducir las estructuras de datos *pile* y *suelo*, así como la frecuencia de excitación y las condiciones de contorno en cabeza y punta. Como resultado se obtiene el valor de la variables principales del pilote (*respil*) y del campo incidente (*resci*) para ciertos puntos de muestreo.

graf_env(resul)

Esta función genera una gráfica donde se muestran las envolventes de esfuerzos obtenidas para el sistema acoplado y desacoplado. Como entrada únicamente requiere que se introduzca la estructura de datos de salida *resul*.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se presenta un conjunto de resultados obtenidos mediante la Aplicación Informática que se desarrolla en este trabajo. Por una lado, se realiza una verificación de ciertos resultados frente a modelos más rigurosos, con la finalidad de validar el modelo. Mientras que, por otro lado, se estudia cómo varía la respuesta estructural en función de las características particulares de cada problema. Dicho análisis de la dependencia de la respuesta no pretende ser un estudio exhaustivo, sino un ejemplo de la aplicación del programa desarrollado y una forma de evaluar las capacidades del mismo frente a futuras mejoras.

4.1. Definición del problema

Teniendo en cuenta el objetivo de este trabajo, el problema a estudiar consiste en un aerogenerador offshore monopilotado. Partiendo de esta definición general, se consideran distintos aerogeneradores comerciales cimentados en terrenos con diferentes características y perfiles, permitiendo analizar las variaciones que aparecen en los resultados debido a estas propiedades.

4.1.1. Definición de los aerogeneradores empleados

Para definir los casos a estudio, se emplea una serie de aerogeneradores comerciales situados en parques eólicos de Reino Unido, obtenidos del trabajo de Lombardi [8]. Para cada parque eólico, la altura propia de la torre del aerogenerador se encuentra en un intervalo, por lo que se realiza el estudio suponiendo tanto el tamaño mínimo y como el máximo. Por otro lado, únicamente se dispone de las dimensiones del diámetro y el espesor de las torres Vestas, por lo que se considera el mismo valor para las torres Siemens.

La información relativa a las piezas de transición de los aerogeneradores es muy escasa; por lo que, por simplicidad, se considerará que la transición entre la torre y el pilote se produce directamente entre ellos a nivel del mar, sin ningún elemento de transición. De esta forma, la geometría del problema planteado queda según lo presentado en la figura 4.1.

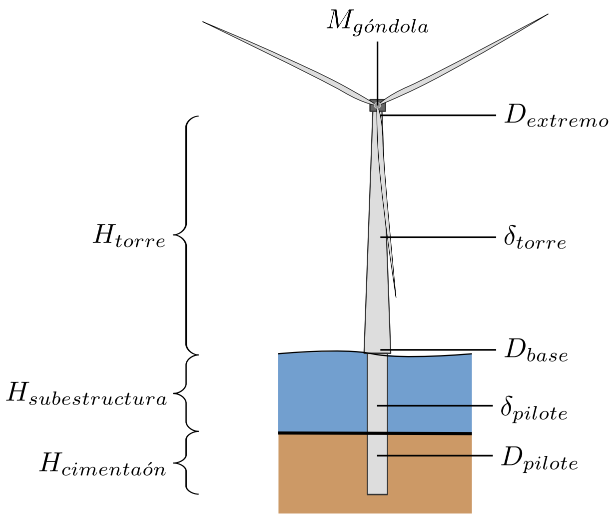

Figura 4.1: Definición de la estructura de los aerogeneradores offshore a estudiar.

Las dimensiones de los aerogeneradores empleados se recogen en la tabla 4.1, atendiendo las variables mostradas a la figura 4.1. Así, $M_{góndola}$ se refiere a la masa puntual en toneladas atribuida a la góndola, considerando que no existe inercia rotacional debido a la falta de datos al respecto. En cuanto a las propiedades de la torre, se define: H_{torre}, su altura en metros; D_{base}, el diámetro exterior en la base de la torre en metros; $D_{extremo}$, el diámetro exterior en el extremo superior de la torre en metros; y δ_{torre}, el factor definido en el modelo que relaciona el diámetro interior de la torre con el exterior en tanto por ciento. Debido a su variabilidad a lo largo de la torre, δ_{torre} ha sido definida como la media de los valores relativos a la base y al extremo superior. Por último, las propiedades del pilote se resumen en: $H_{subestructura}$, la altura del pilote en metros que se encuentra sumergida en el agua; $H_{cimentación}$, la profundidad del pilote en metros que se encuentra enterrada; D_{pilote}, el diámetro exterior del pilote en metros; y δ_{pilote}, el factor definido en el modelo que relaciona el diámetro interior del pilote con el exterior en tanto por ciento.

En cuanto a las propiedades del material que compone los aerogeneradores, se considera que están compuestos de acero, asumiendo las siguientes propiedades: módulo de elasticidad del material $E = 210$ GPa y densidad $\rho = 7850\,\mathrm{kg/m^3}$. Además, se define un factor de

Tabla 4.1: Características de los aerogeneradores a estudio.

Identificador	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10
Aerogenerador	Vestas 2MW-V66	Vestas 3MW-V90	Vestas 2MW-V80	Vestas 2MW-V80	Siemens STW-3.6-107
$M_{góndola}$(t)	80	111	94	94	220
H_{torre}(m)	60-78	80-105	60-100	60-100	80-96
D_{base}(m)	4.2	4.2	4.2	4.2	4.2
$D_{extremo}$(m)	2.3	2.3	2.3	2.3	2.3
δ_{torre}(%)	98.0	98.0	98.0	98.0	98.0
$H_{subestructura}$(m)	11	10	20	21	25
$H_{cimentación}$(m)	15	28	31	33	30
D_{pilote}(m)	3.5	4.3	4.2	4.0	4.7
δ_{pilote}(%)	97.4	97.9	97.6	98.2	97.7

amortiguamiento de carácter histerético $\xi = 2\,\%$ para el pilote enterrado, mientras que se emplea $\xi = 1\,\%$ para el resto de la estructura. Por último, se asume como densidad del agua $\rho_{agua} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

4.1.2. Definición de los terrenos empleados

Para el análisis de la influencia del terreno en la respuesta de los aerogeneradores se estudian cuatro suelos diferentes: dos homogéneos y dos heterogéneos. El primer terreno heterogéneo empleado presenta un primer estrato homogéneo más blando sobre un semiespacio homogéneo más duro, de modo que las características de cada estrato se definen de igual forma que en el caso de los homogéneos. En cuanto al último terreno de estudio, se emplea un perfil variable extraído del Mar del Norte [5] denominado como *Nelson Field*. Está formado por tres estratos de arcilla, arena y arcilla nuevamente, cuyas propiedades varían en cada uno en función de la profundidad, siendo definidas por la ecuación propuesta por Ohta y Goto [11].

Para cada terreno empleado, su dureza es definida principalmente por la velocidad de las ondas de corte c_s en él, siendo necesario considerar también su densidad $\rho_{terreno}$. Los valores de estas propiedades en cada uno de los suelos se enuncian en la tabla 4.2. Además, para definir por completo el suelo, se considera en todos los casos un coeficiente de Poisson $\nu_s = 0{,}35$ y factor de amortiguamiento histerético $\xi = 5\,\%$.

Tabla 4.2: Características de los terrenos a estudio.

Identificador	1	2	3		4		
Suelo	Homog.	Homog.	Heterog.		Heterog.		
Estrato (espesor)	-	-	1 (5 m)	2	1 (10 m)	2 (42 m)	3
c_s(m/s)	180	360	130	400	$78{,}98\, z^{0{,}312}$	$101{,}57\, z^{0{,}312}$	$78{,}98\, z^{0{,}312}$
$\rho_{terreno}$ kg/m^3	1800	1800	1750	2000	1800	1800	1800

4.2. Caracterización dinámica

La manera de caracterizar dinámicamente una estructura es mediante sus frecuencias naturales y el factor de amortiguamiento presente en dicho modo, siendo normalmente el modo más relevante el primero de ellos. Para la caracterización dinámica de las estructuras de aerogeneradores consideradas, se emplea el procedimiento de cálculo desarrollado en la sección 2.3, que permite conocer ambas variables (frecuencia natural y amortiguamiento equivalente). Este cálculo es proporcionado por el bloque 1 de la Aplicación Informática que se presenta, tal y como se ha indicado en la sección 3.1.

En primer lugar se realiza la verificación del modelo, comparando los resultados con un procedimiento que emplea una formulación integral [2] para modelar la interacción entre el terreno y el pilote enterrado, simplificando el resto de la estructura con un sistema de un grado de libertad en términos de la altura y masa modales [1]. Una vez realizada la verificación del modelo, se presentan los resultados obtenidos por la Aplicación desarrollada relativos a los distintos aerogeneradores y perfiles de suelos considerados, permitiendo así analizar el efecto del terreno sobre las propiedades dinámicas de las distintas estructuras estudiadas.

4.2.1. Resultados de verificación

En primer lugar, se debe revisar el cálculo más sencillo: la frecuencia natural en base rígida. Estos resultados se muestran en la tabla 4.3, donde se presentan las frecuencias naturales en base rígida en hercios para cada aerogenerador obtenidas mediante el modelo presentado y el modelo de verificación, incluyendo además el error relativo entre ambos.

Tabla 4.3: Verificación de frecuencia en base rígida.

Id. Aerogenerador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{propuesto}$ (Hz)	0.53	0.37	0.35	0.23	0.49	0.24	0.43	0.22	0.24	0.19
$f_{referencia}$ (Hz)	0.53	0.37	0.35	0.23	0.49	0.24	0.42	0.22	0.24	0.19
$error(\%)$	0.08	0.04	-0.25	-0.24	0.03	-0.05	0.75	0.51	-0.53	-0.12

Se observa que el error cometido en el cálculo de la frecuencia natural en base rígida es significativamente pequeño, ya que el máximo error registrado es de 0,8 %. Este mínimo error debe estar relacionado con aproximaciones de carácter numérico, sin verse comprometido el modelo.

A continuación, se presenta la tabla 4.4, que recoge resultados de carácter similar a la tabla 4.3 para el cálculo de la frecuencia de los aerogeneradores cimentados sobre el terreno 4 (Nelson Field).

Tabla 4.4: Verificación de frecuencia en base flexible.

Id. Aerogenerador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\widehat{f}_{propuesto}(hz)$	0.41	0.30	0.30	0.21	0.41	0.21	0.35	0.19	0.21	0.17
$\widehat{f}_{referencia}(hz)$	0.44	0.32	0.31	0.21	0.42	0.22	0.37	0.20	0.22	0.17
$error(\%)$	-6.8	-6.3	-3.8	-3.1	-3.9	-2.6	-6.3	-4.5	-3.1	-2.3

En este caso, el modelo propuesto no ha obtenido resultados tan precisos como los que se alcanzaron para el cálculo de la frecuencia en base rígida. Este hecho es fácilmente comprensible debido a que el modelo desarrollado incluye los efectos de interacción suelo-estructura de una manera mucho más simplificada que la formulación utilizada como referencia. Cabe destacar que en todos los casos, la frecuencia natural obtenida mediante el modelo propuesto es inferior al resultado de verificación; esto indica que dicha simplificación produce que la impedancia suministrada por el subsistema cimentación-suelo resulte menor de lo que debería. De todas formas, el mayor error obtenido es de 6,9 %, permitiendo conocer una aproximación fiable del resultado deseado.

Por último, se compara el factor de amortiguamiento que devuelve la Aplicación en la tabla 4.5. De forma similar a los anteriores casos, se presenta el valor obtenido por el modelo propuesto, el valor de verificación y el error relativo.

Tabla 4.5: Verificación del factor de amortiguamiento en base flexible.

Id. Aerogenerador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\xi_{propuesto}(\%)$	6.9	5.9	2.7	2.2	3.5	2.4	3.6	2.6	2.4	2.1
$\xi_{referencia}(\%)$	1.6	1.5	1.3	1.3	1.5	1.3	1.4	1.3	1.3	1.2
$error(\%)$	331	290	103	79	139	82	152	99	85	70

Este último cálculo de verificación presenta considerables errores en los resultados. Al igual que en el caso anterior, este hecho es debido a la simplificación realizada en la interacción suelo-estructura que produce grandes desviaciones. Sin embargo, a pesar de la falta de exactitud en la obtención de esta variable del sistema, no se invalida el modelo; puesto que la característica más relevante a la hora de definir el sistema es su frecuencia natural, para la que produce resultados aceptables. Además, cabe destacar que el modelo que se propone en este trabajo es una primera aproximación al desarrollo de una herramienta que permita ayudar en las primeras fases del diseño de este tipo de estructuras. Por tanto, a partir de los resultados obtenidos, se puede detectar los aspectos de la formulación que requieren de mejoras o modificaciones para poder alcanzar el grado de precisión deseado.

4.2.2. Estudio de la influencia de las características del problema

Para estudiar de qué manera afectan las características del sistema suelo-aerogenerador (geometría de los aerogeneradores y perfiles de suelo) a su caracterización dinámica, se comienza analizando cómo varía su frecuencia natural en base flexible con respecto a la frecuencia natural en base rígida. Para ello, en la tabla 4.6 se muestra el ratio entre la frecuencia natural en base flexible y en base rígida; de esta manera se permite una mejor comparación entre aerogeneradores, pues cada uno de ellos presenta unas frecuencias naturales diferente. En la tabla se incluyen los resultados relativos a los diez aerogeneradores considerados cimentados sobre los cuatro suelos citados.

Partiendo de los resultados, se pueden extraer varias conclusiones. En primer lugar y como cabía esperar, todos los valores son menores que la unidad, lo que indica que la flexibilidad producida por la interacción con el terreno vuelve el sistema menos rígido. Por otro lado, para cada parque eólico (parejas consecutivas de aerogeneradores), el aerogenerador más alto

Tabla 4.6: Relación entre la frecuencia natural en base flexible y en base rígida.

$\widehat{f}/f$		Aerogenerador									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Suelo	1	0.82	0.85	0.90	0.92	0.86	0.91	0.85	0.90	0.91	0.93
	2	0.88	0.90	0.93	0.94	0.90	0.94	0.89	0.92	0.94	0.95
	3	0.83	0.85	0.90	0.92	0.86	0.91	0.84	0.89	0.91	0.93
	4	0.77	0.80	0.88	0.90	0.83	0.89	0.81	0.87	0.89	0.91

(menos rígido) presenta una menor variación que el más bajo (más rígido) al considerarlos en base flexible. También cabe destacar que la frecuencia en base flexible de los aerogeneradores 1 y 2 varía en mayor proporción con respecto al caso en base rígida que el resto; esto se puede explicar a través de las propiedades del pilote que los cimenta, puesto que al ser más corto y de menor diámetro supone un apoyo más flexible. En cuanto a las propiedades del terreno, el suelo 2 muestra mayor rigidez en sus resultados al compararlo con el suelo 1 (menor dureza); siendo la relación de frecuencias de este último muy similar a las obtenidas para el suelo 3, con un estrato de menor dureza sobre un suelo más rígido. Por último, el suelo 4 se muestra como el más flexible de todos, ya que su dureza en los primeros metros es bastante baja.

La otra variable que se debe analizar consiste en el factor de amortiguamiento del sistema. Para ello se presenta la tabla 4.7, donde se incluye el valor obtenido para cada uno de los sistemas analizados, de forma similar a la tabla anterior.

Tabla 4.7: Factor de amortiguamiento en base flexible.

$\xi(\%)$		Aerogenerador									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Suelo	1	4.9	4.2	2.4	2.0	3.0	2.1	3.1	2.3	2.1	1.9
	2	2.6	2.3	1.9	1.7	2.3	1.7	2.4	1.8	1.7	1.6
	3	3.7	3.2	2.2	1.9	2.8	2.0	2.9	2.1	1.9	1.7
	4	6.9	5.9	2.7	2.2	3.5	2.4	3.6	2.6	2.4	2.1

Tras analizar los resultados del factor de amortiguamiento de los sistemas, se pueden apreciar las mismas tendencias que en la relación de la frecuencia natural en base flexible con respecto a base rígida. Aquellos sistemas más rígidos se encuentran menos amortiguados, mientras que los más flexibles están más amortiguados. Cabe destacar que, a pesar de que la relación de frecuencias haya resultado similar para los suelos 1 y 3, el suelo homogéneo presenta un mayor grado de amortiguamiento que el suelo de dos estratos; mientras que el perfil variable es, de los suelos considerados, el que mayor amortiguamiento induce a la estructura.

4.3. Envolventes de esfuerzos

Obtener la envolvente de esfuerzos de los aerogeneradores es el segundo bloque de cálculo de la Aplicación Informática, tal y como se detalló en la sección 3.1. Concretamente, se emplea el procedimiento descrito en la sección 2.4, que permite obtener las envolventes de flectores y cortantes a lo largo de todo el conjunto cimentación-aerogenerador frente a la excitación de un sismo registrado.

En la ejecución de esta función de la Aplicación propuesta, se considera como excitación sísmica la componente NS de El Centro 1940, siendo esta señal una de las más empleadas en los ejemplos de análisis sísmicos. Como en la sección previa, se comienza realizando la verificación del modelo desarrollado, comparando los resultados con la misma formulación integral empleada anteriormente para verificar los resultados correspondientes al proceso de caracterización dinámica. Seguidamente, se presentan los resultados obtenidos por la Aplicación desarrollada relativos a los distintos aerogeneradores cimentados en los distintos terrenos, para estudiar los efectos de las características del problema sobre las envolventes de esfuerzos.

4.3.1. Resultados de verificación

Para realizar la verificación de los resultados que proporciona el modelo propuesto, se presentan en la figura 4.2 las envolventes de esfuerzos flectores y esfuerzos cortantes del primer aerogenerador cimentado en los cuatro terrenos estudiados. En cada una de las gráficas se muestra la envolvente de esfuerzos obtenida por el modelo propuesto (línea continua de color negro) y la envolventes de esfuerzos obtenida por el modelo de verificación (línea continua de color rojo).

Comparando los resultados suministradas por ambos modelos, se aprecia que las envolventes relativas al momento flector de ambas metodologías coinciden en gran medida, tanto en los valores máximos obtenidos como en la distribución de los mismos a lo largo del conjunto cimentación-aerogenerador. Por otro lado, en cuanto a las envolventes de esfuerzos cortantes a lo largo de la torre, el modelo propuesto también reproduce fielmente los resultados del mo-

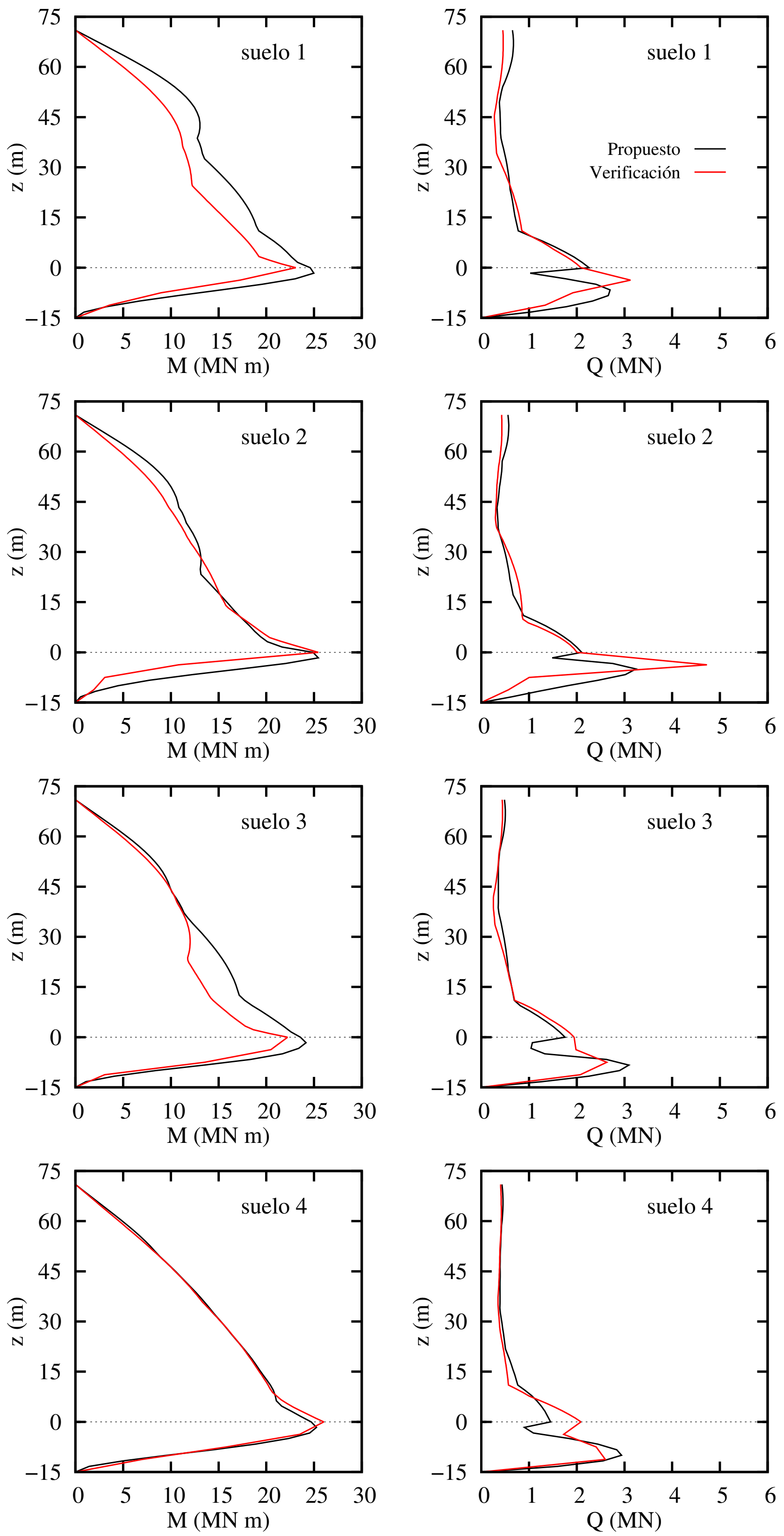

Figura 4.2: Verificación de envolventes de esfuerzos. Aerogenerador 1.

delo de verificación. Sin embargo, sí se aprecian ciertas diferencias para los valores máximos de cortante obtenidos a lo largo de la cimentación, existiendo una gran influencia del perfil de terreno considerado, y no estando siempre el resultado del modelo propuesto del lado de la seguridad.

4.3.2. Estudio de la influencia de las características del problema

En el estudio de las envolventes de esfuerzos se analiza principalmente cómo varían los resultados al considerar el sistema desacoplado (cimentación y subestructura-torre independientes) o acoplado (conjunto cimentación-subestructura-torre). Además, se matizan algunos efectos propios de la influencia del terreno. Para ello, se presentan gráficas donde se muestra la envolvente de esfuerzos del sistema acoplado (línea continua de color negro) y del sistema desacoplado (línea discontinua de color azul). Cada una de las figuras incluye la envolvente de esfuerzos de una de las variables (momento flector o cortante) para la pareja de aerogeneradores perteneciente a uno de los parques eólicos cimentada en los cuatro terrenos de estudio. Cabe destacar que, para cada aerogenerador, la envolvente de esfuerzos del aerogenerador desacoplado es independiente del terreno, presentando la misma curva en todos ellos. De igual manera, dentro de cada figura (para los aerogeneradores de un parque eólico) la envolvente de la cimentación desacoplada es igual para cada tipo de suelo, pues no se ve afectada por las dimensiones del aerogenerador. Por último, en cuanto a la comparación entre aerogeneradores, se debe tener en cuenta que cada uno de ellos posee una frecuencia natural diferente; de modo que el sismo elegido como excitación afectará de distinta manera a cada uno, impidiendo realizar una comparación directa entre ellos.

En primer lugar se analizan las envolventes de esfuerzos flectores, desde la figura 4.3 a la figura 4.7. Hay varios aspectos a destacar. En cuanto al flector en el aerogenerador desacoplado, el máximo valor aparece siempre en la base; resultando este valor del orden o mayor que el que aparece en ese mismo punto al acoplarlo a la cimentación. Por otro lado, la cimentación desacoplada presenta dos aspectos: el máximo se encuentra en cabeza; y los esfuerzos son mayores en terrenos blandos, apreciándose un incremento brusco cuando se pasa de un estrato duro a otro más blando (ver resultados del suelo 3). Cuando la cimentación se acopla al resto del sistema, el flector en cabeza se incrementa considerablemente, hallándose el valor máximo de todo el conjunto en este punto o muy próximo. También se aprecia que el flector disminuye más rápidamente con la profundidad en los terreno más duros, lo que indica una disminución de la longitud efectiva del pilote.

Por último, se estudian las envolventes de esfuerzos cortantes, desde la figura 4.8 a la figura 4.12. Al igual que ocurre con el esfuerzo flector, el máximo cortante registrado en el aerogenerador desacoplado se encuentra en la base; y a pesar de que esta característica se mantenga al acoplarlo a la cimentación, el valor correspondiente a base rígida puede verse incrementado al considerar la flexibilidad de la cimentación. En cuanto a la cimentación desacoplada, se aprecian dos características: el máximo se encuentra en los primeros metros y en terrenos más blandos aparecen mayores esfuerzos. Cuando la cimentación se acopla al aerogenerador, se incrementa considerablemente el esfuerzo cortante al que se ve sometido el monopilote. En el sistema acoplado, el máximo esfuerzo cortante no suele ser en la base del aerogenerador, sino en la cimentación; apareciendo pocos metros por debajo de la cabeza del pilote, y a una profundidad ligeramente inferior de donde se producen los máximos cortantes para el caso de la cimentación desacoplada.

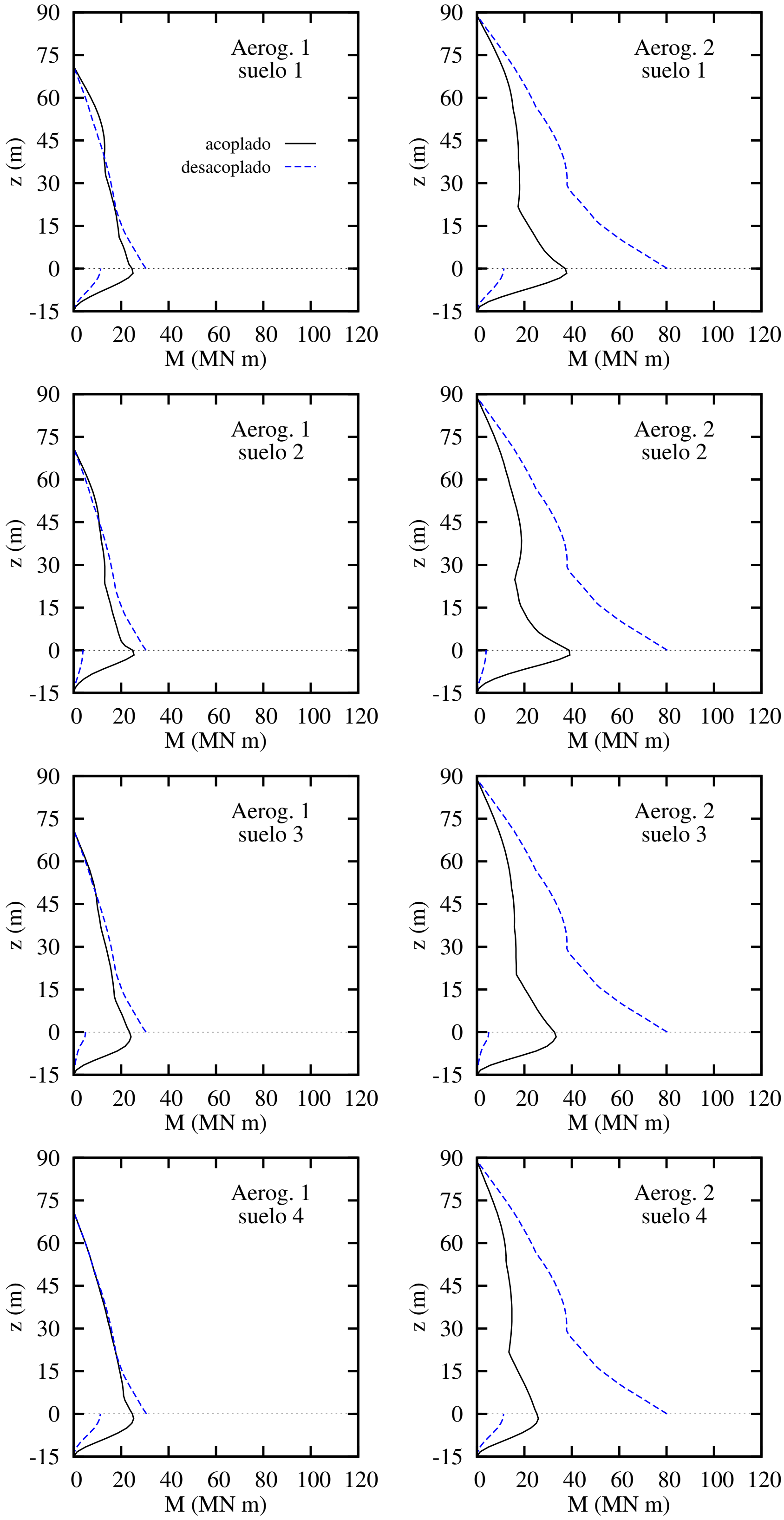

Figura 4.3: Envolventes de esfuerzos flectores. Aerogeneradores 1 y 2.

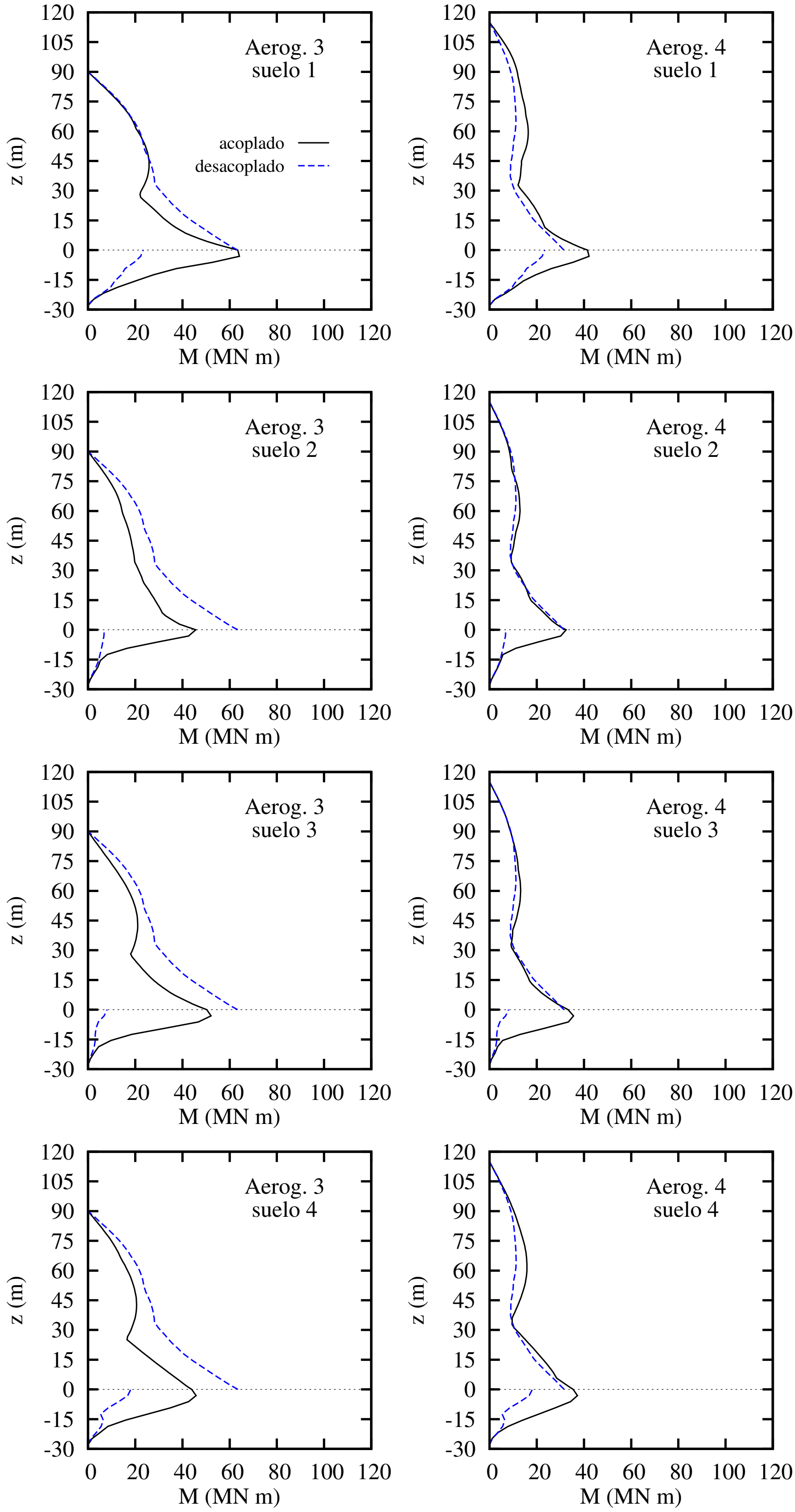

Figura 4.4: Envolventes de esfuerzos flectores. Aerogeneradores 3 y 4.

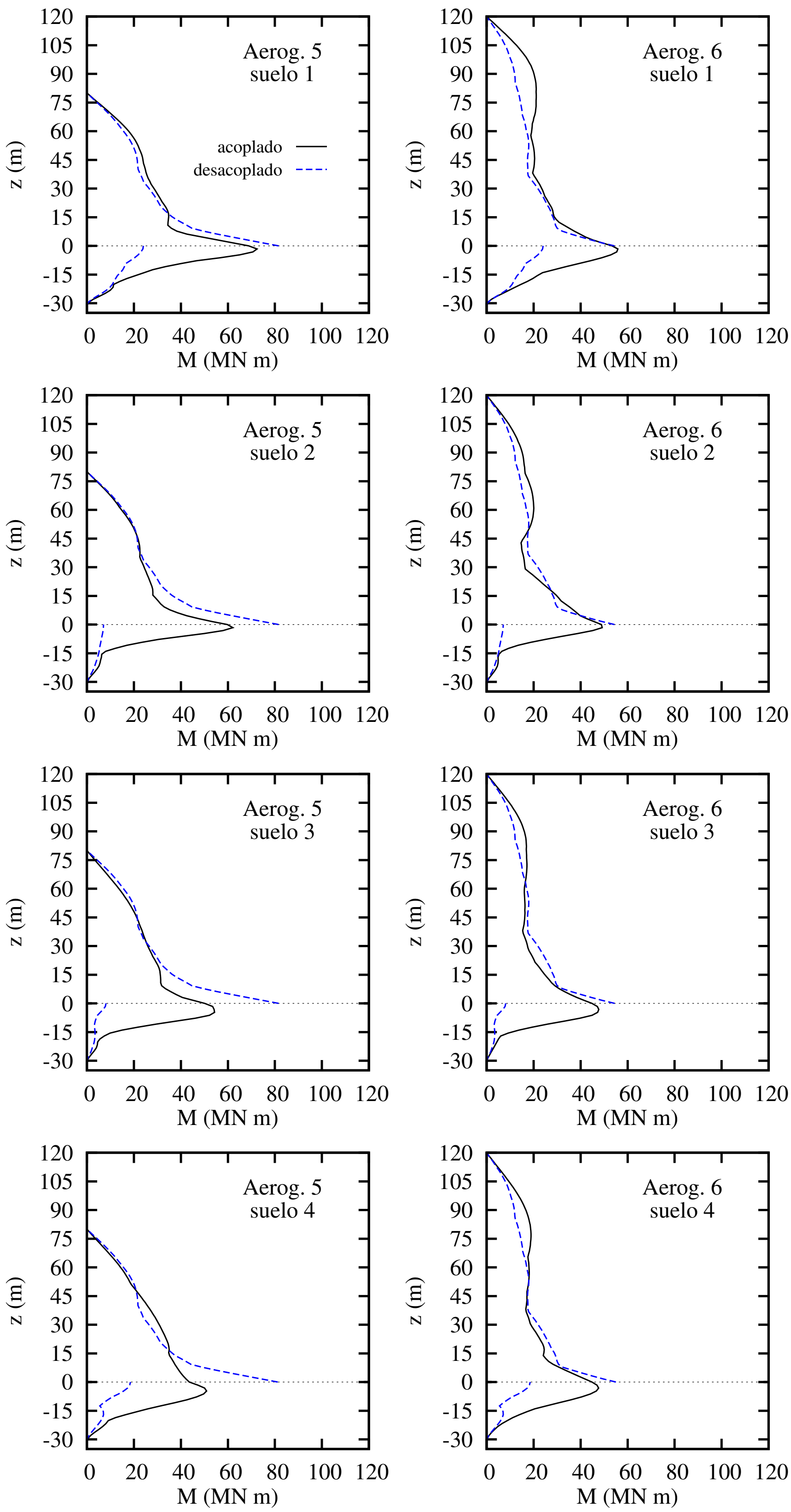

Figura 4.5: Envolventes de esfuerzos flectores. Aerogeneradores 5 y 6.

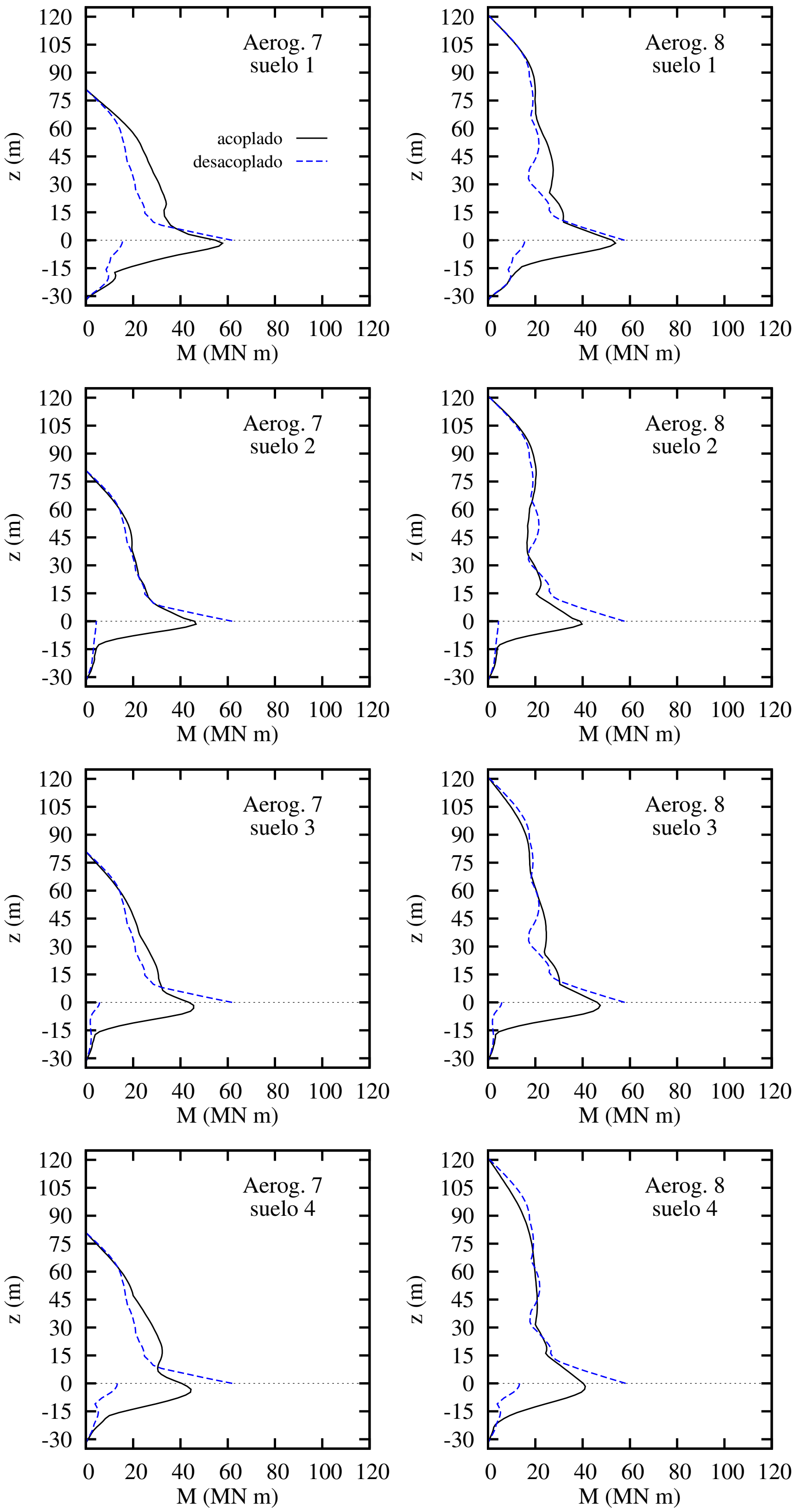

Figura 4.6: Envolventes de esfuerzos flectores. Aerogeneradores 7 y 8.

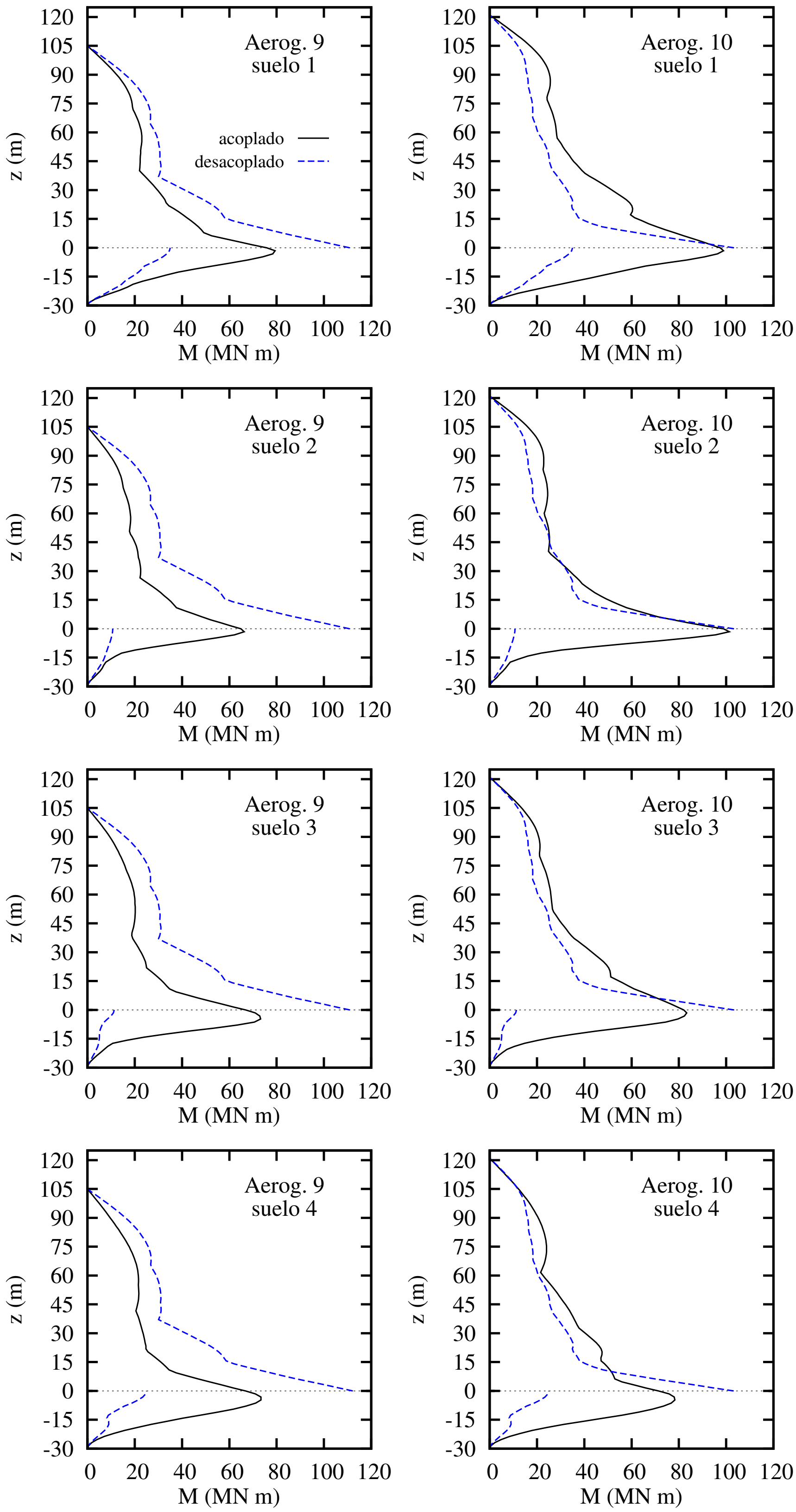

Figura 4.7: Envolventes de esfuerzos flectores. Aerogeneradores 9 y 10.

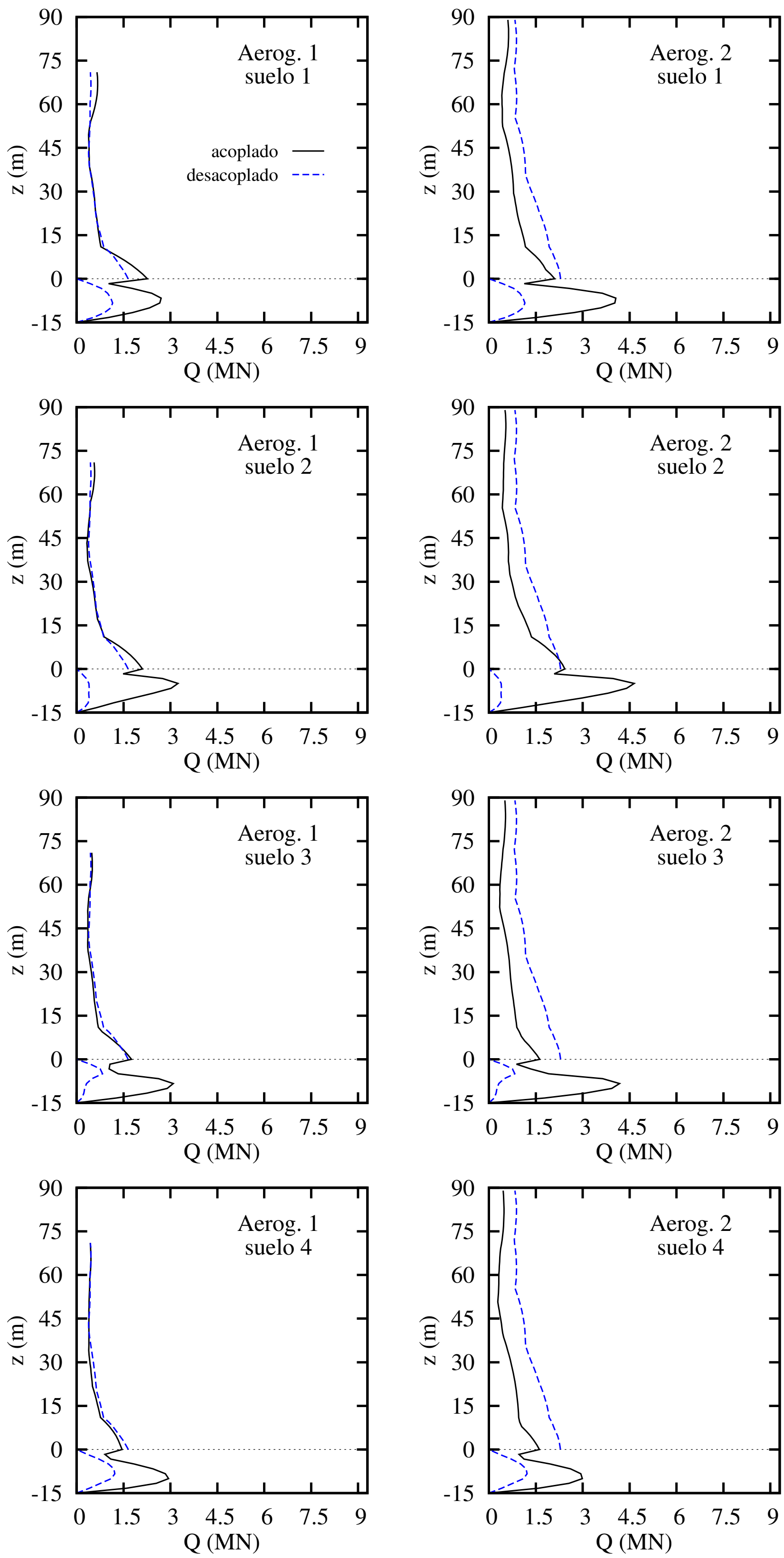

Figura 4.8: Envolventes de esfuerzos cortantes. Aerogeneradores 1 y 2.

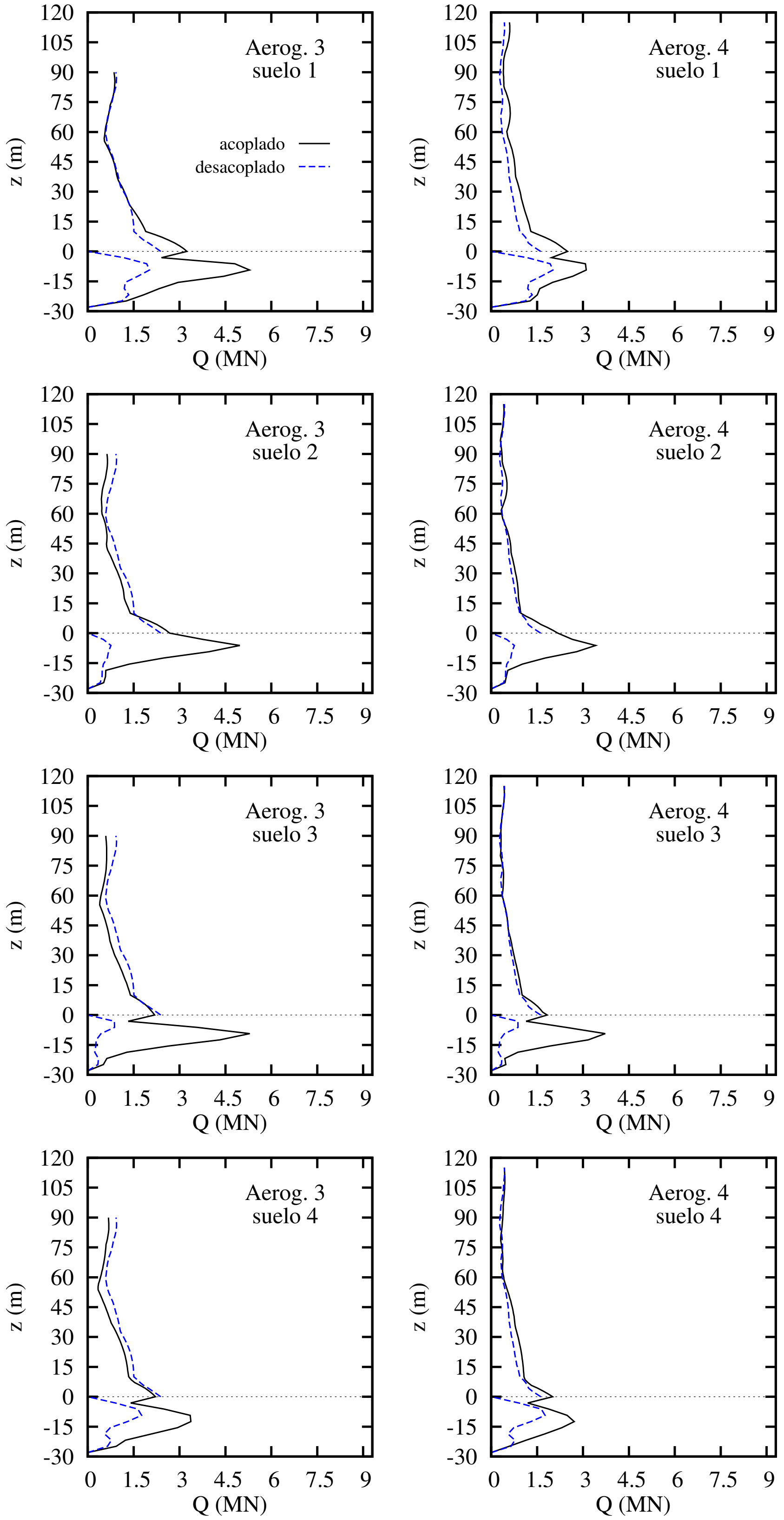

Figura 4.9: Envolventes de esfuerzos cortantes. Aerogeneradores 3 y 4.

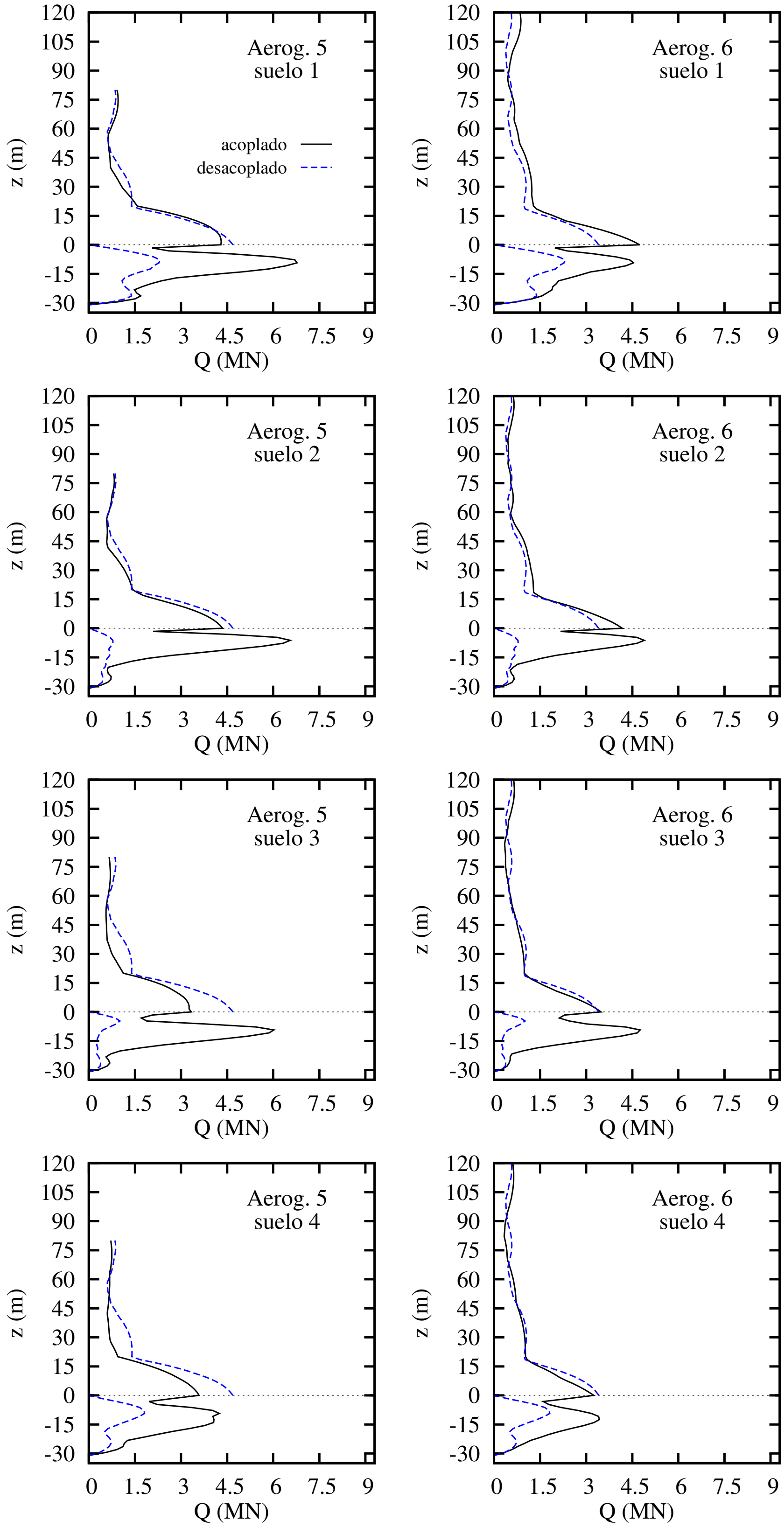

Figura 4.10: Envolventes de esfuerzos cortantes. Aerogeneradores 5 y 6.

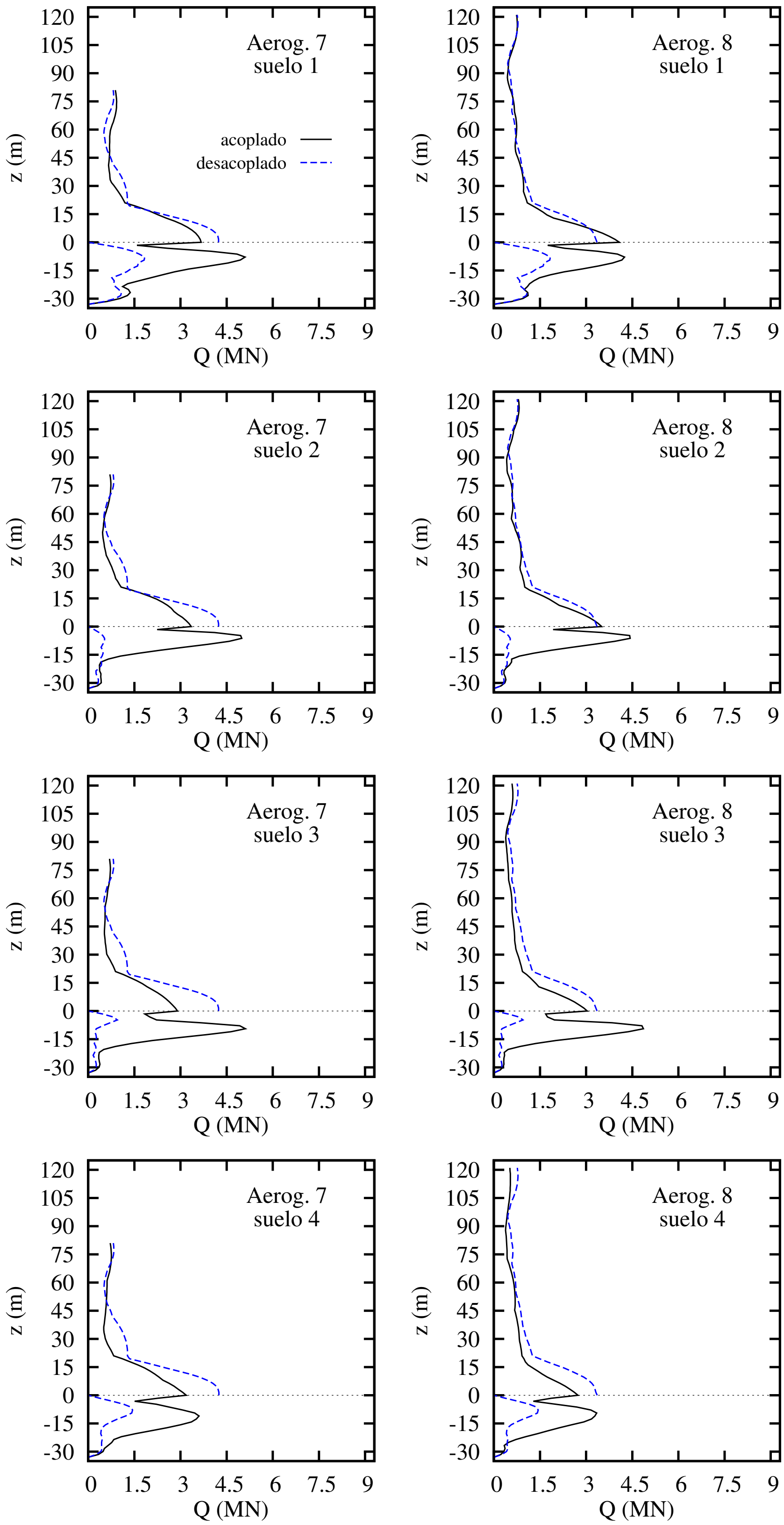

Figura 4.11: Envolventes de esfuerzos cortantes. Aerogeneradores 7 y 8.

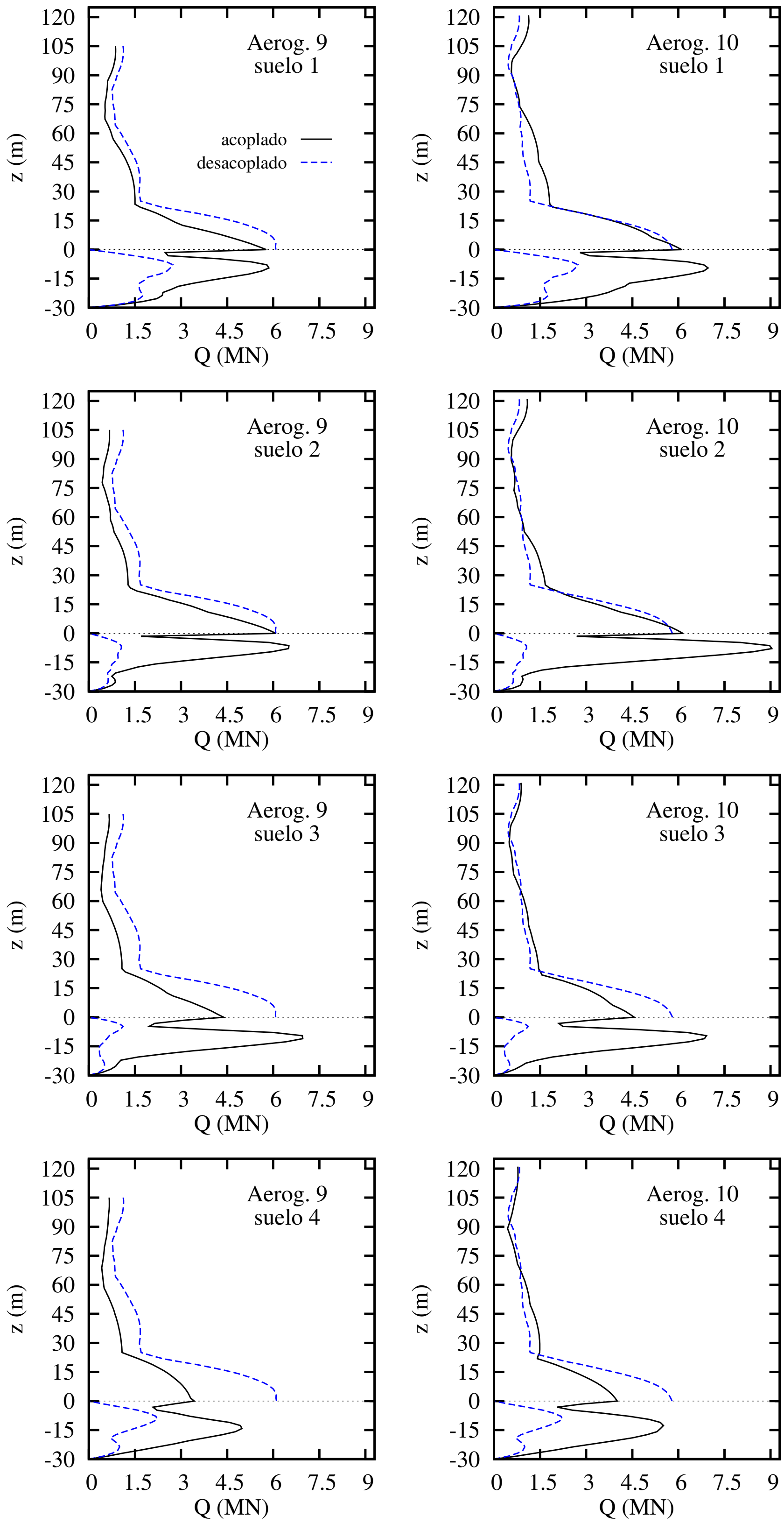

Figura 4.12: Envolventes de esfuerzos cortantes. Aerogeneradores 9 y 10.

Capítulo 5

Conclusiones y desarrollos futuros

En este capítulo se agrupan las conclusiones principales que se han podido extraer a lo largo de este trabajo. Se enfocan desde dos puntos de vista: orientado a la Aplicación y al modelo desarrollados, desde un punto de vista puramente teórico y formal; y a los resultados que se extraen de su aplicación sobre los aerogeneradores y suelo considerados, evaluando su validez y campo de aplicación. Además, se comenta una posible línea de desarrollo futuro que busca mejorar las características propias del modelo y su precisión y fiabilidad para su aplicación en las primeras fases del diseño de estructuras para aerogeneradores.

5.1. Evaluación del modelo

- En cuanto a la caracterización del sistema, se deben destacar dos particularidades del modelo propuesto. En primer lugar, se ha implementado la solución analítica de una viga de sección variable para definir la variabilidad de la geometría propia de la torre de los aerogeneradores. Esta característica se podría suplir mediante la discretización del sistema, empleando un número suficiente de elementos de sección constante. Sin embargo, el inconveniente de esta opción es que requiere el estudio del número adecuado de elementos para discretizar la sección variable, ya que el uso de pocos elementos incrementa el error en el resultado; mientras que una gran cantidad de elementos aumenta el coste computacional. Por tanto, la solución empleada en este trabajo, si bien complica la formulación, permite el tratamiento del tramo de sección variable como un único elemento de forma rigurosa.
- El segundo aspecto a mencionar es la aplicación del Modelo Winkler para definir la interacción suelo-estructura. A pesar de que supone una drástica simplificación de las

propiedades del suelo, también permite reducir enormemente el coste computacional en relación a otras metodologías más sofisticadas basadas, por ejemplo, en modelos de medio continuo. No obstante, el Modelo Winkler considerado presenta una serie de limitaciones que deberán analizarse en mayor profundidad en versiones posteriores de la Aplicación.

- Por otro lado, se ha modificado el procedimiento habitual para obtener la frecuencia natural, que consiste en excitar el sistema a diversas frecuencia y hallar aquella que produce máxima respuesta simplemente por exploración. La metodología de cálculo aquí propuesta permite obtener dicha variable a partir de su formulación analítica y de la resolución del problema de autovalores asociado. Dado que no se aplica ninguna excitación, no pueden aparecer incertidumbres propias a la forma en la que ésta se defina o relativas al proceso de búsqueda de la respuesta máxima (muestreo de frecuencias, máximos no bien definidos, etc.).

- Por último, en el cálculo de las envolventes, se ha empleado el proceso de subestructuración de forma inversa. Generalmente, se suele reducir la cimentación a una impedancia que se acopla al sistema, tal y como se aplicó en el cálculo del modo propio de vibración. En cambio, en este proceso se optó por obtener la impedancia de la torre y su subestructura, con el fin de introducirlo como condición de contorno a la cimentación. Este aspecto no supone ningún cambio en el modelo ya existente, sino una variante del mismo.

5.2. Evaluación de los resultados

- Tras el análisis de los resultados de la frecuencia natural en base rígida obtenidos, se concluye que el modelo reproduce fielmente las expectativas. Este cálculo verifica simultáneamente la modelización de la torres mediante la solución de la viga de sección variable y el procedimiento empleado para hallar la frecuencia natural frente a un procedimiento más común basado en elementos finitos.

- Por otro lado, los resultados relativos a la frecuencia natural en base flexible presentan errores apreciables. Además, el factor de amortiguamiento obtenido difiere enormemente de los casos de verificación. Este hecho, unido al anterior, define como foco del problema la interacción suelo-estructura; de modo que la simplificación aplicada produce resultados orientativos, pero no definitivos.

- En cuanto a las envolventes de esfuerzos del sistema cimentación-subestructura-torre, se destacan varios aspectos. El esfuerzo flector a lo largo de la estructura se alivia, mientras que en la cimentación se incrementa sensiblemente cuando se compara la respuesta del sistema acoplado frente al desacoplado. Además, el flector máximo suele producirse en la cabeza del pilote (a cota del suelo). Analizando las envolventes de esfuerzos cortantes, su valor en la estructura puede tanto aumentar como disminuir al considerar la flexibilidad de la cimentación; mientras que los esfuerzos cortantes de la cimentación aumentan al añadir los efectos inerciales del aerogenerador. En este caso, el valor máximo del conjunto (sistema acoplado) suele producirse en el monopilote, a pocos metros por debajo de la superficie del suelo.

- Finalmente, el estudio realizado de las propiedades del problema revela la gran influencia que presentan las propiedades del terreno. Incluso, destaca la necesidad de considerar el carácter variable de sus propiedades para obtener resultados precisos, tanto en términos de frecuencias naturales como en las envolventes de esfuerzos máximos del conjunto.

5.3. Desarrollos futuros

- Para procedimientos futuros, se presenta una línea de desarrollo que pretende mejorar los errores detectados en el Modelo Winkler. Esta vía consiste en la introducción del Modelo Pasternak que, al igual que el modelo empleado, sustituye el terreno por resortes con una rigidez determinada. La novedad que implementa es que considera que el pilote se apoya sobre una viga de cortante pura que es la que interacciona directamente con el suelo. De esta manera, se consigue introducir una rigidez relacionada con la deformación trasversal del terreno. Se espera que este modelo mejore los resultados obtenidos (principalmente los de caracterización dinámica), ya que se puede plantear incluso la optimización de sus parámetros para ajustar los resultados de dicho modelo simplificado con los correspondientes a modelos más elaborados de medio continuo.

- Para concluir, se propone implementar en el modelo las excitaciones asociadas al oleaje y al viento. También se busca mejorar las prestaciones del pre-procesador y post-procesador para otorgar de una mayor sencillez y flexibilidad a la interacción del usuario con la Aplicación Informática, por ejemplo, mediante el desarrollo de una interfaz que permita una definición del problema y lectura de los resultados más intuitiva y amigable.

Bibliografía

[1] G. M. Álamo, J. J. Aznárez, L. A. Padrón, A. E. Martínez-Castro, R. Gallego, and O. Maeso. Dynamic response of real offshore wind turbines on monopiles in stratified seabed. In *VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, pages 4361–4376, 2016.

[2] G. M. Álamo, A. E. Martínez-Castro, L. A. Padrón, J. J. Aznárez, R. Gallego, and O. Maeso. Efficient numerical model for the computation of impedance functions of inclined pile groups in layered soils. *Engineering Structures*, 126:379–390, 2016.

[3] A. K. Chopra. *Dynamic of structures. Theory and applications to earthquake engineering.* NJ: Prentice-Hall, 2001.

[4] EWEA. *The European offshore wind industry - key trends and statistics 2016. Report.* European Wind Energy Association, 2017.

[5] HSE, A. J. Bond, D. W. Hight, and R. J. Jardine. *Design of Piles in Sand in the UK Sector of the North Sea - Report OTH 94 457.* Health and Safety Executive, London (UK), 1997.

[6] M. Kavvadas and G. Gazetas. Kinematic seismic response and bending of free-head piles in layered soil. *Geotechnique*, 43(2):207–222, 1993.

[7] V. D. Kupradze, T. G. Gegelia, M. O. Basheleishvili, and T. V. Burchuladze. *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermo-elasticity.* North Holland, Amsterdam, 1979.

[8] D. Lombardi. *Dynamics of Offshore Wind Turbines.* MSc Thesis, University of Bristol, 2010.

[9] G. Mylonakis and G. Gazetas. Lateral vibration and internal forces of grouped piles in layered soil. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 125(1):16–25, 1999.

[10] M. Novak, T. Nogami, and F. Aboul-Ella. Dynamic soil reaction for plane-strain case. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 104(4):953–959, 1978.

[11] Y. Ohta and N. Goto. Empirical shear wave velocity equations in terms of characteristic soil indexes. *Earthquake Enginering & Structural Dynamics*, 6(2):167–187, 1978.

[12] E. Rovithis, G. Mylonakis, and K. Pitilakis. Dynamic stiffness and kinematic response of single piles in inhomogeneous soil. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 11:1949–1972, 2013.

[13] M. H. Taha and S. Abohadima. Mathematical model for vibrations of non-uniform flexural beams. *Engineering Mechanics*, 15:3–11, 2008.

Apéndice A

Estructura del fichero de datos de entrada

```
----------------------------------------
Frecuencias: Si
Envolventes: Si
Sismo: elcentro.txt
Paso(s): 0.02
----------------------------------------
Gondola:

Masa(kg)= 80000
Inercia_rotacional(kg*m2)= 0
----------------------------------------
Torre:

Diametro_base(m)= 4.2
Diametro_cima(m)= 2.3
delta= 0.98
Altura(m)= 60
E(N/m2)= 21e10
xi= 0.01
rho(kg/m3)= 7850
Numero_de_puntos= 40
```

```
----------------------------------------
Subestructura:

Activar: Si
Diametro_base(m)= 3.5
Diametro_cima(m)= 3.5
delta= 0.974
Altura(m)= 11
E(N/m2)= 21e10
xi= 0.01
rho(kg/m3)= 7850
rho_agua(kg/m3)= 1000
Numero_de_puntos= 8
----------------------------------------
Pilote:

Diametro(m)= 3.5
delta= 0.974
Profundidad(m)= 15
E(N/m2)= 21e10
xi= 0.02
rho(kg/m3)= 7850
Numero_de_puntos= 10
----------------------------------------
Suelo:

Numero_de_estratos: 1

Estrato 1
E(N/m2)= 157464000
xi= 0.05
nu= 0.35
rho(kg/m3)= 1800
Profundidad(m)= 100
```

Apéndice B

Código de las funciones de la Aplicación Informática

B.1. Leer_datos.m

```
function [gondola,torre,subestructura,pile,suelo] = Leer_datos(nomfich)
% Lee los datos del fichero. Correspondiente al Winkler-Timoshenko
f=fopen(nomfich,'r');

% frecuencias y/o envolventes
torre.frecuencia=fscanf(f,'%s',2);
torre.frecuencia=fscanf(f,'%s',1);
torre.envolventes=fscanf(f,'%s',1);
torre.envolventes=fscanf(f,'%s',1);
a=fscanf(f,'%s',1);
a=fscanf(f,'%s',1);
suelo.paso=fscanf(f,'%s',1);
suelo.paso=fscanf(f,'%f',1);

% datos gondola
gondola.M=fscanf(f,'%s',3);
gondola.M=fscanf(f,'%f',1);
gondola.J=fscanf(f,'%s',1);
gondola.J=fscanf(f,'%f',1);
```

```
% datos torre
torre.d_ext=fscanf(f,'%s',3);
torre.d_ext=fscanf(f,'%f',1);
torre.alpha=fscanf(f,'%s',1);
torre.alpha=fscanf(f,'%f',1);
torre.delta=fscanf(f,'%s',1);
torre.delta=fscanf(f,'%f',1);
torre.L=fscanf(f,'%s',1);
torre.L=fscanf(f,'%f',1);
torre.E=fscanf(f,'%s',1);
torre.E=fscanf(f,'%f',1);
torre.xi=fscanf(f,'%s',1);
torre.xi=fscanf(f,'%f',1);
torre.rho=fscanf(f,'%s',1);
torre.rho=fscanf(f,'%f',1);
torre.np=fscanf(f,'%s',1);
torre.np=fscanf(f,'%d',1);
torre.d_int=torre.d_ext*torre.delta;
torre.alpha=1-(torre.alpha/torre.d_ext);
torre.E=torre.E*(1+2*torre.xi*1i);
torre.A=pi*(torre.d_ext^2-torre.d_int^2)/4;
torre.I=pi*(torre.d_ext^4-torre.d_int^4)/64;
torre.r=(torre.I/torre.A)^(1/2);
torre.m=torre.A*torre.rho;
torre.EI=torre.E*torre.I;


% datos subestructura
subestructura.marcador=fscanf(f,'%s',3);
subestructura.marcador=fscanf(f,'%s',1);
subestructura.d_ext=fscanf(f,'%s',1);
subestructura.d_ext=fscanf(f,'%f',1);
```

```
subestructura.alpha=fscanf(f,'%s',1);
subestructura.alpha=fscanf(f,'%f',1);
subestructura.delta=fscanf(f,'%s',1);
subestructura.delta=fscanf(f,'%f',1);
subestructura.L=fscanf(f,'%s',1);
subestructura.L=fscanf(f,'%f',1);
subestructura.E=fscanf(f,'%s',1);
subestructura.E=fscanf(f,'%f',1);
subestructura.xi=fscanf(f,'%s',1);
subestructura.xi=fscanf(f,'%f',1);
subestructura.rho=fscanf(f,'%s',1);
subestructura.rho=fscanf(f,'%f',1);
subestructura.rho_agua=fscanf(f,'%s',1);
subestructura.rho_agua=fscanf(f,'%f',1);
subestructura.np=fscanf(f,'%s',1);
subestructura.np=fscanf(f,'%d',1);
subestructura.d_int=subestructura.d_ext*subestructura.delta;
subestructura.alpha=1-(subestructura.alpha/subestructura.d_ext);
subestructura.E=subestructura.E*(1+2*subestructura.xi*1i);
subestructura.A=pi*(subestructura.d_ext^2-subestructura.d_int^2)/4;
subestructura.I=pi*(subestructura.d_ext^4-subestructura.d_int^4)/64;
subestructura.r=(subestructura.I/subestructura.A)^(1/2);
cm=1;
subestructura.m=subestructura.A*(subestructura.rho+...
    subestructura.rho_agua*((subestructura.delta^2+cm)/...
    (1-subestructura.delta^2)));
subestructura.r=subestructura.r*(subestructura.A*subestructura.rho/...
    subestructura.m)^(1/2);
subestructura.EI=subestructura.E*subestructura.I;


% datos pilote
pile.d_ext=fscanf(f,'%s',3);
pile.d_ext=fscanf(f,'%f',1);
```

```
pile.delta=fscanf(f,'%s',1);
pile.delta=fscanf(f,'%f',1);
pile.d_int=pile.d_ext*pile.delta;
pile.L=fscanf(f,'%s',1);
pile.L=fscanf(f,'%f',1);
pile.E=fscanf(f,'%s',1);
pile.E=fscanf(f,'%f',1);
pile.xi=fscanf(f,'%s',1);
pile.xi=fscanf(f,'%f',1);
pile.rho=fscanf(f,'%s',1);
pile.rho=fscanf(f,'%f',1);
pile.np=fscanf(f,'%s',1);
pile.np=fscanf(f,'%d',1);


% datos suelo
if max(strcmp(torre.envolventes,{'si' 'si' 'Si' 'Si' 'SI' 'Si' 'si' ...
        'sI'}))>0.5
    a=load(a);
    a=a.';
    b=round(log(length(a)*1.2)/log(2));
    a(2^b)=0;
    suelo.sismo=a;
end
suelo.nes=fscanf(f,'%s',3);
suelo.nes=fscanf(f,'%d',1);
suelo.h=0;
suelo.H=0;
ht = 0;
for n=1:suelo.nes
        if ht<pile.L;
        a=fscanf(f,'%s',3);
        suelo.E(n)=fscanf(f,'%f',1);
        a=fscanf(f,'%s',1);
```

```
        suelo.xi(n)=fscanf(f,'%f',1);
        a=fscanf(f,'%s',1);
        suelo.nu(n)=fscanf(f,'%f',1);
        a=fscanf(f,'%s',1);
        suelo.rho(n)=fscanf(f,'%f',1);
        a=fscanf(f,'%s',1);
        suelo.h(n)=fscanf(f,'%f',1);
        if ht+suelo.h(n)>pile.L
            suelo.h(n)=pile.L-ht;
        end
        ht=ht+suelo.h(n);
        suelo.H(n)=ht;
        suelo.E(n)=suelo.E(n)*(1+2*suelo.xi(n)*1i);
        suelo.G(n)=suelo.E(n)/(2*(1+suelo.nu(n)));
        suelo.lame(n)=suelo.nu(n)*suelo.E(n)/(1+suelo.nu(n))/(1-2*...
            suelo.nu(n));
        suelo.cs(n)=sqrt(suelo.G(n)/suelo.rho(n));
        if max(strcmp(torre.envolventes,{'si' 'si' 'Si' 'Si' 'SI' 'Si'...
                'si' 'sI'}))>0.5
            suelo.sismo(n)=suelo.sismo(1);
        end
    end
end
suelo.nes = length(suelo.h);
pile.N=sum(suelo.H<pile.L)+1;
suelo.CI=0;

% datos pile
pile.marcador='pile';
pile.E=pile.E*(1+2*pile.xi*1i);
pile.A=pi*(pile.d_ext^2-pile.d_int^2)/4;
pile.I=pi*(pile.d_ext^4-pile.d_int^4)/64;
pile.r=(pile.I/pile.A)^(1/2);
pile.z=[0:1:pile.np-1]*pile.L/(pile.np-1);
```

```
pile.d=pile.d_ext;



% Cierra fichero
fclose(f);
n=1;
end
```

B.2. calculo_aero.m

```
function  resul = calculo_aero(gondola,torre,subestructura,pile,suelo)
pile.marcador='pile';
n=1;
% m: masa por unidad de longitud
% r: radio de giro de la seccion
% n: numero de frecuncias naturales
% M: masa en el extremo libre
% J: inercia en el extremo libre
% K: matriz de rigidez de la base: desplazamiento y giro (2x2)

if max(strcmp(torre.frecuencia,{'si' 'si' 'Si' 'Si' 'SI' 'Si' 'si' ...
        'sI'}))>0.5
    anulado=subestructura;
    anulado.marcador='No';
    [resul.w_aero,d,u,g,Q,M]= Viga_base_rigida(gondola,torre,anulado,n);

    resul.w_rigido=resul.w_aero;
    if max(strcmp(subestructura.marcador,{'si' 'si' 'Si' 'Si' 'SI' 'Si'...
            'si' 'sI'}))>0.5
        [resul.w_rigido,d,u,g,Q,M]= Viga_base_rigida(gondola,torre,...
            subestructura,n);
    end

    syms A B C D a b c d x z
    syms K_11 K_12 K_21 K_22
    [d,u,g,Q,M,P] = matriz_d(gondola,torre,subestructura,[K_11 K_12;...
        K_21 K_22],0,0,[0;0]);
    resul.w=valores_propios(d,n,resul.w_rigido,pile,suelo);
    resul.w_natural=abs(resul.w);
    resul.xi=imag(resul.w)./resul.w_natural;
    clear A B C D a b c d x z
end
```

```
if max(strcmp(torre.envolventes,{'si' 'si' 'Si' 'Si' 'SI' 'Si' 'si'...
        'sI'}))>0.5
    [d,u,g,Q,M] = matriz_d_rigida(gondola,torre,subestructura);
    syms x z
    suelo.CI=1;
    sismo.t=suelo.sismo;
    paso=suelo.paso;
    N=length(sismo.t);
    if rem(N,2)==0
        sismo.t(N+1)=sismo.t(N);
        N=N+1;
    end
    sismo.w=fft(sismo.t)*2/N;
    sismo.w=sismo.w(1:floor(N/2)+1);
    w=[0:floor(N/2)]/floor(N/2)*(pi/paso);
    w(1)=10^-5*paso;
    sismo.w=sismo.w./(-w.^2);
    sismo.w(1)=0;



    torre.z=[0:1/(torre.np-1):1]*torre.L;
    subestructura.z=[0:1/(subestructura.np-1):1]*subestructura.L;
    pile.z=[0:1/(pile.np-1):1]*pile.L;

    torre.Qu=zeros(torre.np,length(w));
    torre.Qg=torre.Qu;
    torre.Mu=torre.Qu;
    torre.Mg=torre.Qu;
    resul.Q.torre=torre.Qu;
    resul.Qs.torre=torre.Qu;
    resul.M.torre=torre.Qu;
    resul.Ms.torre=torre.Qu;
    if max(strcmp(subestructura.marcador,{'si' 'si' 'Si' 'Si' 'SI' 'Si'...
            'si' 'sI'}))>0.5
```

```
    subestructura.Qu=zeros(subestructura.np,length(w));
    subestructura.Qg=subestructura.Qu;
    subestructura.Mu=subestructura.Qu;
    subestructura.Mg=subestructura.Qu;
    resul.Q.subestructura=subestructura.Qu;
    resul.Qs.subestructura=subestructura.Qu;
    resul.M.subestructura=subestructura.Qu;
    resul.Ms.subestructura=subestructura.Qu;
end
pile.Q=zeros(pile.np,length(w));
pile.M=pile.Q;
pile.u=zeros(1,length(w));
pile.g=pile.u;
resul.Q.pile=pile.Q;
resul.Qs.pile=pile.Q;
resul.M.pile=pile.Q;
resul.Ms.pile=pile.Q;



num_tramos=1;
if max(strcmp(subestructura.marcador,{'si' 'si' 'Si' 'Si' 'SI' 'Si'...
        'si' 'sI'}))>0.5
    num_tramos=2;
end

for s=2:length(w)
    c=(double(subs(d,x,w(s))));
    %Se escala la matriz para calclar la inversa
    b_d=zeros(length(c),length(c));
    b_i=b_d;
    for k=1:length(c)
        b_d(k,k)=1/max(abs(c(:,k)));
    end
    c=c*b_d;
```

```
for k=1:length(c)
    b_i(k,k)=1/max(abs(c(k,:)));
end
c=b_i*c;
c=inv(c);
c=b_d*c*b_i;
%--------------------------------------------
a.u=c(:,1);
a.g=c(:,2);
b.Qgtorre=(subs(Q(2,:),x,w(s)));
b.Qutorre=b.Qgtorre*a.u((num_tramos-1)*4+1:(num_tramos-1)*4+4,1);
b.Qgtorre=b.Qgtorre*a.g((num_tramos-1)*4+1:(num_tramos-1)*4+4,1);
b.Mgtorre=(subs(M(2,:),x,w(s)));
b.Mutorre=b.Mgtorre*a.u((num_tramos-1)*4+1:(num_tramos-1)*4+4,1);
b.Mgtorre=b.Mgtorre*a.g((num_tramos-1)*4+1:(num_tramos-1)*4+4,1);
for k=1:torre.np
    torre.Qu(k,s)=double(subs(b.Qutorre,z,torre.z(k)));
    torre.Qg(k,s)=double(subs(b.Qgtorre,z,torre.z(k)));
    torre.Mu(k,s)=double(subs(b.Mutorre,z,torre.z(k)));
    torre.Mg(k,s)=double(subs(b.Mgtorre,z,torre.z(k)));
end
if num_tramos>1.5
    b.Qgsubestructura=(subs(Q(1,:),x,w(s)));
    b.Qusubestructura=b.Qgsubestructura*a.u(1:4,1);
    b.Qgsubestructura=b.Qgsubestructura*a.g(1:4,1);
    b.Mgsubestructura=(subs(M(1,:),x,w(s)));
    b.Musubestructura=b.Mgsubestructura*a.u(1:4,1);
    b.Mgsubestructura=b.Mgsubestructura*a.g(1:4,1);
    for k=1:subestructura.np
        subestructura.Qu(k,s)=double(subs(b.Qusubestructura,z,...
            subestructura.z(k)));
        subestructura.Qg(k,s)=double(subs(b.Qgsubestructura,z,...
            subestructura.z(k)));
        subestructura.Mu(k,s)=double(subs(b.Musubestructura,z,...
```

```
                subestructura.z(k)));
            subestructura.Mg(k,s)=double(subs(b.Mgsubestructura,z,...
                subestructura.z(k)));
        end
    end
    cc = {'Q(0)','0';'g(0)','0';'M(1)','0';'Q(1)','0'};
    [respil,resci]=calcula_winkler(pile,suelo,w(s),cc);
    resul.Qs.pile(:,s)=respil.Q.';
    resul.Ms.pile(:,s)=respil.M.';
    cc1=['-Q(0)+(' num2str(torre.Qu(1,s),15) ')*u(0)-(' ...
        num2str(torre.Qg(1,s),15) ')*g(0)'];
    cc2=['-M(0)-(' num2str(-torre.Mu(1,s),15) ')*u(0)+(' ...
        num2str(-torre.Mg(1,s),15) ')*g(0)'];
    if num_tramos>1.5
        cc1=['-Q(0)+(' num2str(subestructura.Qu(1,s),15) ')*u(0)-(' ...
            num2str(subestructura.Qg(1,s),15) ')*g(0)'];
        cc2=['-M(0)-(' num2str(-subestructura.Mu(1,s),15) ')*u(0)+(' ...
            num2str(-subestructura.Mg(1,s),15) ')*g(0)'];
    end
    cc(1,1)={cc1};
    cc(2,1)={cc2};
    [respil,resci]=calcula_winkler(pile,suelo,w(s),cc);
    resul.Q.pile(:,s)=respil.Q.';
    resul.M.pile(:,s)=respil.M.';
    pile.u(s)=respil.u(1);
    pile.g(s)=respil.g(1);
end

for k=1:torre.np
    resul.Q.torre(k,:)=(torre.Qu(k,:).*(-pile.u)+torre.Qg(k,:).*...
        pile.g).*sismo.w;
    resul.Qs.torre(k,:)=torre.Qu(k,:).*sismo.w;
    resul.M.torre(k,:)=(torre.Mu(k,:).*(-pile.u)+torre.Mg(k,:).*...
        pile.g).*sismo.w;
```

```
        resul.Ms.torre(k,:)=torre.Mu(k,:).*sismo.w;
    end
    if num_tramos>1.5
        for k=1:subestructura.np
            resul.Q.subestructura(k,:)=(subestructura.Qu(k,:).*(-pile.u)+...
                subestructura.Qg(k,:).*pile.g).*sismo.w;
            resul.Qs.subestructura(k,:)=subestructura.Qu(k,:).*sismo.w;
            resul.M.subestructura(k,:)=(subestructura.Mu(k,:).*(-pile.u)+...
                subestructura.Mg(k,:).*pile.g).*sismo.w;
            resul.Ms.subestructura(k,:)=subestructura.Mu(k,:).*sismo.w;
        end
    end
    for k=1:pile.np
        resul.Q.pile(k,:)=resul.Q.pile(k,:).*sismo.w;
        resul.Qs.pile(k,:)=resul.Qs.pile(k,:).*sismo.w;
        resul.M.pile(k,:)=resul.M.pile(k,:).*sismo.w;
        resul.Ms.pile(k,:)=resul.Ms.pile(k,:).*sismo.w;
    end



    for s=1:floor(N/2)
        resul.Q.torre(:,floor(N/2)+1+s)=...
            conj(resul.Q.torre(:,floor(N/2)+2-s));
        resul.Qs.torre(:,floor(N/2)+1+s)=...
            conj(resul.Qs.torre(:,floor(N/2)+2-s));
        resul.M.torre(:,floor(N/2)+1+s)=...
            conj(resul.M.torre(:,floor(N/2)+2-s));
        resul.Ms.torre(:,floor(N/2)+1+s)=...
            conj(resul.Ms.torre(:,floor(N/2)+2-s));
        if num_tramos>1.5
            resul.Q.subestructura(:,floor(N/2)+1+s)=...
                conj(resul.Q.subestructura(:,floor(N/2)+2-s));
            resul.Qs.subestructura(:,floor(N/2)+1+s)=...
                conj(resul.Qs.subestructura(:,floor(N/2)+2-s));
```

```
        resul.M.subestructura(:,floor(N/2)+1+s)=...
            conj(resul.M.subestructura(:,floor(N/2)+2-s));
        resul.Ms.subestructura(:,floor(N/2)+1+s)=...
            conj(resul.Ms.subestructura(:,floor(N/2)+2-s));
    end
    resul.Q.pile(:,floor(N/2)+1+s)=...
        conj(resul.Q.pile(:,floor(N/2)+2-s));
    resul.Qs.pile(:,floor(N/2)+1+s)=...
        conj(resul.Qs.pile(:,floor(N/2)+2-s));
    resul.M.pile(:,floor(N/2)+1+s)=...
        conj(resul.M.pile(:,floor(N/2)+2-s));
    resul.Ms.pile(:,floor(N/2)+1+s)=...
        conj(resul.Ms.pile(:,floor(N/2)+2-s));
end



for k=1:torre.np
    resul.Q.torre(k,:)=real(ifft(resul.Q.torre(k,:)*N/2));
    resul.Qs.torre(k,:)=real(ifft(resul.Qs.torre(k,:)*N/2));
    resul.M.torre(k,:)=real(ifft(resul.M.torre(k,:)*N/2));
    resul.Ms.torre(k,:)=real(ifft(resul.Ms.torre(k,:)*N/2));
end
if num_tramos>1.5
    for k=1:subestructura.np
        resul.Q.subestructura(k,:)=...
            real(ifft(resul.Q.subestructura(k,:)*N/2));
        resul.Qs.subestructura(k,:)=...
            real(ifft(resul.Qs.subestructura(k,:)*N/2));
        resul.M.subestructura(k,:)=...
            real(ifft(resul.M.subestructura(k,:)*N/2));
        resul.Ms.subestructura(k,:)=...
            real(ifft(resul.Ms.subestructura(k,:)*N/2));
    end
end
```

```
    for k=1:pile.np
        resul.Q.pile(k,:)=real(ifft(resul.Q.pile(k,:)*N/2));
        resul.Qs.pile(k,:)=real(ifft(resul.Qs.pile(k,:)*N/2));
        resul.M.pile(k,:)=real(ifft(resul.M.pile(k,:)*N/2));
        resul.Ms.pile(k,:)=real(ifft(resul.Ms.pile(k,:)*N/2));
    end




    resul.Q.torre=max(abs(resul.Q.torre.'));
    resul.Qs.torre=max(abs(resul.Qs.torre.'));
    resul.M.torre=max(abs(resul.M.torre.'));
    resul.Ms.torre=max(abs(resul.Ms.torre.'));
    if num_tramos>1.5
        resul.Q.subestructura=max(abs(resul.Q.subestructura.'));
        resul.Qs.subestructura=max(abs(resul.Qs.subestructura.'));
        resul.M.subestructura=max(abs(resul.M.subestructura.'));
        resul.Ms.subestructura=max(abs(resul.Ms.subestructura.'));
    end
    resul.Q.pile=max(abs(resul.Q.pile.'));
    resul.Qs.pile=max(abs(resul.Qs.pile.'));
    resul.M.pile=max(abs(resul.M.pile.'));
    resul.Ms.pile=max(abs(resul.Ms.pile.'));

    resul.z.torre=torre.z;
    resul.z.subestructura=subestructura.z;
    resul.z.pile=pile.z;

    graf_env(resul);
end


end
```

```
function K_pile = imped_pile(pile,suelo,w)

K_pile=zeros(2,2,length(w));

pile.np=2;
pile.z=[0:1/(pile.np-1):1]*pile.L;
suelo.CI=0;

for s=1:length(w)
    cc = {'u(0)','1';'g(0)','0';'M(1)','0';'Q(1)','0'};
    [respil,resci]=calcula_winkler(pile,suelo,w(s),cc);
    K_pile(:,1,s)=[-respil.Q(1) respil.M(1)];
    cc = {'u(0)','0';'g(0)','1';'M(1)','0';'Q(1)','0'};
    [respil,resci]=calcula_winkler(pile,suelo,w(s),cc);
    K_pile(:,2,s)=[respil.Q(1) -respil.M(1)];
end

end



function [d,u,g,Q,M,P] = matriz_d(gondola,torre,subestructura,...
    K_t,M_t,J_t,P_t)

syms A B C D a b c d x z

% Se define el numero de tramos
num_tramos=1;
if max(strcmp(subestructura.marcador,{'si' 'si' 'Si' 'Si' 'SI' 'Si' ...
        'si' 'sI'}))>0.5
    num_tramos=2;
end

% Se localizan las variables
```

```
L(2)=torre.L;
EI(2)=torre.EI;
m(2)=torre.m;
r(2)=torre.r;
alpha(2)=torre.alpha;
M_g(2)=gondola.M;
J_g(2)=gondola.J;

L(1)=subestructura.L;
EI(1)=subestructura.EI;
m(1)=subestructura.m;
r(1)=subestructura.r;
alpha(1)=subestructura.alpha;
M_g(1)=0;
J_g(1)=0;

% Viga Euler-Bernoulli sin inercia rotacional
r=r*0;

% Se crean las columnas de u, g, M y Q
u=[z*0 0 0 z*0];
for s=2:-1:3-num_tramos
    if alpha(s)==0
        u(s,:)=[exp(a*z) exp(-a*z) cos(b*z) sin(b*z)];
        u(s,:)=(subs(u(s,:),a,((((x^2*m(s)/EI(s))^2*r(s)^4+4*(x^2*m(s)/...
            EI(s)))^(1/2)-(x^2*m(s)/EI(s))*r(s)^2)/2)^(1/2)));
        u(s,:)=simplify(subs(u(s,:),b,((((x^2*m(s)/EI(s))^2*r(s)^4+...
            4*(x^2*m(s)/EI(s)))^(1/2)+(x^2*m(s)/EI(s))*r(s)^2)/2)^(1/2)));
    else
        u(s,:)=[besselj(2,z) bessely(2,z) besseli(2,z) besselk(2,z)];
        u(s,:)=z^(-2)*u(s,:);
        u(s,:)=subs(u(s,:),z,(2*(((L(s)^4*m(s)*x^2)/(EI(s)))^(1/4))/...
            abs(alpha(s)))*(1-alpha(s)*(z/L(s)))^(1/2));
        r(s)=0;
```

```
    end
    u(s,:)=simplify(u(s,:));
    g(s,:)=simplify(diff(u(s,:),z,1));
    M(s,:)=simplify(EI(s)*(1-alpha(s)*(z/L(s)))^4*diff(u(s,:),z,2));
    Q(s,:)=simplify(diff(M(s,:),z,1)+x^2*m(s)*r(s)^2*diff(u(s,:),z,1));
end

% Se monta la matriz
d=[x*0];
d(4*num_tramos,4*num_tramos)=0;
d(1,1:4)=subs(Q(3-num_tramos,:)+K_t(1,1)*u(3-num_tramos,:)+...
    K_t(1,2)*g(3-num_tramos,:)-M_t*u(3-num_tramos,:)*x^2,z,0);
d(2,1:4)=subs(-M(3-num_tramos,:)+K_t(2,1)*u(3-num_tramos,:)+...
    K_t(2,2)*g(3-num_tramos,:)-J_t*g(3-num_tramos,:)*x^2,z,0);
d(4*num_tramos-1,4*num_tramos-3:4*num_tramos)=subs(-Q(2,:)-...
    M_g(2)*u(2,:)*x^2,z,L(2));
d(4*num_tramos,4*num_tramos-3:4*num_tramos)=subs(M(2,:)-...
    J_g(2)*g(2,:)*x^2,z,L(2));
for s=2:num_tramos
    d(4*(s-1)-1,4*(s-1)-3:4*(s-1))=subs(u(s-1,:),z,L(s-1));
    d(4*(s-1)-1,4*(s)-3:4*(s))=-subs(u(s,:),z,0);
    d(4*(s-1),4*(s-1)-3:4*(s-1))=subs(g(s-1,:),z,L(s-1));
    d(4*(s-1),4*(s)-3:4*(s))=-subs(g(s,:),z,0);
    d(4*(s-1)+1,4*(s-1)-3:4*(s-1))=subs(-Q(s-1,:),z,L(s-1));
    d(4*(s-1)+1,4*(s)-3:4*(s))=subs(Q(s,:),z,0);
    d(4*(s-1)+2,4*(s-1)-3:4*(s-1))=subs(M(s-1,:),z,L(s-1));
    d(4*(s-1)+2,4*(s)-3:4*(s))=subs(-M(s,:),z,0);
end
d=simplify(d);

% Se monta el vector de cargas
P=zeros(4*num_tramos,1);
P(1:2,1)=P_t;
```

```
end


function [d,u,g,Q,M] = matriz_d_rigida(gondola,torre,subestructura)


% m: masa por unidad de longitud

% r: radio de giro de la seccion

% n: numero de frecuncias naturales

% M: masa en el extremo libre

% J: inercia en el extremo libre


syms A B C D a b c d x z


% Se define el numero de tramos

num_tramos=1;

if max(strcmp(subestructura.marcador,{'si' 'si' 'Si' 'Si' 'SI' 'Si'...

        'si' 'sI'}))>0.5

    num_tramos=2;

end


% Se localizan las variables

L(2)=(torre.L);

EI(2)=(torre.EI);

m(2)=(torre.m);

r(2)=(torre.r);

alpha(2)=(torre.alpha);

M_g(2)=(gondola.M);

J_g(2)=(gondola.J);


L(1)=(subestructura.L);

EI(1)=(subestructura.EI);

m(1)=(subestructura.m);

r(1)=(subestructura.r);

alpha(1)=(subestructura.alpha);

M_g(1)=0;
```

```
J_g(1)=0;

% Viga Euler-Bernoulli sin inercia rotacional
r=r*0;

% Se crean las columnas de u, g, M y Q
u=[z*0 0 0 z*0];
for s=2:-1:3-num_tramos
    if alpha(s)==0
        u(s,:)=[exp(a*z) exp(-a*z) cos(b*z) sin(b*z)];
        u(s,:)=(subs(u(s,:),a,((((x^2*m(s)/EI(s))^2*r(s)^4+4*(x^2*m(s)/...
            EI(s)))^(1/2)-(x^2*m(s)/EI(s))*r(s)^2)/2)^(1/2)));
        u(s,:)=simplify(subs(u(s,:),b,((((x^2*m(s)/EI(s))^2*r(s)^4+...
            4*(x^2*m(s)/EI(s)))^(1/2)+(x^2*m(s)/EI(s))*r(s)^2)/2)^(1/2)));
    else
        u(s,:)=[besselj(2,z) bessely(2,z) besseli(2,z) besselk(2,z)];
        u(s,:)=z^(-2)*u(s,:);
        u(s,:)=subs(u(s,:),z,(2*(((L(s)^4*m(s)*x^2)/(EI(s)))^(1/4))/...
            abs(alpha(s)))*(1-alpha(s)*(z/L(s)))^(1/2));
        r(s)=0;
    end
    u(s,:)=simplify(u(s,:));
    g(s,:)=simplify(diff(u(s,:),z,1));
    M(s,:)=simplify(EI(s)*(1-alpha(s)*(z/L(s)))^4*diff(g(s,:),z,1));
    Q(s,:)=simplify(diff(M(s,:),z,1)+x^2*m(s)*r(s)^2*g(s,:));
end

% Se monta la matriz
d=[x*0];
d(4*num_tramos,4*num_tramos)=0;
d(1,1:4)=subs(u(3-num_tramos,:),z,0);
d(2,1:4)=subs(g(3-num_tramos,:),z,0);
d(4*num_tramos-1,4*num_tramos-3:4*num_tramos)=subs(-Q(2,:)-...
    M_g(2)*u(2,:)*x^2,z,L(2));
```

```
d(4*num_tramos,4*num_tramos-3:4*num_tramos)=subs(M(2,:)-...
    J_g(2)*g(2,:)*x^2,z,L(2));
for s=2:num_tramos
    d(4*(s-1)-1,4*(s-1)-3:4*(s-1))=subs(u(s-1,:),z,L(s-1));
    d(4*(s-1)-1,4*(s)-3:4*(s))=-subs(u(s,:),z,0);
    d(4*(s-1),4*(s-1)-3:4*(s-1))=subs(g(s-1,:),z,L(s-1));
    d(4*(s-1),4*(s)-3:4*(s))=-subs(g(s,:),z,0);
    d(4*(s-1)+1,4*(s-1)-3:4*(s-1))=subs(-Q(s-1,:),z,L(s-1));
    d(4*(s-1)+1,4*(s)-3:4*(s))=subs(Q(s,:),z,0);
    d(4*(s-1)+2,4*(s-1)-3:4*(s-1))=subs(M(s-1,:),z,L(s-1));
    d(4*(s-1)+2,4*(s)-3:4*(s))=subs(-M(s,:),z,0);
end
d=simplify(d);

end



function f = valores_propios(d,n,w,pile,suelo)


syms x;


f=[0];


f(1)=zerocomplex(d*(abs(x-w(1))^4+1)/abs(x)^2,0.6*w(1),pile,suelo);


for k=2:n
    f(k)=zerocomplex(d*(abs(x-w(k))^4+1)/abs(x-f(k-1))^4,w(k)*f(k-1)/...
        abs(f(k-1)),pile,suelo);
end;


end



function  [f,d,u,g,Q,M]= Viga_base_rigida(gondola,torre,subestructura,n)
```

```
syms x

torre.E=real(torre.E);
torre.EI=real(torre.EI);
if max(strcmp(subestructura.marcador,{'si' 'si' 'Si' 'Si' 'SI' 'Si' ...
        'si' 'sI'}))>0.5
    subestructura.E=real(subestructura.E);
    subestructura.EI=real(subestructura.EI);
end
[d,u,g,Q,M] = matriz_d_rigida(gondola,torre,subestructura);

% Valores propios (Inicio)
cte=10^-5;
cte=0.1;

f=(0);

f(1)=zerocomplex(d/(log(abs(x)+1))^10,cte,subestructura,subestructura);

if f(1)<0
    f(1)=fzero(inline(d),-f(1));
end
% Valores propios (fin)

end

function sol = zerocomplex(f,referencia,pile,suelo)
syms x K_11 K_12 K_21 K_22

sol=referencia*0.9999;
f_referencia=det(vpa(subs(f,x,referencia),15));
if strcmp(pile.marcador,'pile')
    K = imped_pile(pile,suelo,referencia);
    f_referencia=vpa(subs(subs(subs(subs(f_referencia,...
```

```
        K_11,K(1,1)),K_12,K(1,2)),K_21,K(2,1)),K_22,K(2,2)),15);
end
f_sol=det(vpa(subs(f,x,sol),15));
if strcmp(pile.marcador,'pile')
    K = imped_pile(pile,suelo,sol);
    f_sol=vpa(subs(subs(subs(subs(f_sol,...
        K_11,K(1,1)),K_12,K(1,2)),K_21,K(2,1)),K_22,K(2,2)),15);
end

a=1;

while abs((referencia-sol)/sol)>10^-5 || real(f_sol)*...
        real(f_referencia)>0 || imag(f_sol)*imag(f_referencia)>0

    if abs(a)==0
        referencia=0.99999*referencia;
        sol=1.00001*sol;
        f_referencia=double(vpa(subs(f,x,referencia),15));
        if strcmp(pile.marcador,'pile')
            K = imped_pile(pile,suelo,referencia);
            f_referencia=det(vpa(subs(subs(subs(subs(f_referencia,...
                K_11,K(1,1)),K_12,K(1,2)),K_21,K(2,1)),K_22,K(2,2)),15));
        end
        f_sol=double(vpa(subs(f,x,sol),15));
        if strcmp(pile.marcador,'pile')
            K = imped_pile(pile,suelo,sol);
            f_sol=det(vpa(subs(subs(subs(subs(f_sol,...
                K_11,K(1,1)),K_12,K(1,2)),K_21,K(2,1)),K_22,K(2,2)),15));
        end
        if abs(f_sol-f_referencia)==0
            f_referencia=f_referencia*1.01;
        end
    end
    incremento=(-f_sol*(sol-referencia)/(f_sol-f_referencia));
```

```
    if abs(incremento)>0.1*abs(sol);
        incremento=0.05*incremento*abs(sol)/abs(incremento);
    end

    referencia=sol;
    sol=(sol+incremento);
    if real(sol)<0
        sol=real(referencia)*0.9999+imag(sol)*1i;
    end
    if imag(sol)<0
        sol=real(sol)+imag(referencia)*0.9999;
    end
    f_referencia=f_sol;
    a=vpa(det(subs(f,x,sol))-f_referencia,15);
    if strcmp(pile.marcador,'pile')
        K = imped_pile(pile,suelo,sol);
        a=vpa(subs(subs(subs(subs(a,...
            K_11,K(1,1)),K_12,K(1,2)),K_21,K(2,1)),K_22,K(2,2)),15);
    end
    f_sol=a+f_referencia;

end
end
```

B.3. calcula_winkler.m

```
function [respil,resci] = calcula_winkler(pile,suelo,w,cc)
% Resuelve el modelo de cimentacion para una determinada frecuencia y
% condiciones de contorno dadas.
% Modelo Winkler con barra Euler-Bernoulli omitiendo Inercia rotacional.
%
% condiciones de contorno (cc):
% las dos primeras deberian ser las de cabeza y las dos ultimas de punta
% p. ej.:
% cc = {'u(0)','1';
%       'g(0)','0';
%       'M(1)','0';
%       'Q(1)','0'};



% calculo de impedancia de suelo (Novak) y campo incidente
ksx = kdenovak(suelo,pile.d/2,w);
ci = campoincidenteTim(suelo,w);

% inicializamos a cero la matriz para calcular las amplitudes:
AA = zeros(pile.N*4);
BB = zeros(pile.N*4,1);

% bucle en partes del pilote:
for np = 1 : pile.N
    pile.m=pile.A*(pile.rho+suelo.rho(np)*(pile.delta^2/(1-pile.delta^2)));
    [u,g,M,Q] = calculaexpresiones(pile,ksx(np),...
        suelo.h(np),w,ci(np));

    col = 4*(np-1)+(1:4); % columnas correspondientes a las amplitudes
                          % de ese tramo

    % Aplicamos cc de cabeza o de interfase segun estamos en el primer
    % tramo o no (son las cc en el punto inicial del tramo):
```

```
if (np == 1)
    buf = eval(cc{1,1});
    AA(1,col) = buf(1:4);
    BB(1) = -buf(5) + eval(cc{1,2});

    buf = eval(cc{2,1});
    AA(2,col) = buf(1:4);
    BB(2) = -buf(5) + eval(cc{2,2});
else
    f = 4*(np-1)-2;
    for var = 'ugMQ'
        f = f + 1;
        buf = eval([var '(0)']);
        AA(f,col) = buf(1:4);
        BB(f) = BB(f) -buf(5);
    end
end

% Aplicamos cc de punta o de interfase segun estamos en el ultimo
% tramo o no (son las cc en el punto final del tramo):
if (np == pile.N)
    buf = eval(cc{3,1});
    AA(4*pile.N-1,col) = buf(1:4);
    BB(4*pile.N-1) = -buf(5) + eval(cc{3,2});

    buf = eval(cc{4,1});
    AA(4*pile.N,col) = buf(1:4);
    BB(4*pile.N) = -buf(5) + eval(cc{4,2});
else
    f = 4*(np-1)+2;
    for var = 'ugMQ'
        f = f + 1;
        buf = eval(['-' var '(1)']);
        AA(f,col) = buf(1:4);
```

```
            BB(f) = BB(f) -buf(5);
        end
    end

end

%Escalamos la matriz (condicionamiento del sistema)
maximo=zeros(length(BB));
for n=1:length(BB)
    maximo(n)=max(abs(AA(n,:)));
end
for n=1:length(BB)
    AA(n,:)=AA(n,:)/maximo(n);
    BB(n,:)=BB(n,:)/maximo(n);
end

% resolvemos
sol=AA\BB;

A = [zeros(pile.N,4) ones(pile.N,1)];
for n=1:pile.N
    A(n,1:4)=sol(4*(n-1)+(1:4));
end

% calculamos las variables del problema:
c = 0;
z = pile.z;
ht = 0;
for np = 1:pile.N
    ze = (z(z <= suelo.H(np))-ht)/suelo.h(np);
    z(z <= suelo.H(np)) = [];
    ht = suelo.H(np);
    pile.m=pile.A*(pile.rho+suelo.rho(np)*(pile.delta^2/(1-pile.delta^2)));
    [u,g,M,Q] = calculaexpresiones(pile,ksx(np),...
```

```
        suelo.h(np),w,ci(np));
    for nz = 1:length(ze)
        c = c + 1;
        respil.u(c) = sum(u(ze(nz)).*A(np,:));
        respil.g(c) = sum(g(ze(nz)).*A(np,:));
        respil.M(c) = sum(M(ze(nz)).*A(np,:));
        respil.Q(c) = sum(Q(ze(nz)).*A(np,:));
    end
end
respil.z = pile.z;

% calculo del campo incidente
z = pile.z;
c = 0; ht = 0;
for np = 1:pile.N
    ze = (z(z <= suelo.H(np))-ht)/suelo.h(np);
    z(z <= suelo.H(np)) = [];
    ht = suelo.H(np);
    for nz = 1:length(ze)
        c = c + 1;
ns=np;
     resci.u(c)=ci(ns).A*exp(1i*ci(ns).k*ze(nz))...
              +ci(ns).B*exp(-1i*ci(ns).k*ze(nz));
     resci.du(c)=1i*ci(ns).k/suelo.h(ns)*(ci(ns).A*exp(1i*...
            ci(ns).k*ze(nz))-ci(ns).B*exp(-1i*ci(ns).k*ze(nz)));
    end
end
resci.z = pile.z;

end



function [b1,g1] = calculacoeficientes(pile,kh,L,w)
```

```
% Calcula los coeficientes que se utilizan para resolver la ecuacion
% diferencial y para obtener las diferentes variables.
% Son los coeficientes para un tramo determinado.
b1 = L^4*(kh-pile.m*w^2)/(pile.E*pile.I);
g1 = L^4*kh/(pile.E*pile.I);
end

function [u,g,M,Q] = calculaexpresiones(pile,kh,L,w,ci)
% Calcula las expresiones (funcion de e) para las variables del problema.
% Correspondientes a un tramo determinado.
% Teoria Bernoulli.
%
% Cada variable tiene 5 componentes, las 4 primeras correspondientes a las
% raices desconocidas, y la ultima al termino 'constante'.
[b1,g1] = calculacoeficientes(pile,kh,L,w);

    b = b1;
    c = g1;



r(1) = sqrt((sqrt(-4*b))/2);
r(2) = -sqrt((sqrt(-4*b))/2);
r(3) = sqrt((-sqrt(-4*b))/2);
r(4) = -sqrt((-sqrt(-4*b))/2);

rp(1) = 1i*ci.k; % r5 y 6
rp(2) = -1i*ci.k;

Ap(1) = ci.A*(c)/(ci.k^4+b);
Ap(2) = ci.B*(c)/(ci.k^4+b);

    u = @(e) [exp(r*e),...
             sum(exp(rp*e).*Ap)];
    g = @(e) (1/L)*[r.*exp(r*e),...
```

```
            sum(rp.*exp(rp*e).*Ap)];
    M = @(e) (pile.E*pile.I/L^2)*[r.^2.*exp(r*e),...
            sum(rp.^2.*exp(rp*e).*Ap)];
    Q = @(e) (pile.E*pile.I/L^3)*[(-r.^3).*exp(r*e),...
            sum([(-rp.^3).*exp(rp*e).*Ap])];
end




function CI=campoincidenteTim(suelo,w)
% devuelve las amplitudes y numero de onda para cada uno de los estratos
% del terreno correspondiendo al campo incidente (incidencia vertical con
% desplazamiento horizontal unitario en la superficie libre)
% Formulacion mediante (coord. adimensional y relativa

k=w./suelo.cs.*suelo.h;
A=zeros(1,suelo.nes);
B=zeros(1,suelo.nes);

A(1)=suelo.CI*1/2;
B(1)=suelo.CI*1/2;

for n=1:suelo.nes-1
    R=suelo.h(n+1)/suelo.h(n)*k(n)*suelo.G(n)/k(n+1)/suelo.G(n+1);
    A(n+1)=0.5*((1+R)*A(n)*exp(i*k(n))+(1-R)*B(n)*exp(-i*k(n)));
    B(n+1)=0.5*((1-R)*A(n)*exp(i*k(n))+(1+R)*B(n)*exp(-i*k(n)));
end

for n=1:suelo.nes
    CI(n).k = suelo.CI*k(n);
    CI(n).A = A(n);
    CI(n).B = B(n);
end
end
```

```
function ks=kdenovak(suelo,r,w)
% calcula la rigidez a compresion del suelo, empleando la expresion de la
% K horizontal propuesta por Novak-Nogami-AbuElla ('78)
% Entrada: propiedades del suelo, radio del pilote, frecuencia

ks=zeros(suelo.nes,1);
for n=1:suelo.nes
    ao=r*w/sqrt(real(suelo.G(n))/suelo.rho(n));
    Ds=imag(suelo.G(n))/real(suelo.G(n));
    Dl=imag(suelo.lame(n)+2*suelo.G(n))/real(suelo.lame(n)+2*suelo.G(n));
    eta=sqrt(2*(1-suelo.nu(n))/(1-2*suelo.nu(n)));
    aog=ao*1i/sqrt(1+1i*Ds);
    bog=ao*1i/(eta*sqrt(1+1i*Dl));

    ks(n)=pi*real(suelo.G(n))*ao*ao*(-(4*besselk(1,bog)*besselk(1,aog)+...
        aog*besselk(1,bog)*besselk(0,aog)+bog*besselk(0,bog)*...
        besselk(1,aog))/(bog*besselk(0,bog)*besselk(1,aog)+...
        aog*besselk(1,bog)*besselk(0,aog)+aog*bog*besselk(0,bog)*...
        besselk(0,aog)));
end

end
```

B.4. graf_env.m

```
function graf_env(resul)
a=resul;
b=1;
s=1;
h=figure(s);

if length(fieldnames(resul.Q))<2.5
    a.Q.subestructura=a.Q.torre*0;
    a.Qs.subestructura=a.Qs.torre*0;
    a.M.subestructura=a.M.torre*0;
    a.Ms.subestructura=a.Ms.torre*0;
    a.z.subestructura=a.z.torre*0;
end

subplot(1,2,1)
p1 = plot(b*a(s).Q.pile,-a(s).z.pile,'b');
hold on
p2 = plot(b*a(s).Q.subestructura,a(s).z.subestructura,'b');
hold on
p3 = plot(b*a(s).Q.torre,a(s).z.torre+max(a(s).z.subestructura),'b');
hold on

p4 = plot(b*a(s).Qs.pile,-a(s).z.pile,'r');
hold on
p5 = plot(b*a(s).Qs.subestructura,a(s).z.subestructura,'r');
hold on
p6 = plot(b*a(s).Qs.torre,a(s).z.torre+max(a(s).z.subestructura),'r');
hold on

maximo=b*[max(a(s).Q.pile),max(a(s).Q.subestructura),max(a(s).Q.torre),...
    max(a(s).Qs.pile),max(a(s).Qs.subestructura),max(a(s).Qs.torre)];
maximo=max(maximo);
c=[0,0];
```

```
d=[0,2*maximo];
p7 = plot(d,c,'k:');
hold on
c=[max(a(s).z.subestructura)+max(a(s).z.torre),max(a(s).z.subestructura)+...
    max(a(s).z.torre)];
d=[0,2*maximo];
p8 = plot(d,c,'k:');
hold on
c=[max(a(s).z.subestructura),max(a(s).z.subestructura)];
d=[0,2*maximo];
p9 = plot(d,c,'k:');
hold on
c=-[max(a(s).z.pile),max(a(s).z.pile)];
d=[0,2*maximo];
p9 = plot(d,c,'k:');
hold off

axis([0 1.2*maximo -1.3*max(a(s).z.pile) 1.1*(max(a(s).z.subestructura)+...
    max(a(s).z.torre))]);
xlabel('Q (N)');
ylabel('z (m)');
title(['Envolvente de cortantes']);
legend([p1 p4],'Sistema acoplado','Sistema desacoplado')

subplot(1,2,2)
p1 = plot(b*a(s).M.pile,-a(s).z.pile,'b');
hold on
p2 = plot(b*a(s).M.subestructura,a(s).z.subestructura,'b');
hold on
p3 = plot(b*a(s).M.torre,a(s).z.torre+max(a(s).z.subestructura),'b');
hold on

p4 = plot(b*a(s).Ms.pile,-a(s).z.pile,'r');
hold on
```

```
p5 = plot(b*a(s).Ms.subestructura,a(s).z.subestructura,'r');
hold on
p6 = plot(b*a(s).Ms.torre,a(s).z.torre+max(a(s).z.subestructura),'r');
hold on

maximo=b*[max(a(s).M.pile),max(a(s).M.subestructura),max(a(s).M.torre),...
    max(a(s).Ms.pile),max(a(s).Ms.subestructura),max(a(s).Ms.torre)];
maximo=max(maximo);
c=[0,0];
d=[0,2*maximo];
p7 = plot(d,c,'k:');
hold on
c=[max(a(s).z.subestructura)+max(a(s).z.torre),max(a(s).z.subestructura)+...
    max(a(s).z.torre)];
d=[0,2*maximo];
p8 = plot(d,c,'k:');
hold on
c=[max(a(s).z.subestructura),max(a(s).z.subestructura)];
d=[0,2*maximo];
p9 = plot(d,c,'k:');
hold on
c=-[max(a(s).z.pile),max(a(s).z.pile)];
d=[0,2*maximo];
p9 = plot(d,c,'k:');
hold off

axis([0 1.2*maximo -1.3*max(a(s).z.pile) 1.1*(max(a(s).z.subestructura)+...
    max(a(s).z.torre))]);
xlabel('M (N*m)');
ylabel('z (m)');
title(['Envolvente de flectores']);
legend([p1 p4],'Sistema acoplado','Sistema desacoplado')

end
```