ESCUELA DE INGENIEROS INDUSTRIALES Y CIVILES (EIIC)

“Implementación y validación numérica y experimental de un método para el análisis modal experimental operacional de estructuras”

Autor:
Gabriel Álvarez González

Tutores:
Luis A. Padrón Hernández
Juan J. Aznárez González

Junio 2013

Capítulo 1. Introducción

1.1. Antecedentes

El análisis del comportamiento dinámico de todo tipo de estructuras reales requiere, entre otras cosas, conocer características propias de las mismas tales como frecuencias, amortiguamientos y modos propios de vibración. Durante el diseño, la estimación de estos parámetros se realiza de forma numérica o analítica, y en muchos casos es vital para garantizar un comportamiento aceptable de la estructura. Una vez construida, la estimación de estos parámetros puede realizarse de manera experimental, y permite, entre otras cosas, controlar la calidad de la ejecución o detectar daños estructurales de diversa índole que pueda sufrir la estructura a lo largo de su vida útil. Por otro lado y en relación a la elaboración de modelos estructurales, son muchas las incertidumbres ligadas a una estructura real, tanto en ingeniería civil como en otras ramas de la ingeniería, por lo que en muchas ocasiones la identificación experimental de los parámetros modales de una estructura permite también calibrar dichos modelos antes de proceder a un análisis dado.

Las técnicas experimentales más utilizadas para determinar frecuencias propias y amortiguamientos en estructuras (identificación modal), se basan en la obtención de la respuesta ante una señal de entrada (carga aplicada) conocida. Sin embargo en muchas ocasiones, particularmente en el ámbito de la ingeniería civil, excitar una estructura con una carga conocida resulta muy caro o impracticable. Por esta razón se están desarrollando técnicas de output-only (solo salida) basadas en utilizar las vibraciones a las que se ven sometidas las estructuras de manera natural durante su funcionamiento, y que en ocasiones son de carácter aleatorio y puede considerarse que tienen características de ruido blanco. El conjunto de técnicas y procedimientos que permite realizar el análisis de la estructura en estos términos forma parte de una rama del ámbito del análisis estructural denominada Análisis Modal Operacional.

1.2. Objetivo del proyecto

Con este Trabajo de Fin de Carrera se pretende implementar y validar un método reciente para el análisis modal experimental operacional denominado Stochastic Subspace Identification Method (SSI).

El objetivo es obtener una implementación operativa y validada de un algoritmo de la familia de los métodos de identificación estocástica por subespacios. Más concretamente, se trabajará con dos variantes: el "Data-driven subspace identification method" y el "Covariance-driven subspace idenfication method". Ambas variantes serán estudiadas e implementadas en códigos de Matlab para finalmente elegir la más adecuada para la identificación experimental, a partir de ruido ambiente, de los parámetros estructurales que definen la respuesta del sistema identificado.

1.3. Contenido del proyecto

Este trabajo fin de carrera se ha estructurado de la siguiente forma. En primer lugar una breve introducción a modo de resumen para entender a grandes rasgos la motivación y objetivos de este trabajo.

En el primer capítulo del bloque I se presentarán brevemente los conceptos y bases teóricas a tener en cuenta en la realización de este trabajo e implementación de los métodos. Se explicaran los diferentes métodos de cálculo así como conceptos básicos como frecuencias, amortiguamientos y modos propios. También se estudiarán los tipos de vibraciones.

En el segundo capítulo de este mismo bloque (capítulo 3) se realizará una introducción a la respuesta dinámica de sistemas de uno y varios grados de libertad. Se analizarán las respuestas tanto en tiempo como en frecuencia y los tipos de vibraciones a los que pueden ser sometidas.

En el capítulo 4, último del bloque I, se hace una breve reseña a la respuesta de estructuras sometidas a ruido. En este trabajo fin de carrera trabajaremos con lo que es conocido como "ruido blanco" para la excitación de las estructuras y su análisis, por lo que se hace necesario detallarlo.

El bloque II de esta memoria está dedicado a la explicación teórica y exposición del algoritmo implementado. En el capítulo 5 se exponen las características y fundamentos teóricos del SSI (Stochastic Space Identification) mientras que el capítulo 6 se centra en la implementación realizada en este Trabajo Fin de Carrera.

En el bloque III se expondrán los resultados obtenidos en las pruebas realizadas para validar la funcionalidad de la implementación realizada del SSI. Se hará un estudio paramétrico teórico y se presentaran los resultados obtenidos de las pruebas realizadas para diferentes ejemplos. En el capítulo 7 se expondrán los resultados obtenidos para señales sintéticas (pregeneradas) y en el capítulo 8 para señales medidas sobre una estructura real.

En el bloque IV (capítulo 9) se expondrán las conclusiones finales de este trabajo fin de carrera y finalmente se enumerará la bibliografía usada en el mismo.

En el anexo adjunto a este TFC se recogen los diferentes ensayos y pruebas para estimar el valor del módulo de elasticidad de Young (“E”) del material utilizado para los pilares de la estructura real de ensayo.

En el anexo A se presentan los diferentes cálculos previos de análisis de la estructura que se pretende construir físicamente, así como los diferentes ensayos necesarios para ello. Se estimará el módulo de elasticidad y se calculará teóricamente el momento de inercia de la sección de los pilares, presentándose finalmente la estructura construida.

En el anexo B se recoge el código de la implementación en Matlab de la solución escogida, mientras que en el anexo C se expone el código del programa en Matlab para obtener la respuesta de sistemas de dos grados de libertad para una señal sintética de ruido blanco.

BLOQUE I:

Introducción a la dinámica de estructuras.

Conceptos básicos de dinámica estructural y análisis experimental de estructuras.

En el primer bloque de este Trabajo Fin de Carrera se abordarán los conceptos básicos teóricos para la comprensión del mismo. En el primer capítulo de este bloque (capítulo 2) se hará una pequeña introducción a conceptos relacionados con la dinámica de estructuras, tales como los métodos usados para la modelización y los tipos de vibraciones que pueden presentar las estructuras de estudio. Se seguirá la metodología y pasos empleados en [1].

En el capítulo 3 de este mismo bloque se analizará en profundidad la modelización y obtención de ecuaciones del movimiento de las estructuras vibrantes. Se analizarán modelos de un grado de libertad (caso particular) y de muchos grados de libertad (caso general) así como su respuesta en tiempo y en frecuencia. En este capítulo se sientan las bases de las ecuaciones que serán usadas para la modelización de la estructura diseñada para este TFC. El esquema seguido para la explicación de este bloque también está extraído de [1].

En el último capítulo de este bloque se analizará la forma de excitación que utilizaremos en este TFC. Es el llamado ruido blanco. Se analizarán sus propiedades y las características del proceso. La metodología adoptada es la recogida en [2].

Capítulo 2. Introducción al comportamiento dinámico de sistemas de uno y varios grados de libertad.

2.1. Introducción

El análisis modal de un sistema permite estimar de las características dinámicas de las estructuras, tales como frecuencias naturales y factores de amortiguamiento. En nuestro caso, el análisis se realizará sobre dos modelos, uno a escala reducida y otro pregenerado, ambos previamente diseñados. Tanto para el análisis como para el diseño se hace necesaria una introducción a la dinámica de estructuras.

Los métodos de modelización dinámica utilizan un modelo dinámico simplificado mediante la discretización espacial del continuo para lo que existen varios métodos, en este Trabajo de Fin de Carrera se hará uso del método de las masas concentradas, de tal forma que el modelo dinámico resultante sea capaz de proporcionar una descripción completa del comportamiento dinámico de la estructura real, de modo que las masas concentradas describa el efecto de las fuerzas de inercia que aparecen en la estructura real durante su vibración. Esto se puede realizar, debido a que las masas de los forjados son muchos mayores que la masa del resto de la estructura, lo que permite modelar la estructura como sistemas de masa concentrada. Si la posición de la estructura durante su vibración es definida mediante una única variable, se trata de un sistema de un solo grado de libertad, si tiene dos, dos grados de libertad y así sucesivamente. Las englobaremos en un solo grado de libertad (un caso particular) y en muchos grados de libertad (caso general)

Una vez se tiene el modelo dinámico, se determinará el movimiento oscilatorio que representará el desplazamiento del cuerpo, su velocidad o su aceleración. Los sensores son utilizados para medir estos parámetros. Se describirán los tipos de vibraciones que pueden encontrarse, prestando especial atención al caso particular en el que se centrará este trabajo, el de la vibración libre amortiguada.

Una vez se obtiene el tipo de movimiento de la estructura, se determinarán las características dinámicas de los sistemas. Para ello, se utilizan expresiones matemáticas, denominadas ecuaciones de movimiento, que gobiernan la respuesta dinámica de las estructuras.

2.2. Métodos de modelización dinámica

Como se recoge en [2], una estructura es un continuo caracterizado por una geometría más o menos complicada y compuesto por materiales con ecuaciones constitutivas complejas. Un método de análisis más conveniente, introducirá estimaciones físicas durante la fase de desarrollo del modelo dinámico, y posteriormente, calculará la respuesta mediante procedimientos numéricos apropiados. Este proceso, utiliza un modelo dinámico simplificado realizado mediante la discretización espacial del continuo.

En la modelización dinámica de estructuras, pueden utilizarse los siguientes métodos de discretización :

- Método de las masas concentradas
- Método de los desplazamientos generalizados
- Métodos en los que se modela la estructura como un continuo, por ejemplo el método de los elementos finitos

2.2.1. Método de las masas concentradas. Grados de libertad

Este método supone que la masa estructural está concentrada en una serie de puntos previamente seleccionados, de tal forma que el modelo dinámico resultante sea capaz de proporcionar una descripción completa del comportamiento dinámico de la estructura real. Las masas concentradas describen el efecto de las fuerzas de inercia que aparecen en la estructura real durante su vibración. El número total de componentes de los desplazamientos en los cuales las masas concentradas vibran, se denomina número de grados de libertad del modelo. Puede asimismo estar definido como el número mínimo de desplazamiento que deben conocerse para tener una definición completa de la deformada del modelo en cada instante de tiempo durante la vibración. Una vez obtenida la deformada de la estructura, las tensiones y deformaciones de la misma en cada instante se obtienen utilizando los conceptos proporcionados por el análisis estático.

Si la posición de la estructura durante su vibración puede ser completamente definida mediante un único desplazamiento, entonces la estructura puede ser modelada mediante un sistema de un solo grado de libertad. De lo contrario será tratada como un sistema de varios grados de libertad (“n”), siendo “n” el número de desplazamientos necesarios para que la vibración de la estructura quede totalmente definida.

La identificación de los grados de libertad de una estructura es una operación que requiere gran rigor y cuidado, habida cuenta de su importante influencia en los resultados del análisis dinámico. Los errores en esta operación, convierten a la solución en inexacta con respecto a la verdadera respuesta de la estructura. Debe ponerse el acento en que el método de masas concentradas es muy eficiente en la modelización de aquellas estructuras caracterizadas por una concentración real de su masa en algunos puntos discretos. En tales casos, la totalidad de la masa es concentrada en estos puntos, de tal forma que el resto de la estructura tiene solamente rigidez pero no masas.

2.2.2. Método de los desplazamientos generalizados

El método de los desplazamientos generalizados, es un procedimiento apropiado en aquellas estructuras en que toda su masa está uniformemente distribuida. El número de grados de libertad se reduce si se acepta la hipótesis de que los desplazamientos dinámicos de la estructura, descritos por la función $\delta(y,t)$ pueden definirse como una combinación de funciones de formas elementales $\psi_i(y)$ con unas amplitudes $\beta_i(t)$ dependientes del tiempo, tal que:

$$u(y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(y)\, \beta_i(t) \tag{2.1}$$

Las funciones de forma $\psi_i(y)$ definidas a priori deben ser compatibles con las condiciones de apoyo de la estructura. Las amplitudes $\beta_i(t)$ son conocidas como coordenadas generalizadas. La simplificación del problema consiste en truncar la serie dada por la expresión anterior considerando solo un número finito de términos.

El número n de funciones de forma consideradas, depende de la aproximación con que se deseen obtener los resultados.

2.3. Vibraciones

2.3.1. Introducción teórica de las vibraciones

La vibración es el movimiento de un cuerpo respecto a su posición de equilibrio y, en consecuencia, puede caracterizarse mediante tres magnitudes distintas: desplazamiento, velocidad y aceleración. De esta manera, puede medirse cualquiera de estas tres magnitudes y obtener las otras dos integrando o derivando.

2.3.2. Tipos de vibraciones

2.3.2.1. Vibración libre

Una vibración puede clasificarse de libre si ocurre sin la aplicación de fuerzas exteriores. Generalmente, las vibraciones libres comienzan cuando se desplaza un sistema elástico, o se le proporciona cierta velocidad inicial.

2.3.2.2. Vibración libre amortiguada

El proceso por el cual la vibración disminuye continuamente de amplitud porque el medio absorbe energía del sistema, recibe el nombre de amortiguamiento. La energía se disipa en forma de fricción o calor, o se transmite en forma de sonido. Frecuentemente, puede encontrarse presente más de una forma de disipación de energía por el medio. Estos efectos se agrupan en una coeficiente o constante de amortiguamiento del medio “c”, tal que la fuerza de amortiguamiento es $f = cv$ siendo “v” la velocidad con la que se realiza el movimiento Estrictamente, esto es válido sólo para amortiguamiento viscoso, pero si las fuerzas de disipación son pequeñas (amplitudes pequeñas), las otras formas de amortiguamiento se aproximan al viscoso.

2.3.2.3. Vibración forzada

Una vibración forzada ocurre con la aplicación de fuerzas externas al sistema, que le imponen una respuesta. Las vibraciones forzadas pueden ser periódicas o no. El movimiento periódico se repite a sí mismo en todas sus características después de un determinado intervalo de tiempo, denominado período. Si la excitación que actúa sobre el sistema es periódica y continua, la oscilación es un estado estacionario, en el que el desplazamiento, la velocidad y la aceleración vibratorios del sistema son cantidades periódicas continuas.

2.3.3. Resonancia mecánica

En el caso de que la frecuencia con la que varía la fuerza externa "ω" y la frecuencia natural del sistema fuerza-resorte "ω_n" coinciden ($\omega = \omega_n$) nos encontramos en la llamada “resonancia”. En este caso la fuerza siempre puede “empujar” a la masa en la dirección del movimiento, pudiendo hacer que la amplitud aumente indefinidamente. Como un péndulo al que se le empuja un poco en la dirección del movimiento cada vez que oscila. En resonancia cada cambio, por pequeño que sea, produce una disminución de la respuesta del sistema. La importancia radica en que esfuerzos relativamente pequeños pueden producir amplitudes muy grandes, pudiendo llegar incluso a la rotura del sistema.

La condición de resonancia mecánica constituye claramente algo que debe evitarse si se desea prolongar la duración del sistema y lograr que éste opere silenciosamente. En resonancia, la amplitud del movimiento llega a ser muy grande y el sistema queda destruido.

Para valores de frecuencia "ω" bajos (ω<<ω_n) la amplitud del movimiento es la deformación que tendría el sistema si la fuerza aplicada fuera estática, por lo que a veces se le denomina “deformación o deflexión estática” $x_{stat} = \frac{F_o}{k}$. Para frecuencias "ω" altas el movimiento será pequeño disminuyendo cada vez más a medida que aumente la frecuencia con la que varía la fuerza. La frecuencia de máxima amplitud forzada se denomina “frecuencia de resonancia”.

2.3.4. Evaluación de vibraciones

Para el análisis de las señales, en primer lugar se han de analizar las vibraciones que éstas producen, y la magnitud que se requiera para el cálculo de las frecuencias.

En la estructura vibrante, la amplitud de la onda se considera como representativa del desplazamiento respecto de la posición de equilibrio. El movimiento observado puede también ser descrito por su velocidad o aceleración. La forma y período de la función son las mismas, la principal diferencia es una diferencia de fase de 90° entre las curvas amplitud-tiempo.

Si se capta la aceleración, mediante integración se puede pasar a la velocidad y al desplazamiento. Cuando sólo se hace una medida singular en banda ancha de la vibración, en el caso de que la señal tenga muchas componentes de frecuencia, es muy importante la elección de la magnitud que se analizará. El desplazamiento da mayor peso a las componentes de baja frecuencia y, a la inversa, la aceleración se lo otorga a las de frecuencia alta. Es ventajoso elegir la magnitud que dé el espectro de frecuencia más plano para una utilización óptima de la gama dinámica (diferencia entre los valores máximo y mínimo que se pueden medir) de los instrumentos. Por esto, se suele elegir la aceleración o la velocidad para los análisis en frecuencia. Como la aceleración otorga más peso a las componentes de frecuencia alta, se tiende a usarla cuando la gama de frecuencias incluye frecuencias altas, mientras que a frecuencias medias se prefiere medir la velocidad y a frecuencias bajas el desplazamiento.

Capítulo 3. Introducción al comportamiento dinámico de sistemas de uno y varios grados de libertad

3.1. Principios matemáticos en la formulación de las ecuaciones del movimiento

Para la explicación de las expresiones matemáticas que gobiernan el comportamiento dinámico de las estructuras, que son conocidas como ecuaciones del movimiento, se empleará la metodología seguida en [2].

Dichas ecuaciones se pueden obtener por cualquiera de los siguientes principios de la mecánica tradicional.

- Principio de D'Alembert
- Principio de los trabajos virtuales
- Principios variacionales

3.1.1. Principio de D'Alembert

Es el más sencillo para la obtención de las ecuaciones buscadas. Su formulación es la siguiente; "un sistema dinámico está en equilibrio siempre y cuando todas sus fuerzas, incluidas las de inercia, cumplen con las ecuaciones de equilibrio en cada instante de tiempo" siendo las fuerzas de inercia las proporcionadas por la segunda ley de Newton.

$$(F_i)_j(t) = -m_j\ddot{d}_j(t) \qquad (j = 1,2 \ldots . n) \tag{3.1}$$

Donde $\ddot{d}_j(t)$ representa la aceleración de la masa m_j del sistema.

3.1.2. Principio de los trabajos virtuales

El principio de los trabajos virtuales establece que un sistema se encuentra en equilibrio bajo la acción de unas fuerzas externas que actúan sobre él, incluidas las de inercia, si para cualquier campo de desplazamientos virtuales que se imponga al sistema, el trabajo (debido a estos desplazamientos) realizado por las fuerzas externas es igual al realizado por las fuerzas internas, Las ecuaciones del movimiento se obtienen expresando, para cada grado de libertad, el trabajo realizado por las fuerzas debido a dichos desplazamientos.

3.1.3. Principio de Hamilton

A la ecuación (3.2)

$$\Pi_H = \int_{t_1}^{t_2} (E_p - E_c) dt + \int_{t_1}^{t_2} E_d \qquad (3.2)$$

Se le denomina ecuación funcional de Hamilton, donde Ep y Ec son la energía potencial y cinética respectivamente, mientras que Ed es el trabajo realizado por las fuerzas de amortiguamiento y otras fuerzas externas no conservativas.

Este principio establece que un sistema estará en equilibrio si se cumple que:

$$\delta \Pi_H = 0 \qquad (3.3)$$

En donde δ representa la variación funcional en el intervalo (t1, t2).

3.2. Definición de las características dinámicas en modelos de un grado de libertad

La ecuación del modelo sísmico de la figura (3.1) puede ser obtenido mediante el principio de D'Alembert.

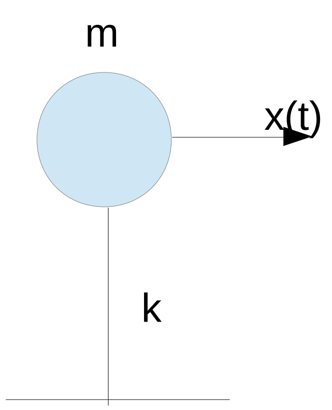


Figura (3.1.) Modelo sísmico de 1 gdl

Si se separa la masa de sus vinculaciones y apoyos, y se sustituyen por las fuerzas correspondientes, podemos escribir la ecuación del movimiento de la siguiente forma:

$$F_i(t) - F_e(t) - F_a(t) = F(t) \tag{3.4}$$

Siendo F_i, F_e, F_a las fuerzas de inercia, elásticas y de amortiguamiento respectivamente.

La fuerza elástica es proporcional a la rigidez “k” del modelo y la masa “m” del mismo por lo que:

$$F_e(t) = kx(t) \tag{3.5}$$

Las fuerzas de inercia están relacionadas con la aceleración de la masa “m” del sistema a estudiar.

$$F_i(t) = -m[\ddot{x}(t)] \tag{3.6}$$

Para las fuerzas de amortiguamiento se dan por válidas las hipótesis de Voight, según la cual el amortiguamiento viscoso es proporcional a la velocidad.

$$F_a(t) = c\dot{x}(t) \tag{3.7}$$

Si nos encontramos en un caso de vibración libre amortiguada la ecuación quedaría

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \tag{3.8}$$

Mientras que si estamos en vibración libre no amortiguada

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) \ = 0 \tag{3.9}$$

En este caso el modelo vibra según unas condiciones iniciales, ya sean desplazamientos, aceleraciones o velocidades y no está sometido a ningún tipo de perturbación externa. El modelo tampoco disipará la energía inicial que se le ha dado.

Dividiendo la ecuación por “m” y sabiendo que:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \tag{3.10}$$

Esta ecuación (3.10) viene dada en radianes por segundo, lo que significa que cada 360º ha transcurrido un ciclo completo, pudiendo expresar la ecuación del movimiento como:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{3.11}$$

El término “ω” se denomina frecuencia circular de vibración del modelo y es una de las características dinámicas del sistema.

El periodo natural (tiempo que tardaría en realizarse un ciclo completo, medido en segundos) vendría definido por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.12}$$

La frecuencia cíclica (medida en Hercios 1/s) se expresa como:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{3.13}$$

La expresión de la solución general del problema:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{3.14}$$

Puede expresarse como:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \psi) \tag{3.15}$$

Donde “A” es la amplitud del movimiento y ψ el ángulo de fase. Ambas son calculadas a partir de las condiciones iniciales del problema.

3.2.1. Análisis de amortiguamiento en modelos de un grado de libertad

3.2.1.1. Introducción

El amortiguamiento se define como la capacidad de un sistema de disipar la energía cinética en otro tipo de energía.

Hay que señalar que es un parámetro muy importante en el campo de estudio de las vibraciones y fundamental en el desarrollo de modelos que permiten el estudio de las estructuras.

Existen diferentes tipos de amortiguamiento según sea la naturaleza del mismo:

- Amortiguamiento fluido. Se produce por la resistencia de un fluido al movimiento de un sólido, ya sea turbulento o viscoso.
- Amortiguamiento por fricción seca. Se produce por la fricción cinética entre dos superficies deslizantes secas. ($F = \mu N$)
- Amortiguamiento por histéresis o histerético. Causado por la fricción interna molecular (o histéresis) cuando se deforma un cuerpo.

Para la definición usaremos el modelo de un grado de libertad siguiente (figura 3.2, que viene descrito por la ecuación del movimiento obtenida anteriormente):

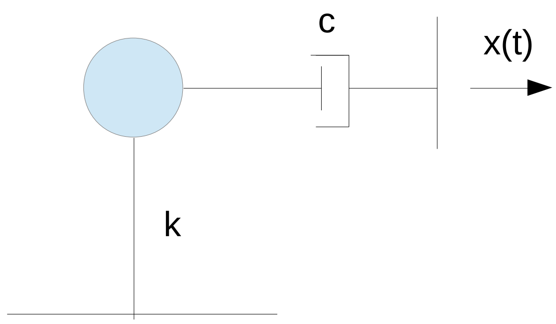


Figura (3.2.) Modelo sísmico de 1 gdl con amortiguamiento

Para el amortiguamiento viscoso se toma como válida la hipótesis de Kelvin-Voigt proporcional a la velocidad debido a su simplicidad. El amortiguamiento viscoso está caracterizado por el parámetro “c”.

A menudo se usa el amortiguamiento viscoso para caracterizar el amortiguamiento global de la estructura. A este caso se le llama amortiguamiento viscoso equivalente y puede definirse como la fuerza que causa una disipación de energía igual que el amortiguamiento real del modelo.

3.2.1.2. Vibración libre no amortiguada

Una vibración libre es aquella en que no existe una excitación externa del sistema estructural. Si consideramos la ecuación del movimiento obtenida en el apartado anterior (ecuación 3.8):

$$f(t) = 0 \tag{3.16}$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{3.17}$$

Al no existir excitación el movimiento estará caracterizado por las condiciones iniciales del sistema que se refieren normalmente al desplazamiento y velocidad en el instante (t0).

$$x(t_0) = x_0 \tag{3.18}$$

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \tag{3.19}$$

La relación se transforma en una ecuación diferencial que admite soluciones de la forma:

$$Ce^{\lambda t} \tag{3.20}$$

Donde “C” es una constante y “λ” una raíz de la ecuación característica. La ecuación del movimiento puede ser expresada como (ecuación 3.21):

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \tag{3.21}$$

Cuyas soluciones serán:

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}} \tag{3.22}$$

Si no existe amortiguamiento entonces el sistema es un sistema conservativo (c=0) y por lo tanto las soluciones de la ecuación del movimiento serán armónicas igual que (3.23):

$$x(t) = (A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t) \tag{3.23}$$

Donde “A” y “B” son constantes y “ω_0” es la frecuencia natural o propia del sistema libre no amortiguado y se define como:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.24}$$

De esta ecuación se extrae que para valores de “k” elevados (sistemas muy rígidos) y baja masa “m” tiene a vibrar rápidamente (frecuencia elevada). En el caso de sistemas flexibles la frecuencia de oscilación será baja (oscilación lenta).

En un sistema libre no amortiguado la respuesta no se atenúa nunca. Esto no es aplicable a la realidad y solo es válido para modelos de estudio teóricos.

3.2.1.3. Vibración libre amortiguada

Para este caso tendremos tres posibilidades a estudiar

- Amortiguamiento inferior al crítico ($c < c_c$)
- Amortiguamiento crítico ($c = c_c$)
- Amortiguamiento superior al crítico ($c > c_c$)

3.2.1.3.1 Amortiguamiento inferior al crítico

Se define por la relación ($c < c_c$) y la solución de la ecuación del movimiento puede ser expresada como:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}(A\cos\omega_a t + B\sin\omega_a t) \tag{3.25}$$

Donde “ξ” es la llamada fracción del amortiguamiento respecto al crítico y “ω_a” la frecuencia natural del sistema amortiguado. “ξ” viene definido por:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_0} \tag{3.26}$$

El amortiguamiento crítico “c_c” viene dado por:

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.27}$$

Y la frecuencia natural del sistema amortiguado:

$$\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\xi} \tag{3.28}$$

La razón “ξ” también puede ser expresada como:

$$\xi = \frac{c}{c_c} \tag{3.29}$$

Si dividimos la ecuación del movimiento (ecuación 3.17) entre la masa obtenemos:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{3.7}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_a^2 x = 0 \tag{3.30}$$

Donde:

$$2\beta = \frac{c}{m} \tag{3.31}$$

$$\omega_a^2 = \frac{k}{m} \tag{3.32}$$

Para obtener las soluciones de la ecuación sustituimos:

$$x(t) = e^{rt} \;\; ; \;\; \dot{x}(t) = re^{rt} \;\; ; \;\; \ddot{x}(t) = r^2 e^{rt}$$

Llegando a la ecuación característica:

$$r^2 + 2\beta r + \omega_a^2 = 0 \tag{3.33}$$

Siendo las soluciones:

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} \tag{3.34}$$

El signo del término $\beta^2 - \omega_o^2$ nos da el tipo de amortiguamiento a estudiar, al ser amortiguamiento inferior al crítico $\beta^2 - \omega_o^2 < 0$ es negativo y por lo tanto las soluciones son complejas

$$r_{1,2} = -\beta \pm i\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \tag{3.35}$$

Como sabemos que $\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \xi}$ la solución se transforma en:

$$r_{1,2} = -\beta \pm i\omega_a \tag{3.36}$$

La solución general quedará de la forma:

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{3.37}$$

Al sustituir los valores de $r_1 \; y \; r_2$se llega a:

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_a t + \psi) \tag{3.38}$$

Los coeficientes “A” y “ψ” se obtienen a partir de las condiciones iniciales del sistema. La respuesta de un sistema con amortiguamiento inferior al crítico se muestra en la gráfica siguiente (figura 3.3).

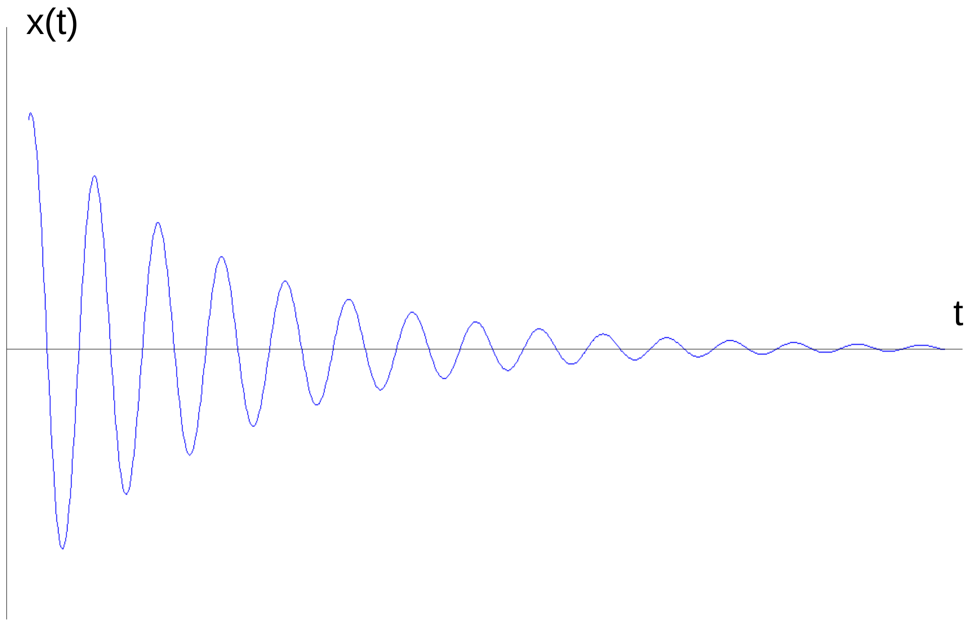


Figura (3.3.) Respuesta de un sistema con amortiguamiento inferior al crítico

3.2.1.3.2 Amortiguamiento crítico

En este caso ($c = c_c$) realizamos el mismo proceso que para el amortiguamiento inferior al crítico hasta llegar a la ecuación de signo del amortiguamiento, solo que en este caso en vez de ser negativo será igual a cero:

$$\beta^2 - \omega_o^2 = 0 \tag{3.39}$$

Por lo que:

$$\beta = \omega_0 \tag{3.40}$$

Quedando la solución general como:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}(At + B) \tag{3.41}$$

Donde “A” y “B” son constantes. En esta situación, el movimiento del sistema estructural carece de periodicidad y si el sistema es separado de su posición de equilibrio tiende a volver a ella sin efectuar ningún tipo de oscilación. Su comportamiento es el mostrado en la figura 3.4:

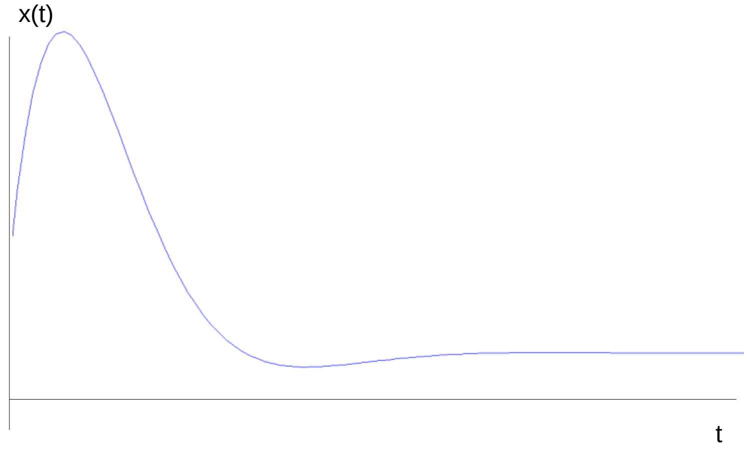


Figura (3.4.) Respuesta de un sistema con amortiguamiento crítico

3.2.1.3.3 Amortiguamiento superior al crítico

En este caso ($c > c_c$) la solución general del problema será:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \tag{3.42}$$

El movimiento del sistema es similar al del amortiguamiento crítico con la salvedad que la atenuación es más lenta. Es un caso que no se presenta en ingeniería civil por lo que no se entrara en más detalles en este trabajo fin de carrera.

3.2.1.4. Vibración forzada amortiguada

Para el estudio de las oscilaciones del sistema se asumirá la hipótesis de que todos los sistemas tienen amortiguamiento inferior al crítico ($c < c_c$)

3.2.1.4.1 Excitación armónica

Una fuerza actuante sobre un sistema se dice que es armónica si es de la forma:

$$f(t) = f_0 e^{i\Omega t_0} \tag{3.43}$$

Donde "Ω" es la frecuencia y "f_0" la amplitud (que tomará valores complejos ya que "f (t)" es real). Si sobre el sistema actúa una fuerza de este tipo la ecuación del movimiento se expresa como:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f_0 e^{i\Omega t_0} \tag{3.44}$$

La solución general de la ecuación será la suma de la solución homogénea más la particular (obtenidas en este mismo capítulo para el amortiguamiento inferior al crítico). La solución homogénea no se suele considerar, ya que se atenúa, se denomina respuesta transitoria y dependen de las condiciones iniciales del sistema a estudiar así como de la variación temporal hasta alcanzar el régimen permanente. En consecuencia solo se considerará la solución particular, que es de la forma:

$$x(t) = x_0 e^{i\Omega t} \tag{3.45}$$

Al ser la ecuación del movimiento una ecuación lineal (la respuesta permanente a una excitación armónica de amplitud “f_0” es otra onda armónica de amplitud “x_0” con la misma frecuencia) podemos hallar la relación existente entre ambas amplitudes:

$$x_0 = \frac{f_0}{-m\Omega^2 + ic\Omega + k} \tag{3.46}$$

Que puede ser expresada como:

$$x(t) = f(t)H(\Omega) \tag{3.47}$$

$$x_0(t) = f_0 H(\Omega) \tag{3.48}$$

“H (Ω)” se denomina función de transferencia del sistema y se puede escribir como:

$$H(\Omega) = \frac{1}{-m\Omega^2 + ic\Omega + k} = \frac{1}{m}\frac{1}{-\Omega^2 + 2\xi i\omega_0\Omega + \omega_0^2} = \frac{1}{k}\frac{1}{1 - \beta^2 + 2i\xi\beta} \tag{3.49}$$

Siendo “β”:

$$\beta = \frac{\Omega}{\omega_0} \tag{3.50}$$

La respuesta real y estática de la ecuación armónica será

$$x_{est} = \frac{|f_0|}{K} \tag{3.51}$$

Por lo que si Ω=0 llegamos a:

$$|x_0| = \frac{|f_0|}{K}|H(\Omega)|K \tag{3.52}$$

|H (Ω)|*K se denomina factor de amplificación dinámica “D” y viene dado por:

$$D = \frac{|x_0|}{x_{est}}|H(\Omega)|K = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \tag{3.53}$$

En la gráfica (figura 3.5) se observan distintas familias de curvas o espectros de la amplificación dinámica en función del cociente entre la frecuencia de excitación y la natural del sistema estructural para distintos valores de amortiguamiento. Nótese que presentan un pico en las proximidades de “β=1” haciéndose más pronunciado cuanto menor es el amortiguamiento. La gráfica ha sido extraída de [2].

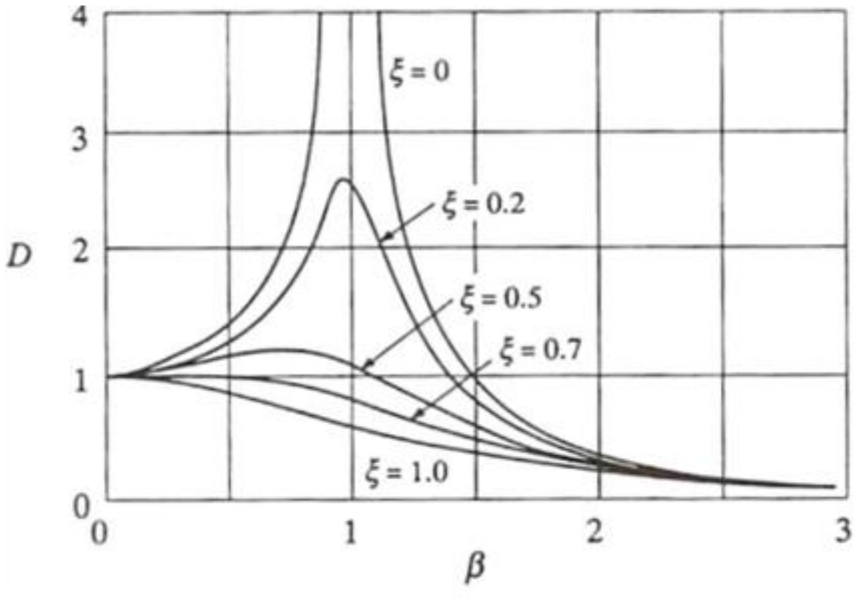


Figura (3.5.) Variación del factor de amplificación dinámico con la frecuencia y el amortiguamiento (extraída de [2])

Como señalamos antes la respuesta transitoria no se ha considerado. Pero hay que señalar que si la excitación se inicia en un determinado instante se debe esperar algunos ciclos de oscilación hasta que el sistema alcance el régimen permanente y presente su máxima amplitud. Para que la resonancia se manifieste correctamente debe existir cierta duración en la excitación.

3.2.1.4.2. Excitación arbitraria

Cuando la fuerza actuante sobre un sistema no corresponde a una señal armónica o matemáticamente conocida se debe recurrir a métodos numéricos de resolución ya que no es posible resolver analíticamente las ecuaciones del movimiento. Los métodos usados para resolución son; resolución numérica en el dominio del tiempo mediante la integral de Duhamel o resolución en el dominio del tiempo mediante una doble transformada de Fourier.

3.2.1.4.2.1. Análisis en el dominio del tiempo. Integral de Duhamel

En un sistema elástico y lineal la respuesta x (t) puede ser obtenida mediante la suma de las sucesivas respuestas en dicho instante para los impulsos elementales f (τ) dτ correspondientes al intervalo de tiempo estudiado t (t0<τ<t). Aplicando la relación entre el impulso y la cantidad de movimiento se obtiene que la velocidad instantánea $d\dot{x}(\tau)$ toma el valor $\frac{f(\tau)d\tau}{m}$ considerándose el desplazamiento prácticamente nulo. Si sustituimos las condiciones iniciales en el instante τ se obtiene el desplazamiento en el instante “t” (dx (t)) causado por el impulso elemental f (τ) dτ en el instante “τ”.

$$dx\,(t) = e^{-\xi\omega_o(t-\tau)}\left[\frac{d\dot{x}(\tau) + dx\,(\tau)\xi\omega_0}{\omega_a}\sin\omega_a(t-\tau) + dx\,(\tau)\sin\omega_a(t-\tau)\right]$$
$$= e^{-\xi\omega_o(t-\tau)}\,\frac{f(\tau)d\tau}{m\omega_a}\sin\omega_a(t-\tau) \qquad (3.54)$$

Al ser t<τ:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} dx\,(t) = \frac{1}{m\omega_a}\int_{t_0}^{t} e^{-\xi\omega_o(t-\tau)} \sin\omega_a(t-\tau)\,d\tau \tag{3.55}$$

Dicha ecuación es la llamada integral de Duhamel. El valor del integrando "h (t)" es la respuesta en el instante "t" a un impulso unidad (delta de Dirac) en el instante "τ".

$$h(t) = e^{-\xi\omega_o(t-\tau)} \sin\omega_a(t-\tau) \tag{3.56}$$

En excitaciones de tipo impulsivo la repercusión de la respuesta máxima del sistema es bastante baja, mientras que en excitaciones continuadas su influencia puede ser determinante.

Las expresiones obtenidas anteriormente solo son válidas para excitaciones continuadas sobre el sistema a estudiar. Si además las condiciones iniciales no son nulas la integral de Duhamel se convierte en:

$$\begin{aligned} x(t) = {} & \frac{e^{-\xi\omega_o(t-\tau)}}{m\omega_a}\left[x(t_0)(\omega_a\cos\omega_a t + \omega_0\xi\sin\omega_a t) + \dot{x}(t_0)\sin\omega_a t\right] \\ & + \frac{1}{m\omega_a}\int_{t_0}^{t} e^{-\xi\omega_o(t-\tau)} \sin\omega_a(t-\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{3.57}$$

La integral de Duhamel se puede resolver numéricamente discretizando el intervalo de integración y considerando un criterio de interpolación de la excitación "f (t)". La velocidad y aceleración pueden obtenerse derivando bajo el signo de la integral o derivando numéricamente a partir de la solución discreta de la integral de Duhamel.

3.2.2. Respuesta de sistemas de un grado de libertad ante cargas dinámicas en el dominio de la frecuencia

3.2.2.1 Función de respuesta en frecuencia (FRF) en sistemas de un grado de libertad

Si "f (t)" tiene un periodo "T" con lo que "f (t+T)=f (t)" la función puede descomponerse en una serie de Fourier tal que:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{in\Omega t} \tag{3.58}$$

Donde:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \tag{3.59}$$

Y los coeficientes complejos "f_n" representan la intensidad con la que la frecuencia "$n\Omega$" está contenida en "f (t)" y vienen dados por:

$$f_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{in\Omega t} dt \tag{3.60}$$

Si se sustituye en la expresión de la serie de Fourier, la respuesta del sistema estructural puede expresarse como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} H(\Omega n) f_n e^{in\Omega t} \tag{3.61}$$

Esta expresión resultante solo es aplicable para excitaciones periódicas. Si la excitación no es periódica “T” tendería a infinito, por lo que “Ω” tendería a un valor infinitesimal y la serie de valores continuos “Ωn” daría lugar a una función que no sería continua. Si asumimos que el sistema estará sometido a una excitación periódica las ecuaciones anteriores pueden expresarse como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{3.62}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{3.63}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{3.64}$$

Las dos primeras ecuaciones nos muestran que “F (ω)” la transformada de Fourier de “f (t)” y que esta es la transformada inversa de la primera. Dado que la transformada de Fourier es una operación biunívoca “F (ω)” contiene la misma información que “f (t)” y puede realizarse el análisis tanto en tiempo como en frecuencia. La obtención de la respuesta “x (t)” a partir de la excitación “f (t)” se realiza en tres pasos:

1. Transformada directa de Fourier para hallar “F(ω)”
2. Hallar la respuesta en el dominio de la frecuencia multiplicando por la función de transferencia ($x(t) = H(\omega)F(\omega)$)
3. Realizamos la transformada inversa de Fourier para obtener la respuesta en el dominio del tiempo (x(t))

Derivando la expresión dos veces respecto del tiempo se observa que la repercusión de las frecuencias altas en la aceleración es mayor que en el desplazamiento:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 H(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{3.65}$$

Esta última ecuación indica que la aceleración en el dominio de la frecuencia viene dado por:

$$\ddot{x}(\omega) = \omega^2 H(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} \tag{3.66}$$

3.3. Características dinámicas en modelos de muchos grados de libertad. Modos naturales de vibración

3.3.1. Configuración

Hasta ahora hemos considerado modelos de un solo grado de libertad, cosa poco habitual en la ingeniería civil y de poca aplicación práctica. Consideremos ahora un sistema de muchos grados de libertad y procedamos a su estudio. La modelización se hará según la figura 6, para modelos de muchos grados de libertad.

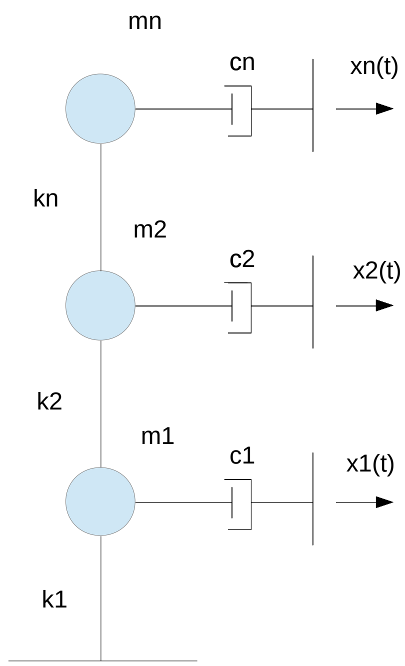


Figura (3.6.) Modelo de muchos grados de libertad

Igual que para el modelo de un grado de libertad, el sistema estará en equilibrio si lo están todas y cada una de sus masas. Expresando esto en forma matricial obtenemos:

$$F_i(t) - F_e(t) - F_a(t) = 0 \qquad (3.67)$$

Siendo:

$$F_e(t) = KX(t) \qquad (3.68)$$

$$F_i(t) = -M\ddot{X}(t) + Ja(t) \qquad (3.69)$$

$$F_a(t) = C\dot{X}(t) \qquad (3.70)$$

Donde "J" es una matriz columna de unos y "K" es la matriz de rigidez, siendo "k" la rigidez a cortante. Esta rigidez viene dada por:

$$k = \frac{12EI_r}{h_r^3} \qquad (3.71)$$

"E" es el módulo de elasticidad del material, "Ir" son los momentos de inercia de de los pilares situados entre el grado de libertad a estudiar y "hr" es la altura de dichos pilares.

Las matrices "M" y "C" son matrices diagonales de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c_n \end{pmatrix}$$

Con lo que la ecuación del movimiento quedaría:

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = -MJa(t) \tag{3.72}$$

3.3.2. Vibraciones libres no amortiguadas. Modos y frecuencias propios.

Si se analizan las vibraciones libres del modelo la ecuación del movimiento vendrá dada por:

$$M\ddot{D}(t) + KD(t) = 0 \tag{3.73}$$

Donde las soluciones para estas ecuaciones diferenciales deben cumplirse para soluciones particulares del tipo:

$$D(t) = Ae^{i\omega t} \tag{3.74}$$

O bien:

$$d(t) = A\sin(\omega t + \psi) \tag{3.75}$$

"A" es el vector que contiene las amplitudes de la vibración, "ω" es la frecuencia circular del movimiento y "ψ" es el ángulo de fase. Sustituyendo en la ecuación del movimiento obtenemos:

$$(K - \omega^2 M)A = 0 \tag{3.76}$$

Este sistema de ecuaciones lineales y homogéneas constituye un problema de autovalores. El sistema tiene soluciones de "A" diferentes de la trivial, lo que significa que el sistema vibra efectivamente, solo si el determinante de la matriz es igual a cero. Así:

$$|K - \omega^2 M| = 0 \tag{3.77}$$

Desarrollado en forma polinómica constituye la llamada ecuación característica:

$$\omega^{2n} + \alpha_1\omega^{2n-2} + \alpha_2\omega^{2n-4} + \cdots + \alpha_{n-1}\omega^2 + \alpha_n = 0 \tag{3.78}$$

Las matrices "K" y "M" son reales, simétricas y en el caso de "K" definida positiva. La matriz "M" es al menos semidefinida positiva. Si "M" es definida positiva de la ecuación característica se obtendrán "n" soluciones positivas de "ω_i^2" y en consecuencia "n" valores "ω_i" (si "M" es solamente definida positiva el numero de soluciones finitas es menor). Los "n" autovalores son las frecuencias propias de los grados de libertad y pueden ordenarse según la matriz:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{bmatrix}$$

Esta es la denominada matriz espectral. "ω_1" constituye la frecuencia más baja y se denomina frecuencia fundamental. Los periodos propios del sistema se definen como:

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \qquad i = 1,2,3, \dots\dots, n \tag{3.79}$$

"T_1" corresponde al periodo fundamental. El vector de amplitudes "A_i" para su correspondiente "ω_i" satisface la ecuación "$(K - \omega^2 M)A = 0$". De esta forma el vector "A_i" (llamado autovector) puede obtenerse expresando todos los términos de "A_i" en función de cualquiera de ellos. Por ejemplo los elementos de "A_i" pueden ser deducidos a partir de "A_{i1}":

$$\varphi_i = \frac{A_i}{A_{i1}} \tag{3.80}$$

Todos los autovectores normalizados ($\varphi_i, i = 1,2,3, \dots, n$) tienen el primer elemento igual a la unidad. A esta operación se le llama normalización y también puede ser expresada mediante:

$$A_i^T M A_i = M_i^* \tag{3.81}$$

Lo cual permite aplicar la siguiente fórmula de normalización:

$$\varphi_i = A_i (M_i^*)^{-\frac{1}{2}} \qquad i = 1,2,3, \dots, n \tag{3.82}$$

Esto asegura el cumplimiento de la condición:

$$\varphi_i^T M_i \varphi_i = 1 \tag{3.83}$$

Los autovectores pueden colocarse en una matriz (llamada matriz modal del sistema) de la forma:

$$\phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n] \tag{3.84}$$

Los autovectores no expresan el valor de las amplitudes de vibración, que permanece indeterminada. Representan únicamente las formas de del sistema durante la vibración, en cada una de sus autofrecuencias. En análisis estructural los autovectores reciben el nombre de formas naturales de vibración o formas modales. Un autovalor "ω_i" con su correspondiente autovector "φ_i" constituye el modo natural de vibración "i".

En general para cada valor propio "λ" se cumple la ecuación:

$$\left(M\lambda_i^2 + C\lambda_i + K\right)\phi_i = 0 \tag{3.85}$$

La ecuación del sistema puede ser escrita como:

$$H(p) = \frac{adj(Z(q))}{\prod_{i=1}^{n} E(p - \lambda_i)(p - \lambda_i^*)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{[A]_i}{(p - \lambda_i)} + \frac{[A]_i^*}{(p - \lambda_i^*)} \right) \tag{3.86}$$

Donde:

- "E" es una constante.
- "$[A]_i$" y "$[A]_i^*$" se denominan residuos.
- $[A]_i = P_i adj(Z(\lambda_i))$.
- "Q_i" es una constante que depende del polo.

Estudiando estos residuos se logra establecer una relación entre la matriz de transferencia y los vectores modales:

$$Z(p)adj\big(Z(p)\big) = |Z(p)|[I], \underset{q=\lambda_i}{\longrightarrow} \quad Z(\lambda_i)adj\big(Z(\lambda_i)\big) = 0 \tag{3.87}$$

Si consideramos una columna arbitraria de "$adj(Z(\lambda_i))$":

$$Z(\lambda_i)\{adj\big(Z(\lambda_i)\big)\}_k = 0 \tag{3.88}$$

Esta ecuación tiene como significado que las columnas de "$adj(Z(\lambda_i))$" son proporcionales al i-ésimo vector modal. Considerando que la matriz es simétrica, entonces sus filas también son proporcionales al vector i-ésimo:

$$adjZ(\lambda_i)) = R_i \phi_i \phi_i^T \tag{3.89}$$

Donde "R_i" es una constante asociada al vector "ϕ_i".

De aquí obtenemos los residuos:

$$[A]_i = Q_i \phi_i \phi_i^T \tag{3.90}$$

Y finalmente la función de transferencia

$$H(p) = \frac{adj(Z(q))}{\prod_{i=1}^{n} E(p-\lambda_i)(p-\lambda_i^*)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Q_i\phi_i\phi_i^T}{(p-\lambda_i)} + \frac{Q_i^*\phi_i^*\phi_i^{*T}}{(p-\lambda_i^*)}\right) \tag{3.91}$$

3.3.3. Vibraciones amortiguadas. Amortiguamiento histerético

Hasta ahora hemos estudiado el amortiguamiento como de tipo viscoso y proporcional que tiene la característica de ser dependiente de la frecuencia. Se ha comprobado empíricamente que el amortiguamiento experimentado por las estructuras es prácticamente independiente de la frecuencia por lo que este trabajo de fin de carrera se ha estudiado mediante el amortiguamiento histerético. Este tipo de amortiguamiento se define a través de una constante compleja que se introduce en la rigidez de los elementos que la componen y el modelo general para caracterizar un amortiguamiento independiente de la frecuencia es:

$$k = k * (1 + 2i\xi) \tag{3.92}$$

Donde "2ξ" es el factor de amortiguamiento histerético.

Este modelo nos permitirá establecer un amortiguamiento modal común para todos los modos de vibración de un sistema con múltiples grados de libertad

3.3.4. Análisis en el dominio de la frecuencia.

En el caso general de sistemas con "N" grados de libertad, el sistema de ecuaciones diferenciales que tenemos que integrar será:

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = \{f\} \tag{3.93}$$

Si el sistema está sometido a una excitación periódica de la forma:

$$\{F(t)\} = \{F_0\}e^{i\omega t} \tag{3.94}$$

Se buscarán soluciones armónicas estacionarias de la forma:

$$\{x(t)\} = \{X_0\}e^{i\omega t} \tag{3.95}$$

Con lo que el sistema de ecuaciones quedaría:

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{X\}e^{i\omega t} = \{F_0\}e^{i\omega t} \tag{3.96}$$

La llamada matriz de rigidez dinámica es el primer término de la ecuación:

$$Z(\omega) = -\omega^2[M] + i\omega[C] + [K] \tag{3.97}$$

Definiendo su inversa ($H(\omega) = [Z(\omega)]^{-1}$) la solución de la ecuación diferencial será:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t} = [H(\omega)]\{p_0\}e^{i\omega t} \tag{3.98}$$

La matriz "H (ω)" juega en los sistemas de "N" grados de libertad el mismo papel que la función de transferencia jugaba en los sistemas de un solo grado de libertad. A esta matriz se le llama por tanto matriz de transferencia: la respuesta de un sistema de "N" grados de libertad se obtiene multiplicando el vector de amplitudes de la fuerza excitadora por la matriz de transferencia "H (ω)".

3.3.4.1. Función de respuesta en frecuencia (FRF) y respuesta al impulso unidad.

La función de respuesta en frecuencia es la función de transferencia evaluada en el eje de las frecuencias:

$$H(j\omega) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Q_i\phi_i\phi_i^T}{(j\omega - \lambda_i)} + \frac{Q_i^*\phi_i^*\phi_i^{*T}}{(j\omega - \lambda_i^*)}\right) \tag{3.99}$$

La función de respuesta a un impulso (IRF) viene dada por la transformada inversa de la función de respuesta en frecuencia:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(Q_i\phi_i\phi_i^T e^{\lambda_r t} + Q_i^*\phi_i^*\phi_i^{*T} e^{*\lambda_r t}\right) \tag{3.100}$$

En el caso de más de un grado de libertad, para cada valor de “ω”, “H (jω)” será una matriz ($H_{ik}(j\omega)$) que corresponde a una función de respuesta en frecuencia cuando se mide la respuesta en “i” y se excita la estructura en “k” o viceversa (ya que la matriz es simétrica).

$$H_{ik}(j\omega) = H_{ki}(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Fk} \tag{3.101}$$

Los máximos de las curvas corresponden a las frecuencias de resonancia y tienen todos el mismo valor para todas las FRF ya que son propiedades globales de la estructura. La función de respuesta en frecuencia presenta valores complejos.

3.4. Desacoplamiento de las ecuaciones del movimiento y superposición modal

En los métodos de integración directa se deben realizar muchas operaciones para cada paso de tiempo. Si tenemos un número alto de pasos de tiempo convendrá transformar las ecuaciones del movimiento en una forma que requiera menor número de cálculos.

Aprovechando las propiedades de ortogonalidad de los modos propios podemos definir la transformación como:

$$x(t) = \phi y(t) \tag{3.102}$$

Donde el sistema oscila de acuerdo a la función armónica “y (t)” con la configuración “ϕ”, por lo que podemos expresar la ecuación del movimiento como:

$$\phi^T M\phi\ddot{y} + \phi^T C\phi\dot{y} + \phi^T K\phi y = \phi^T F \tag{3.103}$$

Las matrices “$\phi^T M\phi$”, “$\phi^T C\phi$” y “$\phi^T K\phi$” son matrices diagonales por lo que el sistema está desacoplado. Tendremos “n” ecuaciones individuales de la forma:

$$m_i\ddot{y}_i + c_i\dot{y}_i + k_i y_i = r_i \tag{3.104}$$

Siendo:

$$r_i = \phi_i^T F(t) \qquad i = 1,2,3,\dots,n \tag{3.105}$$

La solución de cada una de las ecuaciones puede ser obtenida por algoritmos de métodos de integración directa como:

- Método de diferencias centrales
- Método de Newmark
- Método de Wilson

Una vez obtenidas las soluciones para cada una de las ecuaciones la solución final se obtiene al superponer las soluciones modales:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i y_i(t) \tag{3.106}$$

Capítulo 4. Respuesta de estructuras sometidas a acciones aleatorias estacionarias

Para este capítulo se seguirán las explicaciones [1]. En general las señales estacionarias son aquellas cuyas propiedades no varían con el tiempo, pueden ser deterministas o aleatorias (estocásticas). Un proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para caracterizar un sucesión de variables aleatorias que evolucionan en función de otra variable (generalmente el tiempo). Cada una de las variables tiene su propia función de distribución de probabilidad y pueden estar correlacionadas entre ellas o no. Cada variable o conjunto de variables sometidas a influencias o impactos aleatorios constituye un proceso estocástico.

4.1. Procesos estacionarios y ergódicos

En los sistemas ergódicos el promedio temporal de ciertas magnitudes puede obtenerse como promedios sobre el espacio de los estados lo cual simplifica las predicciones sobre estos.

Consideremos un proceso aleatorio tal que:

$$x_r(t) = A\sin(\varpi_o t + \theta_r) \qquad r = 1,2,\dots,\infty \tag{4.1}$$

Donde:

- $x_r(t)$ = componente “r” de la muestra
- A = Amplitud para esa forma de onda
- ϖ_o = Frecuencia angular fijada
- θ_r = valor del desfase muestreado para el instante “r” del ángulo θ con una función de probabilidad de densidad uniforme en el rango 0< θ<2π con una intensidad de 1/2π

Este proceso muestra que las formas de onda necesitan no ser irregulares, esto es, que contienen muchas componentes de las frecuencias y son clasificadas como aleatorias. Las formas de onda armónicas, periódicas o aperiódicas pueden ser o no aleatorias dependiendo de si están totalmente descritas o no. Mirándolo desde un punto de vista estadístico serían totalmente aleatorias, pero una vez ha sido muestreada esa forma de onda en particular ya es completamente conocida y no puede ser tratada como aleatoria (aunque sigue siendo considerada parte de un proceso aleatorio del que fue muestreada). Estudiando un número suficiente de muestras se puede estimar la función de densidad de probabilidad.

Para establecer la función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria $x_1 \equiv x(t_1)$ realizamos la siguiente transformación:

$$p(x_1) = 2p(\theta)\frac{d\theta}{dx_1} \tag{4.2}$$

Donde θ puede cambiar en todo su rango 0< θ<2π y la variable x_1 cambiará dos veces sobre su rango –A<x_1<A. De ahí el 2 multiplicando a la formula. Finalmente obtendríamos, sustituyendo

$$p(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 < \theta < 2\pi \\ 0 & \theta < 0; 0 > 2\pi \end{cases} \tag{4.3}$$

Sustituyendo esto último en la función de densidad de probabilidad obtenemos finalmente

$$p(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{x}_1^2}} & -\mathrm{A} < \theta < \mathrm{A} \\ 0 & x_1 < -A; x_1 > A \end{cases} \tag{4.4}$$

4.2. Función de autocorrelación para procesos estacionarios

Consideremos de nuevo el proceso aleatorio general $x_r(t)$ que involucra a una variable independiente. Asumiremos que el proceso es estacionario (pero no necesariamente ergódico). La función de covarianza $E[x(t)x(t+\tau)]$ en este caso será independiente de t y por lo tanto será solamente función de τ. Está función dependiente de τ será referida a partir de ahora como la función de autocorrelación y será expresada como

$$R_x(t) = E[x(t)x(t+\tau)] \tag{4.5}$$

Algunas notas importantes sobre esta función que hay que destacar son

- $R_x(0) = \sigma^2$
- $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$
- $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$

La primera ecuación el obvia debido a que $R_x(0) = E[x(t)x(t)]$ que es la varianza cuando E[x]=0. La segunda ecuación es consecuencia de considerar el proceso como estacionario. La tercera ecuación se demuestra que la media cuadrática debe ser mayor o igual a cero

$$E\{[x(t) \pm x(t+\tau)]^2\} = R_x(0) \pm R_x(\tau) + R_x(0) \geq 0 \tag{4.6}$$

O lo que es lo mismo

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) \tag{4.7}$$

Así un proceso aleatorio de tiempo continuo $x(t)$ tiene las siguientes restricciones sobre su función media

$$E\{x(t)\} = \mu_x(t) = \mu_x(t+\tau) \qquad \forall\tau \in R \tag{4.8}$$

4.3. Función de densidad espectral para procesos estacionarios (power spectral density function)

Como se demostró cualquier forma de onda $x_r(t)$ tomada de proceso aleatorio estacionario real teniendo una media de cero, es decir, E[x(t)]=0, puede ser separado en sus componentes de la frecuencia mediante el análisis de Fourier. Si la forma de onda está representada en un intervalo fijo y finito (-s/2<t<s/2), la serie de Fourier puede ser expresada como:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{nr} e^{in\varpi_0 t} \tag{4.9}$$

Donde

$$C_{nr} = \frac{1}{s}\int_{-s/2}^{s/2} x_r(t) e^{in\varpi_0 t}\, dt \tag{4.10}$$

$$\varpi_0 = \frac{2\pi}{s} \tag{4.11}$$

Si $x_r(t)$ es periódica entonces la primera ecuación da una representación exacta de toda la forma de onda dado que el intervalo de integración "s" ha sido escogido como un periodo completo. Estas formas de onda periódicas consisten en armónicos discretos que tienen una frecuencia angular $\varpi_0, 2\varpi_0, 3\varpi_0$ .... que corresponden a las amplitudes finitas $A_{1r} = 2|C_{1r}|, A_{2r} = 2|C_{2r}|, A_{3r} = 2|C_{3r}|$ ....correspondientes a las frecuencias positivas y negativas combinadas.

Normalmente los casos de estudio de mas interés son aquellos en los que analiza un proceso aleatorio estacionario es el valor medio cuadrático de $x_r(t)$ en el intervalo –s/2<t<s/2 que se obtiene de sustituir la primera ecuación mediante la relación

$$\{x_r(t)^2\} = \frac{1}{s}\int_{-s/2}^{s/2} x_r(t)^2\, dt \tag{4.12}$$

Obteniendo

$$\{x_r(t)^2\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_{nr}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{nr}^2}{2} \tag{4.13}$$

Donde $\Delta\omega$ representa la frecuencia de armónicos discretos

$$\Delta\omega = \varpi_0 = \frac{2\pi}{s} \tag{4.14}$$

Y la segunda ecuación (4.13) puede ser usada para obtener

$$\{x_r(t)^2\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\int_{-s/2}^{s/2} x_r(t)\exp(-in\varpi_0 t)\,dt|^2}{2\pi s}\Delta\varpi \tag{4.15}$$

Si aproximamos $\Delta\varpi$ a $d\varpi, n\varpi_0\ a\ \varpi$ la sumatoria se convierte en una integral de la forma

$$\{x_r(t)^2\} = \int_{-s/2}^{s/2} S_{x_r}(\varpi)\,d\varpi \tag{4.16}$$

Donde la función

$$S_{x_r}(\varpi) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{|\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} x_r(t)\,exp(-in\varpi_0 t)\,dt|^2}{2\pi s} \tag{4.17}$$

Se define como la función de densidad espectral (PSD power spectral density en ingles) para la forma de onda $x_r(t)$ siempre que tenga un límite existente. Será siempre una función mientras $x_r(t)$ sea una función real positiva finita para todos los valores de ϖ y mantiene el valor de la media de los cuadrados de $x_r(t)$ cuando es integrado en el rango $-\infty < \varpi < \infty$

La función de densidad espectral del proceso estacionario completo se obtiene mediante la media de las funciones de densidad espectrales del conjunto por separado

$$S_x(\varpi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{n} S_{x_r}(\varpi) \tag{4.18}$$

Dicha media se obtiene integrando las funciones de densidad espectral en el intervalo $\infty < \varpi < \infty$

Si el proceso aleatorio es ergódico, cada una de las partes tendrá la misma función de densidad espectral, por lo que no será necesario hacer la media y bastará simplemente con resolver una sola función de densidad espectral

En un proceso estacionario ergódico existe una relación estrecha entre la función de correlación y la de densidad espectral de potencia a través de la transformada de Fourier, por lo que se puede deducir que la función de densidad espectral de potencia puede ser calculada a partir de la transformada de Fourier de la función de autocorrelación

$$S_x(\varpi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-i\varpi t}d\tau \tag{4.19}$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\varpi)e^{-i\varpi t}d\varpi \tag{4.20}$$

4.4. Respuesta estructural ante ruido blanco estacionario

El ruido blanco es una señal aleatoria (proceso estocástico) que se caracteriza por el hecho de que sus valores de señal en dos tiempos diferentes no guardan correlación estadística alguna entre ellos. Como consecuencia de esto su función de densidad espectral de potencia será una constante S_0 en todo el rango de frecuencias -$\infty < \varpi < \infty$ que corresponde con una función delta de Dirac de intensidad $2\pi S_0$ en el origen de la correlación. Por lo tanto su respuesta gráfica es plana. Esto significa que la señal de ruido blanco contiene todas las frecuencias de espectro y todas ellas muestran una misma potencia. Si la funcion de densidad espectral de potencia no fuera plana diríamos que el ruido esta coloreado (correlacionado).

En resumen las características del ruido blanco son:

- Sus valores de señal en tiempos diferentes no guardan correlación estadística.
- Su PSD es una constante.
- Su respuesta gráfica es plana, lo que implica que contiene todas las frecuencias del espectro y todas con una misma potencia.

La figura 4.1 muestra la señal de ruido blanco en el dominio del tiempo, representando la potencia de la señal frente al tiempo.

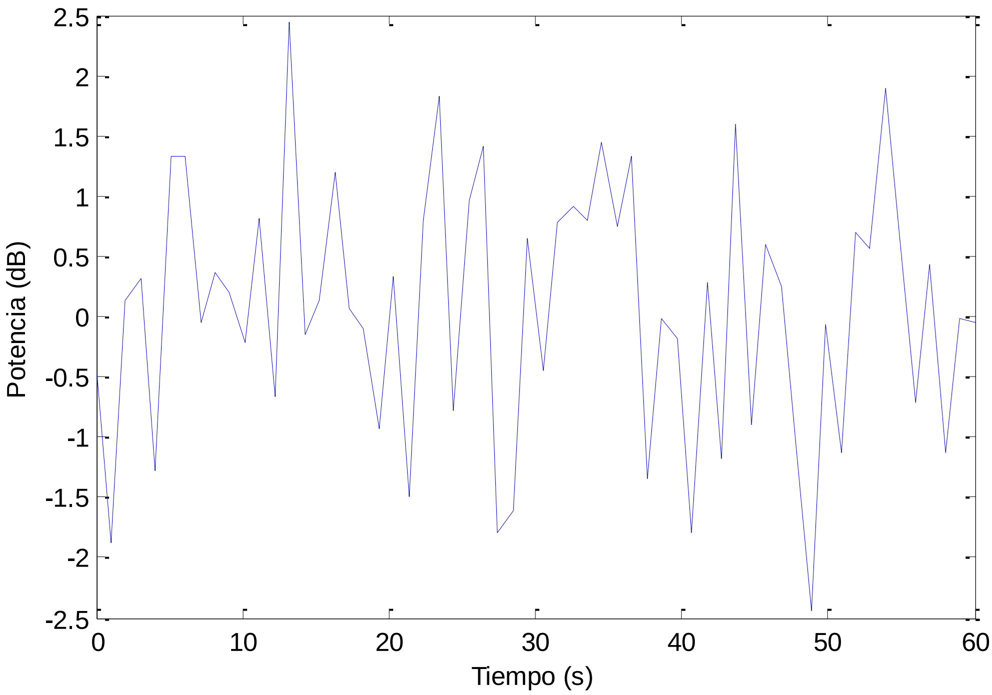


Figura (4.1) Ruido blanco

BLOQUE II:

Introducción al Stochastic Space Identification e Implementación del Método

En este segundo bloque del TFC, después de haber explicado las bases teóricas que sustentan este estudio, se pasa al análisis y explicación del método a emplear. En el primer capítulo del bloque (capítulo 5) introduciremos las explicaciones teóricas necesarias a la hora de implementar un método práctico. Estas explicaciones son extraídas de [3], [4], [5], [6] y [7].

El segundo capítulo (capítulo 6) desarrollaremos la solución escogida y en el capítulo 7 se hará el estudio paramétrico y se estudiará el rango de aplicación de dicha solución.

El método implementado es el llamado "COV-SSI". Mediante este método se pretende estimar las características dinámicas de la estructura a estudiar (frecuencias, amortiguamientos y modos propios). Es un sistema basado en medidas solo output (se conoce la respuesta de la estructura, output, pero no se conoce la excitación). Por supuesto, tampoco se conocen las características dinámicas de la estructura que es lo que se pretende estimar. Para ello se considera que la excitación tiene características de ruido blanco.

Capítulo 5. El Stochastic Space Identification (SSI)

Tal y como explican Van Overschee y De Moor [8], los métodos de identificación por subespacios más conocidos son los propuestos, por ejemplo, por Kung [9], en los cuales un modelo en el espacio de estado, en un tiempo discreto, es calculado a través de una matriz de bloques de Hankel con parámetros de Markov. El problema de esta propuesta es que la teoría detrás de estos métodos depende de los parámetros de Markov como punto de partida, parámetros bastante complicados de calcular en la práctica (piénsese, por ejemplo, en sistemas inestables).

Una alternativa para la identificación directa en sistemas puramente deterministas es la descrita por ejemplo por Moonen et al [10] y Moonen y Ramos [11], donde el espacio de estados está calculado directamente de la matriz de bloques de Hankel construida con los datos de input y output. En un primer paso, el vector de estados es calculado como la conexión entre el “pasado” y el futuro”. Una vez que la secuencia de dicho vector es conocida, las matrices del sistema son calculadas a través de una serie de ecuaciones lineales. El esquema de identificación (data-driven identification) para sistemas puramente estocásticos son también muy conocidas [9], aunque menos conocido es que en estos algoritmos los resultados pueden ser extremadamente erróneos. Este problema fue estudiado y resuelto por Van Overschee & De Moor [4]. De todas las subfamilias de algoritmos de identificación basados en la teoría de subespacios en este trabajo nos centraremos en los algoritmos tipo output-only stochastic subspace identification.

En general, los algoritmos de identificación por subespacios están basados en conceptos de teoría de sistemas, álgebra linear y estadística, siendo muy importante la complejidad de los métodos matemáticos involucrados, especialmente para el ingeniero no directamente vinculado a esta rama de las matemáticas. Es por esto que Brincker y Andersen [9] publican un trabajo en que intentaron presentar, de forma resumida, los conceptos más importantes asociados al SSI, y proponen una variante concreta denominada Data-Driven Stochastic Subspace Identification method. Previamente, Peeters y de Roeck habían publicado también un trabajo [8] definiendo un método alternativo llamado Covariance-Driven Stochastic Subspace Identification de forma más accesible al ingeniero

De las múltiples variantes existentes de Stochastic Space Identification (SSI) se han estudiado las dos que a priori resultan más eficientes y adecuadas al tipo de problema que nos atañe. En los siguientes apartados se tratará de presentar, de forma esquemática los métodos concretos Covariance-Driven Stochastic Space Identification (COV-SSI) [5,6] y el llamado Data-Driven Stochastic Space Identification [6,7].

5.1. Data-SSI

La variable de entrada de este algoritmo es una matriz compuesta por las medidas tomadas por cada canal a lo largo de todo el periodo de muestreo. Esta matriz no es más que los desplazamientos de cada nudo en cada instante del intervalo muestreado y será una matriz definida por:

$$y_k = y(k\Delta t) \in \mathbb{R}^{l*N} \tag{5.1}$$

Donde "l" es el número total de canales de medida y "N" el número total de medidas en cada posición, de modo que $T = N\Delta t$ es la longitud total de la medida en segundos y $\Delta t = 1/f_{muestreo}$ el intervalo entre dos medidas consecutivas

El primer paso en este algoritmo es organizar las medidas en una matriz de Hankel. Una matriz de Hankel es una matriz simétrica y constante en sus anti diagonales.

Sea $y_{1:N-j}$ la matriz de medidas de las que se han quitado las últimas "j" medidas y $y_{j+1:N}$ la matriz de medidas de las que se han quitado las primeras "j" medidas definimos la matriz

$$Y_H = \begin{bmatrix} y_{1:N-2s} \\ y_{2:N-2s+1} \\ \vdots \\ y_{2s:N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{hp} \\ y_{hf} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2sl*(N-2s)} \tag{5.2}$$

$y_{hp} \in R^{sl*(N-2s)}$ y se denomina como la parte "pasada" de la matriz de Hankel. Será la mitad superior de la matriz.

$y_{hf} \in R^{sl*(N-2s)}$ y se denomina como la parte "futura" de la matriz de Hankel y será la parte inferior de la matriz.

El parámetro "s" es el orden máximo del sistema, que tendrá que ser estimado en cada caso particular. Para ello se hará uso de los diagramas de estabilización explicados más adelante.

El segundo paso para la realización de este algoritmo es el más abstracto en cuanto a significado físico. Es la llamada proyección de la matriz. Esto es una herramienta geométrica que va a descomponer la matriz de datos en la matriz de observabilidad "O". Esta proyección tiene la particularidad que la matriz "O" no será descompuesta como dos matrices ortogonales sino como dos matrices no ortogonales y el complemento ortogonal de ambas. Dado que tratamos procesos estocásticos la proyección será condicional. Específicamente en el SSI (Stochastic Space Identification) la matriz viene definida por la proyección de la matriz futura sobre la pasada, o lo que es lo mismo la esperanza matemática de la matriz futura sobre la pasada.

$$O = E\left(y_{hf} \middle| y_{hp}\right) \tag{5.3}$$

Un proceso gaussiano condicionado como este puede ser descrito íntegramente por sus covarianzas. Dado que la matriz de Hankel con los datos desplazados también define covarianzas se demuestra matemáticamente que:

$$O = y_{hf} y_{hp}^T (y_{hp} y_{hp}^T)^* y_{hp} \ \in \ \mathbb{R}^{sl*(N-2s)} \tag{5.4}$$

Donde "*" se refiere a la matriz pseudoinversa de Penrose-Monrose. Esta matriz computa la solución de un sistema lineal mediante la mejor aproximación por mínimos cuadrados cuando la matriz no tiene una única solución y es usada cuando las matrices no son cuadradas o cuando su descomposición en valores singulares mediante una matriz inversa normal conduce a una matriz singular.

La última matriz de este producto define las condiciones iniciales mientras que las cuatro primeras son las covarianzas entre los canales con diferentes retardos de tiempo.

Seguidamente descompondremos la matriz "O" en sus valores singulares mediante la subrutina implementada ya en Matlab "SVD" (Single Value Decomposition). Con esto estimaremos la matriz de observabilidad "$\hat{\Gamma}$". La descomposición en valores singulares dará lugar a tres matrices y "O" quedará definida. Así:

$$O = USV^T \tag{5.6}$$

Donde:

$S \ \in \ \mathbb{R}^{sl*(N-2s)} \quad ; \quad U \in \ \mathbb{R}^{sl*sl} \quad ; \quad V \ \in \ \mathbb{R}^{(N-2s)*(N-2s)}$

Solo un número "n" de la diagonal de la matriz "S" será significativamente distinto de cero. Esto nos dará el rango de la matriz y el orden del sistema. Por lo que se puede escribir:

$$O = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} S^{n*n} & 0^{n*(N-2s-n)} \\ 0^{(sl-n)*n} & 0^{(sl-n)*(N-2s-n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Y quedándonos con los "n" valores significativamente distintos de cero tendremos:

$$O \cong \ U_1 S_1 V_1^T \in \ \mathbb{R}^{sl*(N-2s)} / \, n \leq sl \tag{5.8}$$

$U_1 \in \ \mathbb{R}^{sl*n} \quad ; \quad S_1 \in \ \mathbb{R}^{n*n} \quad ; \quad V_1^T \in \ \mathbb{R}^{n*(N-2s)}$

El siguiente paso es la estimación de la matriz de observabilidad "$\hat{\Gamma}$" mediante:

$$\hat{\Gamma} = U_1 S_1^{1/2} \in \ \mathbb{R}^{sl*n} \tag{5.9}$$

Se puede demostrar que:

$$\varGamma_s = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Entonces sabemos que la matriz “C” serán las primeras “l” filas de la matriz “$\hat{\varGamma}$”:

$$C = \hat{\varGamma}(1{:}\,l,:) \tag{5.11}$$

Y también extraemos que la submatriz siguiente es la actual multiplicada por la matriz “A”, así:

$$\hat{\varGamma}_{(1:l(s-1))}A = \hat{\varGamma}_{(l+1:ls)} \tag{5.12}$$

Donde:

$A \in \ \mathbb{R}^{n*n}$

$\hat{\varGamma}_{(1:l(s-1))}, \hat{\varGamma}_{(l+1:ls)} \in \ \mathbb{R}^{l(s-1)*n}$

El objetivo de todo este proceso es hallar la matriz “A”. Ahora tenemos un sistema sobredeterminado. Para estimar la matriz usaremos el método de los mínimos cuadrados para la mejor aproximación. El método de los mínimos cuadrados lo que hace es minimizar el error cuadrático y se demuestra que:

$$A = (\big((X')X\big)^{-1}\big)(X')Y \tag{5.13}$$

Siendo “X” el bloque de submatriz anterior e “Y” el bloque de submatriz actual de la matriz inicial “$\varGamma_s$” tal que:

$$X = \varGamma_s(1{:}\,(s-l+1)*l,:) \tag{5.14}$$

$$Y = \varGamma_s(l+1{:}\,sl,:) \tag{5.15}$$

Ahora que ya tenemos la matriz “A” del sistema podemos identificar los parámetros modales del sistema en cuestión. Extraer modos, frecuencias y amortiguamientos propios. En primer lugar diagonalizamos la matriz “A” realizando una descomposición en autovalores y autovectores:

$$A = \varPsi\varLambda\varPsi^{-1} \tag{5.16}$$

$$\varLambda = \mathrm{diag}\big(\lambda_q\big) \ \in \ C^{n*n}, q = 1 \dots n \tag{5.17}$$

$$\varPsi \ \in \ \mathbb{C}^{n*n} \tag{5.18}$$

Ahora ya solo queda extraer los autovalores como

$$\lambda_{cq} = \frac{\ln{(\lambda_q)}}{\varDelta t} \tag{5.19}$$

Estos vienen dados en pares complejos conjugados y están relacionados con las frecuencias y amortiguamientos propios del sistema pudiendo ser despejados y llegando a la identificación de estos mediante:

$$\lambda_{cq}, \lambda_{cq}{}^{*} = -\xi_q \omega_q \pm j\omega_q \sqrt{1 - \xi_q{}^2} \tag{5.20}$$

Y de aquí llegamos a

$$\omega_q = |\lambda_{cq}| \tag{5.21}$$

$$\xi_q = \frac{-\mathrm{Real}(\lambda_{cq})}{\omega_q} \tag{5.22}$$

Ya tenemos las frecuencias y amortiguamientos por lo que nos falta calcular los modos propios de la siguiente forma:

$$\phi = C\Psi \in \mathbb{R}^{l*n} \tag{5.23}$$

Hay que señalar que en estos métodos de estimación mediante la correlación de los datos de lectura los datos están calculados para un número determinado y finito de medidas. Además las estructuras pueden no presentar un comportamiento perfectamente lineal. Por si esto fuera poco las señales de entrada estarán contaminadas por ruido. Por lo tanto los modelos de espacio-estado calculados también serán estimados.

La descomposición de matrices en valores singulares con la función SVD con datos reales no dará lugar a una matriz "S" de la forma $S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sino que todos los valores de la diagonal serán distintos de cero, aunque su magnitud irá decreciendo. En este caso la magnitud del parámetro "n" es desconocido a priori (como explicamos antes, "n" es el orden máximo del sistema), por lo que habrá que construir diagramas de estabilización para un número "n" creciente. Para ello construiremos un diagrama que tendrá las frecuencias o amortiguamientos en el eje de abscisas y el parámetro "n" en el de ordenadas. En este diagrama podremos identificar que frecuencias o amortiguamientos son estables (y por lo tanto existen y son reales) y cuáles no (los que tenemos que desechar) ya que los estables se repetirán para todos los "n" y los otros no.

5.2. COV-SSI

En este caso se trata de identificar el espacio estocástico en cuestión mediante las covarianzas de los datos obtenidos en las lecturas reales. El punto de partida de este método es la matriz de correlaciones de los datos evaluadas en diferencias de tiempo positivas, y organizadas en una matriz de bloques de Toeplitz. Esta matriz es constante en sus diagonales. Entonces:

$$T_{1|i} = \begin{pmatrix} \Lambda_i & \Lambda_{i-1} & \cdots & \Lambda_1 \\ \Lambda_{i+1} & \Lambda_i & \dots & \Lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{2i-1} & \Lambda_{2i-2} & \dots & \Lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{li*li} \tag{5.24}$$

$\Lambda_i = E[y_{k+i} y_k^T]$ es la esperanza matemática de cada bloque de la matriz. Nótese que la matriz de Toeplitz puede estar a su vez formada por otras submatrices si el número de canales de entrada es mayor que 1. El parámetro "i" es el máximo orden modal del sistema esperado que será estimado para cada caso.

Ahora realizamos la descomposición de la matriz en valores singulares

$$T_{1|i} = USV^T \tag{5.25}$$

$$T_{1|i} = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} S^{n*n} & 0^{n*(N-2s-n)} \\ 0^{(sl-n)*n} & 0^{(sl-n)*(N-2s-n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{li*li} \tag{5.26}$$

$U \in \mathbb{R}^{li*li}$; $S \in \mathbb{R}^{li*li}$; $V \in \mathbb{R}^{li*li}$

$U_1 \in \mathbb{R}^{li*n}$; $S_1 \in \mathbb{R}^{n*n}$; $V_1^T \in \mathbb{R}^{n*n}$

Y quedándonos con los "n" valores significativamente distintos de cero tendremos:

$$T_{1|i} \cong U_1 S_1 V_1^T \in \mathbb{R}^{li*n} / \, n \leq li \tag{5.27}$$

El siguiente paso es la estimación de las matrices de observabilidad (extended observability matrix "Oi") y de controlabilidad (extended Stochastic controllability matriz "Ci") como:

$$O_i = U_1 S_1^{1/2} \in \mathbb{R}^{li*n} \tag{5.28}$$

$$C_i = S_1^{1/2} V_1^T \in \mathbb{R}^{n*n} \tag{5.29}$$

Dado que:

$$\mathrm{O_i} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \quad (5.30) \qquad \text{y} \qquad C_i = (A^{i-1}G \quad A^{i-2}G \quad \dots \quad AG \quad G) \quad (5.31)$$

La matriz "C" será las primeras "l" filas de "$\mathrm{O_i}$"

En el siguiente paso montamos la segunda matriz de Toeplitz y la descomponemos como hicimos con la anterior

$$T_{2|i+1} = \begin{pmatrix} \Lambda_{i+1} & \Lambda_i & \cdots & \Lambda_2 \\ \Lambda_{i+2} & \Lambda_{i+1} & \dots & \Lambda_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{2i} & \Lambda_{2i-1} & \dots & \Lambda_{i+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{li*li} \tag{5.32}$$

$$T_{2|i+1} = USV^T \tag{5.33}$$

$$T_{2|i+1} = [U_3 \quad U_4] \begin{bmatrix} S^{n*n} & 0^{n*(N-2s-n)} \\ 0^{(sl-n)*n} & 0^{(sl-n)*(N-2s-n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3^T \\ V_4^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{li*li} \tag{5.34}$$

$U \in \mathbb{R}^{li*li}$; $S \in \mathbb{R}^{li*li}$; $V \in \mathbb{R}^{li*li}$

$U_3 \in \mathbb{R}^{li*n}$; $S_2 \in \mathbb{R}^{n*n}$; $V_3^T \in \mathbb{R}^{n*n}$

Y quedándonos con los "n" valores significativamente distintos de cero tendremos:

$$T_{2|i+1} \cong U_3 S_2 V_3^T \in \mathbb{R}^{li*n} \tag{5.35}$$

Dado que se puede demostrar que:

$T_{1|i} = O_i C_i$ y $T_{2|i+1} = O_i A C_i$

Podemos despejar la matriz modal del sistema “A” como:

$$A = O_i^{-1} T_{2|i+1} C_i^{-1} \in \mathbb{R}^{n*n} \tag{5.36}$$

Ya tenemos la matriz modal del sistema por lo que solo queda repetir los pasos del anterior programa para obtener frecuencias, amortiguamientos y modos propios (estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, 5.20, 5.21, 5.22, 5.23)

$$A = \Psi \Lambda \Psi^{-1} \tag{5.16}$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_q) \in \mathbb{C}^{n*n}, q = 1 \dots n \tag{5.17}$$

$$\Psi \in \mathbb{C}^{n*n} \tag{5.18}$$

Autovalores:

$$\lambda_{cq} = \frac{\ln(\lambda_q)}{\Delta t} \tag{5.19}$$

Estos vienen dados en pares complejos conjugados y están relacionados con las frecuencias y amortiguamientos propios del sistema pudiendo ser despejados y llegando a la identificación de estos mediante:

$$\lambda_{cq}, {\lambda_{cq}}^* = -\xi_q \omega_q \pm j\omega_q \sqrt{1 - {\xi_q}^2} \tag{5.20}$$

Y de aquí llegamos a

$$\omega_q = |\lambda_{cq}| \tag{5.21}$$

$$\xi_q = \frac{-\mathrm{Real}(\lambda_{cq})}{\omega_q} \tag{5.22}$$

Modos Propios

$$\phi = C\Psi \in \mathbb{R}^{l*n} \tag{5.23}$$

Ya solo queda ,como explicamos antes, realizar el diagrama de estabilización para saber qué frecuencias y amortiguamientos son estables e identificar los modos estables.

Capítulo 6. Implementación del método

6.1. Introducción

Ahora que hemos presentado brevemente la teoría que rige el comportamiento de los algoritmos del SSI que se han estudiado, explicaremos la implementación de los algoritmos, explicaremos su diseño y funcionamiento. Las figuras (6.1.) y (6.2.) muestran los diagramas de flujo de las implementaciones realizadas para ambos algoritmos.

Seguidamente se expondrá el código de los programas con su correspondiente explicación.

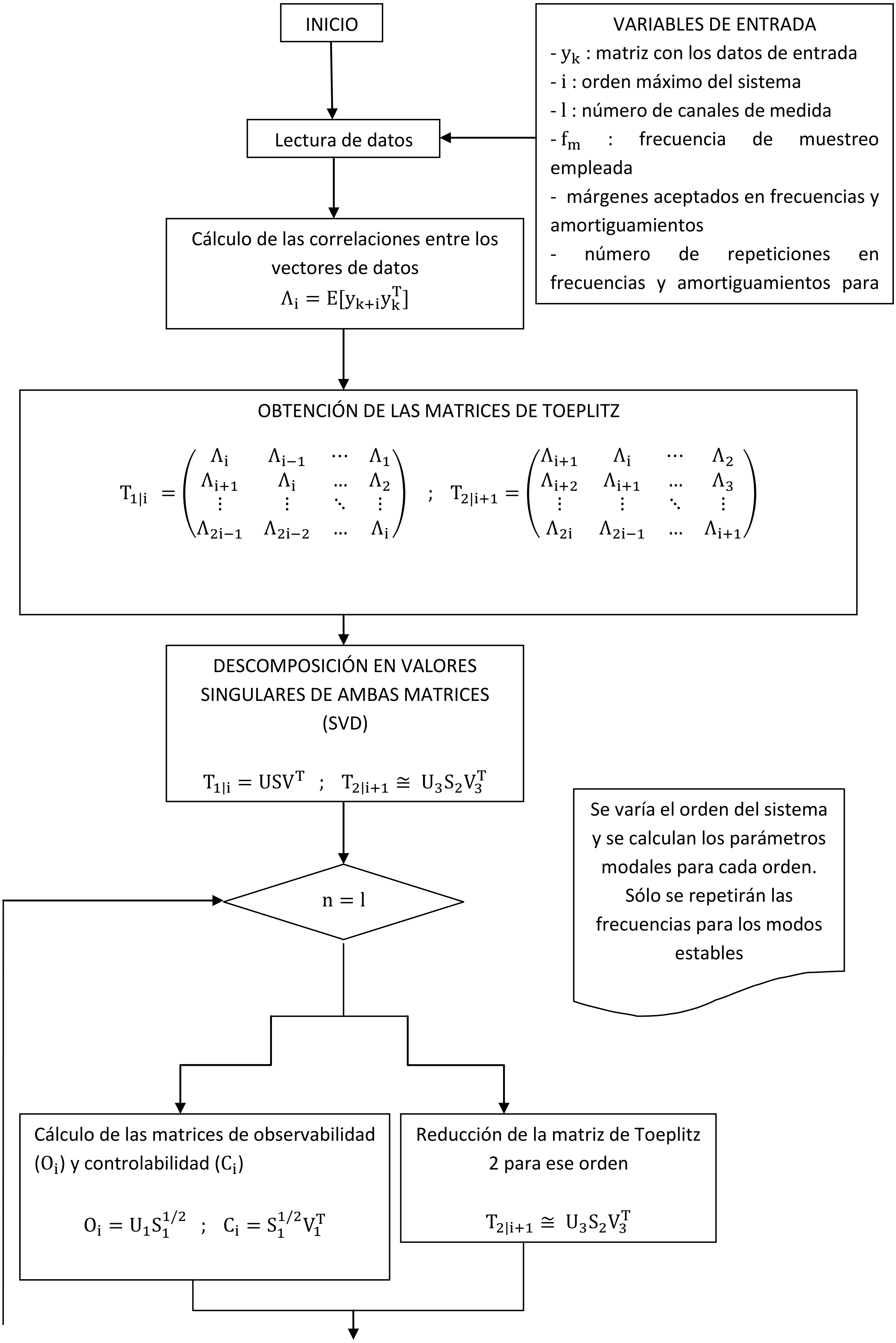
Para este TFC se han estudiado, como hemos visto en el capítulo anterior, dos implementaciones alternativas para este tipo de aplicaciones, el COV-SSI y el Data-SSI. Se implementaron los dos métodos por separado. Mientras que la implementación del COV-SSI arrojaba resultados satisfactorios la del Data-SSI no tanto debido a:

- Menor robustez del algoritmo en sí.
- Posibles errores no detectados en el código desarrollado.
- Mayor necesidad de recursos y memoria.

Debido a las significativas ventajas del COV-SSI y que se había agotado el tiempo previsto para la realización de este TFC, en los capítulos de resultados se valida exclusivamente el COV-SSI.

En la sección 6.2 y 6.3 de este mismo capítulo se explica con detalle la implementación desarrollada en Matlab para el COV-SSI. Los códigos completos de todos los códigos programados en este TFC se encuentran recogidos en los anexos B y C.

A continuación se muestran los diagramas de flujo de ambos métodos desarrollados.


INICIO
VARIABLES DE ENTRADA
- y_k : matriz con los datos de entrada
- i : orden máximo del sistema
- l : número de canales de medida
- f_m : frecuencia de muestreo empleada
- márgenes aceptados en frecuencias y amortiguamientos
- número de repeticiones en frecuencias y amortiguamientos para
Lectura de datos
Cálculo de las correlaciones entre los vectores de datos
$\Lambda_i = E[y_{k+i} y_k^T]$
OBTENCIÓN DE LAS MATRICES DE TOEPLITZ
$T_{1|i} = \begin{pmatrix} \Lambda_i & \Lambda_{i-1} & \cdots & \Lambda_1 \\ \Lambda_{i+1} & \Lambda_i & \dots & \Lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{2i-1} & \Lambda_{2i-2} & \dots & \Lambda_i \end{pmatrix} \quad ; \quad T_{2|i+1} = \begin{pmatrix} \Lambda_{i+1} & \Lambda_i & \cdots & \Lambda_2 \\ \Lambda_{i+2} & \Lambda_{i+1} & \dots & \Lambda_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{2i} & \Lambda_{2i-1} & \dots & \Lambda_{i+1} \end{pmatrix}$
DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES DE AMBAS MATRICES (SVD)
$T_{1|i} = USV^T \quad ; \quad T_{2|i+1} \cong U_3 S_2 V_3^T$
Se varía el orden del sistema y se calculan los parámetros modales para cada orden. Sólo se repetirán las frecuencias para los modos estables
$n = l$
Cálculo de las matrices de observabilidad (O_i) y controlabilidad (C_i)
$O_i = U_1 S_1^{1/2} \quad ; \quad C_i = S_1^{1/2} V_1^T$
Reducción de la matriz de Toeplitz 2 para ese orden
$T_{2|i+1} \cong U_3 S_2 V_3^T$

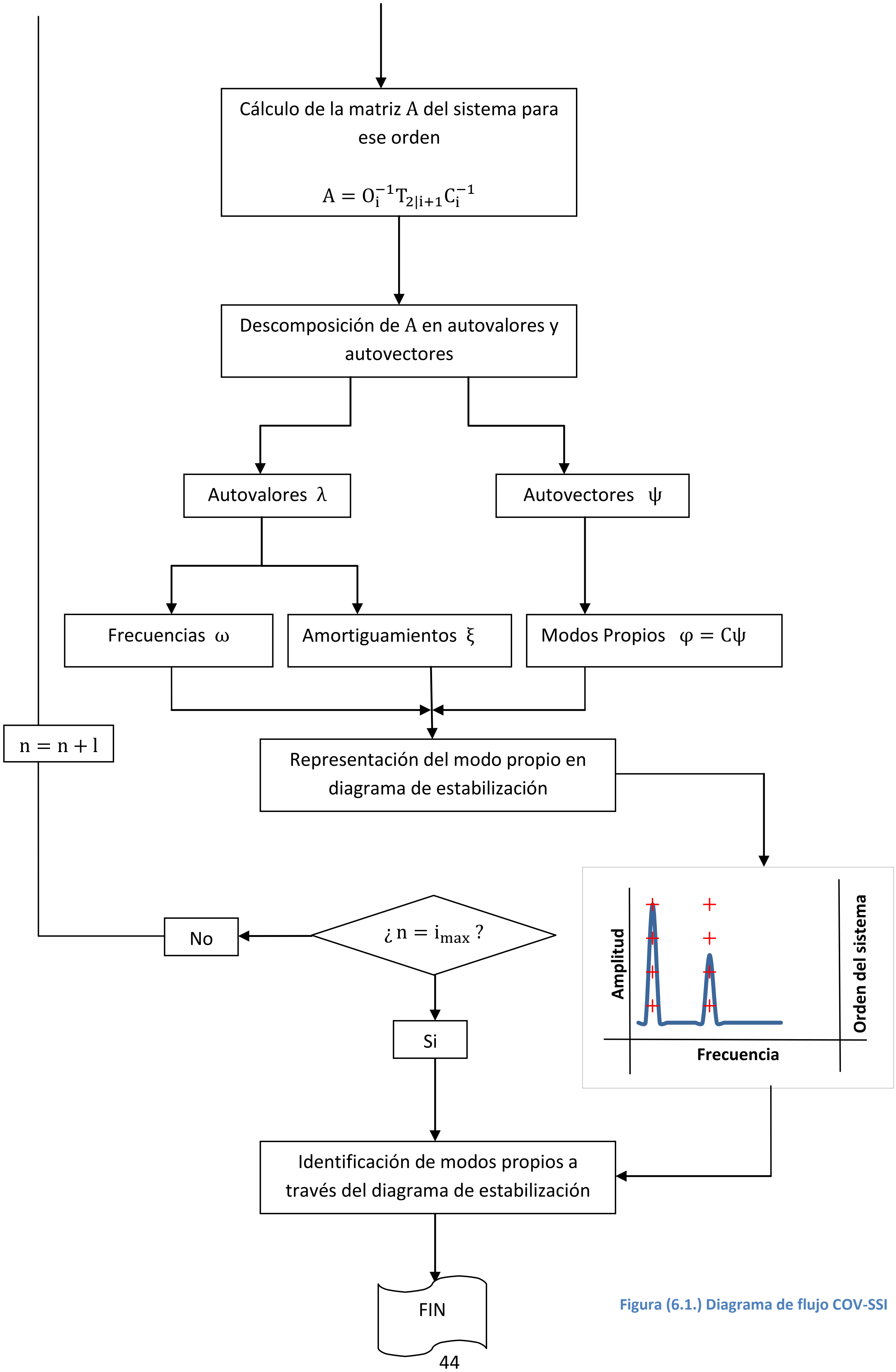


Figura (6.1.) Diagrama de flujo COV-SSI

INICIO

VARIABLES DE ENTRADA

- y_k: matriz con los datos de entrada
- i: orden máximo del sistema
- l: número de canales de medida
- f_m: frecuencia de muestreo empleada
- márgenes aceptados en frecuencias y amortiguamientos
- número de repeticiones en frecuencias y amortiguamientos para ser considerados estables

Lectura de datos

Creación de la matriz de Hankel Y

OBTENCIÓN DE LAS MATRICES PASADA Y_{hp} Y FUTURA Y_{hf}

$$Y_H = \begin{bmatrix} y_{1:N-2s} \\ y_{2:N-2s+1} \\ \vdots \\ y_{2s:N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{hp} \\ y_{hf} \end{bmatrix}$$

OBTENCIÓN DE LA MATRIZ O

$$O = y_{hf} y_{hp}^T (y_{hp} y_{hp}^T)^* y_{hp}$$

Se varía el orden del sistema y se calculan los parámetros modales para cada orden. Sólo se repetirán las frecuencias para los modos estables

$n = l$

DESCOMPOSICIÓN DE O EN VALORES SINGULARES

$$O = USV^T$$

Obtención de matriz de controlabilidad $\hat{\Gamma}$ y C

$$\hat{\Gamma} = U_1 S_1^{1/2} \qquad C = \hat{\Gamma}(1{:}\,l, :)$$

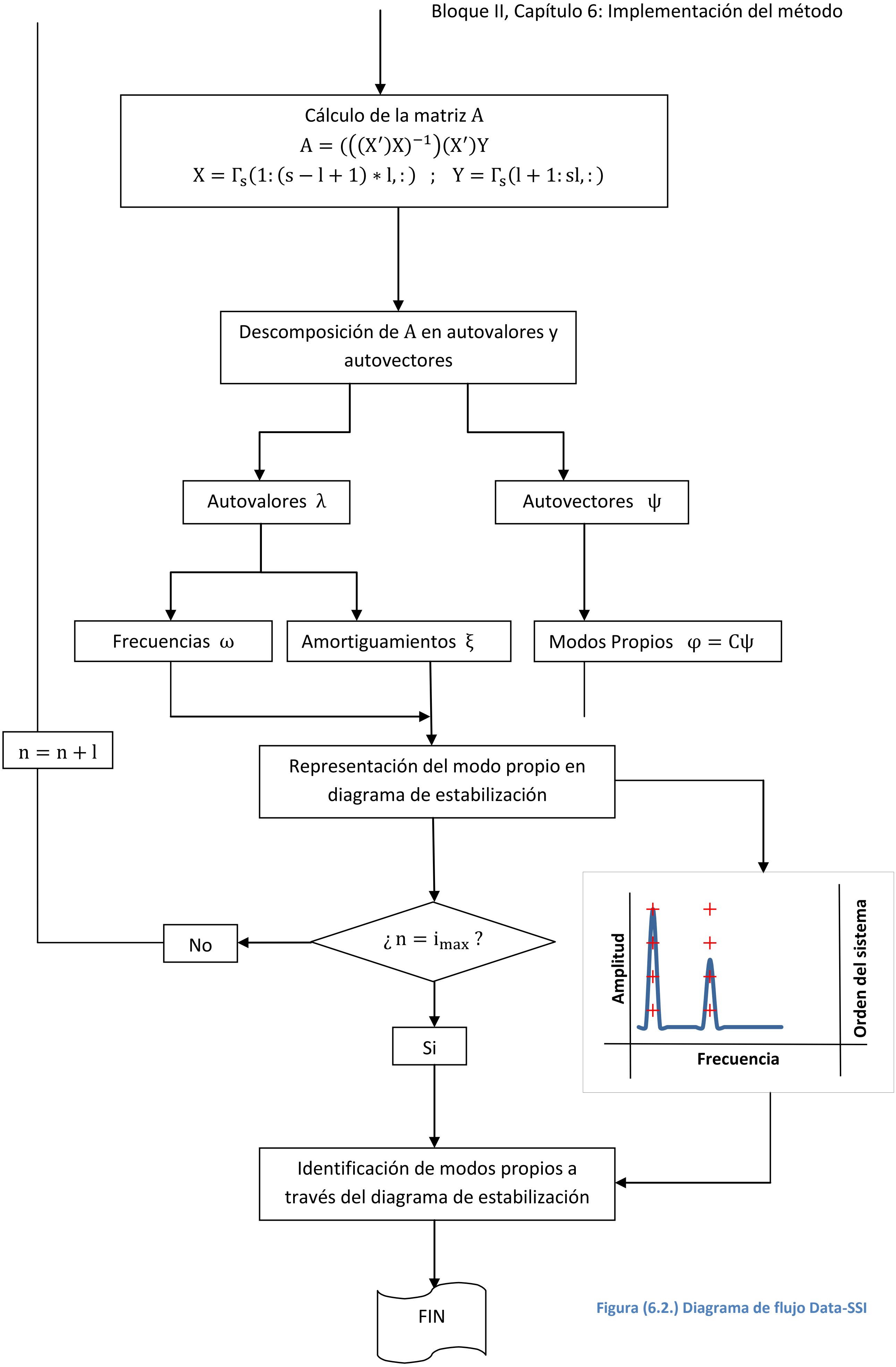


Figura (6.2.) Diagrama de flujo Data-SSI

6.2. COV-SSI

```
function[solucion]=COVSSI(data,i,l,tiempo_,fm,margen_frecuencias,margen_amort,
repeticiones_frec,repeticiones_amort)
```

La variable de salida es la matriz "solucion" que contiene los tríos frecuencia-amortiguamiento-modo propio calculados por el programa. Al hacer la llamada a la función debemos introducir los valores requeridos y se refieren a:

- "data" es la matriz que contiene los valores de la señal de entrada, que han sido calculados, o bien sintéticamente (con otro algoritmo programado, como se explica en el capítulo 7 de este TFC) o bien de forma experimental.
- "i" es el orden máximo del sistema.
- "l" es el número de canales de medida.
- "tiempo_" duración de la señal, en minutos.
- "fm" es la frecuencia de muestreo, muestras por unidad de tiempo, y se expresa en Hz.
- "margen_frecuencias" se refiere al porcentaje de error aceptado en el cálculo de las frecuencias estables, a menor valor más restrictivo es el algoritmo.
- "margen_amort" porcentaje de error que se acepta en el cálculo de los amortiguamientos.
- "repeticiones_frecuencia" es el número de veces que debe repetirse un valor de frecuencia (con el margen de error aceptado) para ser considerada estable.
- "repeticiones_amort" Ídem que para las frecuencias, pero para los amortiguamientos.

```
n=60*tiempo_*fm;                          %Puntos a estudiar.
```

"n" es el número de puntos escogidos en la discretización de la señal de entrada al algoritmo. Dependerá de la frecuencia de muestreo y el tiempo escogido para la señal. El factor de multiplicación "60" es para convertir los minutos de la señal en segundos.

```
h=1;
for f=1:1:l
    for c=1:1:l
        Entrada(h,:)=xcorr(data(f,:),data(c,:));
        h=h+1;
    end
end
clear h
```

Realizamos la operación de hallar la correlación entre los vectores que serán los datos con los que trabajaremos. Como vimos en el capítulo 5, el COV-SSI se basa en matrices de Toeplitz de correlaciones entre datos. A continuación se ordenan estos datos por dos razones. La primera es que no usaremos todos los valores y la segunda para una mayor facilidad a la hora de la programación.

```
for f=1:1:l*l
    for c=1:1:(n-1)
        Entrada_final(f,c)=Entrada(f,n+c);
    end
end
```

Realizamos la ordenación de los vectores. El comando “xcorr” nos generará un vector con todas las correlaciones entre los vectores de datos. Como solo vamos a usar una pequeña parte de estos datos para construir las matrices de Toeplitz ordenamos los datos de forma que sean los primeros los que usaremos.

Cuando ejecutamos la subrutina “xcorr” entre dos vectores de dimensión “N” y “M” obtendremos un vector de dimensión N*M-1 donde el valor central de este vector es la correlación de ambos vectores sin desplazar. Hacia la derecha estarían los valores de la correlación del vector “N” desplazando el vector “M” y hacia la izquierda el vector “M” desplazando el “N”. Como a nosotros solo nos interesaran los valores situados a la derecha del término central ordenamos los vectores eliminando el resto de valores.

```
matriz=cell(i,i);
```

Este comando crea una matriz que dentro contendrá matrices. Una matriz de Toeplitz se define por una fila y una columna así que hallaremos la primera fila y columna y compondremos la matriz

```
matriz=cell(i,i);
fila=cell(1,i);
bloque=zeros(l,l);
u=1;

for h=i:-1:1
    for f=1:1:l
        for c=1:1:l
            bloque(f,c)=Entrada_final(u,h);
            u=u+1;
        end
    end
    fila{1,i-h+1}=bloque;
    u=1;
end
```

Esta es la creación de la fila. Primero indicamos que es un vector de celdas y colocamos los datos dentro. El segundo bucle ordena la fila dentro de la matriz ya que nosotros hemos calculado la fila desde 1 hasta “i” y la matriz de Toeplitz va de “i” hasta 1. Primero creamos el bloque correspondiente y los vamos introduciendo uno a uno en la matriz.

```
for f=1:i
    matriz{1,f}=fila{1,f};
end

columna=cell(i,1);
for g=i:1:2*i-1
    for f=1:1:l
        for c=1:1:l
            bloque(f,c)=Entrada_final(u,g);
            u=u+1;
        end
    end
    columna{g-i+1,1}=bloque;
    u=1;
end
```

```
for m=1:i
    matriz{m,1}=columna{m,1};
end

for r=1:i
    for h=1:i
        matriz{r+1,h+1}=matriz{r,h};
    end
end
matriz1=matriz(1:i,1:i);
Toep1=cell2mat(matriz1);                    %Convertimos la celda en una
```

Esta es la creación de la columna y colocación dentro de la matriz. El segundo bucle nos repite los valores según las diagonales. Recordemos que una matriz de Toeplitz es constante en sus diagonales

```
Toep1=cell2mat(matriz1);
```

Este comando nos convierte las celdas (que en principio pueden ser cualquier cosa, letras, números, archivos etc.…) en números que es lo que estábamos buscando y así obtenemos nuestra matriz de Toeplitz final.

El siguiente paso es calcular la segunda matriz de Toeplitz. Como vimos antes es la misma matriz pero desfasada una posición, por lo que el proceso de hallar la matriz es el mismo que en el paso anterior introduciendo ese desfase, siendo el proceso de cálculo idéntico.

```
matriz=cell(i,i);

matriz=cell(i,i);
fila=cell(1,i);
bloque=zeros(l,l);
u=1;

for h=i:-1:1
    for f=1:1:l
        for c=1:1:l
            bloque(f,c)=Entrada_final(u,h+1);
            u=u+1;
        end
    end
    fila{1,i-h+1}=bloque;
    u=1;
end

for f=1:i
    matriz{1,f}=fila{1,f};
end

columna=cell(i,1);
for g=i:1:2*i-1
    for f=1:1:l
        for c=1:1:l
            bloque(f,c)=Entrada_final(u,g+1);
            u=u+1;
        end
    end
    columna{g-i+1,1}=bloque;
```

```
    u=1;
end

for m=1:i
    matriz{m,1}=columna{m,1};
end

for r=1:i
    for h=1:i
          matriz{r+1,h+1}=matriz{r,h};
    end
end

matriz2=matriz(1:i,1:i);
Toep2=cell2mat(matriz2);
```

Ahora que ya tenemos las dos matrices de Toeplitz debemos empezar el bucle que estabilice los datos para ello haremos las siguientes operaciones.

```
[U0,S0,V0]=svd(Toep1);
[U,S,V]=svd(Toep2);

for a=1:1:l*i
    S1=S0(1:a,1:a);
    U1=U0(1:l*i,1:a);
    V1=V0(1:a,1:a);

    S2=S(1:a,1:a);
    U2=U(1:l*i,1:a);
    V2=V(1:a,1:a);

    T1=U1*S1*V1';
    T2=U2*S2*V2';

    O1=U1*(S1^0.5);
    C1=(S1^0.5)*V1';

    C=O1(1:l,1:a);

    A=(pinv(O1))*T2*(pinv(C1));
    [Vectores,Valores]=eig(A);

    Acq=(diag(Valores))';
    Modos_Propios=C*Vectores; %Calculo de los modos propios

    for b=1:a
        Bcq(b)=(log(Acq(b)))*fm;
        Wcq(b)=abs(Bcq(b)); %Frecuencias
        Ecq(b)=(-real(Bcq(b)))/Wcq(b); %Amortiguamiento

        Frec_W(a,b)=Wcq(b);
        Amort_E(a,b)=Ecq(b);
    end
end

Frec_W;
Amort_E;
```

En primer lugar descomponemos las matrices de Toeplitz mediante el comando “SVD” que descompondrá ambas en sus respectivos valores singulares. Según lo visto en teoría en el capítulo 5, identificamos las matrices U,S,V y las matrices de observabilidad y controlabilidad según las fórmulas obtenidas. A continuación se halla la matriz “A” y se diagonaliza para poder obtener los modos, frecuencias y amortiguamientos propios. Repetiremos este bucle desde 1 hasta el orden máximo del sistema para calcular las frecuencias y modos en cada caso (orden 1, 2… hasta el máximo). Dado que un amortiguamiento negativo no tiene sentido diremos que si un amortiguamiento es negativo es como si fuera cero para ayudarnos a la hora de los cálculos posteriores.

```
for h=1:length(Amort_E)
    for k=1:length(Amort_E)
        if Amort_E(h,k)<0.0
            Amort_E(h,k)=0;
        end
    end
end
```

El siguiente paso nos muestra por pantalla la respuesta del sistema frente a la señal introducida en el eje “y” izquierdo mientras que en el derecho nos muestra las frecuencias calculadas, siendo el eje “x” común a ambos y representando la frecuencia. Para ello debemos volvemos a recuperar la respuesta ante el ruido de la señal y realizamos el gráfico de doble entrada.

```
X1=data(1,:);
a_inicial=fft(X1);
for f=1:1:n/2+1
    a(f)=a_inicial(f);
end
figure(3);
fr=linspace(0,fm/2,n/2+1);
w=2*pi*fr;
plot(w,abs(a),'Color','b');
xlabel('Frecuencia rad/s')
ylabel('Amplitud (g/Hz)')
ax1 = gca;
set(ax1,'XColor','b','YColor','b')


ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
           'XAxisLocation','top',...
           'YAxisLocation','right',...
           'Color','none',...
           'XColor','k','YColor','k');

hold on
for f=1:1:length(Frec_W)
    for c=1:length(Frec_W)
        plot(Frec_W(f,c),f,'k+');
    end
end
ylabel('Orden del sistema "n"')
```

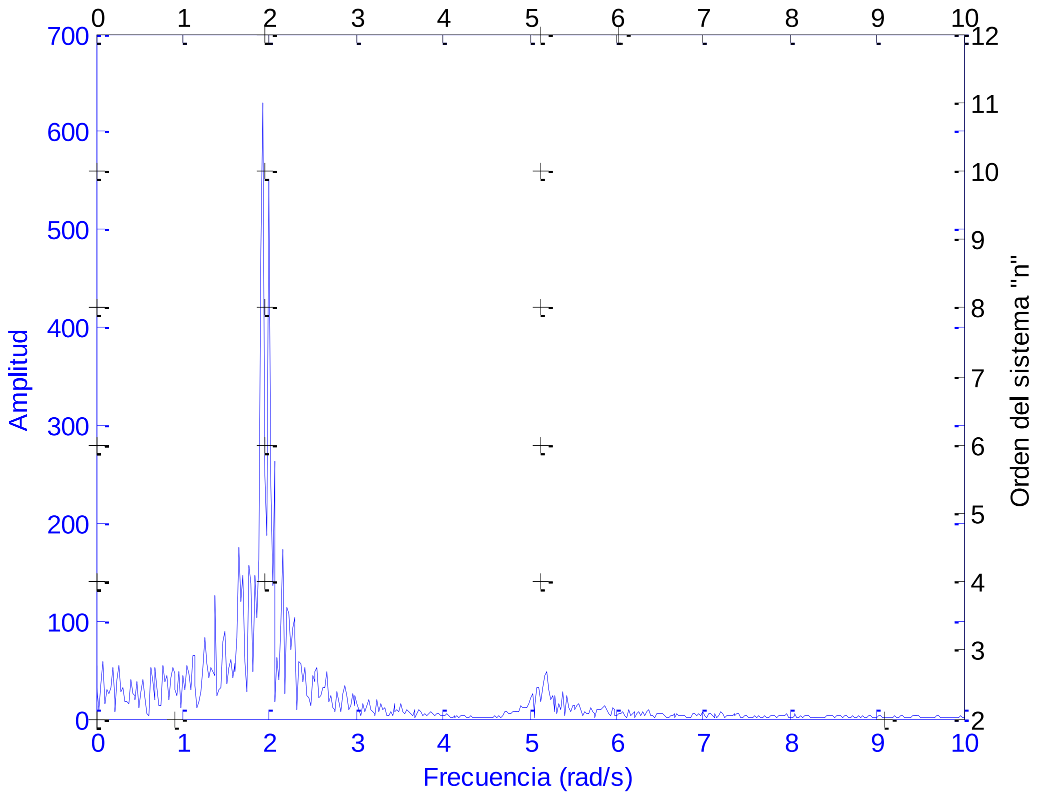


Figura (6.3.) Diagrama de estabilización (negro) y respuesta del sistema ante ruido blanco (azul)

Ahora que ya tenemos frecuencias para cada orden debemos obtener cuales son modos estables (reales, que existen) y cuáles no. Esto es lo que se denomina "diagramas de Estabilización". Para ello primeramente mostramos por pantalla los valores de cada frecuencia y amortiguamiento obtenido frente al orden del sistema. Solo mirando el diagrama podríamos saber a priori que modos son estables. Para graficarlos usamos la siguiente serie de comandos.

Los picos en la señal son las frecuencias estables y como vemos los puntos negros en la figura (6.4.) (que son los puntos obtenidos como hemos explicado) son las frecuencias para cada orden modal. Las frecuencias que se repiten están, efectivamente, sobre los picos mientras que las que no son estables aparecen dispersas por el gráfico.

Ahora debemos decidir que frecuencias son aptas de ser estables, para ello las comparamos unas con otras buscando aquellas que se repitan varias veces y estén dentro de un determinado margen de error que hemos determinado previamente en la cabecera del programa. Para ello realizamos el siguiente bucle:

```
for f=1:l*i
    for c=1:l*i
        for g=1:l*i
            for d=1:l*i
                limite_W=((Frec_W(f,c)-Frec_W(g,d))/Frec_W(f,c))*100;
                if abs(limite_W*margen)<=margen_frecuencias
                    Frec_W(g,d)=Frec_W(f,c);
                end
            end
        end
    end
end
```

Al ser un método de cálculo complicado y de muchos términos puede aparecer un cierto error entre resultados. Asumiremos que los datos desviados hasta el valor introducido en la cabecera son iguales (este valor es modificable en la cabecera del programa por el usuario). Por ejemplo si un valor de frecuencia es 5.113 y otro 5.112 podemos asumir que ambos valores son prácticamente iguales a la hora de estabilizar los resultados.

```
for f=1:l*i
    for c=1:l*i
        for g=1:l*i
            for d=1:l*i
                limite_W=((Frec_W(f,c)-Frec_W(g,d))/Frec_W(f,c))*100;
                if
abs(limite_W*margen_frecuencias)<=margen_frecuencias
                    Frec_W(g,d)=Frec_W(f,c);
                end
            end
        end
    end
end
```

Ahora que hemos identificado los posibles candidatos a estables los reducimos al número de valores que más se repiten, que teóricamente será el orden del sistema. Se considerará que una frecuencia es estable si se repite tantas o más veces como el número requerido en la cabecera por el usuario.

```
for s=1:length(No_Cero)
    h=0;
    for t=1:length(No_Cero)
        if No_Cero(s)==No_Cero(t)
            h=h+1;
            if h >= repeticiones_frec
                Estable(s)=No_Cero(s);
                repe(s)=h;
            end
        end
    end
end

No_Cero=nonzeros(Frec_W);
No_Cero=No_Cero';

Estable=Estable';
Estable=nonzeros(Estable);

W_Estable=union(Estable,Estable)
```

A continuación identificamos los datos de las matrices que son distintos de cero, ya que las matrices son triangulares inferiores y una frecuencia o amortiguamiento cero no tienen validez

El comando “unión” con los vectores entre sí mismos nos da los valores repetidos del vector, e independientemente del número de repeticiones nos lo muestra solo una vez.

Ahora pasaremos a identificar los amortiguamientos estables. El objetivo del programa es dar un trío de resultados (frecuencia, amortiguamiento y modos propios) para cada orden estable del sistema.

```
E_Estable=zeros(l*i,l*i);
F_Estable=zeros(l*i,l*i);
for j=1:length(W_Estable)
    for h=1:1:l*i
        for k=1:1:l*i
            if  abs(((W_Estable(j)-Frecuencias(h,k))/W_Estable(j))*100)
<=margen_frecuencias
                E_Estable(h,k)=Amort_E(h,k);
                F_Estable(h,k)=Frecuencias(h,k);
            end
        end
    end
end
```

Con nuestro vector de las frecuencias que podrían ser estables creamos dos matrices, una de frecuencias y otra de amortiguamientos, donde cada valor de amortiguamiento (fila,columna) se corresponde con su valor de frecuencia(fila,columna).

```
posibles=zeros(length(nonzeros(F_Estable)),2);

u=1;

for f=1:1:l*i
    for c=1:1:l*i
        if F_Estable(f,c)>0
            posibles(u,1)=F_Estable(f,c);
            posibles(u,2)=E_Estable(f,c);
            u=u+1;
        end
    end
end

f_posibles=posibles(:,1)
e_posibles=posibles(:,2)
```

Con este bucle se separa en dos vectores uno de frecuencias y otro de amortiguamientos que tienen posibilidades de ser estables donde cada posición del primero se corresponde con su amortiguamiento en el segundo.

El siguiente paso del programa es estabilizar los amortiguamientos. Para ello se irán comparando para cada frecuencia estable el valor de la frecuencia posible y si están dentro del límite se compararán los amortiguamientos. Si estos se repiten más de un cierto número de veces con un margen de error también definido por el usuario (a elegir por el usuario en cada caso, a más veces de repetición más restrictivo será el algoritmo) se considerará que ese amortiguamiento es estable y se hará la media entre todos los que cumplan esta condición para ser capaces de dar un solo valor lo más aproximado posible de amortiguamiento.

```
frecuency=zeros(length(f_posibles),2);


for j=1:1:length(W_Estable)
    for f=1:1:length(f_posibles)
        if abs(((W_Estable(j)-f_posibles(f))/W_Estable(j))*100) <=1.0
            p=1;
            for c=1:1:length(e_posibles)
```

```
                if                              abs(((W_Estable(j)-
f_posibles(c))/W_Estable(j))*100)    <=1.0    &&    abs(((e_posibles(f)-
e_posibles(c))/e_posibles(f))*100) <=5.0
                    p=p+1;
                    if p>3
                        frecuency(f,1)=f_posibles(f);
                        frecuency(f,2)=e_posibles(f);
                    end
                end
            end
        end
    end
end
frecuency

u=0;

for j=1:1:length(W_Estable)
    media=0;
    u=0;
    for f=1:length(frecuency)
        if abs(((W_Estable(j)-frecuency(f,1))/W_Estable(j))*100) <=1.0
            media=(media+frecuency(f,2));
            u=u+1;
        end
    end
    W_Estable(j,2)=media/u;
end
```

Ahora ya tenemos las parejas frecuencia-amortiguamiento, por lo que nos queda obtener los modos propios en cada caso. Para ello volveremos al vector “Wcq” obtenido en el bucle de obtención de la matriz “A” para cada orden del sistema. Como también se vio, en ese mismo bucle se calculó un vector llamado “Modos_Propios” que contiene los modos de cada frecuencia. A cada posición del vector de frecuencias le corresponde la columna de dicha posición por lo que solo tendremos que comparar en el vector “Wcq” con las frecuencias estables y extraer el modo propio de dicha frecuencia.

```
clear j
clear k
Modos=zeros(1,length(W_Estable));
u=1;
for j=1:1:length(W_Estable)
    for k=1:1:length(Wcq)
        if                                          abs((W_Estable(j)-
Wcq(k))/W_Estable(j))*100<margen_frecuencias
            Modos(:,u)=Modos_Propios(:,k);
            u=u+1;
        end
    end
end

Normalizados=zeros(1,length(Modos));
Modos=real(Modos);

for f=1:1:1
    for c=1:1:length(Modos)
        Normalizados(:,c)=Modos(:,c)/Modos(1,c);
    end
```

```
end

Normalizados

Parejas_Estables=W_Estable

E_Estable=W_Estable(:,2)
W_Estable=W_Estable(:,1)

Modos
```

El último paso es normalizar los modos propios refiriendo sus valores (por columnas) a uno de los elementos. Esto da una visión más clara de la forma y magnitud del modo propio.

Finalmente el programa nos muestra por pantalla los tríos que deseábamos obtener de frecuencia-amortiguamiento-modo propio ya normalizado.

```
solucion=[Parejas_Estables,Normalizados];

for f=1:1:length(W_Estable)
        if solucion(f,3)==0
            solucion(f,:)=[];
        end
end

solucion
```

Un ejemplo de gráfica de amortiguamiento y respuesta ante ruido blanco con diagrama de estabilización que se obtienen mediante esta función.

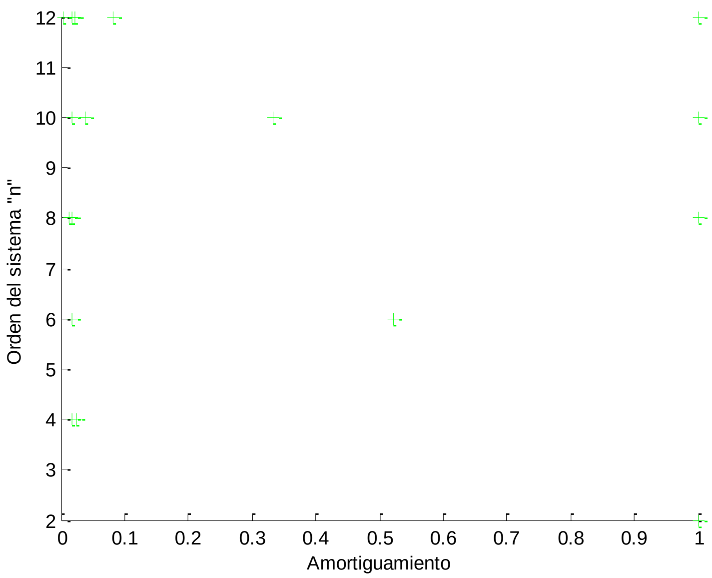


Figura (6.4.) Valores de amortiguamiento para cada frecuencia calculada

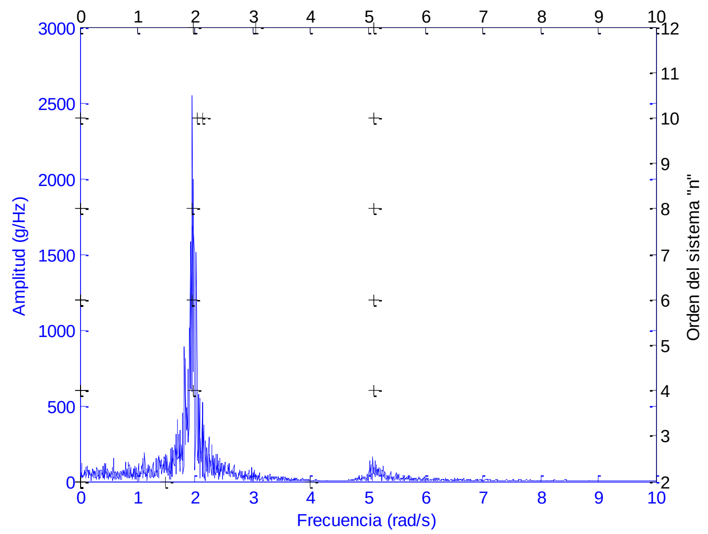


Figura (6.5.) Diagrama de estabilización (negro) y respuesta del sistema ante ruido blanco (azul)

Hay que señalar que está comparación se realizaría de una forma más ajustada introduciendo el parámetro “MAC”. Este parámetro nos da la correlación entre los modos propios por lo que el programa se podría mejorar comparando:

- Frecuencias, con un determinado porcentaje de error, si esto se cumple:
- Amortiguamientos, con otro margen de error y si se cumple finalmente:
- Parámetro “MAC” con su correspondiente porcentaje de error.

6.3. Sobre la introducción de ruido en la señal

En la lectura de datos reales no encontraremos una señal perfecta de excitación para el sistema, la señal estará contaminada con ruido por lo que “ensuciaremos” las muestras (introduciremos el ruido en la señal).

El SNR (Signal-to Noise-Ratio) se expresa mediante:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\mathrm{P(ruido)}}{\mathrm{P(señal)}} \tag{6.1}$$

Donde “P” es la relación entre los picos de una señal a otra (entre máximos de valor absoluto).

Para la introducción de ruido en la señal usaremos la formula explicada en el algoritmo de entrada de datos:

$$\mathrm{Input} = \mathrm{Input} + \mathrm{ruido} * \mathrm{SNR} * \frac{\max|\mathrm{Input}|}{\max|\mathrm{ruido}|} \tag{6.2}$$

Con esto conseguimos la señal de entrada buscada para nuestros algoritmos.

BLOQUE III:

Resultados

En este tercer bloque de este TFC se presentan los resultados obtenidos de las pruebas realizadas con el algoritmos diseñado, tanto con señales sintéticas pregeneradas como con el caso de una estructura real diseñada previamente. Se presentará y describirá cada caso y se expondrán tablas con los resultados de los ensayos, mostrándose gráficas de ejemplo obtenidas en cada uno de ellos.

Capítulo 7. Resultados a partir de señales sintéticas

7.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos con el programa COV-SSI para unos datos estructurales y de ruido blanco conocidos previamente, generados de forma sintética. Se generará la señal de entrada al algoritmo controlando los diferentes parámetros que intervienen en ella.

7.2. Generación de la respuesta de entrada al algoritmo

Para poder generar la entrada sintética debemos seguir una serie de pasos. En primer lugar se realizará la generación del ruido blanco requerido. Para ello se ha implementado una subrutina en Matlab que se explicará más adelante en este mismo capítulo.

Una vez generado el ruido, hay que obtener la respuesta del sistema ante el mismo. Para este paso debemos, primeramente, obtener la función de respuesta en frecuencia del sistema a estudiar. El estudio en frecuencia, como se vio en capítulos anteriores, presenta un estudio más claro y sencillo.

Finalmente, con la subrutina programada, obtenemos la respuesta del sistema ante el ruido blanco, tanto en función del tiempo como en función de la frecuencia, donde los picos de la gráfica corresponden a las frecuencias de vibración.

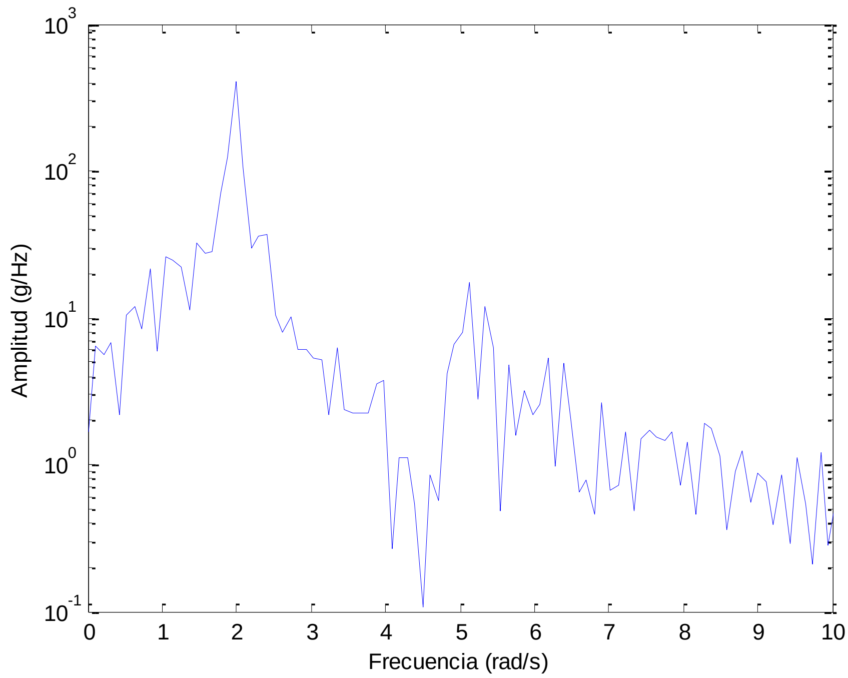


Figura (7.1.) Respuesta del sistema ante ruido blanco

Ahora pasaremos a explicar detalladamente la subrutina desarrollada.

Se trata de una función en la que el usuario tendrá que introducir una serie de variables que requiera el programa. La cabecera del programa es:

```
function [data] =
RespuestaSistema2GDLAnteRuidoBlanco(i,l,SNR,nu,K1,K2,m1,m2,tiempo_,fm)
```

En primer lugar el usuario introducirá las variables necesarias para la generación de la señal. Los parámetros que se repitan en el algoritmo COV-SSI deben tener el mismo valor (por ejemplo la frecuencia de muestreo). La variable de salida de la función programada es la matriz "data", que contiene los valores de la aceleración de cada grado de libertad del sistema frente al tiempo.

Las variables que debe introducir el usuario en cada caso están a la derecha y se refieren a:

- "i" es el orden máximo del sistema a estudiar.
- "l" es el número de canales de medida.
- SNR se refiere al Signal-to-Noise-Ratio, el ruido introducido a la señal de entrada.
- "nu" es el valor del amortiguamiento histerético elegido.
- K1 y K2 son las rigideces de los grados de libertad 1 y 2 respectivamente y se expresa en N/m.
- m1 y m2 son las masas de los grados de libertad 1 y 2 respectivamente expresadas en kg.
- "tiempo_" duración de la señal en minutos.
- "fm" es la frecuencia de muestreo (numero de lecturas por unidad de tiempo) y se da en Hercios Hz.

Ahora el programa ejecutará las órdenes requeridas.

```
n=60*tiempo_*fm;             %Numero de puntos.
T=n/fm;                      %Periodo de la señal.
fny=fm/2;                    %Frec. Nyquist.
y=wgn(1,n,1);                %Generacion del vector de ruido.
Y=fft(y);                    %Transformada del vector de ruido.
t=linspace(0,T,n);           %Identificacion en el dominio del tiempo.
f=linspace(0,fny,n/2+1);     %Identificacion en el dominio de la
                             %frecuencia.
```

"n" se refiere al número de puntos que existirá en el intervalo de tiempo en el que hagamos la lectura de datos. Por comodidad y facilidad de cálculos se suele tomar un número múltiplo de dos.

"T" se refiere al periodo de la señal y viene definido por la fórmula que le sigue.

"fny" es la frecuencia de Nyquist. Por el teorema de muestreo, para que la discretización de la señal sea correcta, la frecuencia de Nyquist tiene que ser como máximo, la mitad de la frecuencia de muestreo de la señal.

```
y=wgn(1,nfft,1); %Generacion del vector de ruido
```

Esta subrutina está ya implementada en Matlab. Generará un vector de ruido blanco (como ya se explico el ruido blanco contiene todas las frecuencias del espectro, por lo que excitará cualquier estructura sea n cuales sean sus frecuencias de vibración) de 1 columna, que contendrá "nfft" puntos y con una intensidad de 1dB. En la práctica lo que se haría es directamente someter a la estructura a ruido blanco y con los aparatos de medida obtendríamos directamente las lecturas de la excitación de la estructura a estudiar.

```
Y=fft(y); %Transformada del vector de ruido
```

Hacemos la transformada del vector ruido para poder hacer el análisis en frecuencia

```
t=linspace(0,T,nfft); %Identificacion en el dominio del tiempo
f=linspace(0,fny,nfft/2+1); % Identificacion en el dominio de la
frecuencia
```

Ahora tenemos que identificar ambos dominios en el que se va a realizar el estudio, tiempo y frecuencia. En el dominio del tiempo basta con decir que para el intervalo (0;T) tendré "n" puntos.

Para identificar el dominio de la frecuencia volvemos a hacer uso del teorema de muestreo y la frecuencia de Nyquist. Al hacer una transformada de Fourier Matlab internamente no es capaz de generar los valores negativos en el eje de frecuencias, por lo que generaremos la parte positiva de la señal y al ser simétrica la reproduciremos nosotros en la parte negativa

```
k1=K1*(1+2*nu*i);
k2=K2*(1+2*nu*i);
```

Aquí el programa calcula las rigideces (incluyendo el amortiguamiento histerético) con los datos introducidos por el usuario en la cabecera, estando el amortiguamiento implícito en la rigidez de cada elemento.

```
w=2*pi*f; %Vector de omegas
```

Como a cada valor del eje “f” de identificación en el dominio de la frecuencia le corresponde un valor de “w” debemos calcularlos.

```
w1=((m1*k2+m2*k1+m2*k2)-((((m1*k2+m2*k1+m2*k2)^2)-
(4*m1*m2*k1*k2))^0.5))/(2*m1*m2);
w1=w1^0.5;    %Calculo de la w1

w2=((m1*k2+m2*k1+m2*k2)+((((m1*k2+m2*k1+m2*k2)^2)-
(4*m1*m2*k1*k2))^0.5))/(2*m1*m2);
w2=w2^0.5;    %Calculo de la w2
```

Este cálculo es para saber los valores de las frecuencias de resonancia para poder luego compararlos con los de los algoritmos y estudiar si son correctos.

```
A=[m1;m2]*Y;
K=[k1+k2,-k2;-k2,k2]; %Matriz de rigidez
M=[m1,0;0,m2];  %Matriz de masas
```

Estas son las matrices con las que trabajará el algoritmo, matriz de masas, de rigideces y la matriz de término independiente.

Ahora tendremos un sistema de ecuaciones determinado que tendremos que resolver, ya que para cada valor de frecuencia tendremos un valor de variable independiente. Realizamos un bucle que generara el vector de desplazamientos “U1” y “U2” identificados en el dominio de la frecuencia.

```
for  l=1:nfft/2+1    %Bucle para la obtencion de los vectores de
resultados U1 y U2
    P=K-(w(l)^2)*M;
    C=M*[1;1];
    B=C*Y(l);
    R=linsolve(P,B);
    U1(l)=R(1,1);
    U2(l)=R(2,1);
end
```

El programa Matlab recompone la señal completa al hacer la transformación inversa, para identificar la señal en el dominio del tiempo, para recomponerla debemos obtener la parte positiva de los valores y al hacer la transformación inversa el propio programa regenera la señal.

```
preal1=U1;
preal2=U2;
for j=1:nfft/2-1
    preal1(nfft/2+1+j)=conj(preal1(nfft/2+1-j));
    preal2(nfft/2+1+j)=conj(preal2(nfft/2+1-j));
end

preal1(1)=real(preal1(1));
preal2(1)=real(preal2(1));

preal1(nfft/2+1)=real(preal1(nfft/2+1));
preal2(nfft/2+1)=real(preal2(nfft/2+1));
```

Ahora ya solo nos falta hacer la transformada inversa de los vectores de resultados y obtendremos la señal (output) de nuestro sistema pregenerado y representarla.

```
x1=ifft(preal1);
x2=ifft(preal2);
figure(2)
plot(t,x1,'g',t,y)                 %Se grafica la señal obtenida.
xlabel('tiempo (segundos)');
ylabel('Desplazamiento (g)');
```

Finalmente introducimos el ruido requerido en la cabecera con la operación:

```
vector_ruido=wgn(1,n,1);           %Generacion del vector de ruido.
ruido1=(vector_ruido/max(abs(vector_ruido)))*(abs(max(x1)))*SNR;
ruido2=(vector_ruido/max(abs(vector_ruido)))*(abs(max(x2)))*SNR;

x1=x1+ruido1;                      %Añadimos el ruido a la señal.
x2=x2+ruido2;
```

El último paso es guardar en la matriz de salida del algoritmo “data” los valores obtenidos.

```
data(1,:)=x1;
data(2,:)=x2;

save ('data','data');              %Guardamos los resultados.
```

Las gráficas obtenidas son las que se muestran a continuación.

En azul se observa la respuesta de la estructura en cada instante de tiempo y en verde la señal de entrada.

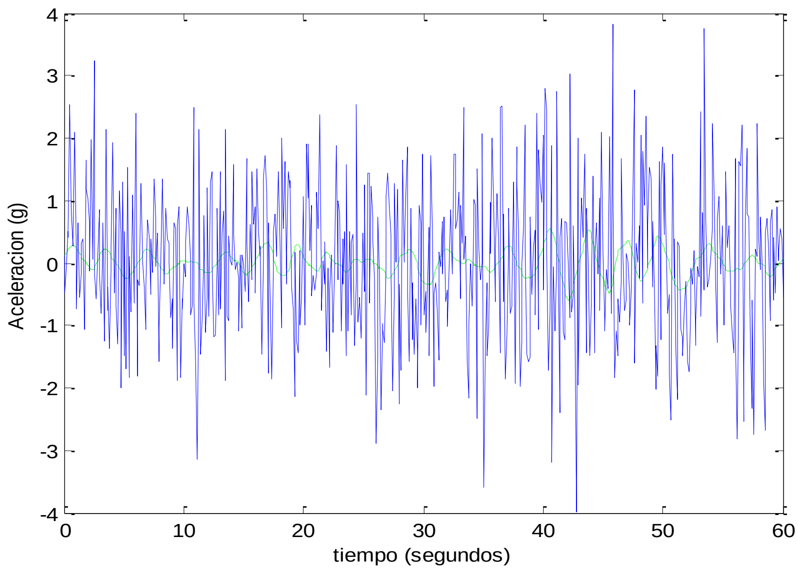


Figura (7.2.) (Azul) Input, ruido blanco (Verde) output del gdl 1

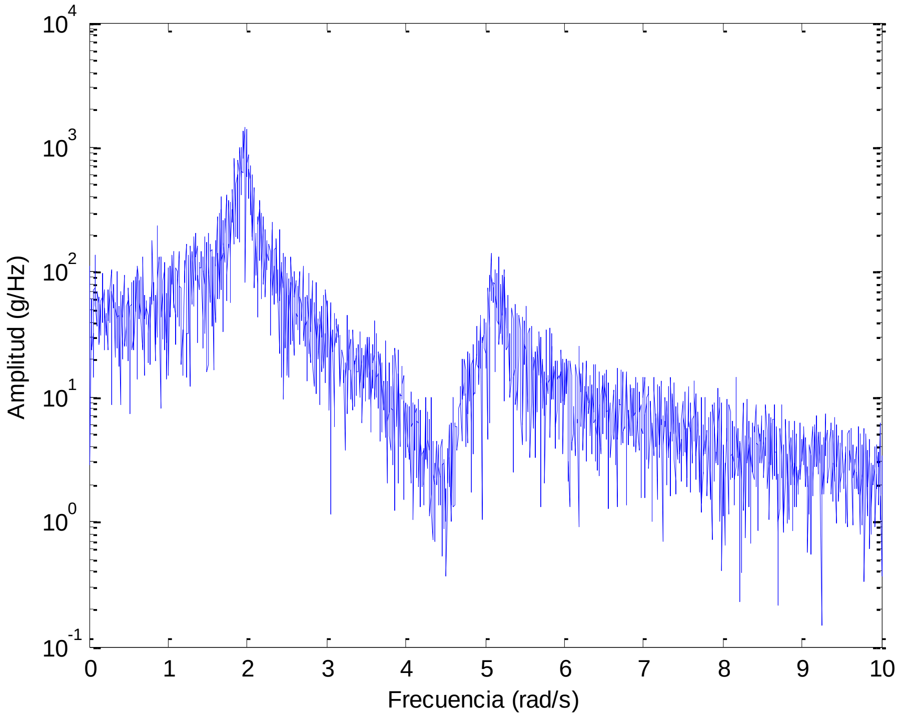


Figura (7.3.) Respuesta del sistema ante ruido blanco en frecuencia

7.3. Frecuencias naturales para modelos de dos grados de libertad

Para la identificación de las frecuencias naturales usaremos las expresiones matemáticas de gobierno de la respuesta dinámica de estructuras. Como vimos en el capítulo 2 la ecuación para una vibración libre amortiguada viene dada por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{7.1}$$

Para la vibración libre de un sistema de dos grados de libertad el desarrollo de la ecuación de gobierno lleva a:

$$\left|\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\right| = 0 \tag{7.2}$$

$$w^4(m_1 m_2) + \omega^2(-k_1 m_2 - k_2 m_2 - k_2 m_1) + 2k_1 \tag{7.3}$$

Esto es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) + 2k_1 = 0 \tag{7.4}$$

Cuya solución será:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)^2 - 4\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}}{2}} \tag{7.5}$$

Al ser las barras idénticas (misma rigidez “k”) podemos simplificar a:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) \pm \frac{k}{2}\sqrt{\frac{4}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}}} \tag{7.6}$$

Y de aquí extraemos las frecuencias naturales del sistema finalmente:

$$\omega_{n_1} = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) - \frac{k}{2}\sqrt{\frac{4}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}}} \tag{7.7}$$

$$\omega_{n_2} = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) + \frac{k}{2}\sqrt{\frac{4}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}}} \tag{7.8}$$

7.4. Resultados señal sintética, $\mathbf{m_1 = m_2 = 10\ kg}$, $\mathbf{k_1 = k_2 = 100}$

En este trabajo fin de carrera se han elegido dos modelos para su estudio paramétrico y estudio del rango de aplicación de los algoritmos diseñados. Se eligieron dos modelos de dos grados de libertad, siendo uno de ellos construido físicamente para la toma de datos reales.

El primer modelo se ha construyó en primer momento (con la configuración que muestra la figura 7.4.) para hacer las primeras pruebas y sus características son:

- $k_1 = 100\ \ \mathrm{N/m}$; $k_2 = 100\,\mathrm{N/m}$
- $m_1 = 10\ \ \mathrm{kg}$; $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$
- $\xi_1 = 0.02$; $\xi_2 = 0.02$

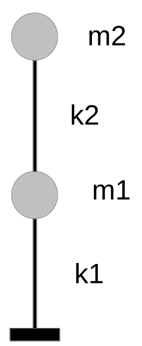


Figura (7.4.) Configuración del sistema de 2 gdl

Con estos datos se generan las matrices de rigidez (con el amortiguamiento histerético incluido en ella), de masas y la matriz de términos independientes.

Para este modelo la solución exacta de frecuencias y modos propios (para m1=m2=10kg, k1=k2=100) es:

w1 rad/s	w1 Hz	w2 rad/s	w2 Hz	Modo 1	Modo 2
1,9545	0,311	5,1166	0,8143	(1 , 1,618)	(1 , -0,618)

Tabla (7.1.) Cálculos teóricos de la estructura pregenerada (m1=m2=10kg ; k1=k2=100)

Con el ruido blanco sintético obtenido con la subrutina explicada en este capítulo introducimos la respuesta del sistema ante dicho ruido (matriz "data" obtenida) en el programa COV-SSI, y con esto obtenemos las frecuencias amortiguamientos y modos propios para su análisis.

Se varió:

- El ruido introducido en la señal de ruido blanco (0, 1%, 2% y 5%)
- El tiempo de duración de la señal (1, 2, 5, 10 y 20 minutos)
- La frecuencia de muestreo (10, 15, 20, 50, 100 Hz)

Se muestran también, a modo de ejemplo, algunos diagramas de estabilización y respuesta en tiempo para ilustrar los resultados.

7.4.1. Pruebas para señal sintética sin ruido añadido

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		1									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	600	1,977 5,121	0,050 0,020	1, 1.622 1, -0.555	1,951 5,125	0.017 0.014	1, 1,616 1, -0,782	1,920 5,109	0.054 0.030	1, 1.614 1, -0.745
$3f_2$	15	900	2,026 5,044	0,062 0,027	1, 1.630 1, -0.808	1,965 5,025	0.036 0.053	1, 1,613 1, -0,627	1,869 5,178	0.062 0.030	1, 1.638 1, -0.267
$5f_2$	25	1500	1,958 5,003	0,044 0,040	1, 1.616 1, -0.686	2,014 5,081	0.039 0.019	1, 1,628 1, -0,755	1,942 5,029	0.027 0.032	1, 1.616 1, -1.010
$10f_2$	50	3000	1,897 5,158	0,063 0,027	1, 1.606 1, -0.294	1,943 5,073	0.030 0.018	1, 1,616 1, -0,759	1,889 5,106	0.069 0.022	1, 1.608 1, -0.499
$20f_2$	100	6000	1,967 5,049	0,098 0,020	1, 1.031 1, -0.777	1,955 5,116	0.0269 0.017	1, 1,674 1, -0,624	1,967 5,116	0.020 0.025	1, 1.619 1, -0.045

Tabla (7.1.) Pruebas para t=1minuto, SNR=0%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		2									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	1200	1,945 5,131	0,013 0,033	1, 1.615 1, -0.137	1,923 5,117	0.064 0.017	1, 1,614 1, -0,760	1,973 5,143	0.029 0.025	1, 1.621 1, -0.345
$3f_2$	15	1800	1,957 5,104	0,034 0,030	1, 1.618 1, -0.304	1,950 5,139	0.024 0.031	1, 1,61 1, -0,244	1,946 5,103	0.016 0.020	1, 1.616 1, -0.652
$5f_2$	25	3000	1,897 5,127	0,022 0,018	1, 1.609 1, -0.594	1,979 5,094	0.019 0.022	1, 1,621 1, -0,672	1,928 5,131	0.030 0.013	1, 1.613 1, -0.600
$10f_2$	50	6000	1,959 5,113	0,022 0,019	1, 1.618 1, -0.626	1,962 5,091	0.038 0.020	1, 1,619 1, -0,578	1,969 5,153	0.015 0.020	1, 1.620 1, -0.520
$20f_2$	100	12000	1,951 5,102	0,022 0,020	1, 1.617 1, -0.721	2,002 5,126	0.039 0.034	1, 1,738 1, -0,313	1,892 5,154	0.054 0.019	1, 2.134 1, -0.470

Tabla (7.2.) Pruebas para t=2minutos, SNR=0%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		5									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	3000	1,963 5,100	0,023 0,021	1, 1.619 1, -0.810	1,961 5,135	0.018 0.016	1, 1,616 1, -0,867	1,958 5,114	0.012 0.015	1, 1.614 1, -0.844
$3f_2$	15	4500	1,964 5,126	0,018 0,017	1, 1.617 1, -0.708	1,961 5,117	0.027 0.022	1, 1,619 1, -0,606	1,969 5,152	0.022 0.020	1, 1.622 1, -0.624
$5f_2$	25	7500	1,958 5,137	0,020 0,019	1, 1.618 1, -0.580	1,958 5,143	0.019 0.015	1, 1,618 1, -0,576	1,943 5,099	0.023 0.030	1, 1.616 1, -0.594
$10f_2$	50	15000	1,948 5,116	0,036 0,020	1, 1.616 1, -0.669	1,957 5,108	0.025 0.026	1, 1,619 1, -0,335	1,940 5,128	0.025 0.023	1, 1.615 1, -0.545
$20f_2$	100	30000	1,968 5,110	0,012 0,022	1, 1.619 1, -0.557	1,956 5,136	0.015 0.025	1, 1,618 1, -0,146	1,950 5,103	0.027 0.019	1, 1.662 1, -0.785

Tabla (7.3.) Pruebas para t=5minutos, SNR=0%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		10									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	6000	1,951 5,151	0,020 0,022	1, 1.617 1, -0.525	1,942 5,120	0.012 0.019	1, 1,613 1, -0,610	1,956 5,131	0.020 0.021	1, 1.617 1, -0.522
$3f_2$	15	9000	1,949 5,123	0,029 0,022	1, 1.617 1, -0.526	1,962 5,147	0.018 0.017	1, 1,617 1, -0,594	1,956 5,121	0.017 0.019	1, 1.617 1, -0.625
$5f_2$	25	15000	1,960 5,107	0,016 0,017	1, 1.619 1, -0.660	1,956 5,127	0.018 0.022	1, 1,618 1, -0,606	1,959 5,129	0.016 0.016	1, 1.618 1, -0.601
$10f_2$	50	30000	1,960 5,099	0,022 0,021	1, 1.618 1, -0.643	1,967 5,109	0.017 0.017	1, 1,619 1, -0,728	1,965 5,127	0.018 0.017	1, 1.619 1, -0.704
$20f_2$	100	60000	1,965 5,127	0,028 0,018	1, 1.685 1, -0.847	1,968 5,114	0.021 0.023	1, 1,623 1, -0,410	1,967 5,129	0.019 0.017	1, 1.603 1, -0.839

Tabla (7.4.) Pruebas para t=10minutos, SNR=0%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		20									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	12000	1,954 5,128	0,022 0,018	1, 1.618 1, -0.708	1,960 5,131	0.018 0.023	1, 1,618 1, -0,500	1,959 5,106	0.019 0.020	1, 1.618 1, -0.620
$3f_2$	15	18000	1,951 5,112	0,025 0,017	1, 1.618 1, -0.720	1,960 5,138	0.019 0.020	1, 1,618 1, -0,538	1,965 5,137	0.018 0.017	1, 1.618 1, -0.664
$5f_2$	25	30000	1,952 5,114	0,026 0,018	1, 1.617 1, -0.633	1,953 5,097	0.023 0.021	1, 1,617 1, -0,671	1,961 5,121	0.018 0.018	1, 1.618 1, -0.610
$10f_2$	50	60000	1,953 5,117	0,018 0,019	1, 1.617 1, -0.653	1,952 5,122	0.015 0.021	1, 1,617 1, -0,603	1,956 5,115	0.020 0.019	1, 1.618 1, -0.671
$20f_2$	100	120000	1,961 5,114	0,020 0,020	1, 1.616 1, -0.623	1,962 5,121	0.015 0.021	1, 1,618 1, -0,508	1,952 5,113	0.027 0.021	1, 1.665 1, -0.456

Tabla (7.5.) Pruebas para t=20minutos, SNR=0%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Una señal de muestra para ausencia de ruido se presentaría como en la gráfica (en verde):

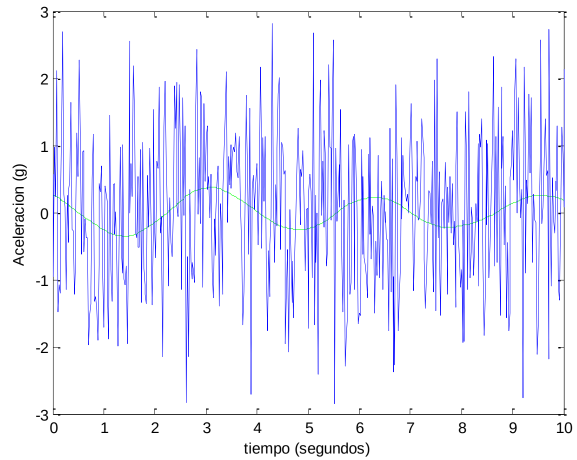


Figura (7.5.) Input (azul) Output del grado de libertad 1 (verde)

A continuación se muestran las gráficas obtenidas, para diferentes tiempos de duración de la señal. Para la representación se escogió una frecuencia de muestreo de 50 Hz.

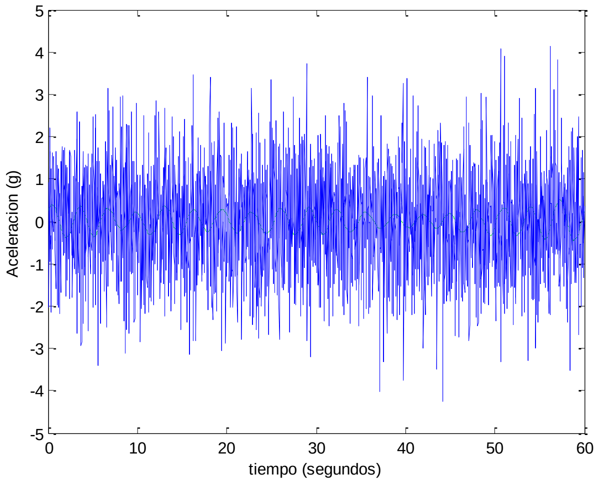


Figura (7.6.) Respuesta del sistema en tiempo (1min), SNR=0%

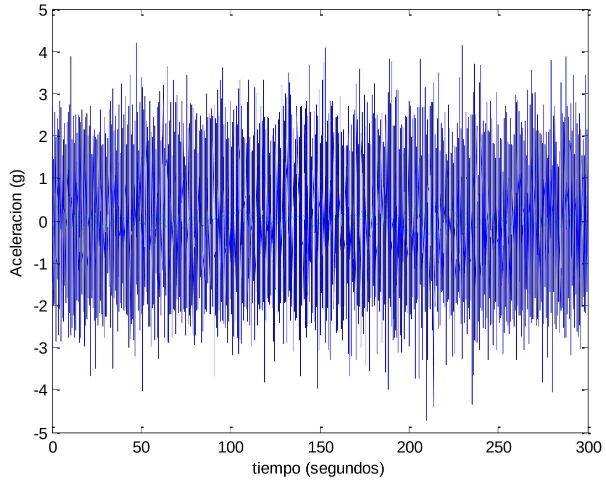


Figura (7.7.) Respuesta del sistema en tiempo (5min), SNR=0%

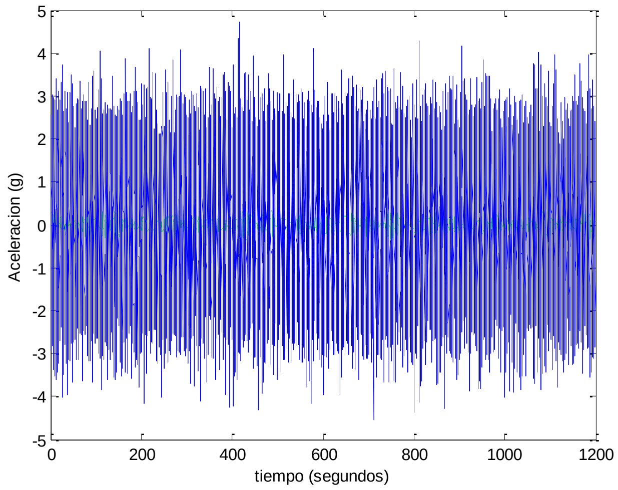


Figura (7.8.) Respuesta del sistema en tiempo (20min) SNR=0%

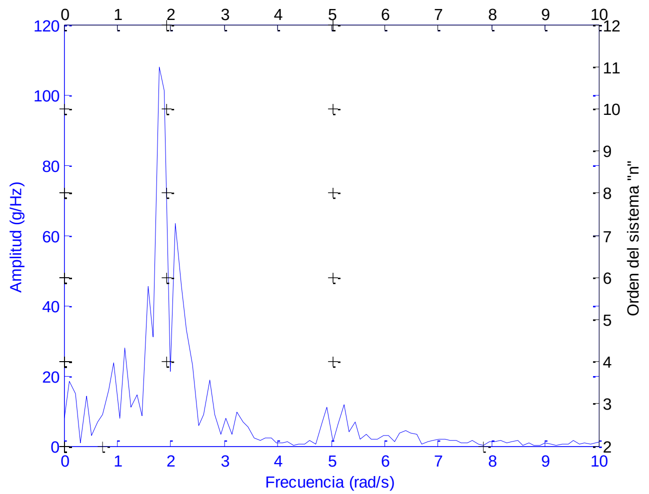


Figura (7.9.) Diagrama de estabilización en frecuencias. Duración de la señal de entrada (1min)

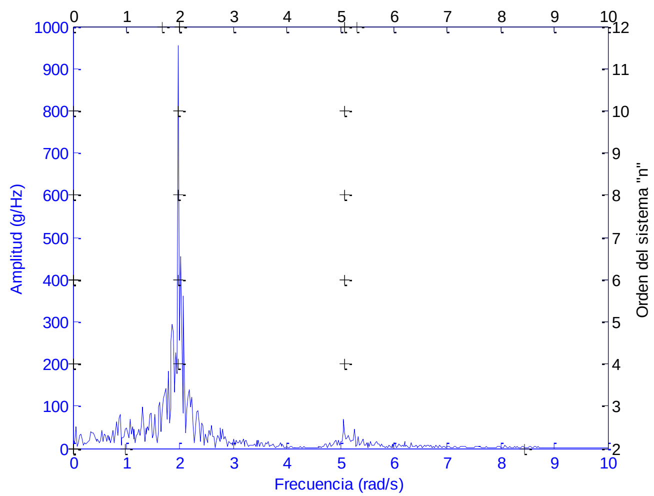


Figura (7.10.) Diagrama de estabilización en frecuencias. Duración de la señal de entrada (5min)

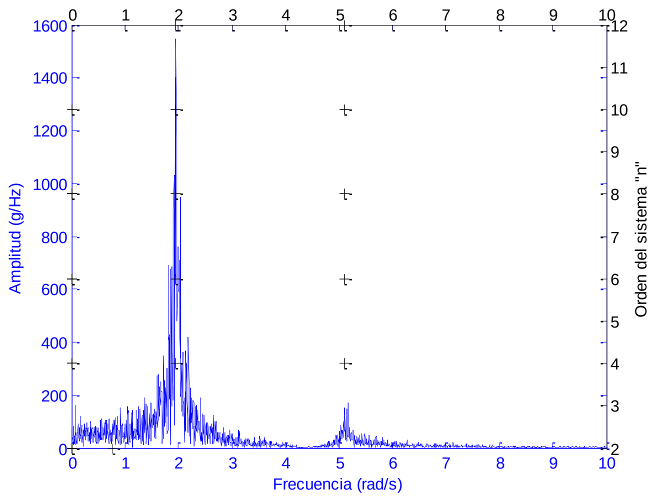


Figura (7.11.) Diagrama de estabilización en frecuencias. Duración de la señal de entrada (20min)

7.4.2. Pruebas para signal-to-noise ratio del 1%

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		1									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	600	2,000 5,079	0,032 0,029	1, 1.623 1, -0.501	1,974 5,082	0.042 0.030	1, 1.626 1, -0.954	1,924 5,142	0.038 0.035	1, 1.618 1, -0.432
$3f_2$	15	900	1,906 5,097	0,037 0,040	1, 1.612 1, -0.205	1,986 5,068	0.041 0.033	1, 1.621 1, -0.998	1,950 5,001	0.035 0.033	1, 1.619 1, -0.756
$5f_2$	25	1500	1,992 5,109	0,045 0,021	1, 1.621 1, -0.800	1,936 5,122	0.032 0.024	1, 1.616 1, -0.584	1,948 5,110	0.026 0.020	1, 1.621 1, -0.886
$10f_2$	50	3000	1,968 5,130	0,027 0,015	1, 1.619 1, -0.586	1,999 5,143	0.067 0.026	1, 1.810 1, -0.808	1,892 5,149	0.041 0.011	1, 1.657 1, -0.962
$20f_2$	100	6000	1,974 5,032	NaN 0,035	1, 0.726 NaN, NaN	1,891 5,123	NaN 0.026	1, 2.730 1, -0.272	1,892 5,146	0.047 0.026	1, 1.725 1, -0.302

Tabla (7.6.) Pruebas para t=1minuto, SNR=1%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**Tiempo (minutos)**									
		2									
			Prueba 1			**Prueba 2**			**Prueba 3**		
		nfft	**Frecuencias**	**Amortiguamientos**	**Modos Propios**	**Frecuencias**	**Amortiguamientos**	**Modos Propios**	**Frecuencias**	**Amortiguamientos**	**Modos Propios**
$2f_2$	**10**	**1200**	1,973 5,094	0,022 0,015	1, 1.620 1, -1.140	1,955 5,079	0.021 0.025	1, 1.618 1, -0.887	1,975 5,082	0.022 0.023	1, 1.621 1, -0.567
$3f_2$	**15**	**1800**	1,948 5,161	0,024 0,030	1, 1.616 1, -0.218	1,978 5,043	0.025 0.030	1, 1.620 1, -0.441	1,961 5,108	0.026 0.011	1, 1.613 1, -0.840
$5f_2$	**25**	**3000**	1,948 5,084	0,044 0,025	1, 1.617 1, -0.689	1,963 5,138	0.064 0.015	1, 1.620 1, -0.569	1,945 5,155	0.028 0.026	1, 1.618 1, -0.474
$10f_2$	**50**	**6000**	1,951 5,091	0,018 0,018	1, 1.616 1, -0.853	1,951 5,099	0.023 0.024	1, 1.616 1, -0.684	1,939 5,164	0.027 0.020	1, 1.615 1, -0.509
$20f_2$	**100**	**12000**	1,969 5,090	0,013 0,026	1, 1.619 1, -0.296	1,972 5,100	NaN 0.021	1, 1.619 1, -0.213	5,084	0.021	1, -0.400

Tabla (7.7.) Pruebas para t=2minutos, SNR=1%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		5									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	3000	1,972 5,151	0,017 0,020	1, 1.615 1, -0.545	1,947 5,123	0.022 0.016	1, 1.618 1, -0.943	1,958 5,109	0.021 0.021	1, 1.617 1, -0.659
3	15	4500	1,961 5,143	0,020 0,029	1, 1.618 1, -0.327	1,952 5,111	0.023 0.017	1, 1.618 1, -0.757	1,959 5,136	0.014 0.019	1, 1.614 1, -0.589
$5f_2$	25	7500	1,955 5,125	0,014 0,025	1, 1.607 1, -0.558	1,955 5,120	0.021 0.024	1, 1.617 1, -0.638	1,974 5,066	0.019 0.017	1, 1.620 1, -0.812
$10f_2$	50	15000	1,940 5,110	0,027 0,017	1, 1.616 1, -0.806	1,968 5,112	0.019 0.018	1, 1.619 1, -0.721	1,962 5,124	0.018 0.019	1, 1.619 1, -0.609
$20f_2$	100	30000	1,943 5,116	0,040 0,029	1, 1.667 1, 0.058	1,952 5,134	0.025 0.016	1, 1.628 1, -0.896	1,957 5,140	0.030 0.027	1, 1.655 1, 0.021

Tabla (7.8.) Pruebas para t=5minutos, SNR=1%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		10									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	6000	1,952 5,106	0,020 0,020	1, 1.617 1, -0.653	1,950 5,103	0.019 0.019	1, 1.617 1, -0.750	1,959 5,119	0.023 0.020	1, 1.618 1, -0.676
$3f_2$	15	9000	1,949 5,131	0,015 0,020	1, 1.613 1, -0.560	1,951 5,118	0.027 0.022	1, 1.621 1, -0.574	1,960 5,158	0.014 0.023	1, 1.614 1, -0.416
$5f_2$	25	15000	1,957 5,118	0,013 0,019	1, 1.618 1, -0.633	1,956 5,116	0.016 0.020	1, 1.617 1, -0.626	1,951 5,146	0.022 0.018	1, 1.617 1, -0.547
$10f_2$	50	30000	1,961 5,130	0,015 0,020	1, 1.618 1, -0.595	1,955 5,117	0.028 0.020	1, 1.618 1, -0.630	1,964 5,123	NaN 0.019	1, 1.619 1, -0.598
$20f_2$	100	60000	1,951 5,108	0,023 0,021	1, 1.611 1, -0.565	1,953 5,110	0.020 0.022	1, 1.621 1, -0.373	1,955 5,132	0.017 0.017	1, 1.603 1, -0.791

Tabla (7.9.) Pruebas para t=10minutos, SNR=1%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**Tiempo (minutos)**									
		20									
			Prueba 1			**Prueba 2**			**Prueba 3**		
		nfft	**Frecuencias**	**Amortiguamientos**	**Modos Propios**	**Frecuencias**	**Amortiguamientos**	**Modos Propios**	**Frecuencias**	**Amortiguamientos**	**Modos Propios**
$2f_2$	**10**	**12000**	1,951 5,124	0,023 0,019	1, 1.619 1, -0.626	1,946 5,122	0.026 0.017	1, 1.619 1, -0.752	1,965 5,122	0.020 0.020	1, 1.618 1, -0.601
$3f_2$	**15**	**18000**	1,954 5,122	0,018 0,022	1, 1.617 1, -0.524	1,947 5,113	0.025 0.020	1, 1.617 1, -0.663	1,950 5,127	0.021 0.018	1, 1.616 1, -0.665
$5f_2$	**25**	**30000**	1,951 5,118	0,026 0,018	1, 1.617 1, -0.622	1,960 5,113	0.020 0.017	1, 1.618 1, -0.637	1,949 5,113	0.018 0.019	1, 1.617 1, -0.632
$10f_2$	**50**	**60000**	1,957 5,109	0,017 0,017	1, 1.618 1, -0.772	1,954 5,126	0.021 0.022	1, 1.617 1, -0.582	1,950 5,115	0.022 0.022	1, 1.617 1, -0.650
$20f_2$	**100**	**120000**	1,958 5,109	0,019 0,020	1, 1.618 1, -0.611	1,960 5,117	0.018 0.021	1, 1.618 1, -0.432	1,955 5,114	0.020 0.020	1, 1.615 1, -0.597

Tabla (7.10.) Pruebas para t=20minutos, SNR=1%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Señal de muestra:

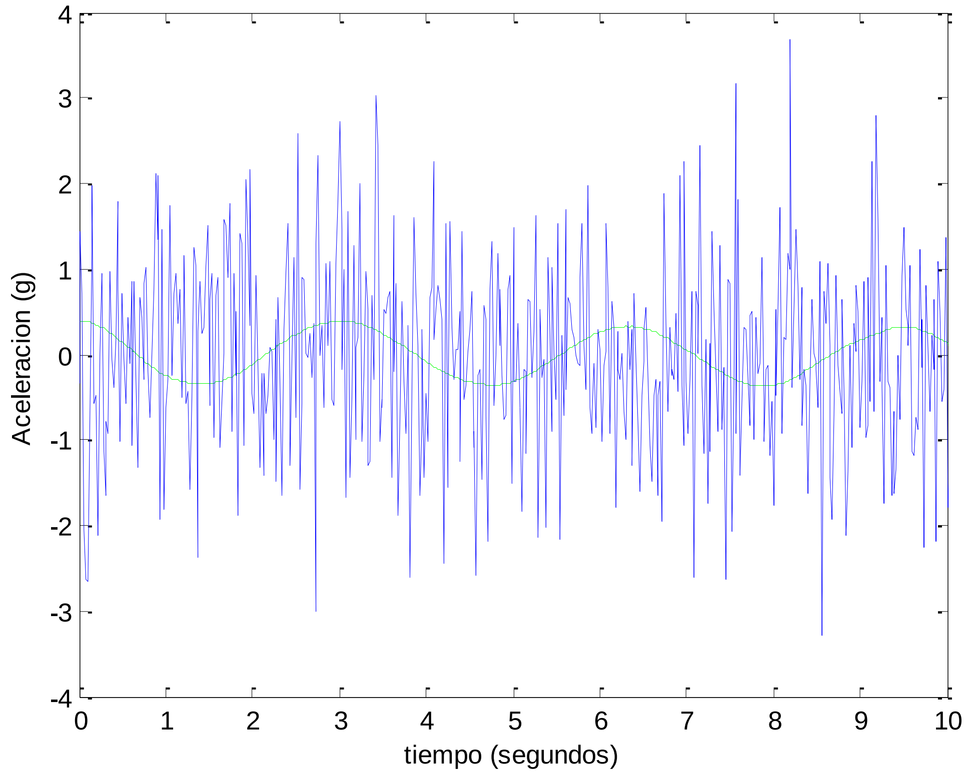


Figura (7.12.) Input (azul) Output del grado de libertad 1 (verde) SNR=1%

Gráficas para SNR=1%

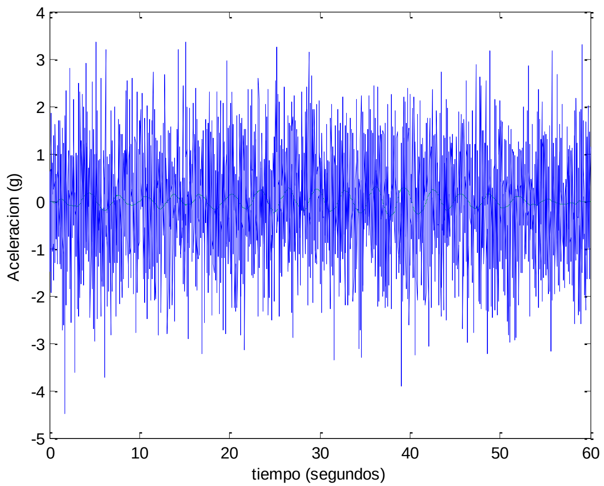


Figura (7.13.) Respuesta del sistema en tiempo (1min), SNR=1%

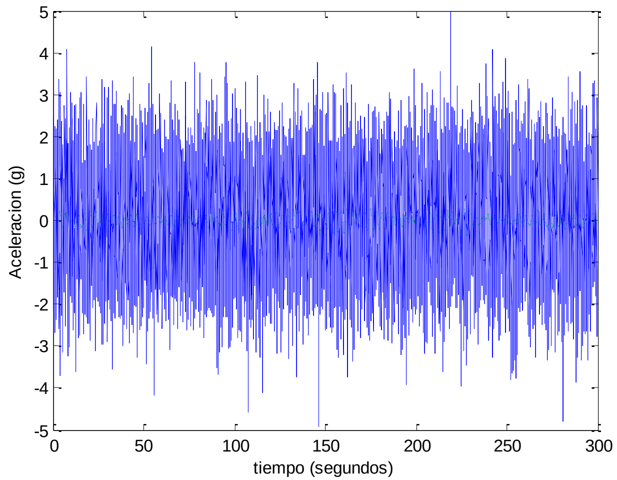


Figura (7.14.) Respuesta del sistema en tiempo (5min) SNR=1%

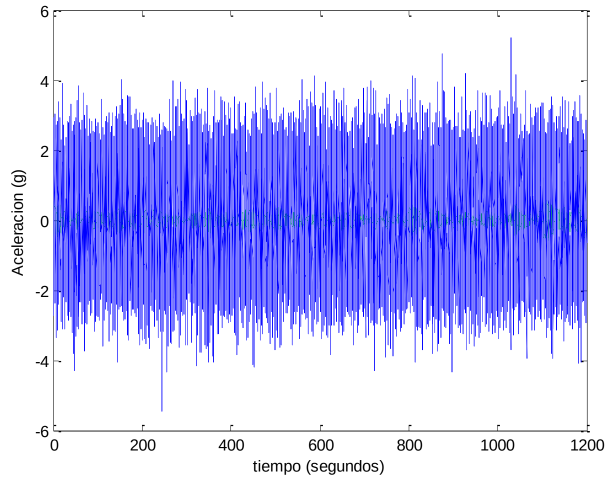


Figura (7.15.) Respuesta del sistema en tiempo (1min), SNR=1%

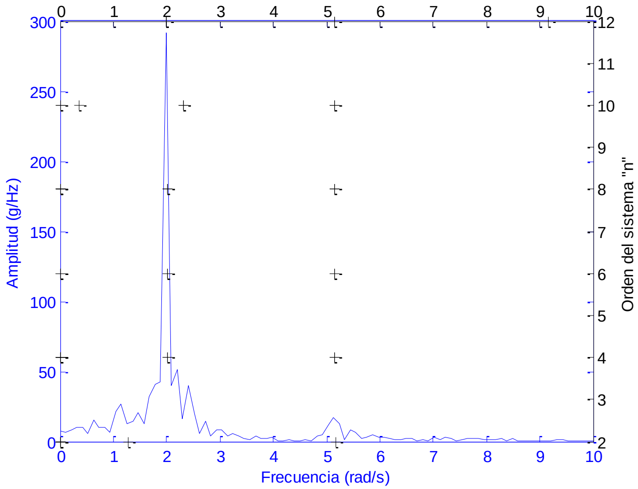


Figura (7.16.) Diagrama de estabilización en frecuencias. Duración de la señal de entrada (1min)

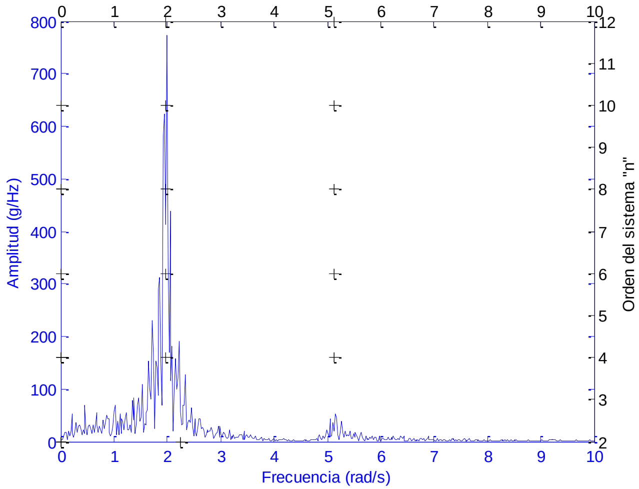


Figura (7.17.) Diagrama de estabilización en frecuencias. Duración de la señal de entrada (5min)

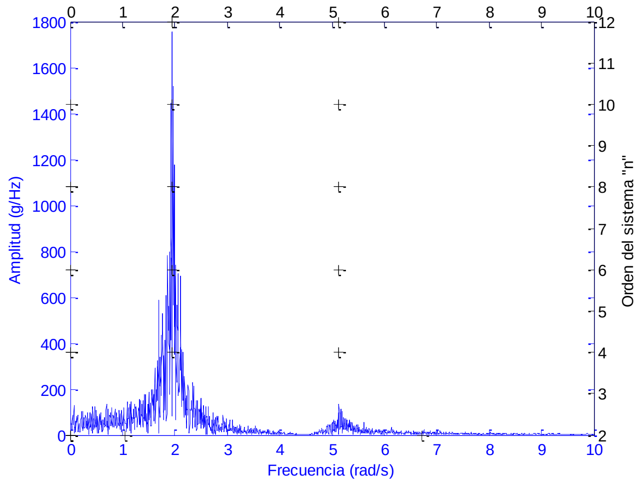


Figura (7.18.) Diagrama de estabilización en frecuencias. Duración de la señal de entrada (20min)

7.4.3. Pruebas para signal-to-noise ratio del 2%

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		1									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	600	1,974 5,152	0,027 0,046	1, 1.620 1, 0.143	1,945 5,153	0.031 0.026	1, 1.618 1, -0.452	1,975 5,150	0.041 0.017	1, 1.623 1, -0.438
$3f_2$	15	900	1,939 5,096	0,049 0,046	1, 1.624 1, 0.001	1,975 5,074	0.016 0.018	1, 1.614 1, -0.452	1,924 5,054	0.036 0.035	1, 1.614 1, -0.757
$5f_2$	25	1500	2,001 5,093	0,030 0,024	1, 1.635 1, -0.750	1,991 5,062	0.012 0.033	1, 1.623 1, -1.255	1,987 5,114	0.017 0.019	1, 1.620 1, -0.581
$10f_2$	50	3000	1,998 5,105	NaN 0,017	1, 1.622 1, -1.144	5,18	0.036	1, -0.491	5,128	0.032	1, -1.878
$20f_2$	100	6000	1,972 5,134	NaN 0,015	1, 1.578 1, -0.806	5,174	0.046	1, -0.155	1,934 5,100	0.021 0.021	1, 1.665 1, -2.568

Tabla (7.11.) Pruebas para t=1minuto, SNR=2%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		2									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	1200	1,931 5,102	0,073 0,017	1, 1.616 1, -0.662	1,951 5,098	0.016 0.012	1, 1.614 1, -1.329	1,962 5,113	0.030 0.022	1, 1.620 1, -0.799
$3f_2$	15	1800	1,969 5,119	0,027 0,020	1, 1.619 1, -0.622	1,987 5,122	0.057 0.028	1, 1.624 1, -0.383	1,945 5,137	0.021 0.018	1, 1.614 1, -0.795
$5f_2$	25	3000	1,932 5,156	0,019 0,026	1, 1.616 1, -0.543	1,980 5,103	0.022 0.024	1, 1.616 1, -0.605	1,963 5,128	0.032 0.017	1, 1.617 1, -0.580
$10f_2$	50	6000	1,981 5,090	0,017 0,028	1, 1.622 1, -0.416	1,938 5,103	0.029 0.019	1, 1.616 1, -0.473	1,960 5,123	0.039 0.029	1, 1.617 1, -0.512
$20f_2$	100	12000	1,926 5,062	NaN 0,029	1, 1.614 1, 0.251	1,951 5,087	NaN 0.018	1, 1.616 1, -1.318	1,948 5,155	NaN 0.033	1, 1.763 1, 0.210

Tabla (7.12.) Pruebas para t=2minutos, SNR=2%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		5									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	3000	1,966 5,103	0,023 0,020	1, 1.618 1, -0.580	1,956 5,114	0.029 0.016	1, 1.619 1, -0.914	1,945 5,100	0.028 0.019	1, 1.617 1, -0.661
$3f_2$	15	4500	1,952 5,107	0,026 0,020	1, 1.618 1, -0.656	1,963 5,081	0.021 0.019	1, 1.619 1, -0.695	1,951 5,110	0.035 0.020	1, 1.618 1, -0.623
$5f_2$	25	7500	1,965 5,149	0,032 0,023	1, 1.619 1, -0.505	1,934 5,123	0.016 0.019	1, 1.614 1, -0.589	1,946 5,102	0.019 0.016	1, 1.617 1, -0.689
$10f_2$	50	15000	1,942 5,108	0,023 0,013	1, 1.615 1, -0.974	1,961 5,115	0.020 0.021	1, 1.618 1, -0.613	1,943 5,160	0.022 0.021	1, 1.615 1, -0.507
$20f_2$	100	30000	5,111	0,016	1, -0.905	1,950 5,131	0.029 0.022	1, 1.674 1, -0.315	1,952 5,108	NaN 0.022	1, 1.619 1, -0.674

Tabla (7.13.) Pruebas para t=5minutos, SNR=2%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		10									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	6000	1,947 5,149	0,022 0,017	1, 1.616 1, -0.571	1,94 5,129	0.018 0.018	1, 1.615 1, -0.723	1,946 5,102	0.020 0.022	1, 1.615 1, -0.565
$3f_2$	15	9000	1,934 5,123	0,022 0,018	1, 1.614 1, -0.653	1,962 5,117	0.018 0.017	1, 1.615 1, -0.714	1,948 5,106	0.026 0.024	1, 1.617 1, -0.499
$5f_2$	25	15000	1,964 5,126	0,026 0,018	1, 1.619 1, -0.597	1,960 5,112	0.021 0.019	1, 1.618 1, -0.662	1,954 5,104	0.022 0.022	1, 1.617 1, -0.679
$10f_2$	50	30000	1,950 5,125	NaN 0,022	1, 1.616 1, -0.613	1,960 5,114	0.033 0.020	1, 1.618 1, -0.700	1,956 5,124	0.018 0.022	1, 1.618 1, -0.600
$20f_2$	100	60000	1,950 5,118	0,018 0,020	1, 1.617 1, -0.961	1,952 5,126	0.023 0.017	1, 1.599 1, -1.202	1,939 5,102	0.023 0.023	1, 1.636 1, -0.369

Tabla (7.14.) Pruebas para t=10minutos, SNR=2%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		20									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	12000	1,947 5,120	0,017 0,017	1, 1.617 1, -0.756	1,946 5,116	0.022653 0.018384	1, 1.616 1, -0.664	1,951 5,102	0.016 0.019	1, 1.615 1, -0.648
$3f_2$	15	18000	1,954 5,125	0,016 0,020	1, 1.617 1, -0.583	1,940 5,097	0.020729 0.021063	1, 1.615 1, -0.643	1,958 5,131	0.016 0.022	1, 1.615 1, -0.516
$5f_2$	25	30000	1,955 5,103	0,022 0,020	1, 1.617 1, -0.657	1,956 5,120	0.023882 0.020206	1, 1.618 1, -0.599	1,952 5,120	0.019 0.019	1, 1.617 1, -0.614
$10f_2$	50	60000	1,953 5,111	0,023 0,020	1, 1.617 1, -0.650	1,952 5,107	0.020713 0.022129	1, 1.617 1, -0.638	1,945 5,125	0.020 0.020	1, 1.616 1, -0.577
$20f_2$	100	120000	1,958 5,130	0,019 0,017	1, 1.590 1, -0.773	1,956 5,121	NaN 0.021970	1, 1.603 1, -0.441	1,956 5,117	NaN 0.016	1, 1.626 1, -1.016

Tabla (7.15.) Pruebas para t=20minutos, SNR=2%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Señal de ejemplo para SNR=2%

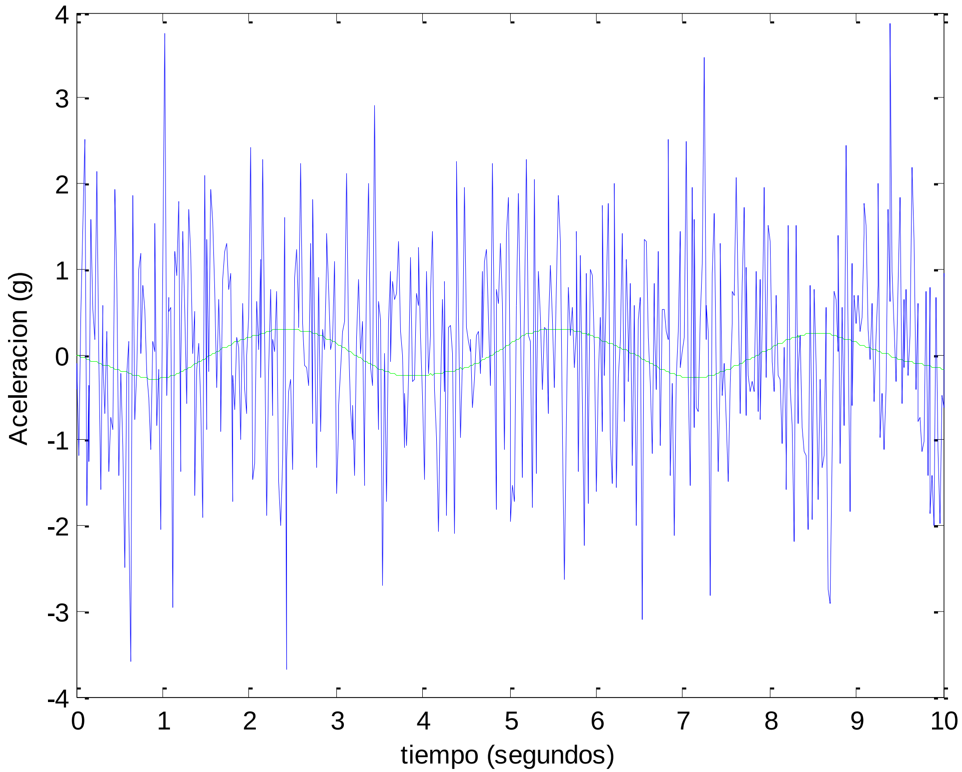


Figura (7.19) Input (azul) Output del grado de libertad 1 (verde), SNR=2%

Gráficas para SNR=2%

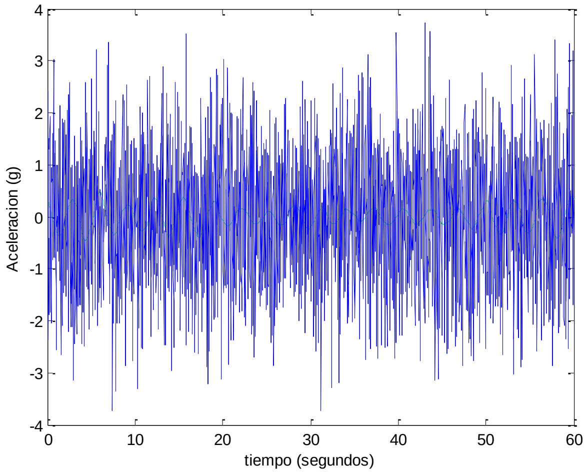


Figura (7.20.) Respuesta del sistema en tiempo (1min), SNR=2%

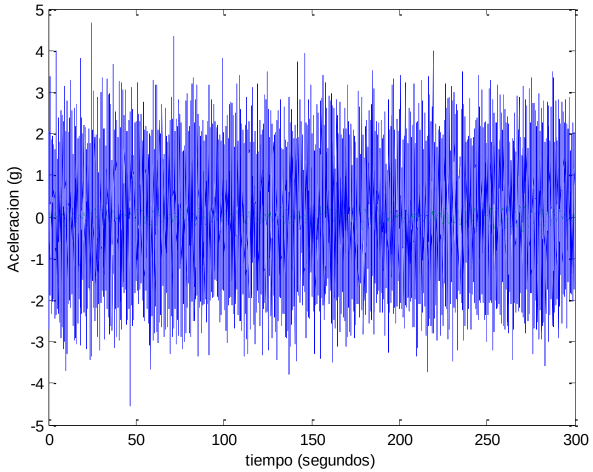


Figura (7.21.) Respuesta del sistema en tiempo (5min), SNR=2%

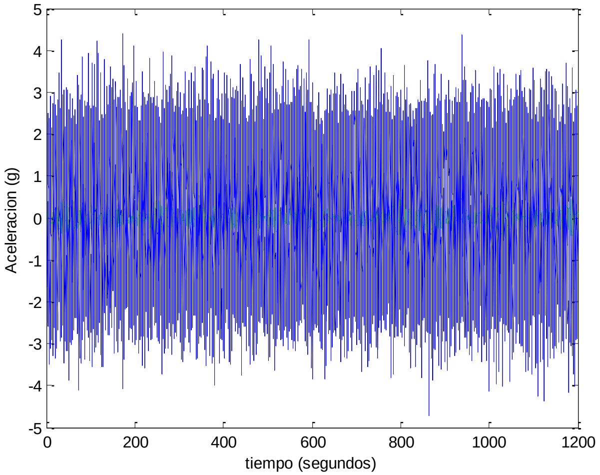


Figura (7.22.) Respuesta del sistema en tiempo (20min), SNR=2%

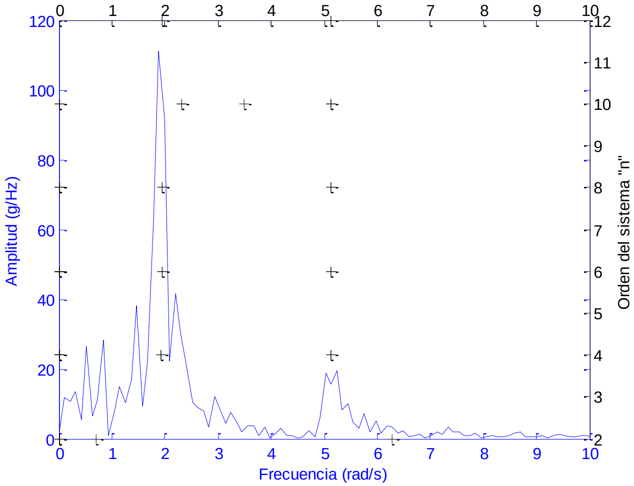


Figura (7.23.) Diagrama de estabilización en frecuencias. Duración de la señal de entrada (1min)

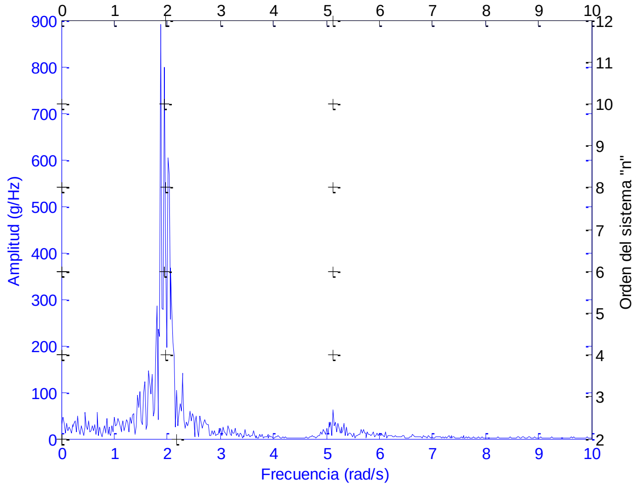


Figura (7.24.) Diagrama de estabilización en frecuencias. Duración de la señal de entrada (5min)

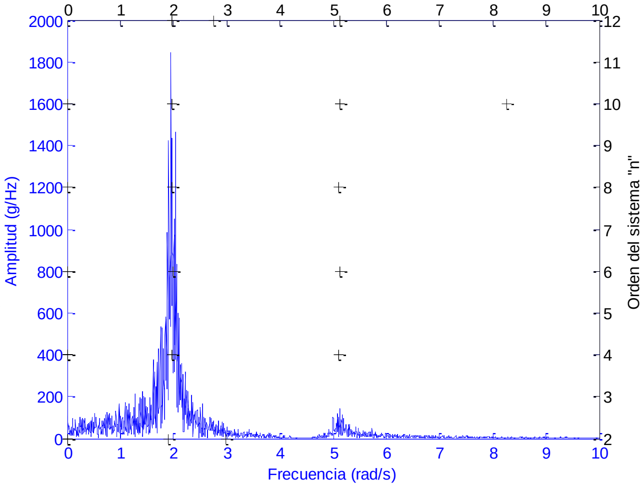


Figura (7.25.) Diagrama de estabilización en frecuencias. Duración de la señal de entrada (20min)

7.4.4. Pruebas para signal-to-noise ratio del 5%

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		1									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	600	1,945 5,075	0,028 0,035	(1 , 1.613) (1 , -0.609)	1,969 5,136	0.044 0.020	1, 1.622 1, -0.623	5,148	0.037	1, -0.393
$3f_2$	15	900	1,956 5,121	0,017 0,019	(1 , 1.608) (1 , -0.866)	1,917 5,079	0.058 0.020	1, 1.624 1, -0.806	1,981 5,111	0.092 0.034	1, 1.623 1, -0.589
$5f_2$	25	1500	5,142	0,028	(1 , -0.365)	2,027 5,126	0.044 0.030	1, 1.614 1, -0.421	1,943 5,138	NaN 0.014	1, 1.617 1, -0.597
$10f_2$	50	3000	5,234	0,049	(1 , -0.364)	5,124	0.019	1, -0.836	5,124	0.025	1, -1.301
$20f_2$	100	6000	5,179	0,017	(1 , -0.748)	5,051	0.043	1, -4.744	NaN	NaN	NaN

Tabla (7.16.) Pruebas para t=1minuto, SNR=5%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		2									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	1200	1,928 5,148	0,053 0,018	1, 1.624 1, -0.650	1,955 5,052	0.016 0.021	1, 1.617 1, -0.752	1,955 5,127	0.045 0.017	1, 1.626 1, -0.987
$3f_2$	15	1800	1,932 5,112	0,039 0,024	1, 1.615 1, -0.510	1,923 5,148	0.029 0.022	1, 1.617 1, -0.376	1,926 5,086	0.035 0.022	1, 1.614 1, -0.752
$5f_2$	25	3000	1,959 5,111	NaN 0,019	1, 1.613 1, -0.518	1,952 5,132	NaN 0.035	1, 1.645 1, -0.463	1,983 5,147	0.019 0.013	1, 1.619 1, -0.563
$10f_2$	50	6000	5,080	0,015	1, -1.043	1,911 5,151	NaN 0.017	1, 1.614 1, -0.753	5,082	0.027	1, -0.473
$20f_2$	100	12000	5,109	0,020	1, -1.510	5,131	0.018	1, -1.186	5,094	0.015	1, 14.953

Tabla (7.17.) Pruebas para t=2minutos, SNR=5%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		5									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	3000	1,966 5,123	0,021 0,013	1, 1.619 1, -0.912	1,947 5,118	0.022 0.020	1, 1.617 1, -0.536	1,956 5,129	0.015 0.020	1, 1.615 1, -0.441
$3f_2$	15	4500	1,965 5,109	0,021 0,023	1, 1.619 1, -0.530	1,970 5,116	0.027 0.027	1, 1.623 1, -0.389	1,950 5,156	0.017 0.014	1, 1.613 1, -0.693
$5f_2$	25	7500	1,950 5,107	0,046 0,026	1, 1.619 1, -0.624	1,961 5,172	0.023 0.028	1, 1.618 1, -0.463	1,962 5,111	NaN 0.020	1, 1.616 1, -0.614
$10f_2$	50	15000	5,110	0,021	1, -0.646	5,129	0.023	1, -0.549	1,957 5,163	NaN 0.023	1, 1.618 1, -0.514
$20f_2$	100	30000	5,131	0,016	1, -1.283	5,103	0.020	1, -1.326	5,120	0.025	1, 0.075

Tabla (7.18.) Pruebas para t=5minutos, SNR=5%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		10									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	6000	1,962 5,109	0,016 0,018	1, 1.616 1, -0.850	1,949 5,119	0.021 0.016	1, 1.617 1, -0.933	1,970 5,126	0.028 0.020	1, 1.621 1, -0.670
$3f_2$	15	9000	1,948 5,094	0,022 0,017	1, 1.617 1, -0.753	1,926 5,111	0.024 0.022	1, 1.615 1, -0.645	1,945 5,116	0.018 0.021	1, 1.614 1, -0.526
$5f_2$	25	15000	1,954 5,111	0,017 0,023	1, 1.617 1, -0.600	1,957 5,125	0.025 0.020	1, 1.617 1, -0.604	1,976 5,106	0.028 0.022	1, 1.616 1, -0.633
$10f_2$	50	30000	5,117	0,017	1, -0.607	1,942 5,109	NaN 0.018	1, 1.617 1, -0.704	5,126	0.020	1, -0.614
$20f_2$	100	60000	5,114	0,024	1, -1.735	5,110	0.027	1, -0.210	5,121	0.019	1, -0.630

Tabla (7.19.) Pruebas para t=10minutos, SNR=5%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	Tiempo (minutos)									
		20									
			Prueba 1			Prueba 2			Prueba 3		
		nfft	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios	Frecuencias	Amortiguamientos	Modos Propios
$2f_2$	10	12000	1,946 5,112	0,023 0,017	1, 1.617 1, -0.725	1,954 5,110	0.020 0.019	1, 1.618 1, -0.690	1,945 5,113	0.022 0.018	1, 1.617 1, -0.644
$3f_2$	15	18000	1,957 5,113	0,019 0,018	1, 1.618 1, -0.699	1,949 5,114	0.019 0.017	1, 1.617 1, -0.733	1,967 5,112	0.025 0.018	1, 1.620 1, -0.687
$5f_2$	25	30000	1,956 5,113	0,020 0,021	1, 1.617 1, -0.646	1,957 5,126	0.027 0.018	1, 1.618 1, -0.600	1,952 5,119	0.025 0.021	1, 1.617 1, -0.608
$10f_2$	50	60000	5,122	0,021	1, -0.605	1,963 5,114	0.024 0.023	1, 1.618 1, -0.648	1,955 5,128	0.025 0.025	1, 1.618 1, -0.595
$20f_2$	100	120000	5,123	0,022	1, -0.500	5,120	0.018	1, -0.621	5,127 267,209	0.020 0.031	1, -0.550 1, 1.6120

Tabla (7.20.) Pruebas para t=20minutos, SNR=5%, las frecuencias de las pruebas se expresan en rad/s

Señal de muestra para SNR=5%

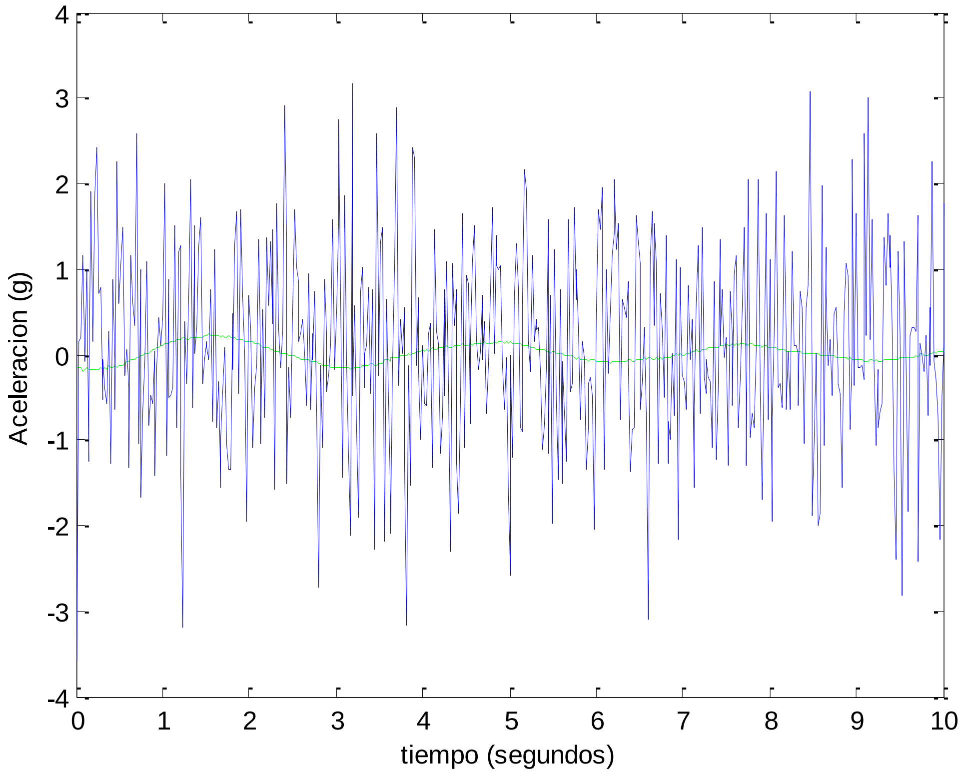


Figura (7.26.) Input (azul) Output del grado de libertad 1 (verde), SNR=5%

Las gráficas de ejemplo obtenidas para esta prueba son:

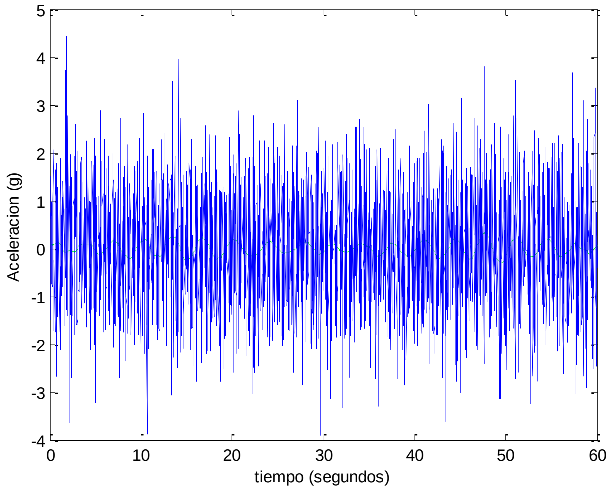


Figura (7.27.) Respuesta del sistema en tiempo (1min), SNR=5%

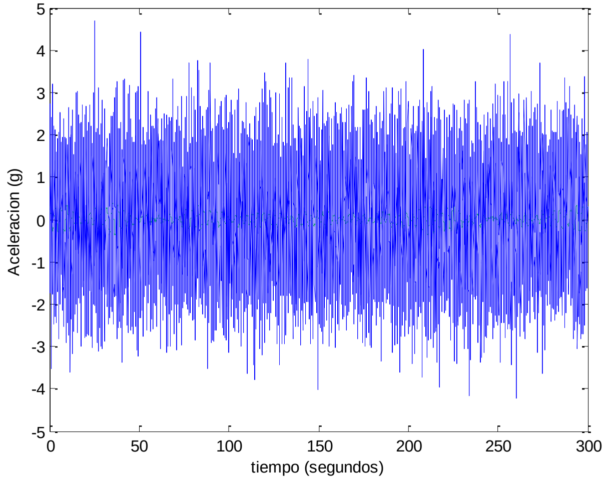


Figura (7.28.) Respuesta del sistema en tiempo (5min), SNR=5%

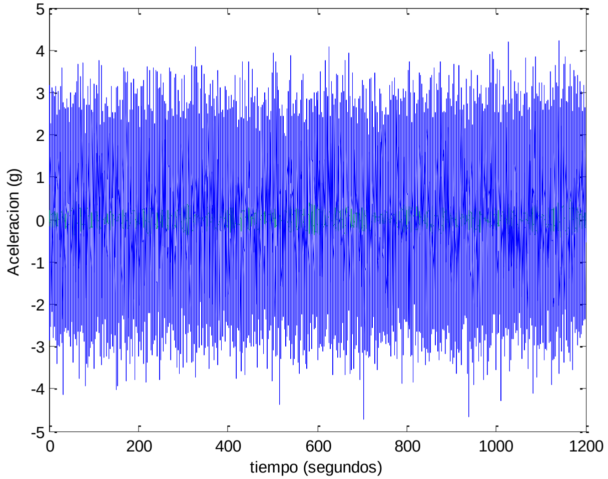


Figura (7.29.) Respuesta del sistema en tiempo (20min), SNR=5%

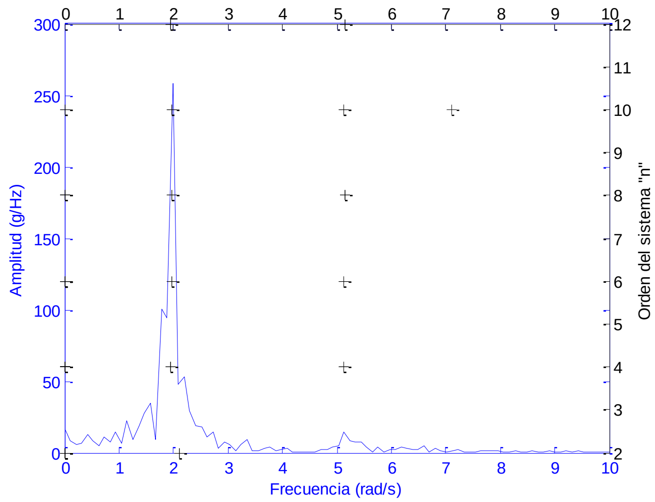


Figura (7.30.) Diagrama de estabilización en frecuencias. Duración de la señal de entrada (1min)

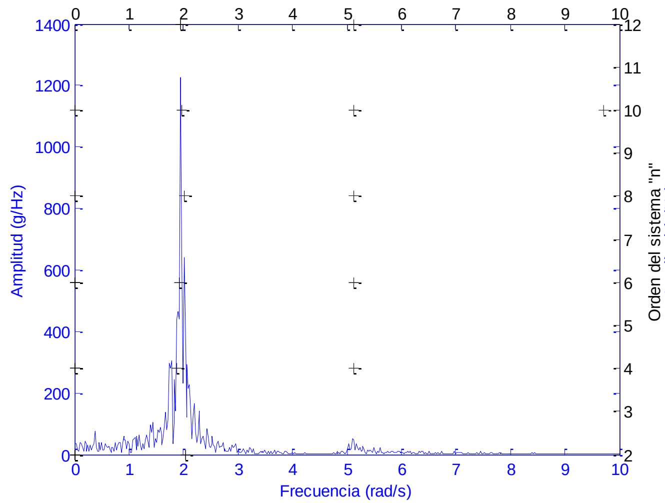


Figura (7.31.) Diagrama de estabilización en frecuencias. Duración de la señal de entrada (5min)

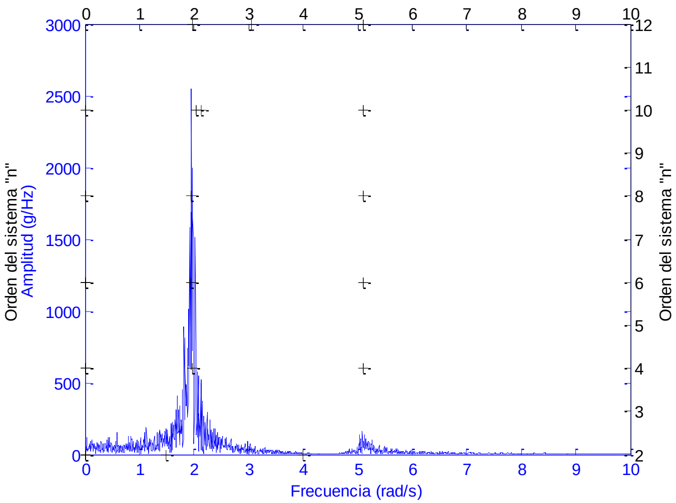


Figura (7.32.) Diagrama de estabilización en frecuencias. Duración de la señal de entrada (20min)

7.4.5. Conclusiones

Para tiempos bajos de duración de la señal (1,2 y 5 minutos), independientemente del nivel de ruido, los resultados no son acertados. La dispersión en los valores, sobre todo de los amortiguamientos y los modos propios es demasiado elevada como para que el programa arroje un resultado fiable. Esto puede ser debido (entre otros factores) a que, al ser la duración de la señal demasiado corta, el número de puntos usado en la discretización es pequeño, aumentando el error.

Para tiempos altos (10 y 20 minutos) de duración de la señal de ruido blanco y ruidos bajos (SNR=0, SNR=0.01) el programa empieza a estabilizar mejor los valores. Para el tiempo de 10 minutos los resultados de amortiguamiento aun pueden presentar errores relativamente grandes pero la deformada modal presenta en casi todos los casos valores analíticos. El caso de la señal de duración de 20 minutos es (como cabía esperar) la más acertada, las frecuencias, amortiguamientos y modos propios se acercan mucho al resultado teórico con la menor dispersión de todas las pruebas.

Para tiempos altos y SNR=0.02 se siguen obteniendo valores cercanos a los reales en muchos casos, pero en los casos en los que no lo hace la dispersión es mucho mayor que para ruidos bajos, sobre todo en valores de amortiguamiento y forma modal.

Si la contaminación de la señal es elevada (SNR=0.05) independientemente de su valor de tiempo no podemos tomar como buenos los resultados obtenidos. Para tiempos altos cuando devuelve un resultado es bastante acertado en todas las facetas (frecuencia-amortiguamiento-modo propio) pero en bastantes casos sólo se obtiene una frecuencia de las dos teóricas (la segunda en la mayoría de los casos)

Sólo se observa un dato de todas las pruebas fuera del rango. El último dato de la última tabla muestra un valor de frecuencia nada acertado, pero como se ha explicado para ruidos altos el programa no es estable.

La aparición de NaN (Not-a-Number) en algunos valores de las tablas de amortiguamiento no significa que no exista amortiguamiento para esa frecuencia (que siempre existe) sino que el programa no fue capaz de encontrar ningún valor que cumpliera los márgenes prescritos en la estabilización.

Hay que señalar que el programa trabaja mejor con frecuencias de muestreo elevadas, debido principalmente, que al aumentar la frecuencia de muestreo se aumentan los puntos tomados en la discretización de la señal de entrada.

Según los datos obtenidos podemos concluir que para que el algoritmo arroje resultados cercanos a la realidad (independientemente del tiempo y el ruido introducido en la señal) la frecuencia de muestreo debe ser mayor que 20 veces la segunda frecuencia natural de la estructura a excitar. Por debajo de este valor no podemos afirmar (sin tener en cuenta el ruido ni el tiempo de duración de la señal) que los resultados obtenidos son fiables.

7.5. Resultados a partir de señal sintética, para datos de estructura real

El sistema analizado en segundo lugar es un modelo de la estructura real a escala (ver Anexo A) que fue identificada posteriormente utilizando el algoritmo COV-SSI (ver capítulo 6).

Se realizó el estudio para direcciones principales variando en ambos los valores de las masas. El valor del amortiguamiento histerético se estimó, debido a que su cálculo teórico es complicado. Los datos de la rigidez están calculados en el anexo de este TFC. La configuración es la que muestra la figura (7.33.) Las características son:

- $k_1 = 3810000 \text{ N/m}$; $k_2 = 3810000 \text{ N/m}$
- $m_1 = 8.6413 \text{ kg}$; $m_2 = 9.5157 \text{ kg}$
- $\xi_1 = 0.01$; $\xi_2 = 0.01$

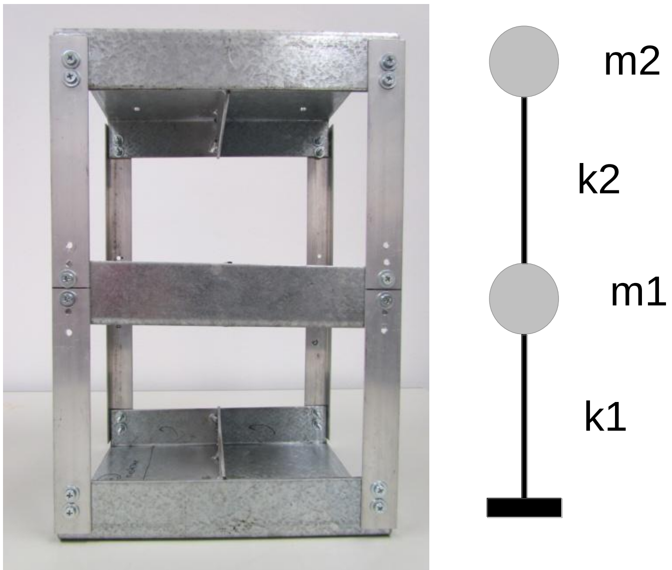


Figura (7.33.) Estructura a escala real (izquierda) Configuración del sistema (derecha)

Para llegar al diseño se realizó un estudio variando las posibles masas de la estructura. Después de estudiar las frecuencias teóricas se decidió usar el último de los casos presentados. El estudio paramétrico, con los valores es:

m1 kg	m2 kg	w1 rad/s	w1 Hz	w2 rad/s	w2 Hz	Modo 1	Modo 2
1,385	1,385	1028,768	163,73	2694,07	428,775	(1 , 1,618)	(1 , -0,618)
1,385	11,385	1452,37	231,152	1941,39	308,982	(1 , 2,53)	(1 , -1,566)
11,385	1,385	1294,55	206,03	2130,73	339,116	(1 , -0,53)	(1 , -0,058)
11,385	11,385	356,96	56,812	936,48	149,045	(1 , 1,614)	(1 , -0,618)
8,6413	9,5157	396,23	63,06	1060,66	168,81	(1 , 1,65)	(1 , -0,553)

Tabla (7.21.) Estudio paramétrico, datos estructura real

A continuación se exponen los resultados, en tablas, de las pruebas realizadas. En este caso también se varió el ruido introducido en la señal, el tiempo de duración de la señal y la frecuencia de muestreo de la forma.

- El ruido introducido en la señal de ruido blanco (0, 1%, 2% y 5%)
- El tiempo de duración de la señal (1, 2, 5, 10 y 20 minutos)
- La frecuencia de muestreo (400, 600, 800, 1000 Hz)

7.5.1. Pruebas para señal sintética sin ruido añadido

SNR=0%					
Tiempo 1 minuto					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	**400**	**24000**	395,522 1060,205	0,011 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,583)
$3f_2$	**600**	**36000**	394,473 1060,466	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,557)
$4f_2$	**800**	**48000**	395,908 1060,958	0,010 0,009	(1 , 1,644) (1 , -0,557)
$5f_2$	**1000**	**60000**	396,192 1060,848	0,010 0,011	(1 , 1,644) (1 , -0,556)

Tabla (7.22.) Pruebas para t=1minuto, SNR=0%

SNR=0%					
Tiempo 2 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	**400**	**48000**	395,771 1060,550	0,009 0,010	(1 , 1,340) (1 , -0,573)
$3f_2$	**600**	**72000**	394,187 1060,999	0,010 0,010	(1 , 1,645) (1 , -0,550)
$4f_2$	**800**	**96000**	396,208 1060,783	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,562)
$5f_2$	**1000**	**120000**	395,952 1061,052	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,553)

Tabla (7.23.) Pruebas para t=2minutos, SNR=0%

SNR=0%					
Tiempo 5 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	**400**	**120000**	396,200 1061,284	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,554)
$3f_2$	**600**	**180000**	394,185 1061,065	0,011 0,010	(1 , 1,645) (1 , -0,548)
$4f_2$	**800**	**300000**	396,148 1061,026	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,552)
$5f_2$	**1000**	**600000**	396,138 1060,627	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,555)

Tabla (7.24.) Pruebas para t=5minutos, SNR=0%

SNR=0%					
Tiempo 10 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	**400**	**240000**	396,017 1061,249	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,563)
$3f_2$	**600**	**360000**	394,501 1061,347	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,547)
$4f_2$	**800**	**480000**	396,174 1060,899	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,553)
$5f_2$	**1000**	**6000000**	396,011 1060,985	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,553)

Tabla (7.25.) Pruebas para t=10minutos, SNR=0%

SNR=0%					
Tiempo 20 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	**400**	**480000**	396,160 1060,870	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,560)
$3f_2$	**600**	**720000**	394,478 1060,821	0,010 0,010	(1 , 1,567) (1 , -0,554)
$4f_2$	**800**	**960000**	396,155 1060,986	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,550)
$5f_2$	**1000**	**1200000**	396,090 1060,740	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,555)

Tabla (7.26.) Pruebas para t=20minutos, SNR=0%

Las gráficas del ruido son similares a las expuestas en el anterior apartado de este mismo capítulo, ya que el ruido generado es idéntico, con la salvedad de la frecuencia de muestreo, siendo su representación muy similar, por lo que solo se expondrán las gráficas de ejemplo con la respuesta ante la excitación y el diagrama de estabilización.

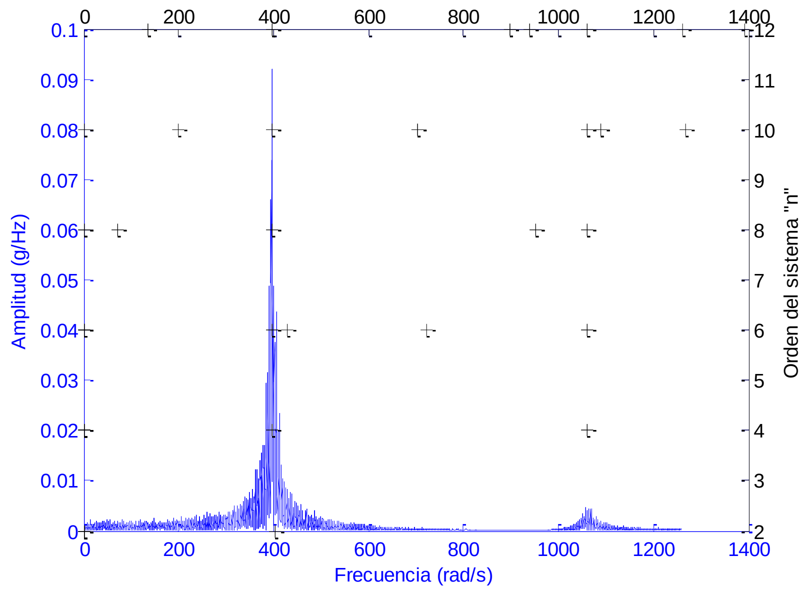


Figura (7.34.) Respuesta del sistema en frecuencia (azul) diagrama de estabilización (negro) (1min)

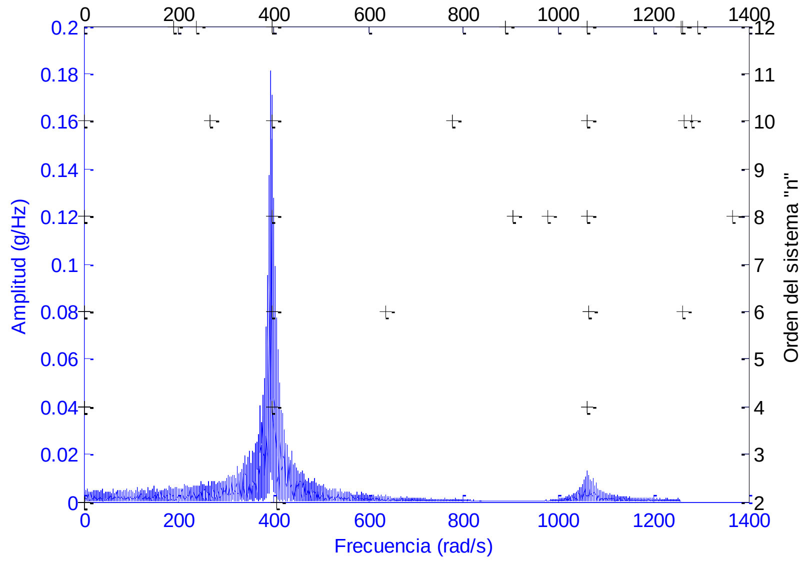


Figura (7.35.) Respuesta del sistema en frecuencia (azul) diagrama de estabilización (negro) (5min)

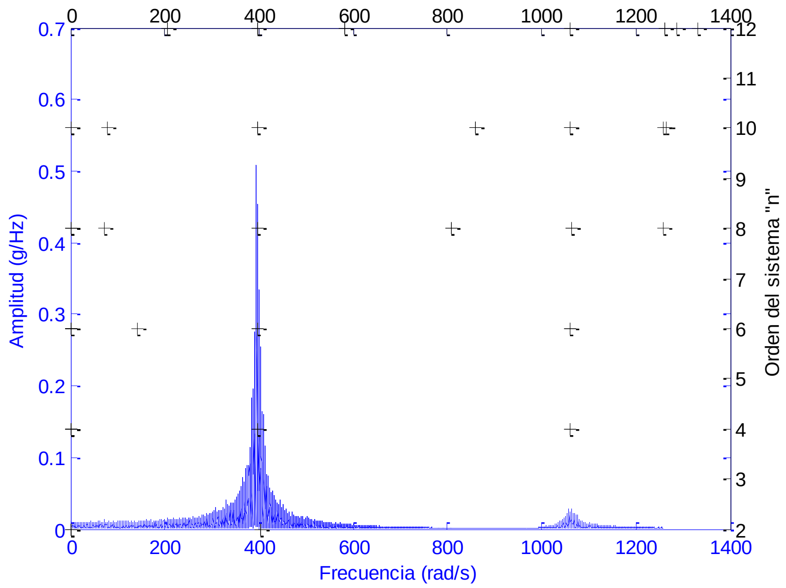


Figura (7.36.) Respuesta del sistema en frecuencia (azul) diagrama de estabilización (negro) (20min)

7.5.2. Pruebas para signal-to-noise ratio del 1%

SNR=1%					
Tiempo 1 minuto					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	nfft	Frecuencia rad/s	Amortiguamiento	Modo Propio
$2f_2$	400	24000	396,128 1059,961	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,564)
$3f_2$	600	36000	392,567 1061,695	0,010 0,009	(1 , 1,644) (1 , -0,528)
$4f_2$	800	48000	396,566 1060,879	0,008 0,010	(1 , 1,642) (1 , -0,553)
$5f_2$	1000	60000	395,755 1061,408	0,011 0,009	(1 , 1,644) (1 , -0,559)

Tabla (7.27.) Pruebas para t=1minuto, SNR=1%

SNR=1%					
Tiempo 2 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	nfft	Frecuencia rad/s	Amortiguamiento	Modo Propio
$2f_2$	400	48000	396,161 1060,838	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,546)
$3f_2$	600	72000	394,814 1060,622	0,011 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,557)
$4f_2$	800	96000	395,845 1061,349	0,009 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,546)
$5f_2$	1000	120000	396,159 1061,075	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,547)

Tabla (7.28.) Pruebas para t=2minutos, SNR=1%

SNR=1%					
Tiempo 5 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	**400**	**120000**	396,189 1060,987	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,557)
$3f_2$	**600**	**180000**	394,092 1061,097	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,549)
$4f_2$	**800**	**300000**	396,159 1060,930	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,553)
$5f_2$	**1000**	**600000**	396,311 1060,833	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,553)

Tabla (7.29.) Pruebas para t=5minutos, SNR=1%

SNR=1%					
Tiempo 10 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	**400**	**240000**	396,196 1060,976	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,555)
$3f_2$	**600**	**360000**	394,998 1061,167	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,541)
$4f_2$	**800**	**480000**	396,184 1060,718	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,552)
$5f_2$	**1000**	**6000000**	396,171 1060,900	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,554)

Tabla (7.30.) Pruebas para t=10minutos, SNR=1%

SNR=1%					
Tiempo 20 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	**400**	**480000**	396,164 1061,092	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,559)
$3f_2$	**600**	**720000**	394,402 1060,996	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,551)
$4f_2$	**800**	**960000**	395,979 1060,871	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,553)
$5f_2$	**1000**	**1200000**	396,103 1060,571	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,554)

Tabla (7.31.) Pruebas para t=20minutos, SNR=1%

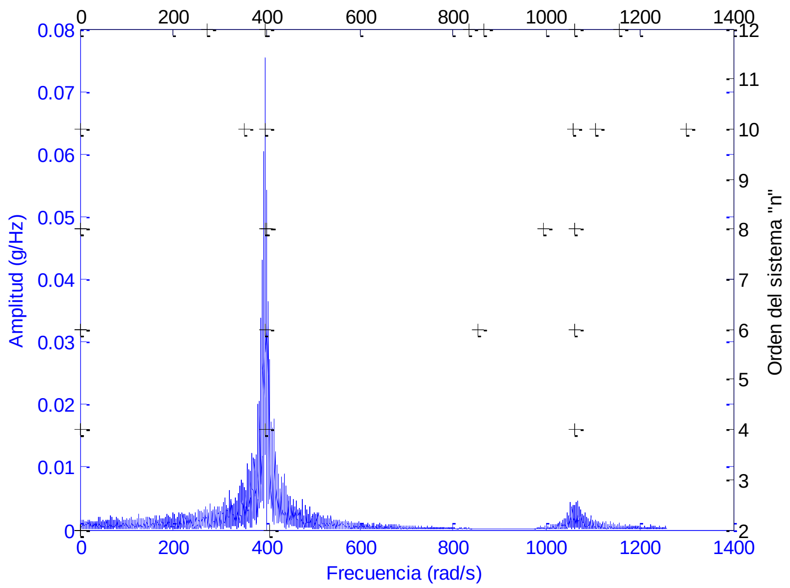


Figura (7.37.) Respuesta del sistema en frecuencia (azul) diagrama de estabilización (negro) (5min)

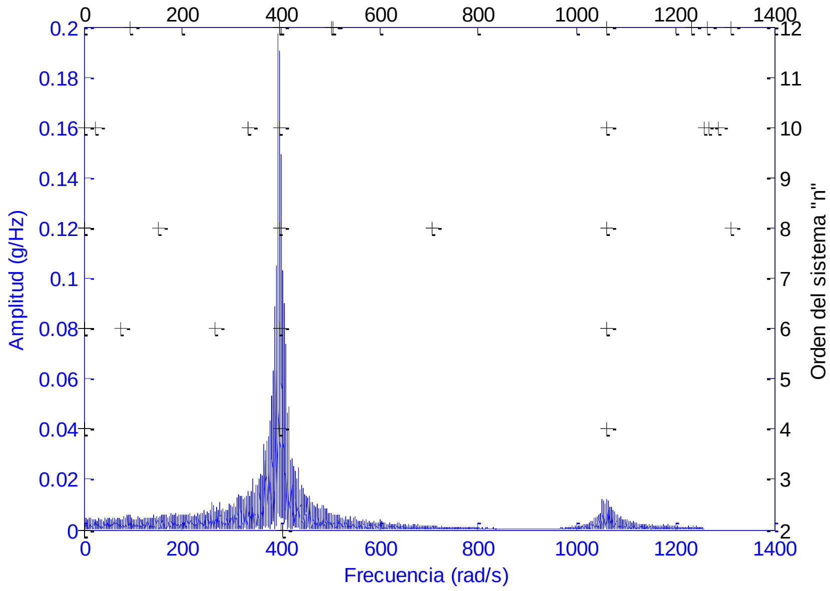


Figura (7.38.) Respuesta del sistema en frecuencia (azul) diagrama de estabilización (negro) (5min)

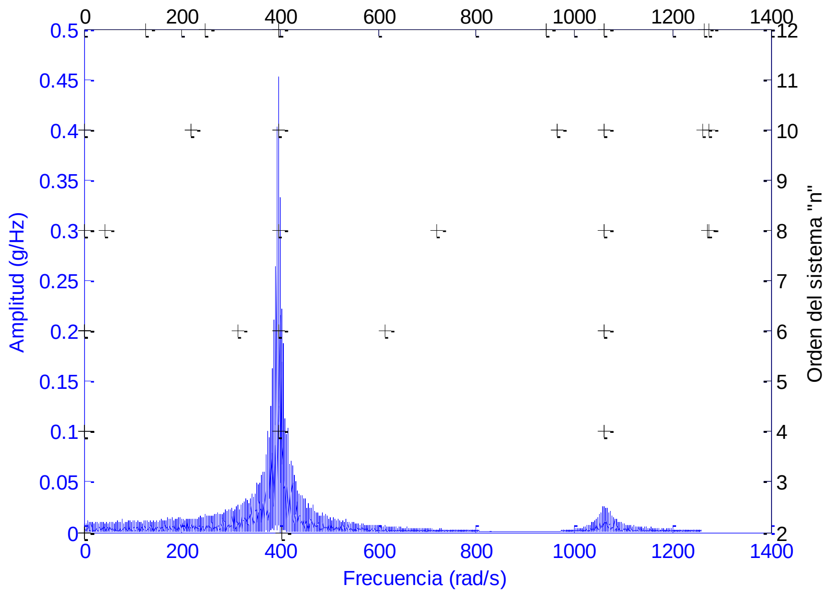


Figura (7.39.) Respuesta del sistema en frecuencia (azul) diagrama de estabilización (negro) (20min)

7.5.3. Pruebas para signal-to-noise ratio del 2%

SNR=2%					
Tiempo 1 minuto					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	400	24000	396,172 1061,497	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,523)
$3f_2$	600	36000	395,308 1061,026	0,010 0,011	(1 , 1,644) (1 , -0,558)
$4f_2$	800	48000	396,064 1060,442	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,560)
$5f_2$	1000	60000	395,824 1060,768	0,011 0,011	(1 , 1,645) (1 , -0,563)

Tabla (7.32.) Pruebas para t=1minutos, SNR=2%

SNR=2%					
Tiempo 2 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	400	48000	396,219 1061,042	0,009 0,009	(1 , 1,644) (1 , -0,528)
$3f_2$	600	72000	395,031 1060,896	0,011 0,010	(1 , 1,645) (1 , -0,559)
$4f_2$	800	96000	396,242 1060,644	0,010 0,011	(1 , 1,644) (1 , -0,550)
$5f_2$	1000	120000	395,973 1060,884	0,011 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,554)

Tabla (7.33.) Pruebas para t=2minutos, SNR=2%

SNR=2%					
Tiempo 5 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	nfft	Frecuencia rad/s	Amortiguamiento	Modo Propio
$2f_2$	400	120000	396,074 1061,069	0,010 0,011	(1 , 1,644) (1 , -0,496)
$3f_2$	600	180000	394,799 1060,881	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,554)
$4f_2$	800	300000	396,297 1061,005	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,555)
$5f_2$	1000	600000	395,864 1061,135	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,552)

Tabla (7.34.) Pruebas para t=5minutos, SNR=2%

SNR=2%					
Tiempo 10 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	Frecuencia de Muestreo Hz	nfft	Frecuencia rad/s	Amortiguamiento	Modo Propio
$2f_2$	400	240000	395,943 1061,376	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,546)
$3f_2$	600	360000	394,361 1060,802	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,550)
$4f_2$	800	480000	396,144 1060,923	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,553)
$5f_2$	1000	6000000	396,041 1060,791	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,553)

Tabla (7.35.) Pruebas para t=10minutos, SNR=2%

SNR=2%					
Tiempo 20 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	**400**	**480000**	396,060 1061,037	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,551)
$3f_2$	**600**	**720000**	394,436 1060,971	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,552)
$4f_2$	**800**	**960000**	396,125 1060,977	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,551)
$5f_2$	**1000**	**1200000**	396,053 1060,873	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,554)

Tabla (7.36.) Pruebas para t=20minutos, SNR=2%

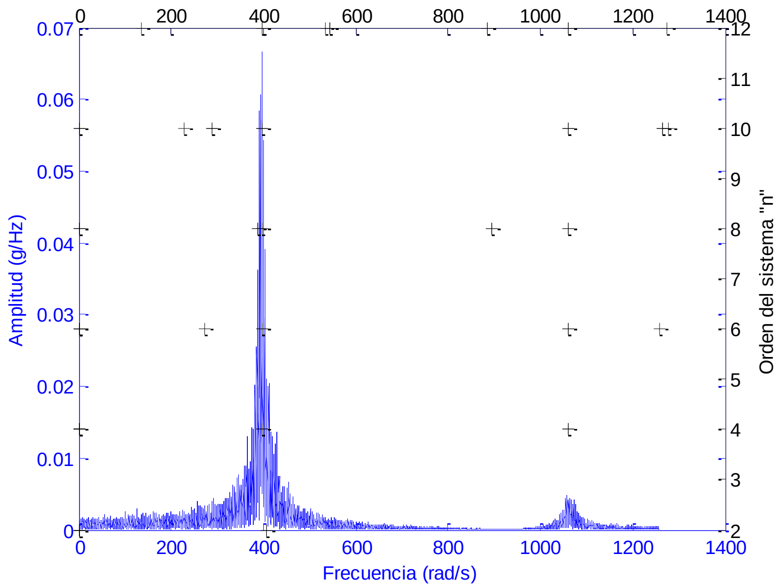


Figura (7.40.) Respuesta del sistema en frecuencia (azul) diagrama de estabilización (negro) (1min)

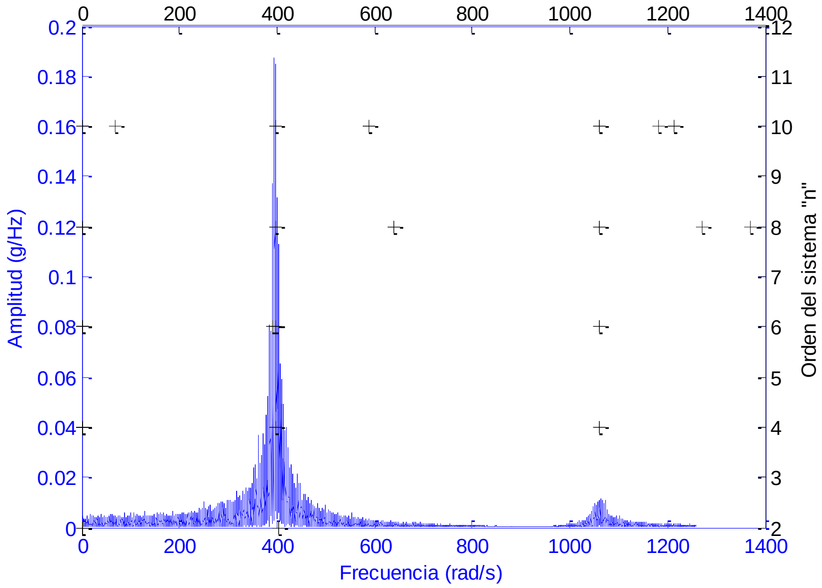


Figura (7.41.) Respuesta del sistema en frecuencia (azul) diagrama de estabilización (negro) (5min)

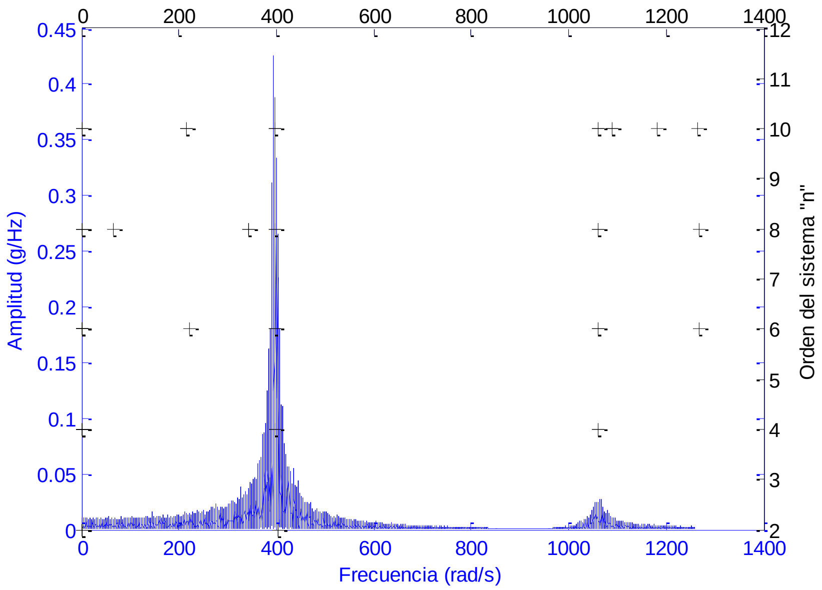


Figura (7.42.) Respuesta del sistema en frecuencia (azul) diagrama de estabilización (negro) (20min)

7.5.4. Pruebas para signal-to-noise ratio del 5%

SNR=5%					
Tiempo 1 minuto					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	400	24000	395,699 1060,378	0,011 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,533)
$3f_2$	600	36000	393,522 1061,454	0,009 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,537)
$4f_2$	800	48000	395,873 1061,126	0,009 0,010	(1 , 1,643) (1 , -0,552)
$5f_2$	1000	60000	395,617 1060,678	0,012 0,010	(1 , 1,645) (1 , -0,549)

Tabla (7.37.) Pruebas para t=1minuto, SNR=5%

SNR=5%					
Tiempo 2 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	400	48000	396,113 1060,492	0,011 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,530)
$3f_2$	600	72000	395,360 1060,560	0,010 0,010	(1 , 1,645) (1 , -0,564)
$4f_2$	800	96000	396,006 1061,296	0,009 0,010	(1 , 1,643) (1 , -0,532)
$5f_2$	1000	120000	396,081 1061,306	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,551)

Tabla (7.38.) Pruebas para t=2minutos, SNR=5%

SNR=5%					
Tiempo 5 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	400	120000	396,008 1061,154	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,574)
$3f_2$	600	180000	394,951 1060,652	0,009 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,557)
$4f_2$	800	300000	396,258 1060,662	0,010 0,010	(1 , 1,645) (1 , -0,563)
$5f_2$	1000	600000	396,325 1061,268	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,541)

Tabla (7.39.) Pruebas para t=5minutos, SNR=5%

SNR=5%					
Tiempo 10 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	400	240000	396,062 1061,172	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,547)
$3f_2$	600	360000	394,257 1060,909	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,552)
$4f_2$	800	480000	396,041 1060,819	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,551)
$5f_2$	1000	6000000	396,039 1060,984	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,552)

Tabla (7.40.) Pruebas para t=10minutos, SNR=5%

SNR=5%					
Tiempo 20 minutos					
Ratio entre frecuencia de muestreo y f_2	**Frecuencia de Muestreo Hz**	**nfft**	**Frecuencia rad/s**	**Amortiguamiento**	**Modo Propio**
$2f_2$	**400**	**480000**	395,989 1060,973	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,563)
$3f_2$	**600**	**720000**	394,601 1061,130	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,552)
$4f_2$	**800**	**960000**	396,072 1060,767	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,556)
$5f_2$	**1000**	**1200000**	396,133 1060,864	0,010 0,010	(1 , 1,644) (1 , -0,555)

Tabla (7.41.) Pruebas para t=20minutos, SNR=5%

Gráficas de ejemplo para SNR=5%

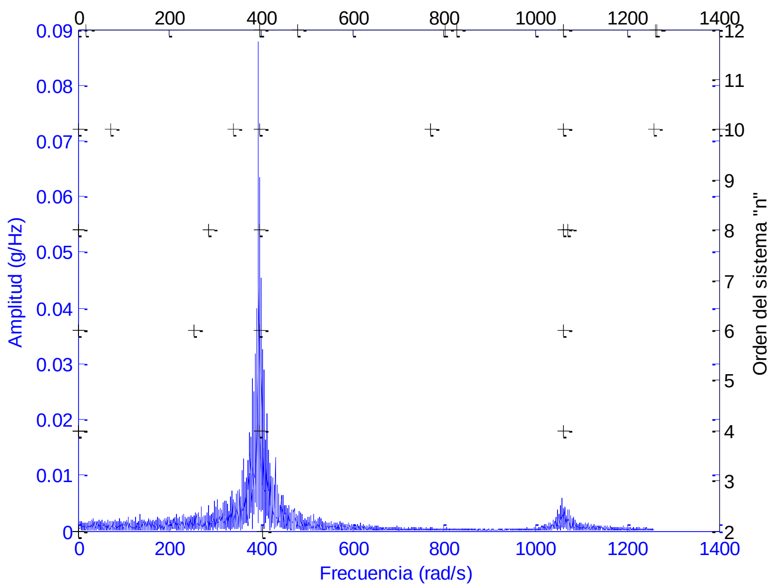


Figura (7.43.) Respuesta del sistema en frecuencia (azul) diagrama de estabilización (negro) (1min)

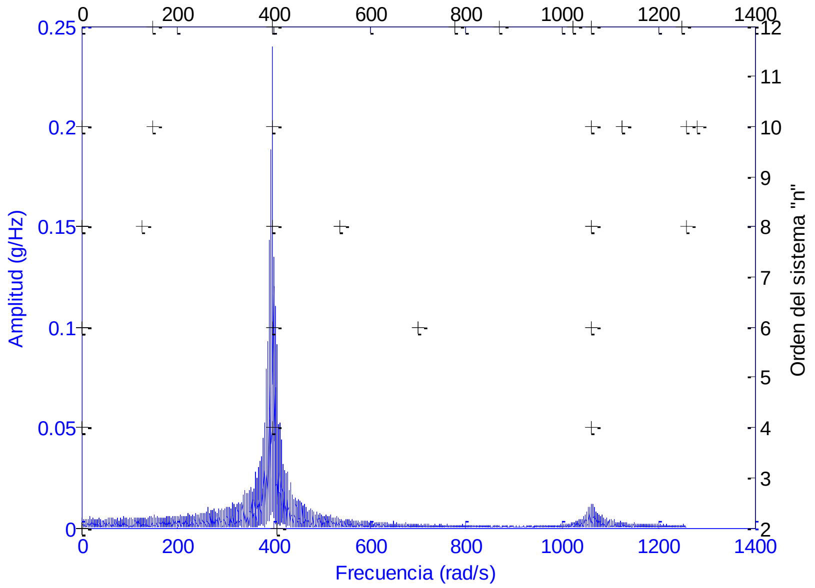


Figura (7.44.) Respuesta del sistema en frecuencia (azul) diagrama de estabilización (negro) (5min)

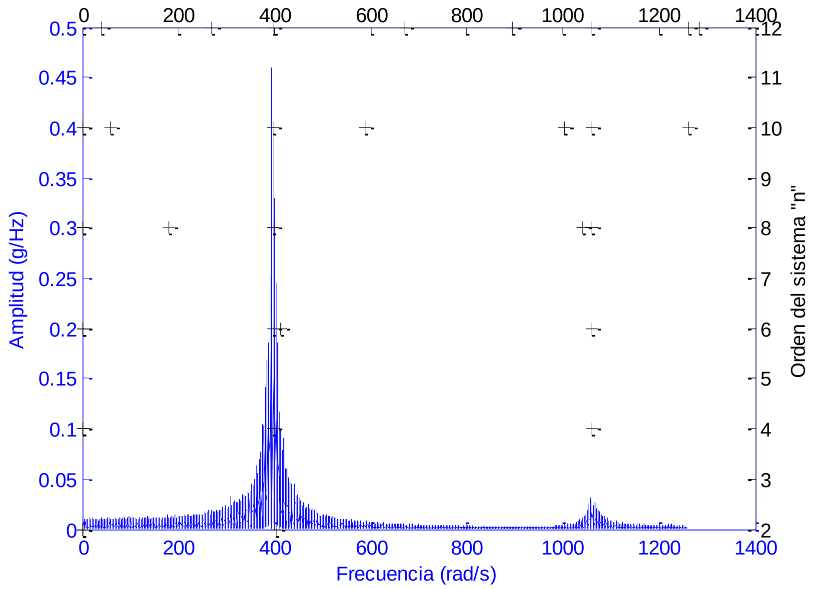


Figura (7.45.) Respuesta del sistema en frecuencia (azul) diagrama de estabilización (negro) (20min)

7.5.5. Conclusiones

En este caso, a diferencia del anterior, podemos afirmar que el algoritmo trabaja correctamente independientemente del tiempo y el ruido introducido en la señal. Teniendo en cuenta que hemos escogido frecuencias de muestreo relativamente altas esta podría ser la explicación. A mayor frecuencia de muestreo, existe mayor número de puntos en la discretización de la señal, lo que hace que tenga buenos resultados independientemente de las otras dos variables.

Tanto las frecuencias como amortiguamientos como la deformada modal están muy cercanos en los valores calculados, y a su vez se aproximan muy bien a los datos calculados teóricamente, por lo que se concluye que para que el algoritmo trabaje correctamente debemos emplear frecuencias de muestreo elevadas.

Capítulo 8. Resultados a partir de señal obtenida experimentalmente sobre estructura real

8.1. Sobre el equipo de adquisición de datos utilizado

A continuación se enumeraran los equipos y dispositivos utilizados para la toma de datos reales de la estructura conocida. En el apartado de este mismo capítulo referente a dichos ensayos se explicará la disposición y configuración del instrumental.

- Cuatro acelerómetros “Brüel & Kjaer” tipos 4508-002 y 4507-002, con sensibilidades del orden de 1000 mV/g. Estos acelerómetros presentan un rango de medidas de entre 2 y 5000 Hz, un pico de ±7g, un ruido inherente inferior a los 150μg y una masa de 4.8gramos. Los acelerómetros se fijan a la estructura usando cera de abeja. El peso de los cuatro dispositivos no es significativo en comparación con el de la estructura construida por lo que no se espera que modifique la respuesta.
- Tarjeta de adquisición de datos NI PXIe-4496, 24-Bit, Sigma-Delta ADCs, con capacidad para adquirir 204800 muestras por segundo a 16 canales simultáneamente, antialising filters, TEDS, 05 HZ AC-coupled, IEPE, montada sobre un chasis NI PXIe-1073. Los datos se captaron mediante un instrumento virtual sencillo con Labview. La frecuencia de muestreo utilizada fue de 800 Hz. En el total se recogieron 960.000 muestras correspondientes a 20 minutos de duración de señal.

8.2. Toma de datos reales

Para la toma de datos reales se realizaron una serie de ensayos con la estructura real fabricada, usando 2 métodos de excitación diferente (ruido blanco generado con el ordenador y reproducido mediante un subwoffer, ver figura (8.1.), y excitación de la estructura por aire comprimido, ver figura (8.2.). El experimento del subwoffer no dio resultados nada satisfactorios, por lo que no serán presentados en este documento. Se pasará a analizar detenidamente cada uno de los experimentos realizados con el aire comprimido, comparando los datos teóricos obtenidos mediante el cálculo analítico con los resultados de la identificación modal realizada utilizando el algoritmo COV-SSI implementado en este TFC.

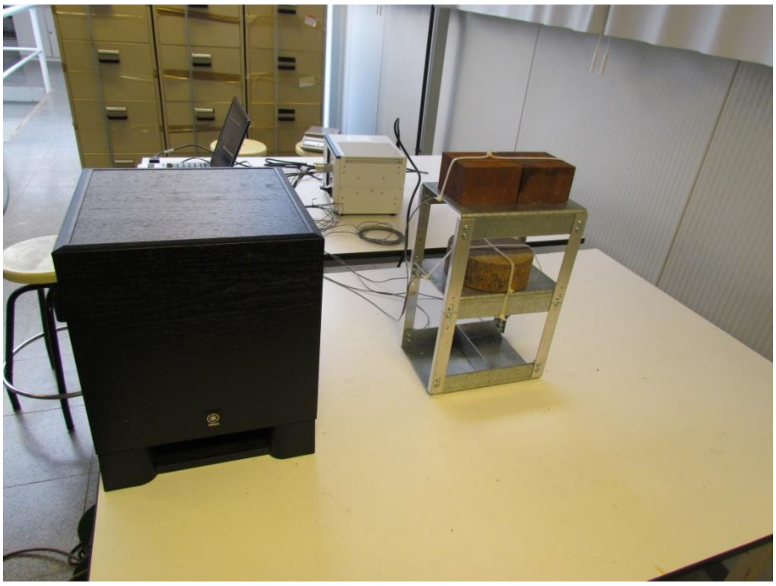


Figura (8.1.) Subwoffer y estructura

Para la realización de este ensayos se dispusieron, la estructura y pistola de aire comprimido, como muestra la figura (8.2.). Para la sujeción de las masas se utilizó cera de abeja (la misma que para la fijación de los acelerómetros).

Figura (8.2.) Disposición del ensayo con aire comprimido

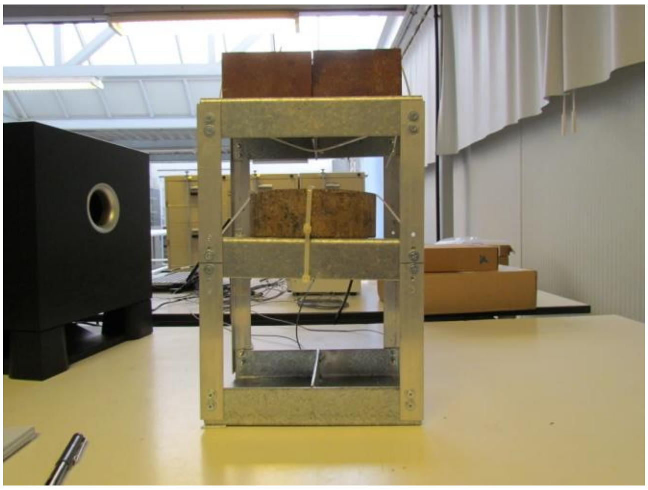


Figura 8.3. Vista frontal

Figura 8.4. Vista lateral

En las figuras (8.3. y 8.4.) se muestran las vistas frontal y lateral de la estructura real a escala.

Como se aprecia en la figura (8.5.) los acelerómetros se fijaron a la parte inferior de los pisos de la estructura de ensayo (utilizando cera de abeja como se indicó antes). En la figura (8.5.) se muestra el detalle de la colocación de un acelerómetro.

Figura 8.5. Colocación del acelerómetro

Se decidió por la siguiente configuración del equipo de adquisición de datos:

- Frecuencia de muestreo 800Hz.
- Duración de la señal de entrada 20 minutos.

Por lo que el número de puntos de la señal será (60*20*800) 960.000 puntos.

Se varió el tiempo de duración de la señal, reduciendo el número de puntos de lectura, para comprobar la validez de los resultados y la estabilidad del programa, de 1 a 20 minutos. Para conocer el número de puntos para un tiempo determinado basta con hacer la operación mostrada arriba, sustituyendo el "20" por el número de minutos deseados.

Para el algoritmo se optó por poner los márgenes de variación para la estabilización del 10% para la frecuencia y del 15% para los amortiguamientos.

Los datos teóricos de los resultados están expuestos en el capítulo 7, en el estudio teórico de la estructura real.

8.2.1. Ensayo con aire comprimido.

Para este ensayo se dispusieron los elementos como muestra las figuras (8.6. y 8.7.)

Figura 8.6. Disposición para el ensayo

Figura 8.7. Disposición para el ensayo

Procederemos ahora a mostrar las diferentes tablas con los resultados obtenidos así como a mostrar algunas de las figuras obtenidas en la solución final.

Acelerómetros 30390 y 30254			
Tiempo minutos	**Frecuencias rad/s**	**Amortiguamientos**	**Modos Propios**
1	226,76 1064,3	0,005 0,058	(1 , 1,707) (1 , 3,624)
5	231,65 1065,1	0,003 0,062	(1 , 1,701) (1 , -0,752)
10	231,78 1065,3	0,003 0,062	(1 , 1,704) (1 , -0,714)
20	231,66 974,48	0,003 0,064	(1 , 1,702) (1 , -0,833)

Tabla 8.1. Resultados ensayo con aire comprimido Acelerómetros 30390 y 30254

Acelerómetros 30074 y 30050			
Tiempo minutos	**Frecuencias rad/s**	**Amortiguamientos**	**Modos Propios**
1	232,65 1054,7	0,004 NaN	(1 , 1,756) (1 , -0,7073)
5	232,27 1052,9	0,003 0,045	(1 , 1,784) (1 , -0,712)
10	232,45 1050,7	0,003 0,055	(1 , 1,771) (1 , -0,724)
20	232,14 1050,2	0,003 0,067	(1 , 1,774) (1 , -0,722)

Tabla 8.2. Resultados ensayo con aire comprimido Acelerómetros 30074 y 30050

En la figura (8.8.) se muestra la gráfica que se obtiene de la solución del algoritmo. Es una tabla de doble entrada. En el eje "y" de la izquierda viene representada la amplitud del espectro de la señal (que en la gráfica aparece en color azul), mientras que en el izquierdo se representa el orden del sistema. En los ejes "x" tanto inferior como superior se representan las frecuencias.

Como se comentó anteriormente, los picos de la señal se corresponden con las frecuencias de vibración, que es lo que estamos buscando obtener. Los puntos negros del gráfico corresponden con las frecuencias calculadas en cada repetición del algoritmo. Como vemos aparecen varias sobre los picos para diferentes órdenes del sistema. Estas serán las frecuencias estables que queríamos obtener.

También para cada frecuencia le corresponde un amortiguamiento. En la figura (8.9.) se muestran los amortiguamientos obtenidos. A continuación se muestran dos de las gráficas obtenidas a modo de ejemplo visual.

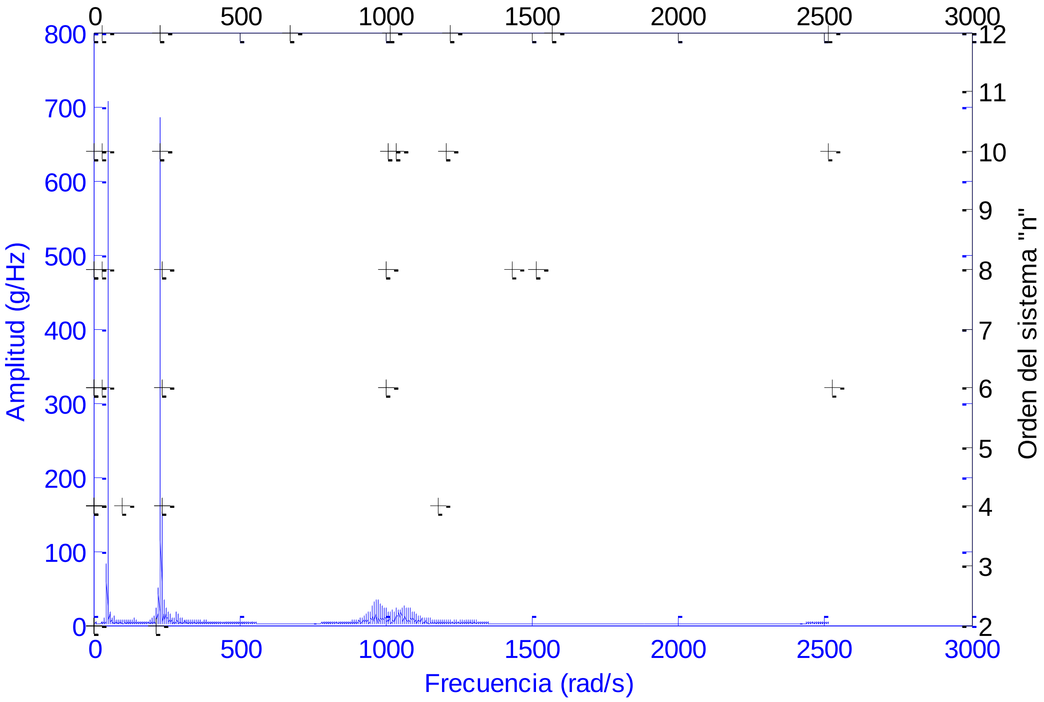


Figura 8.8. Diagrama de estabilización para frecuencias tiempo se señal de entrada 20 minutos

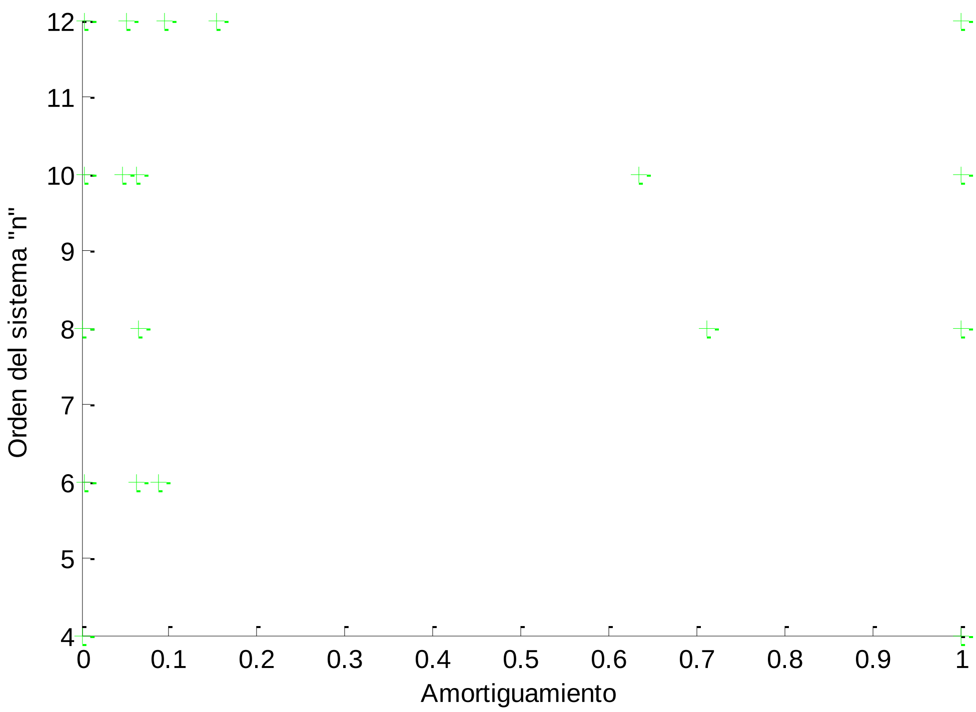


Figura (8.9.) Diagrama de estabilización para amortiguamientos

8.3. Conclusiones del ensayo

Como se aprecia en los resultados el algoritmo implementado es capaz de producir estimaciones estables de las frecuencias naturales, con poca dispersión entre los resultados obtenidos. Con los amortiguamientos y modos propios, a tiempos bajos, no ocurre lo mismo. Para periodos cortos de señal el programa puede arrojar un/unos valores de amortiguamiento con mucha dispersión y una deformada modal poco o nada exacta.

A medida que aumenta el número de puntos escogidos (aumenta el tiempo de duración de la señal) aumenta la estabilidad de los resultados arrojados por el algoritmo que empieza a dar resultados más cercanos unos de otros en el ensayo.

Por lo tanto para que el programa nos ofrezca los resultados lo más próximos a la realidad posibles, se concluye que los tiempos de duración de la señal de excitación deben ser elevados.

También se observa una diferencia entre la primera frecuencia calculada teóricamente y la obtenida de los ensayos. Esto puede ser debido a las diferencias entre la estructura real y el modelo simplificado utilizado para la misma. Las principales diferencias entre las hipótesis presentes en el modelo y la estructura real son:

- Se utilizó un modelo de masas concentradas en los forjados, mientras que en la estructura real, la distribución de masas no es, obviamente puntual, y además el centro de gravedad de cada masa no corresponde con el de su forjado
- En el modelo, se considera que la rotación de las cabezas de los pilares es nula a la altura de los forjados. En la realidad esto no puede asegurarse.

- En el modelo, la unión entre pilares y forjados es puntual, mientras que en la realidad, la unión tiene lugar en una longitud no despreciable frente a la altura entre forjados.

BLOQUE IV:

Conclusiones y bibliografía

Capítulo 9. Conclusiones

El objetivo de este trabajo era implementar y validar un método reciente para el análisis modal operacional denominado “Stochastic Subspace Identification”, que tiene como meta estimar los parámetros modales de un sistema a partir de la respuesta de dicho sistema ante el ruido ambiente, que es considerado con características de ruido blanco.

Para ello se estudiaron las bases del análisis dinámico experimental de estructuras, adquiriéndose conocimientos y experiencia en esta materia. También se estudió la teoría de los subespacios, y más en profundidad la de los subespacios estocásticos.

Se estudiaron e implementaron los dos métodos que, a priori, parecían más adecuado para el estudio que se presentaba, estos son el “Data-driven stochastic subspace identification method” y el “Covariance-driven stochastic subspace method”.

También se implementó un código en Matlab para la generación de señales sintéticas para poder hacer pruebas controladas, sabiendo los resultados de antemano.

Se estudiaron teóricamente los sistemas, obteniendo sus parámetros modales para poder compararlos con los resultados experimentales y para el correcto diseño de la estructura real construida. Se realizaron diferentes ensayos de tracción y flexión que se exponen en el anexo (A) de este mismo documento.

El último paso de este TFC fue realizar diversos ensayos y pruebas para validar el método, realizando el análisis modal experimental con diferentes valores para la configuración del sistema. Se realizaron tres ensayos, dos de ellos con señales generadas sintéticamente y un ensayo real. Se implementaron en Matlab los métodos Data-SSI y COV-SSI. Con el primero de ellos no llegaron a obtenerse resultados enteramente satisfactorios. Sin embargo, si pudo validarse con varios ejemplos diferentes, numéricos y experimentales, la implementación realizada del COV-SSI, con la que se obtuvieron resultados muy satisfactorios.

A la luz de los resultados de las pruebas realizadas con el COV-SSI, se concluye que para obtener unos resultados fiables en los parámetros modales, el número de puntos tomados en la discretización de la señal de entrada debe ser elevado. Esto se puede conseguir de varias formas. Con una frecuencia de muestreo elevada, con un tiempo largo de duración de la señal, o llegando a un compromiso entre ambas variables.

Bibliografía

[1] J. Miquel Canet, A.H. Barbat, "Estructuras sometidas a acciones sísmicas". CIMNE, Primera edición,

[2] 1988R.W. Clough, J. Penzien, "Dynamics of structures, 3rd edition", Computers & Structures, Inc., Berkeley, 2003

[3] E. Kreyszig, "Advanced engineering mathematics, 9th edition". John Wiley & sons Inc., 2006

[4] P. Van Overschee, B. De Moor, "Subspace identification for linear systems. Theory-Implementation-Applications", Kluwer academic publishers, 1996

[5] F. Magalhaes, A. Cunha, "Explaining operational modal analysis with data from an arch bridge", Mechanical systems and signal processing, 25, pp. 1431-1450, 2011

[6] B. Peeters, G. De Roeck, "Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis", Mechanical systems and signal processing, 13, pp. 855-878, 1999.

[7] R. Brincker, P. Andersen, "Understanding Stochastic Subspace Identification", Proceedings of the 24th International Modal Analysis Conference (IMAC), St- Louis, Missouri, 2006.

[8] P. Van Overschee, B. De Moor, "N4SID: Subspace algorithms for the Identification of Combined Deterministic-Stochastic Systems", ESAT/SISTA 1992-34-I.

[9] K.S. Arun, S.Y. Kung, "Balanced Approximation of Stochastic Systems. SIAM Matrix Analysis and Applications, 11, 42-68, 1990.

[10] M. Moonen, B. De Moor, L. Vanderberghe, J. Vandewalle, "On- and off-line identification of linear state space models", International Journal of Control, 49, 219-232, 1989.

[11] M. Moonen, J. Ramos, "A subspace algorithm for balanced state space system identification", IEEE transactions on Automatic Control, 38(11), 1727-1729, 1993.

[12] F. Chirino Godoy, D. Greiner Sánchez, "Resistencia de Materiales I", Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 2007.

[13] Alan V. Oppenheim, Allan S. Willsky, "Señales y sistemas". Pearson Education, 1997.

Anexo A: Estimación experimental del módulo de Young del material de los pilares de la estructura real

A.1. Modelado y diseño de las estructuras a ensayar

Como se ha señalado para la realización de este trabajo fin de carrera se ha construido una estructura con el objetivo de ser sometida a los análisis modales con el fin de estimar y validar los parámetros modales del sistema, tales como frecuencias, amortiguamientos y modos propios.

Para ello debemos previamente modelar el sistema de manera que entre dentro del rango de aplicación de la instrumentación y equipo disponible. Es por esto que previamente modelamos la estructura a analizar.

Las expresiones matemáticas por las que se rigen el modelo están explicadas en el capítulo 2 del bloque I (Introducción a la dinámica de estructuras) de este trabajo fin de carrera. De las vibraciones libres obtendremos las frecuencias naturales del sistema, que dependerán de la rigidez del material y de las masas que se añadan para el cálculo. La rigidez a su vez dependerá del modulo de elasticidad del material y del momento de inercia de la geometría a estudiar.

Para la estimación se han realizado diferentes ensayos, se ha ensayado el material que se desea utilizar, aluminio en este caso, para estimar la rigidez. Esto se ha hecho por diversos ensayos de tracción en el Laboratorio de Tierras, Hormigones, Asfaltos y Aceros del Departamento de Ingeniería Civil con la asistencia del personal del laboratorio. Los momentos de inercia han sido calculados analíticamente dependiendo de la geometría del cuerpo y de la posición del eje de giro.

Así, una vez obtenidos los parámetros, en este capítulo se presenta en primer lugar los resultados con los parámetros obtenidos variando la masa y la longitud del sistema, pues para una misma estructura con rigidez constante, se pueden obtener multitud de sistemas de uno o dos grados de libertad variando las masas, obteniendo de esta forma las frecuencias naturales.

A.3. Estimación del módulo de Young "E" del material

Después de obtener las expresiones de las frecuencias naturales vemos que estas dependen del valor de la rigidez. La rigidez es la capacidad de un objeto sólido o elemento estructural para soportar esfuerzos sin adquirir grandes deformaciones o desplazamientos. Los coeficientes de rigidez son magnitudes físicas que cuantifican la rigidez de un elemento resistente bajo diversas configuraciones de carga. Las rigideces se calculan, normalmente, como la razón entre la fuerza aplicada y el desplazamiento que genera esa fuerza.

$$k_i = \frac{F_i}{\delta_i} \qquad (A.1)$$

El comportamiento elástico de una barra o prisma mecánico sometido a p equeñas deformaciones está determinado por ocho coeficientes elásticos. Estos coeficientes elásticos o rigideces depende de:

- La sección transversal. Cuanto más gruesa sea la sección transversal de la geometría, más fuerza será necesaria para deformarla.
- El material del que esté fabricado la barra. Diferentes materiales poseen diferentes módulos de elasticidad "E" que influye directamente en la rigidez.
- La longitud de la barra. Los desplazamientos son proporcionales al producto de las deformaciones por la longitud de la barra por lo que una barra más larga ofrecerá menos resistencia absoluta a cambios en las dimensiones.

Para el cálculo de la rigidez se hará uso de la expresión de rigidez a cortante, esto es, la relación entre los desplazamientos verticales de un extremo de la viga y el esfuerzo cortante aplicado en el otro extremo para provocar un desplazamiento, estando impedido el giro en ambos extremos. Las expresiones vienen dadas por las ecuaciones:

$$K_{cort,y} = \frac{12EI_y}{L^3} \qquad K_{cort,z} = \frac{12EI_z}{L^3} \tag{A.2}$$

Antes de poder determinar la rigidez debemos obtener primero los valores del módulo de elasticidad "E" y de los momentos de inercia de las geometrías con las que se realizaran las estructuras.

A.3.1. Momentos de inercia

A continuación realizaremos el cálculo de los momentos de inercia de las barras que sustentaran las estructuras. El momento de inercia es la medida de la inercia rotacional de un cuerpo. Cuando un cuerpo gira en torno a uno de los ejes principales de inercia, la inercia rotacional puede ser representada como una magnitud escalar llamada momento de inercia. En el caso más general la inercia rotacional debe representarse por una serie de conjuntos de momentos de inercia y componentes que forman el llamado tensor de inercia. El momento de inercia refleja la distribución de masas de un sistema de partículas en rotación respecto al eje de giro y solo depende de la geometría de la pieza. Se realizará el cálculo para barras de aluminio de 1.5mm de grosor y 25x10.2mm de sección.

El procedimiento empleado para el cálculo de los momentos de inercia será igual para los diferentes tipos de sección. En primer lugar se calculará el centro de gravedad de la pieza. Como se trata de una barra tipo L, se separará cada elemento y se obtendrá el momento de inercia en el centro de gravedad de cada uno. A continuación mediante la aplicación del teorema de Steiner, se desplazarán los momentos de inercia hallados al centro de gravedad de pieza y se obtendrán mediante la suma de ambos elementos los momentos de inercia total de la pieza.

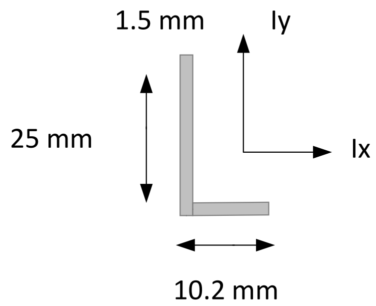


Figura (A.1.) Sección de pilar

La expresión del centro de gravedad es:

$$\overline{x_G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i S_i}{S_i} \qquad \overline{y_G} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i S_i}{S_i} \qquad (A.3)$$

Y los cálculos para nuestra pieza serán:

$$\overline{x_G} = \frac{25 * 1.5 * 0.75 + 10.2 * 1.5 * (5.1 + 1.5)}{25 * 1.5 + 10.2 * 1.5} = 2.44517 \text{ mm} \qquad (A.4)$$

$$\overline{y_G} = \frac{25 * 1.5 * 12.5 + 10.2 * 1.5 * 0.75}{25 * 1.5 + 10.2 * 1.5} = 9.09517 \text{ mm} \qquad (A.5)$$

Ahora calcularemos el momento de inercia en el centro de gravedad para cada una de las geometrías en las que hemos simplificado la pieza.

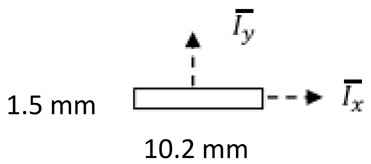


Figura (A.2.) Despiece de sección

Expresiones:

$$\bar{I}_x = \frac{1}{12} S L_y^2 \quad ; \quad \bar{I}_y = \frac{1}{12} S L_x^2 \qquad (A.6)$$

Cálculos:

$$\bar{I}_x = \frac{1}{12}(25 * 1.5)(25)^2 = 1953.125\text{mm}^4 \qquad (A.7)$$

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12}(25 * 1.5)(1.5)^2 = 7.03125\text{mm}^4 \qquad (A.8)$$

Mediante el teorema de Steiner calculamos los momentos de inercia en el centro de gravedad de la pieza:

$$I_x = \bar{I}_x + S x_G^2 \quad ; \quad I_y = \bar{I}_y + S y_G^2 \qquad (A.9)$$

$$I_x = 1953.125 + (25 * 1.5)(12.5 - 2.44517)^2 = 5744.3602\text{mm}^4 \qquad (A.10)$$

$$I_y = 7.03125 + (25 * 1.5)(9.09517 - 0.75)^2 = 2618.6011\text{mm}^4 \qquad (A.11)$$

Momentos de inercia en el centro de gravedad:

$$\bar{I}_x = \frac{1}{12}(10.2 * 1.5)(1.5)^2 = 34.425\text{mm}^4 \qquad (A.12)$$

$$\bar{I}_y = \frac{1}{12}(10.2 * 1.5)(10.2)^2 = 132.651\text{mm}^4 \qquad (A.13)$$

Momento de inercia en el centro de gravedad de toda la geometría mediante Steiner:

$$I_x = 34.425 + (10.2 * 1.5)(2.44517 - 0.75)^2 = 78.3911\text{mm}^4 \qquad (A.14)$$

$$I_y = 132.651 + (10.2 * 1.5)(9.09517 - 5.1 - 1.5)^2 = 227.9069\text{mm}^4 \qquad (A.15)$$

Ahora sumando ambos valores finales obtenemos el momento de inercia total de la geometría respecto a su centro de gravedad.

$$I_x = 5744.3602 + 78.3911 = 5822.7513\, mm^4 = 5.82x10^{-9}\text{m}^4 \qquad (A.16)$$

$$I_y = 2618.6011 + 227.9069 = 2846.508\, mm^4 = 2.85x10^{-9}\text{m}^4 \qquad (A.17)$$

A.3.2. Módulo de elasticidad E.

Otro de los parámetros de los que depende la rigidez del material, es el denominado módulo de elasticidad, por lo que el material en cuestión, aluminio, será ensayado mediante diversas técnicas, la primera mediante cálculo indirecto y la segunda mediante la máquina de ensayo de tracción. A continuación ambos métodos y resultados se expondrán.

Para un material elástico el módulo de elasticidad longitudinal lineal es una constante. Su valor se define mediante la razón entre el coeficiente de la tensión “σ” y la deformación “ε” que esta produce en la barra a ensayar.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta L}{L}} \qquad (A.18)$$

En este trabajo fin de carrera se han realizado dos tipos de ensayos; el cálculo indirecto mediante aplicación de cargas y un ensayo de tracción, que pasaremos a explicar a continuación.

A.3.2.1. Ensayo de flexión mediante aplicación de cargas.

En primer lugar se procede al cálculo del modulo de elasticidad de forma indirecta, es decir, se obtienen dos probetas de sección rectangular y en forma de L, unidas por tornillos en los extremos, empotrándola por uno de los extremos y aplicándole cargas por el otro. De esta manera se obtienen diferentes desplazamientos para la aplicación de diversas cargas y así el módulo de elasticidad.

El material a utilizar es el aluminio. Las dos probetas se unen mediante tornillos para suponerla como una única probeta en la que el centro de esfuerzos cortantes coincidirá con el punto de aplicación de la carga, de manera que la pieza flecte sin torsión.

Figura (A.3.) Probeta de aluminio para ensayo

La probeta mide 0.7 cm. Una vez se tiene la probeta, se empotra en una superficie, para así tener una simulación de barra empotrada.

Figura (A.4.) Sujeción de la probeta 1

Para poder aplicarle las cargas a la barra en cuestión, lo se le practicó una ranura, a la cual se le colgarían los pesos.

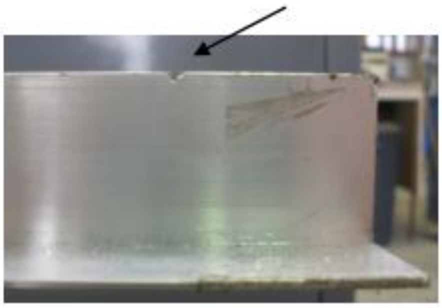


Figura (A.5.) Ranura para colgar pesos 1

Para terminar de montar las probetas y poder medir el módulo de elasticidad, se creó una pequeña estructura con las medidas de acuerdo a la distancia entre el suelo y la barra, en donde irían encajados dos relojes comparadores para medir los diferentes desplazamientos que presentará la barra cuando se le apliquen las cargas. La estructura en cuestión se muestra en la figura

Figura (A.6.) Disposición de los relojes comparadores

Los relojes se han puesto uno en el extremo de la barra y otro en la mitad. Las cargas que se utilizaron fueron de 2,58 N a 57,247 N y son las que se muestran en la fotografía siguiente.

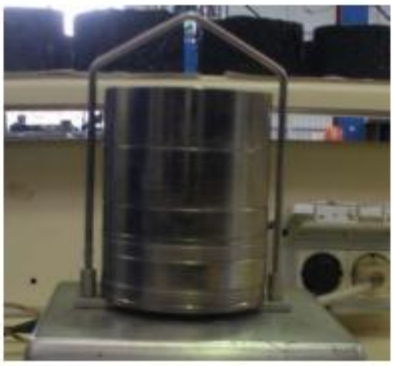


Figura (A.7.) Pesos

El objetivo de este procedimiento es el cálculo del módulo de elasticidad del aluminio que se va a utilizar en el trabajo en cuestión. Para ello, se irá tomando nota de la carga aplicada y el desplazamiento que se presente de acuerdo a la carga, se irá haciendo de manera continua, aumentando cada vez más la carga aplicada.

Este procedimiento se realizará seis veces, realizando posteriormente una media, para una mayor precisión en los datos tomados.

En la siguiente imagen se puede ver la estructura final, la barra empotrada en uno de sus extremos, y con la totalidad de la carga aplicada en el otro extremo. También se pueden apreciar los dos relojes que miden las pequeñas deformaciones.

A continuación se muestran ordenados los resultados de los ensayos.

Prueba 1		
Peso N	Reloj 1 m	Reloj 2 m
2,58	0,000145	0,000055
4,914	0,00028	0,00011

Prueba 2		
Peso N	Reloj 1 m	Reloj 2 m
2,58	0,00014	0,000055
4,914	0,00027	0,00011

7,248	0,000405	0,00016
12,248	0,00069	0,000285
17,248	0,000965	0,000385
27,248	0,0015	0,00058
37,248	0,002065	0,000795
57,247	0,00319	0,00127

Tabla (A.1.) Resultados del ensayo 1

7,248	0,000405	0,00017
12,248	0,000682	0,000275
17,248	0,000965	0,00039
27,248	0,001535	0,000615
37,248	0,002082	0,000845
57,247	0,003215	0,00131

Tabla (A.2.) Resultados del ensayo 2

Prueba 3		
Peso N	Reloj 1 m	Reloj 2 m
2,58	0,00014	0,000055
4,914	0,000275	0,00011
7,248	0,000405	0,000165
12,248	0,00069	0,00028
17,248	0,00096	0,0004
27,248	0,001525	0,00062
37,248	0,002085	0,00084
57,247	0,00321	0,001305

Tabla (A.3.) Resultados del ensayo 3

Prueba 4		
Peso N	Reloj 1 m	Reloj 2 m
2,58	0,000142	0,000052
4,914	0,00029	0,000112
7,248	0,00041	0,00016
12,248	0,0007	0,00027
17,248	0,00098	0,000385
27,248	0,00154	0,00062
37,248	0,0021	0,000845
57,247	0,00322	0,00132

Tabla (A.4.) Resultados del ensayo 4

Prueba 5		
Peso N	Reloj 1 m	Reloj 2 m
2,58	0,000145	0,00006
4,914	0,00028	0,00011
7,248	0,000405	0,00017
12,248	0,00069	0,000285
17,248	0,000965	0,0004
27,248	0,00152	0,00062
37,248	0,002085	0,000845
57,247	0,003215	0,00131

Tabla (A.5.) Resultados del ensayo 5

Prueba 6		
Peso N	Reloj 1 m	Reloj 2 m
2,58	0,00015	0,000065
4,914	0,00028	0,00012
7,248	0,000415	0,00017
12,248	0,00069	0,000285
17,248	0,00096	0,000395
27,248	0,00152	0,00062
37,248	0,002028	0,000845
57,247	0,003225	0,001305

Tabla (A.6.) Resultados del ensayo 6

La distancia de la carga al empotramiento es 0.5m y es donde está situado el primer reloj comparador. El segundo está situado a 0.265m del empotramiento.

Ahora que hemos realizado el ensayo y conocemos las fuerzas y desplazamientos que estos provocan, haciendo uso de las expresiones matriciales que definen la deformación de las vigas podemos calcular el módulo de elasticidad. Primero obtenemos la matriz de rigidez:

$$\binom{F}{M} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \binom{\upsilon}{\theta} \qquad (A.19)$$

Con lo que las ecuaciones del movimiento serán:

$$F = \frac{12EI}{L^3}\upsilon - \frac{-6EI}{L^2}\theta \qquad (A.20)$$

$$0 = \frac{-6EI}{L^2}\upsilon + \frac{4EI}{L}\theta \qquad (A.21)$$

Que constituye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo se llega a:

$$E = \frac{FL^3}{3I\upsilon} = \frac{F}{\upsilon * cte} \qquad (A.22)$$

Ya tenemos la relación para hallar el módulo de elasticidad. La constante para barras de 25mm de sección como la del ensayo será:

$$cte = \frac{3 * 2 * 4.47x10^{-9}}{0.5^3} = 2.1448x10^{-7} \qquad (A.23)$$

Los resultados se muestran en las siguientes tablas:

Ensayo 1					
Peso N	Reloj 1 m	Reloj 2 m	cte.	F/v	E N/m^2
2,58	0,000145	0,000055	2,00E-07	17793,1034	8,90E+10
4,914	0,00028	0,00011	2,00E-07	17550	8,78E+10
7,248	0,000405	0,00016	2,00E-07	17896,2963	8,95E+10
12,248	0,00069	0,000285	2,00E-07	17750,7246	8,88E+10
17,248	0,000965	0,000385	2,00E-07	17873,5751	8,94E+10
27,248	0,0015	0,00058	2,00E-07	18165,3333	9,08E+10
37,248	0,002065	0,000795	2,00E-07	18037,7724	9,02E+10
57,247	0,00319	0,00127	2,00E-07	17945,768	8,97E+10

Tabla (A.7.) Módulo de elasticidad ensayo 1

Ensayo 2					
Peso N	Reloj 1 m	Reloj 2 m	cte.	F/v	E N/m^2
2,58	0,00014	0,000055	2,00E-07	18428,5714	9,21E+10
4,914	0,00027	0,00011	2,00E-07	18200	9,10E+10
7,248	0,000405	0,00017	2,00E-07	17896,2963	8,95E+10
12,248	0,000682	0,000275	2,00E-07	17958,9443	8,98E+10
17,248	0,000965	0,00039	2,00E-07	17873,5751	8,94E+10
27,248	0,001535	0,000615	2,00E-07	17751,1401	8,88E+10
37,248	0,002082	0,000845	2,00E-07	17890,4899	8,95E+10
57,247	0,003215	0,00131	2,00E-07	17806,2208	8,90E+10

Tabla (A.8.) Módulo de elasticidad ensayo 2

Ensayo 3					
Peso N	Reloj 1 m	Reloj 2 m	cte.	F/v	E N/m^2
2,58	0,00014	0,000055	2,00E-07	18428,5714	9,21E+10
4,914	0,000275	0,00011	2,00E-07	17869,0909	8,93E+10
7,248	0,000405	0,000165	2,00E-07	17896,2963	8,95E+10
12,248	0,00069	0,00028	2,00E-07	17750,7246	8,88E+10
17,248	0,00096	0,0004	2,00E-07	17966,6667	8,98E+10
27,248	0,001525	0,00062	2,00E-07	17867,541	8,93E+10
37,248	0,002085	0,00084	2,00E-07	17864,7482	8,93E+10
57,247	0,00321	0,001305	2,00E-07	17833,9564	8,92E+10

Tabla (A.9.) Módulo de elasticidad ensayo 3

Ensayo 4					
Peso N	Reloj 1 m	Reloj 2 m	cte.	F/v	E N/m^2
2,58	0,000142	0,000052	2,00E-07	18169,0141	9,08E+10
4,914	0,00029	0,000112	2,00E-07	16944,8276	8,47E+10
7,248	0,00041	0,00016	2,00E-07	17678,0488	8,84E+10
12,248	0,0007	0,00027	2,00E-07	17497,1429	8,75E+10
17,248	0,00098	0,000385	2,00E-07	17600	8,80E+10
27,248	0,00154	0,00062	2,00E-07	17693,5065	8,85E+10
37,248	0,0021	0,000845	2,00E-07	17737,1429	8,87E+10
57,247	0,00322	0,00132	2,00E-07	17778,5714	8,89E+10

Tabla (A.10.) Módulo de elasticidad ensayo 4

Ensayo 5					
Peso N	Reloj 1 m	Reloj 2 m	cte.	F/v	E N/m^2
2,58	0,000145	0,00006	2,00E-07	17793,1034	8,90E+10
4,914	0,00028	0,00011	2,00E-07	17550	8,78E+10
7,248	0,000405	0,00017	2,00E-07	17896,2963	8,95E+10
12,248	0,00069	0,000285	2,00E-07	17750,7246	8,88E+10
17,248	0,000965	0,0004	2,00E-07	17873,5751	8,94E+10
27,248	0,00152	0,00062	2,00E-07	17926,3158	8,96E+10

37,248	0,002085	0,000845	2,00E-07	17864,7482	8,93E+10
57,247	0,003215	0,00131	2,00E-07	17806,2208	8,90E+10

Tabla (A.11.) Módulo de elasticidad ensayo 5

Ensayo 6					
Peso N	Reloj 1 m	Reloj 2 m	cte.	F/v	E N/m^2
2,58	0,00015	0,000065	2,00E-07	17200	8,60E+10
4,914	0,00028	0,00012	2,00E-07	17550	8,78E+10
7,248	0,000415	0,00017	2,00E-07	17465,0602	8,73E+10
12,248	0,00069	0,000285	2,00E-07	17750,7246	8,88E+10
17,248	0,00096	0,000395	2,00E-07	17966,6667	8,98E+10
27,248	0,00152	0,00062	2,00E-07	17926,3158	8,96E+10
37,248	0,002028	0,000845	2,00E-07	18366,8639	9,18E+10
57,247	0,003225	0,001305	2,00E-07	17751,0078	8,88E+10

Tabla (A.12.) Módulo de elasticidad ensayo 6

Ahora realizamos la media aritmética entre todos los ensayos para obtener el valor final del modulo de elasticidad para este ensayo:

Ensayo 1	Ensayo 2	Ensayo 3	Ensayo 4	Ensayo 5	Ensayo 6
8,90E+10	9,21E+10	9,21E+10	9,08E+10	8,90E+10	8,60E+10
8,78E+10	9,10E+10	8,93E+10	8,47E+10	8,78E+10	8,78E+10
8,95E+10	8,95E+10	8,95E+10	8,84E+10	8,95E+10	8,73E+10
8,88E+10	8,98E+10	8,88E+10	8,75E+10	8,88E+10	8,88E+10
8,94E+10	8,94E+10	8,98E+10	8,80E+10	8,94E+10	8,98E+10
9,08E+10	8,88E+10	8,93E+10	8,85E+10	8,96E+10	8,96E+10
9,02E+10	8,95E+10	8,93E+10	8,87E+10	8,93E+10	9,18E+10
8,97E+10	8,90E+10	8,92E+10	8,89E+10	8,90E+10	8,88E+10

Tabla A.13. Módulo de elasticidad para cada caso

Finalmente el valor obtenido es:

$$E = 8.311x10^{10}\ \mathrm{N/m^2} \qquad (A.24)$$

A.3.2.2. Ensayo de tracción.

Para este segundo ensayo se utilizó una máquina para este tipo de ensayos que permite medir la deformación y la fuerza aplicada. Para la realización del ensayo es necesario construir las probetas de prueba. A continuación se explica la forma de preparar las probetas.

En primer lugar se corta el material para obtener las probetas del tamaño deseado.

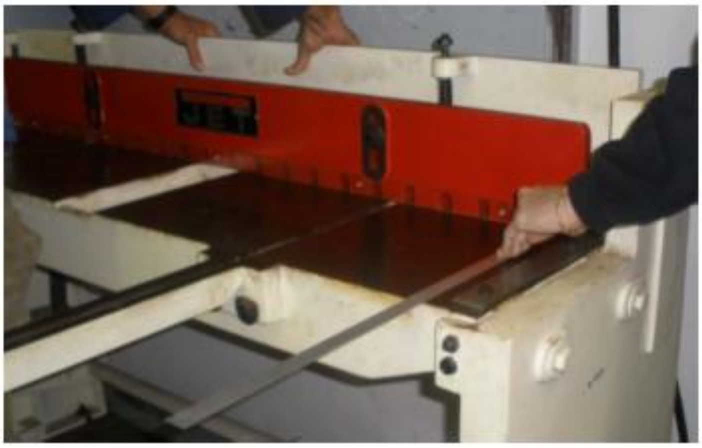


Figura (A.8.) Corte de las probetas

A continuación se doblaron los extremos de las probetas y se desbastaron para asegurar una buena fijación a las mordazas de la máquina de tracción.

(a) (b)

Figura (A.9.) (a) y (b) Preparación de las probetas

Obteniéndose finalmente la probeta con la que se realizará el ensayo.

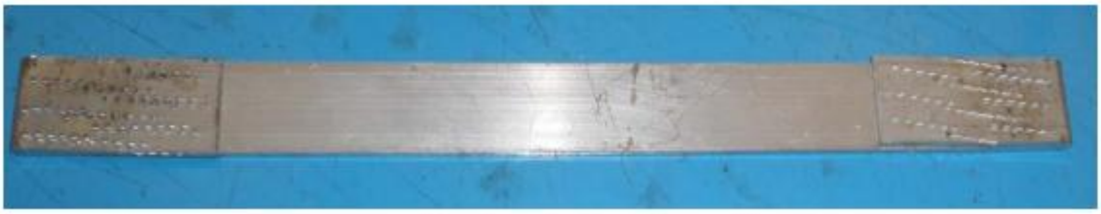


Figura (A.10.) Probeta final

Seguidamente se midieron todas las dimensiones de la probeta con un pie de rey o calibrador. Se colocaron en la máquina de ensayos para someterla a la prueba de tracción, obteniéndose un archivo de datos con la fuerza y la deformación.

Figura (A.11.) Máquina de tracción

El resultado de este ensayo es un archivo de datos, que al tratarlo podemos obtener la curva que corresponde a la recta de deformación, realizando finalmente una gráfica de dispersión. Mediante el ajuste por mínimos cuadrados se obtiene la pendiente de la recta y la ecuación que lo rige.

Las curvas obtenidas para las cuatro probetas ensayadas se muestran a continuación.

Probeta A:

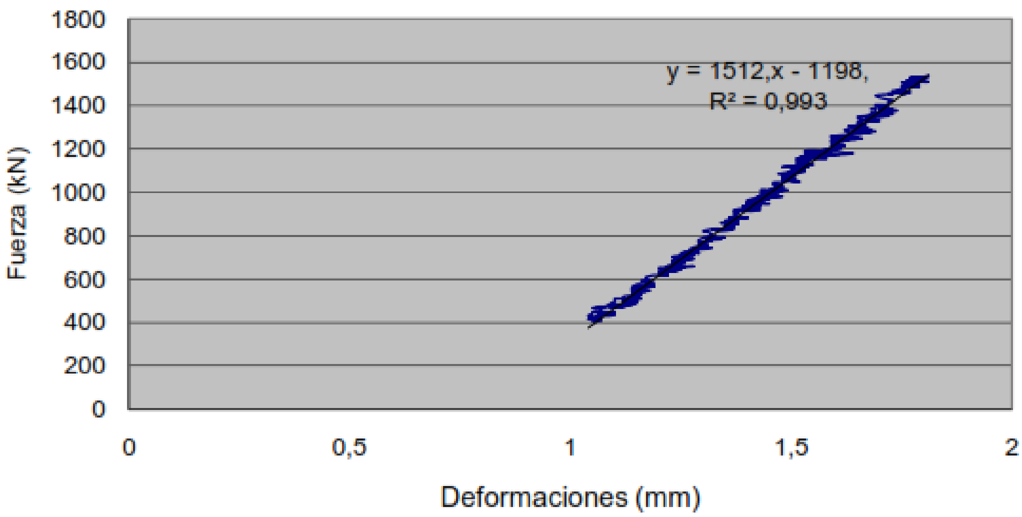


Figura (A.12.) Resultados ensayo de tracción probeta A

Probeta B:

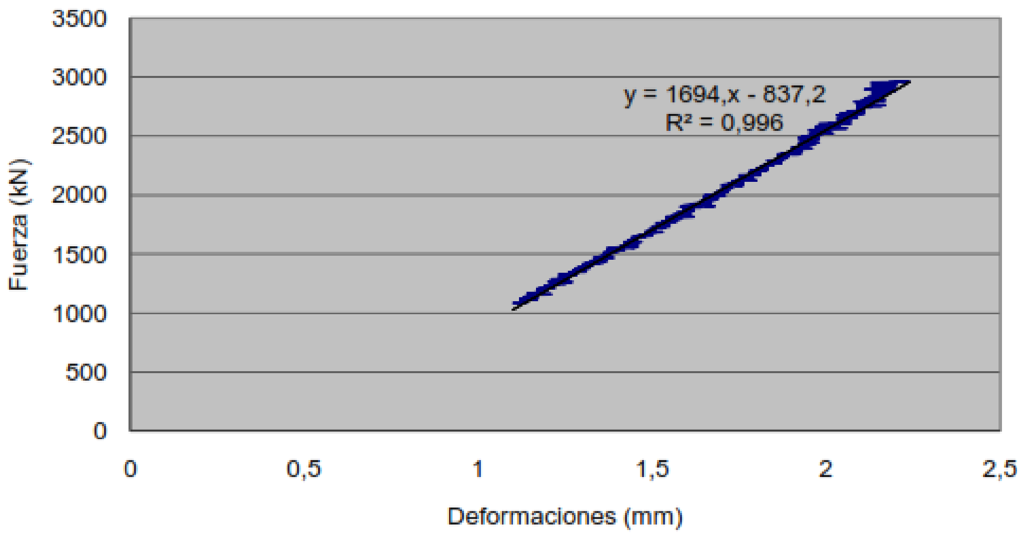


Figura (A.13.) Resultados ensayo de tracción probeta B

Probeta C:

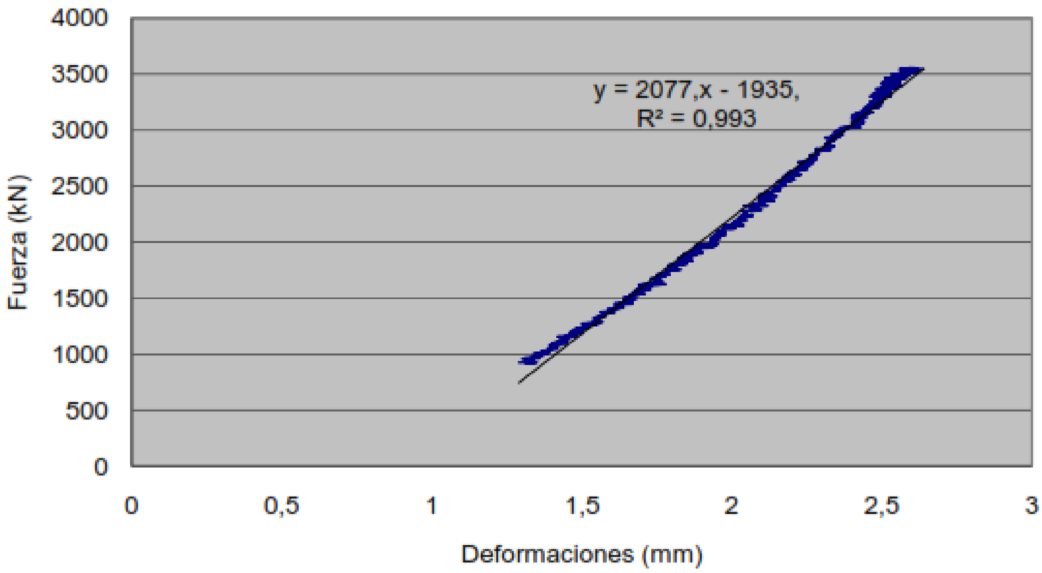


Figura (A.14.) Resultados ensayo de tracción probeta C

Probeta D:

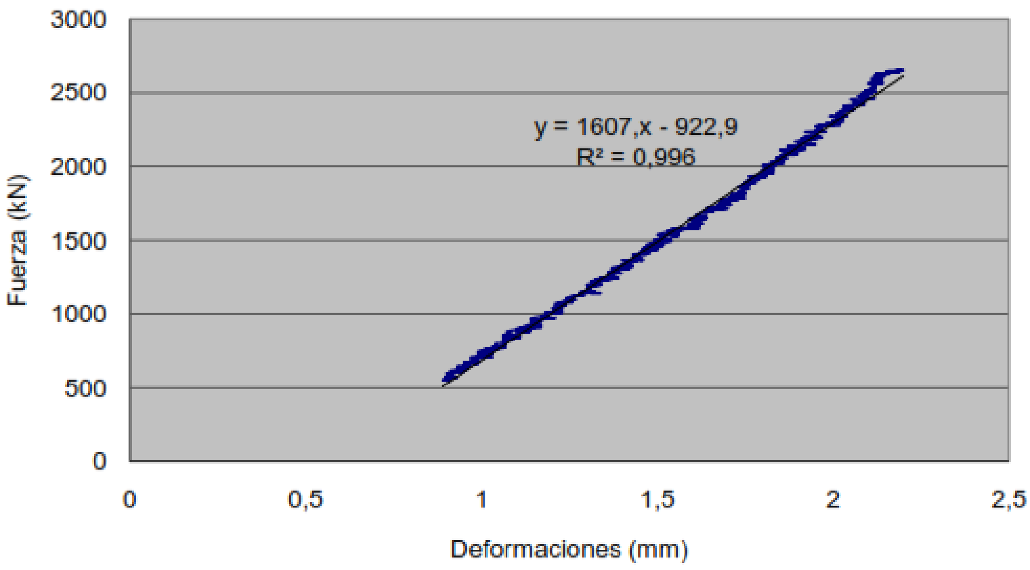


Figura (A.15.) Resultados ensayo de tracción probeta D

Los resultados son:

Ensayo	F/ΔL N/mm	Espesor mm	Ancho mm	L mm	E N/m2
A	1512,3	21,3	1,5	156	7,38E+09
B	1694,3	21,8	1,5	151,7	7,86E+09
C	2077,2	19,2	1,5	157	1,13E+09
D	1607,5	18,2	1,5	156	9,19E+09

Tabla (A.14.) Resultados del ensayo de tracción

Hallando la media aritmética, igual que en el ensayo anterior, obtenemos el valor del modulo de elasticidad.

$$E = 8.9365x10^{9} \text{ N/m} \qquad (A.25)$$

A.3.2.3. Error en el cálculo del módulo de elasticidad.

El módulo de elasticidad estándar para el aluminio es:

$$E = 7x10^{9}\text{N/m} \qquad (A.26)$$

Nuestros ensayos dieron como resultado:

$$E_{cargas} = 8.311x10^{10} \text{ N/m}^2 \qquad (A.27)$$

$$E_{tracción} = 8.9365x10^{9} \text{ N/m}^2 \qquad (A.28)$$

Observamos que el módulo estándar está situado entre los valores de ambos ensayos. Existen varias causas para la variabilidad de los resultados obtenidos, como pueden ser; la velocidad de deformación a la que se efectúa el ensayo, aplicación de las cargas, geometría de la probeta, características de la máquina con la que se ha realizado el ensayo o deslizamiento de las probetas dentro de las mordazas. Por este motivo se ha tomado el módulo de elasticidad como la media aritmética de ambos ensayos.

$$E = 4.6x10^{10}\ \mathrm{N/m^2} \tag{A.29}$$

A.4. Construcción de la estructura de ensayo

Como se ha comentado anteriormente para la realización de las pruebas reales se diseñó y construyó una estructura a escala reducida. Para ello se utilizó el citado aluminio ensayado para los pilares y láminas de acero de 3mm de grosor para los diferentes niveles de la misma. Fue necesario llevar las chapas a un lugar especializado en doblajes y cortes de chapa, para hacer las aletas donde irían atornillados los pilares.

Figura (A.16.) Piezas para la fabricación de la estructura real

Con las barras de metal se colocaron refuerzos en el centro de los pisos para evitar que flectaran en su centro. Se recortaron los pilares para que quedaran con las dimensiones efectuadas en el cálculo de la rigidez del material y se practicaron diferentes agujeros para su posterior unión a los pisos de la estructura.

Figura (A.17.)Pisos de la estructura real

También se practicaron agujeros a las aletas de los pisos de la estructura para poder atornillar los pilares y se decidió que la distancia entre centros de dos aletas consecutivas serían 15 cm.

Finalmente la estructura se presenta como muestra la figura (A.18.):

Figura (A.18.) Estructura Real

Anexo B: Implementación en Matlab del algoritmo COV-SSI

A continuación se expone el algoritmo programado en su totalidad

```
function [solucion] =
COVSSI(data,i,l,tiempo_,fm,margen_frecuencias,margen_amort,repeticiones_frec,r
epeticiones_amort)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                                COV-SSI                                     %
%PROGRAMA PARA EL CALCULO DE FRECUENCIAS, AMORTIGUAMIENTOS Y MODOS PROPIOS %
%                                                                            %
%Autor:   GABRIEL ALVAREZ GONZALEZ                                          %
%                                                                            %
%TFC:     "APLICACION NUMERICA Y EXPERIMENTAL DE UN METODO PARA EL ANALISIS%
%         MODAL EXPERIMENTAL DE ESTRUCTURAS"                                 %
%                                                                            %
%TUTORES: JUAN JOSE AZNAREZ GONZALEZ                                        %
%         LUIS ALBERTO PADRON HERNANDEZ                                      %
%                                JUNIO 2013                                  %
%
%VARIABLES DE ENTRADA:"i" Orden maximo del sistema a estimar en cada caso  %
%                     "l" numero de canales de medida.                     %
%                     "margen_frecuencias" maximo error permitido en el    %
%                                          calculo de las frecuencias.     %
%                     "margen_amort" maximo error permitido en el calculo  %
%                                    de los amortiguamientos.              %
%                     "tiempo" Longitud de la señal (en minutos).          %
%                     "fm" frecuencia de muestreo de la señal.             %
%                     "data" matriz que contiene los datos de las señales  %
%                            de entrada ordenados en filas.                %
%                     "repeticiones_frec" numero de repeticiones necesarias%
%                                         para considerar una frecuencia   %
%                                         como estable                     %
%                     "repeticiones_amort" Idem para el amortiguamiento    %
%VARIABLES DE SALIDA:"solucion" matriz que reune los resultados en trios   %
%                               frecuencia-amortiguamiento-modo propio     %
%GRAFICAS:Estabilizacion de frecuencias. Muestra en el grafico             %
%                                                                          %
%         (representado con cruces rojas) los valores de frecuencia        %
%         calculados en cada iteracion del programa.                       %
%                                                                          %
%         Estabilizacion de amortiguamientos. Muestra en el grafico        %
%         (representado por cruces verdes) los valores de amortiguamiento  %
%         calculados para cada frecuencia en cada iteracion.               %
%                                                                          %
%         Estabilizacion con espectro. Grafico de doble entrada. En el     %
%         margen (eje "y1") izquierdo se muestra la amplitud del espectro  %
%         de la señal de entrada. Los picos de la señal corresponden a las %
%         frecuencias de vibracion. Esta señal se representa en azul.      %
%         En el margen derecho (eje "y2") se muestra el orden del sistema  %
%         representando para cada orden las frecuencias calculadas.        %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
n=60*tiempo_*fm;                          %Puntos a estudiar.

%PASO 1 CALCULO DE LAS MATRICES DE COVARIANZA

                                          %Calculo de las
                                          %correlaciones
h=1;                                      %entre los vectores de
for f=1:1:l                               %resultados (xcorr es
    for c=1:1:l                           %una funcion
        Entrada(h,:)=xcorr(data(f,:),data(c,:))%implementada Matlab).
```

```
        h=h+1;
    end
end
clear h

%PASO 2 CREACION DE LAS MATRICES DE TOEPLITZ

                                   %Creacion de la matriz de
                                   %Toeplitz_1.
for f=1:1:l*l                      %Ordenacion de los vectores.
    for c=1:1:(n-1)                %Los datos que usaremos de los
        Entrada_final(f,c)=Entrada(f,n+c);%vectores de correlacion se
    end                            %ordenan ya que no los usaremos
end                                %todos.
clear f
clear c

matriz=cell(i,i);                  %Creacion de una matriz de
fila=cell(1,i);                    %bloques. Al estar definida la
bloque=zeros(l,l);                 %matriz de Toeplitz por una fila
u=1;                               %y una columna las hallamos.

for h=i:-1:1
    for f=1:1:l
        for c=1:1:l
            bloque(f,c)=Entrada_final(u,h);
            u=u+1;
        end
    end
    fila{1,i-h+1}=bloque;
    u=1;
end
clear f
clear c

for f=1:i
    matriz{1,f}=fila{1,f};
end

columna=cell(i,1);
for g=i:1:2*i-1
    for f=1:1:l
        for c=1:1:l
            bloque(f,c)=Entrada_final(u,g);
            u=u+1;
        end
    end
    columna{g-i+1,1}=bloque;
    u=1;
end
clear f
clear c

for m=1:i
    matriz{m,1}=columna{m,1};
end

for r=1:i
    for h=1:i
          matriz{r+1,h+1}=matriz{r,h};
```

```
    end
end
matriz1=matriz(1:i,1:i);
Toep1=cell2mat(matriz1);                    %Convertimos la celda en una
                                            %matriz de numeros.
matriz=cell(i,i);

matriz=cell(i,i);                       %Creacion de una matriz de
fila=cell(1,i);                         %bloques. Al estar definida la
bloque=zeros(l,l);                      %matriz de Toeplitz por una fila
u=1;                                    %y una columna las hallamos.

for h=i:-1:1
    for f=1:1:l
        for c=1:1:l
            bloque(f,c)=Entrada_final(u,h+1);
            u=u+1;
        end
    end
    fila{1,i-h+1}=bloque;
    u=1;
end
clear f
clear c

for f=1:i
    matriz{1,f}=fila{1,f};
end

columna=cell(i,1);
for g=i:1:2*i-1
    for f=1:1:l
        for c=1:1:l
            bloque(f,c)=Entrada_final(u,g+1);
            u=u+1;
        end
    end
    columna{g-i+1,1}=bloque;
    u=1;
end
clear f
clear c

for m=1:i
    matriz{m,1}=columna{m,1};
end

for r=1:i
    for h=1:i
          matriz{r+1,h+1}=matriz{r,h};
    end
end

matriz2=matriz(1:i,1:i);                    %Convertimos la celda en una
Toep2=cell2mat(matriz2);                    %matriz de numeros.

%PASO 3 DESCOMPOSICION EN VALORES SINGULARES.

%Descomposicion de ambas matrices en valores singulares, estimando su
rango mediante las matrices diagonales S0 y S1.
```

```
[U0,S0,V0]=svd(Toep1);
[U,S,V]=svd(Toep2);

for a=1:1:l*i
    S1=S0(1:a,1:a);                   %En este bucle se va aumentando
    U1=U0(1:l*i,1:a);                 %el rango estimado del sistema
    V1=V0(1:a,1:a);                   %calculando sus sucesivas
                                      %frecuencias,amortiguamientos
    S2=S(1:a,1:a);                    %y modos propios. Las formulas
    U2=U(1:l*i,1:a);                  %usadas son las obtenidas en el
    V2=V(1:a,1:a);                    %estudio teorico del COV-SSI.

    T1=U1*S1*V1';
    T2=U2*S2*V2';

    O1=U1*(S1^0.5);
    C1=(S1^0.5)*V1';

    C=O1(1:l,1:a);

    A=(pinv(O1))*T2*(pinv(C1));
    [Vectores,Valores]=eig(A);

    Acq=(diag(Valores))';
    Modos_Propios=C*Vectores;          %Calculo de los modos propios.

    for b=1:a
        Bcq(b)=(log(Acq(b)))*fm;
        Wcq(b)=abs(Bcq(b));                %Frecuencias.
        Ecq(b)=(-real(Bcq(b)))/Wcq(b);     %Amortiguamiento.

        Frec_W(a,b)=Wcq(b);
        Amort_E(a,b)=Ecq(b);
    end
end

Frec_W;
Amort_E;

for h=1:length(Amort_E)               %Eliminamos los amortiguamientos
    for k=1:length(Amort_E)           %menores que cero ya que no
        if Amort_E(h,k)<0.0           %tienen sentido fisico.
            Amort_E(h,k)=0;
        end
    end
end

i=6;
l=2;

X1=data(1,:);
a_inicial=fft(X1);                   %Recuperamos la transformada de
for f=1:1:n/2+1                      %Fourier de la señal de entrada
    a(f)=a_inicial(f);               %para poder graficar su respuesta.
end
figure(3);
fr=linspace(0,fm/2,n/2+1);
w=2*pi*fr;
```

```
plot(w,abs(a),'Color','b');
xlabel('Frecuencia rad/s')
ylabel('Amplitud (g/Hz)')
ax1 = gca;
set(ax1,'XColor','b','YColor','b')


ax2 = axes('Position',get(ax1,'Position'),...
           'XAxisLocation','top',...
           'YAxisLocation','right',...
           'Color','none',...
           'XColor','k','YColor','k');

hold on
for f=1:1:length(Frec_W)              %Graficamos sobre la respuesta las
    for c=1:length(Frec_W)            %frecuencias que son candidatas
        plot(Frec_W(f,c),f,'k+');     %a ser estables.
    end
end
ylabel('Orden del sistema "n"')

figure(5)
hold on

for f=1:1:l*i
    for c=1:l*i
        if Frec_W(f,c) ~=0             %Bucle para ver por pantalla los
            plot(Frec_W(f,c),f,'r+')   %valores de Frecuencia sobre el
        end                            %espectro.
    end
end
xlabel('Frecuencia rad/s')
ylabel('Orden del sistema "n"')

hold off

for f=1:1:l*i
    for c=1:1:l*i
        Frecuencias(f,c)=Frec_W(f,c);
    end
end

figure(4)
hold on
for f=1:1:l*i
    for c=1:1:l*i
        if Amort_E(f,c)>0.0                 %Bucle para graficar los
            plot(Amort_E(f,c),f,'g+')       %amortiguamientos.
        end
    end
end

xlabel('Amortiguamiento')
ylabel('n')

                                       %Bucle para controlar el error,
                                       %supuesto el porcentaje
for f=1:l*i                             %introducido en la cabecera.
    for c=1:l*i                         %El programa busca en la matriz
```

```
        for g=1:l*i                   %de frecuencias aquellas que son
            for d=1:l*i               %aptas para ser estables.
                limite_W=((Frec_W(f,c)-Frec_W(g,d))/Frec_W(f,c))*100;
                if
abs(limite_W*margen_frecuencias)<=margen_frecuencias
                    Frec_W(g,d)=Frec_W(f,c);
                end
            end
        end
    end
end

No_Cero=nonzeros(Frec_W);           %Identificamos los puntos de las
No_Cero=No_Cero';                   %matrices de amortiguamiento y
                                    %frecuencia distintos de cero.
for s=1:length(No_Cero)             %Bucle para saber que valores se
    h=0;                            %repiten las veces requeridas, que
    for t=1:length(No_Cero)         %supondremos que son estables.
        if No_Cero(s)==No_Cero(t)
            h=h+1;
            if h >= repeticiones_frec
                Estable(s)=No_Cero(s);
                repe(s)=h;
            end
        end
    end
end

Estable=Estable';
Estable=nonzeros(Estable);            %Estos son los valores de
                                      %frecuencia estables.
W_Estable=union(Estable,Estable);     %Comando para que muestre los
                                      %valores de los vectores  que se
E_Estable=zeros(l*i,l*i);             %repiten.
F_Estable=zeros(l*i,l*i);             %Comparamos los valores aptos
for j=1:length(W_Estable)             %para ser estables con la matriz
    for h=1:1:l*i                     %de frecuencias e identificamos
        for k=1:1:l*i                 %su amortiguamiento.
            if  abs(((W_Estable(j)-Frecuencias(h,k))/W_Estable(j))*100)
<=margen_frecuencias
                E_Estable(h,k)=Amort_E(h,k);
                F_Estable(h,k)=Frecuencias(h,k);
            end
        end
    end
end

posibles=zeros(length(nonzeros(F_Estable)),2);

u=1;

for f=1:1:l*i                        %Ordenamos en dos vectores los
    for c=1:1:l*i                    %posibles valores de frecuencia y
        if F_Estable(f,c)>0          %amortiguamiento.
            posibles(u,1)=F_Estable(f,c);
            posibles(u,2)=E_Estable(f,c);
            u=u+1;
        end
    end
end
```

```
f_posibles=posibles(:,1);
e_posibles=posibles(:,2);

frecuency=zeros(length(f_posibles),2);%En el siguiente bucle
                                      %identificaremos frecuencia con
                                      %amort. correspondiente.
for j=1:1:length(W_Estable)
    for f=1:1:length(f_posibles)
        if         abs(((W_Estable(j)-f_posibles(f))/W_Estable(j))*100)
<=margen_frecuencias
            p=1;
            for c=1:1:length(e_posibles)
                if                               abs(((W_Estable(j)-
f_posibles(c))/W_Estable(j))*100)    <=1.0    &&    abs(((e_posibles(f)-
e_posibles(c))/e_posibles(f))*100) <=margen_amort
                    p=p+1;
                    if p>repeticiones_amort
                        frecuency(f,1)=f_posibles(f);
                        frecuency(f,2)=e_posibles(f);
                    end
                end
            end
        end
    end
end
frecuency;
                                    %Recorremos la matriz de posibles
u=0;                                %frecuencias, observamos cuantas
                                    %veces se repite cada valor de
for j=1:1:length(W_Estable)         %amortiguamiento (con el margen
    media=0;                        %de error acordado) y hacemos la
    u=0;                            %media para dar un valor final.
    for f=1:length(frecuency)
        if         abs(((W_Estable(j)-frecuency(f,1))/W_Estable(j))*100)
<=margen_frecuencias
            media=(media+frecuency(f,2));
            u=u+1;
        end
    end
    W_Estable(j,2)=media/u;
end

Parejas_Estables=W_Estable;          %Estas son las parejas frecuencia
                                     %-amortiguamiento soluciï¿½n. El
E_Estable=W_Estable(:,2);            %ultimo paso es calcular el modo
W_Estable=W_Estable(:,1);            %propio correspondiente a esa
                                     %frecuencia. La matriz de modos
clear j                              %propios esta calculada y a cada
clear k                              %modo le corresponde un valor de
Modos=zeros(length(W_Estable),1);    %frecuencia.
u=0;
for j=1:1:length(W_Estable)
    u=0;
    for k=1:1:length(Wcq)
        if abs((W_Estable(j)-Wcq(k))/W_Estable(j))*100<1.0
            Modos(j,:)=Modos_Propios(:,k);
            u=u+1;                   %Al ser la frecuencia estable
        end                          %conocida, a cada modo (un modo
    end                              %por columna de la matriz
    if u==0                          %obtenida previamente)
```

```
       Modos(j,:)=0;                 %corresponde el mismo valor de
    end                              %columna que para la frecuencia,
end                                  %por lo que recorremos la matriz
                                     %Wcq comparandola con las
                                     %frecuencias estables, y al
Modos;                               %encontrar un valor que cumpla la
                                     %tolerancia, obtenemos el modo.
Normalizados=zeros(length(W_Estable),length(Modos));
Modos=real(Modos);                   %Se normalizan los modos, para
                                     %tener una vision mas general de
for i=1:1:l                          %la deformada modal.
    Normalizados(i,:)=Modos(i,:)/Modos(i,1);
end

solucion=[Parejas_Estables,Normalizados];

for f=1:1:length(W_Estable)
        if solucion(f,3)==0
            solucion(f,:)=[];
        end
end

solucion                              %Finalmente el programa arroja la
                                      %solucion, que es un trio de
save('workspace.mat');                %datos frecuencia-amortiguamiento
                                      %-modo propio.
```

Anexo C: Código del programa realizado en Matlab para obtener la respuesta de sistemas de dos grados de libertad ante señal sintética de ruido blanco

A continuación se expone el código programado para esta subrutina.

```
function [data] =
RespuestaSistema2GDLAnteRuidoBlanco(i,l,SNR,nu,K1,K2,m1,m2,tiempo_,fm)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                RespuestaSistema2GDLAnteRuidoBlanco                      %
%                                                                          %
%   PROGRAMA PARA LA GENERACION DE RUIDO BLANCO SINTETICO, CALCULO DE LA  %
%RESPUESTA EN TIEMPO Y EN FRECUENCIA ANTE EL RUIDO BLANCO DE UN SISTEMA DE%
%        2 GRADOS DE LIBERTAD Y ADICIÓN DE RUIDO A LA SEÑAL OBTENIDA       %
%                                                                          %
%Autor:  GABRIEL ALVAREZ GONZALEZ                                          %
%                                                                          %
%TFC:    "APLICACION NUMERICA Y EXPERIMENTAL DE UN METODO PARA EL ANALISIS%
%        MODAL EXPERIMENTAL DE ESTRUCTURAS"                                %
%                                                                          %
%TUTORES:JUAN JOSE AZNAREZ GONZALEZ                                        %
%        LUIS ALBERTO PADRON HERNANDEZ                                     %
%                              JUNIO 2013                                  %
%                                                                          %
%VARIABLES DE ENTRADA:"i" Orden maximo del sistema a estimar en cada cas  %
%                     "l" numero de canales de medida.                     %
%                     "SNR" Signal-to-Noise-Ratio, porcentaje de ruido    %
%                           introducido en la señal                        %
%                     "nu" valor del amortiguamiento histerético supuest  %
%                     "K1,K2" valores de la rigidez de los gdl 1 y 2,     %
%                             respectivamente                              %
%                     "m1,m2" valores de las masas de los gdl 1 y 2       %
%                             respsctivamente                              %
%                     "tiempo" Longitud de la señal (en minutos).         %
%                     "fm" frecuencia de muestreo de la señal.            %
%                                                                          %
%VARIABLES DE SALIDA:"data" matriz que reune los resultados de la         %
%                           generacion de ruido blanco, ya transformado   %
%GRAFICAS: Espectro. representa la respuesta del sistema ante el ruido    %
%          blanco, donde los picos de la señal son las frecuencias de     %
%          vibracion                                                       %
%                                                                          %
%          Desplazamiento. Muestra las aceleraciones del gdl en cada      %
%          instante.                                                       %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

n=60*tiempo_*fm;              %Numero de puntos.
T=n/fm;                       %Periodo de la señal.
fny=fm/2;                     %Frec. Nyquist.
y=wgn(1,n,1);                 %Generacion del vector de ruido.
Y=fft(y);                     %Transformada del vector de ruido.
t=linspace(0,T,n);            %Identificacion en el dominio del tiempo.
f=linspace(0,fny,n/2+1);      %Identificacion en el dominio de la
                              %frecuencia.


figure(1)
plot(f(1:end),abs(Y(1:n/2+1)))
```

```
k1=K1*(1+2*nu*i);
k2=K2*(1+2*nu*i);
w=2*pi*f;                          %Vector de omegas.
w1=((m1*k2+m2*k1+m2*k2)-((((m1*k2+m2*k1+m2*k2)^2)-
(4*m1*m2*k1*k2))^0.5))/(2*m1*m2);
w1=w1^0.5;                         %Calculo de la w1.

w2=((m1*k2+m2*k1+m2*k2)+((((m1*k2+m2*k1+m2*k2)^2)-
(4*m1*m2*k1*k2))^0.5))/(2*m1*m2);
w2=w2^0.5;                         %Calculo de la w2

A=[m1;m2]*Y;
K=[k1+k2,-k2;-k2,k2];              %Matriz de rigidez.
M=[m1,0;0,m2];                     %Matriz de masas.

for l=1:n/2+1                %Bucle para la obtencion de los vectores de
    P=K-(w(l)^2)*M;          %resultados U1 y U2.
    C=M*[1;1];
    B=C*Y(l);
    R=linsolve(P,B);
    U1(l)=R(1,1);
    U2(l)=R(2,1);
end

semilogy(w,abs(U1))                %Mostramos en pantalla la respuesta.
xlabel('Frecuencia rad/s');
ylabel('Amplitud (g/Hz)');

preal1=U1;
preal2=U2;
for j=1:n/2-1
    preal1(n/2+1+j)=conj(preal1(n/2+1-j));
    preal2(n/2+1+j)=conj(preal2(n/2+1-j));
end

preal1(1)=real(preal1(1));
preal2(1)=real(preal2(1));

preal1(n/2+1)=real(preal1(n/2+1));
preal2(n/2+1)=real(preal2(n/2+1));

x1=ifft(preal1);
x2=ifft(preal2);
figure(2)
plot(t,x1,'g',t,y)                 %Se grafica la señal obtenida.
xlabel('tiempo (segundos)');
ylabel('Desplazamiento (g)');

vector_ruido=wgn(1,n,1);           %Generacion del vector de ruido.
ruido1=(vector_ruido/max(abs(vector_ruido)))*(abs(max(x1)))*SNR;
ruido2=(vector_ruido/max(abs(vector_ruido)))*(abs(max(x2)))*SNR;

x1=x1+ruido1;                      %Añadimos el ruido a la señal.
x2=x2+ruido2;

data(1,:)=x1;
data(2,:)=x2;
save ('data','data');              %Guardamos los resultados.
```