



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS
DE GRAN CANARIA



FORMULACIÓN DE UN ELEMENTO FINITO TIPO VIGA TIMOSHENKO. IMPLEMENTACIÓN EN UN MODELO NUMÉRICO PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE PROBLEMAS DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA

Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería Industrial
Escuela de Ingenierías Industriales y Civiles

Autor:	Tutor:	Tutor:
Santiago Roberto Déniz Santana	Luis A. Padrón Hernández	Juan José Aznárez González

Las Palmas de Gran Canaria, Julio de 2013

A mis padres

Agradecimientos

En primer lugar, quiero mostrar mi más sincero y profundo agradecimiento a mis tutores el Dr. D. Luis Alberto Padrón Hernández y el Dr. D. Juan José Aznárez González por la dedicación, paciencia y el gran apoyo que siempre me han brindado. Ellos han sido artífices de que haya podido llegar hasta aquí, hasta el final del camino. Además, quiero destacar que ellos no sólo me han transmitido nuevos conocimientos y habilidades, también, me han transmitido valores inherentes a su calidad humana, de lo que me siento orgulloso. Creo que podría resumir todo ese respeto, admiración y eterno agradecimiento, tanto en lo académico como lo personal, con una célebre cita de Isaac Newton que dice: “si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes”.

Quiero aprovechar estas líneas para darles las gracias a mis padres porque, desde su humildad, han sacrificado mucho su vida para que yo haya alcanzado cada logro de la mía, así que sólo puedo repetir una y otra vez gracias por ese grandioso esfuerzo. También, quiero agradecer el apoyo a mis hermanos, así como a los otros miembros de mi familia.

Asimismo, quiero mostrar mi gratitud a personas como: Tony, Edu, Eladio, Jose, Chema y Lisa. Además, me gustaría hacerla extensible a esos otros amigos diseminados por toda Europa que me han dado también toneladas de apoyo, afecto y comprensión.

Finalmente, quisiera dar las gracias a los miembros de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del SIANI por su ayuda y altruismo hacía mi persona. Me gustaría incluir a aquellos miembros del Departamento de Ingeniería Civil, de la Escuela de Ingenieros Industriales y Civiles, AEGEE y la Universidad, en general, que me han hecho ver que se puede disfrutar mucho del camino.

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación obtenida del Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), la Agencia Canaria de Investigación, Innovación y Sociedad de la Información (ACIISI) del Gobierno de Canarias y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) a través de los Proyectos de Investigación BIA2010-21399-C02-01 y ProID20100224.

Índice general

1	Introducción	15
1.1	Antecedentes	15
1.2	Objetivos y alcance	16
1.3	Estructura del documento	17
2	Fundamentos Teóricos	19
2.1	Deformación por cortante	19
2.2	Viga Euler-Bernoulli	20
2.3	Viga Timoshenko	21
2.4	Método de elementos finitos	25
2.4.1	Cálculo del desplazamiento	26
2.4.2	Cálculo del giro	31
2.5	Teorema de los trabajos virtuales	33
2.6	Matrices elementales	36
2.6.1	Matriz de rigidez	36
2.6.2	Matriz de masa	37
2.6.3	Matriz Q	38
2.7	Resolución matricial	39
2.8	Validación del elemento Timoshenko	41
2.8.1	Representación gráfica	47
3	El método MEF-MEC	53
3.1	Representación integral	54
3.1.1	Teorema de reciprocidad en la elastodinámica	54
3.1.2	Solución fundamental	55
3.1.3	Representación integral	56
3.1.4	Representación integral en el contorno	56
3.2	El método de elementos de contorno	58
3.2.1	Proceso de discretización	59
3.2.2	Sistema de ecuaciones que surge del MEC	61
3.2.3	Tipología de elementos de contorno	61

3.2.4	Aspectos numéricos del MEC	63
3.3	Modelo MEF-MEC	63
3.3.1	Ecuaciones de elementos de contorno para el suelo . . .	64
3.3.2	Sistema de ecuaciones para el pilote simple	66
3.4	Acoplamiento MEF-MEC	67
4	Resultados	71
4.1	Impedancias horizontales	72
4.1.1	Pilote flotante, macizo, $E_p/E_s = 100$	74
4.1.2	Pilote flotante, macizo, $E_p/E_s = 1000$	75
4.1.3	Pilote hincado, macizo, $E_p/E_s = 100$	76
4.1.4	Pilote hincado, macizo, $E_p/E_s = 1000$	77
4.1.5	Pilote flotante, hueco, $E_p/E_s = 100$	78
4.1.6	Pilote flotante, hueco, $E_p/E_s = 1000$	79
4.1.7	Pilote hincado, hueco, $E_p/E_s = 100$	80
4.1.8	Pilote hincado, hueco, $E_p/E_s = 1000$	81
4.2	Relación de impedancias horizontales	82
4.2.1	Pilote flotante, sección circular maciza, $E_p/E_s = 100$.	83
4.2.2	Pilote flotante, sección circular maciza, $E_p/E_s = 1000$.	84
4.2.3	Pilote hincado, sección circular maciza, $E_p/E_s = 100$.	85
4.2.4	Pilote hincado, sección circular maciza, $E_p/E_s = 1000$.	86
4.2.5	Pilote flotante, sección circular hueca, $E_p/E_s = 100$. .	87
4.2.6	Pilote flotante, sección circular hueca, $E_p/E_s = 1000$.	88
4.2.7	Pilote hincado, sección circular hueca, $E_p/E_s = 100$. .	89
4.2.8	Pilote hincado, sección circular hueca, $E_p/E_s = 1000$.	90
4.3	Análisis de Resultados y Conclusiones	91
4.3.1	Comparación con un modelo contrastado	91
4.3.2	Comparación de las diferentes longitudes	96
4.3.3	Comparación de las diferentes secciones	98
4.3.4	Comparación de las condiciones en los extremos	100
4.3.5	Comparación de los tipos de terreno	101
5	Conclusiones y Líneas Futuras	103
5.1	Resumen	103
5.2	Conclusiones	104
5.2.1	Relación de impedancias para $L/d = 3$	106
5.2.2	Relación de impedancias para $L/d = 5$	107
5.2.3	Relación de impedancias para $L/d = 10$	108
5.3	Líneas Futuras	109

Índice de figuras

2.1	Representación de una rebanada en equilibrio	20
2.2	Configuración indeformada y deformada debido a la flexión . .	22
2.3	Configuración indeformada y deformada debido al cortante . .	22
2.4	Elemento de tres nodos	26
2.5	Viga modelada por tres elementos de tres nodos	26
2.6	Configuración general de un problema elástico	33
2.7	Viga en voladizo sometida a un desplazamiento unitario	41
2.8	Soluciones Bernoulli y Timoshenko	48
2.9	Perfiles IPE comparados con la solución Bernoulli	50
2.10	Representación de la influencia la esbeltez	51
3.1	Procedimiento de eliminación de la singularidad	57
4.1	Modelo de estructura enterrada para calcular la impedancia .	72
4.2	Pilote flotante, sección circular maciza, terreno duro	74
4.3	Pilote flotante, sección circular maciza, $E_p/E_s = 1000$	75
4.4	Pilote hincado, sección circular maciza, $E_p/E_s = 100$	76
4.5	Pilote hincado, sección circular maciza, $E_p/E_s = 1000$	77
4.6	Pilote flotante, sección circular hueca, $E_p/E_s = 100$	78
4.7	Pilote flotante, sección circular hueca, $E_p/E_s = 1000$	79
4.8	Pilote hincado, sección circular hueca, $E_p/E_s = 100$	80
4.9	Pilote hincado, sección circular hueca, $E_p/E_s = 1000$	81
4.10	Modelo simple	82
4.11	Rel.de molelos pilote flotante, macizo, $E_p/E_s = 100$	83
4.12	Rel.de molelos pilote flotante, macizo, $E_p/E_s = 1000$	84
4.13	Rel.de molelos pilote hincado, macizo, $E_p/E_s = 100$	85
4.14	Rel.de molelos pilote hincado, macizo, $E_p/E_s = 1000$	86
4.15	Rel.de molelos pilote flotante, hueco, $E_p/E_s = 100$	87
4.16	Rel.de molelos pilote flotante, hueco, $E_p/E_s = 1000$	88
4.17	Rel.de molelos pilote hincado, hueco, $E_p/E_s = 100$	89
4.18	Rel.de molelos pilote hincado, hueco, $E_p/E_s = 1000$	90

4.19	Sección circular hueca	93
5.1	Relación de impedancias para $L/d = 3$	106
5.2	Relación de impedancias para $L/d = 5$	107
5.3	Relación de impedancias para $L/d = 10$	108

Índice de tablas

3.1	Tipos de elementos triangulares y cuadriláteros cuadráticos . .	62
4.1	Sección circular maciza ante esfuerzo cortante	92
4.2	Sección circular hueca ($\frac{e}{d} = 0,1$) ante esfuerzo cortante	95

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

El Proyecto Fin de Carrera que se propone se integra en la línea de trabajo que llevan a cabo los miembros de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del SIANI en el campo de la dinámica de estructuras y, en particular, en el estudio de la influencia de los fenómenos de interacción suelo-estructura en la respuesta. En concreto, ha sido de interés en los últimos años el análisis de la respuesta dinámica de estructuras de edificación cimentadas con pilotes. Así, se ha desarrollado e implementado un modelo acoplado de Elementos de Contorno y Elementos Finitos (MEC-MEF) tridimensional armónico, que aprovecha las ventajas de cada metodología, para el análisis dinámico directo de este tipo de estructuras. Este modelo cuenta con las ventajas del MEC para representar el terreno donde se asienta la edificación (su carácter de medio semi-infinito así como la presencia de ondas sísmicas excitadoras) y la simplificación que supone modelar vigas, pilares y pilotes de la estructura con el MEF.

En este modelo vigas, pilares y pilotes se tratan como elementos (barras) en su formulación más clásica y simplificada (Euler-Bernoulli), es decir, elementos que en sus ecuaciones de gobierno no incorporan la deformación asociada al esfuerzo cortante. Se trata, por tanto, de un modelo sólo aplicable al estudio de elementos cuya relación de esbeltez supera ciertos valores límite (límite difuso, según sea el problema y el margen de error que esté dispuesto a aceptar el analista). Decir también que este programa está muy desarrollado en la actualidad y ha permitido el análisis de la respuesta de cimentaciones pilotadas (impedancias e interacción cinemática), así como el estudio de la repuesta de la superestructura y de otras estructuras cercanas, sometido el conjunto a trenes de ondas sísmicas con incidencia completamente general.

Con este Proyecto Fin de Carrera se pretende implementar en este código un tipo de elemento barra más general que permitirá estudiar cimentaciones pilotadas (u otras estructuras) donde su pequeña esbeltez pueda comprometer las hipótesis Euler-Bernoulli. Por las especiales características de los problemas estudiados con el modelo MEC-MEF, se optó inicialmente por un elemento viga hermitico de 3 nodos, más adecuado para representar la interacción pilote-suelo. En la formulación clásica el procedimiento para la obtención de las funciones de forma y matrices de rigidez y masa para este tipo de elemento es sencilla. Sin embargo, para elementos Timoshenko las formulaciones consistentes (matrices de rigidez y masa) son bastante recientes, más complejas y sólo existen para elementos hermiticos de 2 nodos. Será necesario, y formará parte del alcance de este Trabajo, la formulación hermitica de un elemento viga Timoshenko de 3 nodos compatible con el código desarrollado.

Una vez formuladas e implementadas las ecuaciones de este elemento, se resolverán algunos problemas de validación y se estudiarán otros que pongan de manifiesto la importancia y el rango de validez de la teoría clásica de vigas en el ámbito de modelos que incorporen interacción suelo-estructura en dinámica estructural.

1.2. Objetivos y alcance

Los Tutores de este Proyecto Fin de Carrera establecen a priori una serie de objetivos en una secuencia que permita al Alumno que lo realiza, en primer, ampliar su formación en el campo de la dinámica de estructuras y los métodos numéricos, y en segundo lugar, estar en disposición de utilizar y modificar adecuadamente software ya disponible para la obtención de resultados. Más detalladamente los objetivos a cumplir son:

- Se deberá estudiar las bases teóricas de la dinámica de estructuras de barras. Esta materia no forma parte de los contenidos de ninguna de las asignaturas que ha cursado en la titulación.
- Se estudiarán las bases de la Elastodinámica Lineal, del Método de los Elementos de Contorno y el Método de los Elementos Finitos, que han servido para el desarrollo del software que ha de modificar.
- Familiarizarse con el lenguaje de programación FORTRAN 90, que es el lenguaje utilizado en la implementación de los modelos matemáticos que utilizará y modificará. Deberá ser capaz de escribir, compilar y ejecutar sus propios programas en este lenguaje.

- Otro objetivo será estudiar con un alto nivel de detalle el programa informático vinculado al modelo acoplado del método de elementos de contorno elementos finitos. Como se ha comentado previamente, en el momento actual este código permite el estudio dinámico de estructuras de barras cimentadas con pilotes, considerando ambos (barras y pilotes) desde la teoría de elementos esbeltos Euler-Bernoulli.
- Se formulará las ecuaciones, funciones de forma, matrices de rigidez y masa para elementos viga que incorporen la deformación por cortante (elementos Timoshenko) en régimen dinámico armónico.
- Implementar estas ecuaciones en el modelo acoplado del método de elementos de contorno y finitos. Validarlo con ejemplos sencillos.
- Aplicar el programa desarrollado para estudiar la respuesta de distintas configuraciones estructurales donde su pequeña esbeltez comprometa las hipótesis Euler-Bernoulli, ante solicitaciones dinámicas de distinto tipo.

1.3. Estructura del documento

Tras indicar los antecedentes que dan origen a este Proyecto Fin de Carrera y los objetivos y alcance del mismo, se procederá a desglosar la estructura del Proyecto de Fin de Carrera.

El capítulo 2 muestra las bases teóricas en las que se fundamenta la formulación de la viga Timoshenko. En él, se formula la ecuación de gobierno del problema donde se incluye la deformación por cortante. Además, se indica la resolución de la anterior ecuación por el método de elementos finitos, puesto que normalmente no posee solución analítica. También, se indica la obtención de las matrices elementales de masa y rigidez que son de gran importancia para el cálculo computacional. Se incluye, además, el ensamblaje de éstas, obteniendo la matriz global de masa y rigidez. Una vez obtenidas las matrices globales, se puede escribir un sistema de ecuaciones que, una vez resuelto, relacione las variables cinemáticas con las cargas externas. Finalmente, aparte de la formulación teórica, se muestra la implementación del código y su verificación con modelos contrastados que posean solución analítica.

En el capítulo 3 se modeliza el comportamiento del suelo, haciendo uso del método de los elementos de contorno. Se estudian sus bases teóricas. También, se describen las ecuaciones de acoplamiento entre el método de elementos de contorno y el de elementos finitos, que permitirán modelar la interacción entre el suelo y la estructura.

En el capítulo 4 se recogen las gráficas de impedancias, que indica la relación en un desplazamiento unitario y el esfuerzo que se precisa para ello. Se muestra las relaciones entre impedancias que básicamente, son el ratio de impedancias obtenidas por ambos modelos y que permite conocer la divergencia entre ambos. Además, se plasman las observaciones acerca de las gráficas de resultados.

En el capítulo 5 se reflejarán, de manera concisa, las principales conclusiones de este Proyecto Fin de Carrera. Finalmente, se indicarán las líneas futuras de desarrollo que permitirán un estudio aún más profundo y detallado de esta materia.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

2.1. Deformación por cortante

Los sólidos prismáticos han sido una de las unidades básicas de las estructuras desde la antigüedad. El uso de este tipo de formas geométricas es habitual en pilares, vigas, pilotes y demás formas constructivas. Obviamente, la importancia de su comportamiento, frente a esfuerzos de diferente índole es transcendental. Este documento tratará principalmente los relacionados con cuerpos prismáticos sometidos a flexión y cortante. Éstos pueden ser vigas o como en este caso, que serán estructuras enterradas.

Tradicionalmente, este tipo de sólidos se ha analizado con la Teoría de Euler-Bernoulli. Ésta es especialmente apropiada para sólidos esbeltos, es decir, que una de las dimensiones sea ampliamente mayor que las otras dos. Además, se debe cumplir que este sólido esté cargado transversalmente respecto a su eje longitudinal (línea imaginaria que une todos los centros de gravedad). Cumpliendo estos requisitos, y sin olvidar que desprecia la deformación por esfuerzo cortante, el modelo de Euler-Bernoulli es bastante frecuente y fiable.

Timoshenko en [14] y [15] desarrolló un modelo que incluye la deformación por cortante. Se observó que este modelo de Timoshenko era apto para estudiar cualquier rango de esbelteces de vigas y que los resultados de ambos modelos convergen cuando se estudian sólidos esbeltos.

Cabe destacar, que uno de los principales objetivos de este Proyecto Fin de Carrera es usar del modelo Timoshenko para la resolución de problemas de interacción suelo-estructura en cimentaciones, concretamente, donde la estructura enterrada no sea especialmente esbelta. Se usará este nuevo modelo puesto que la diferencia de los resultados puede ser considerable debido al efecto del esfuerzo cortante.

2.2. Viga Euler-Bernoulli

Éste es el modelo clásico de cálculo de los sólidos prismáticos sometidos a flexión. El método de Euler-Bernoulli desprecia el efecto provocado la deformación por cortante debido a las cargas perpendiculares al eje longitudinal de la barra. Asimismo, el desplazamiento de cada punto únicamente depende de la coordenada longitudinal [1]. Además, al deformarse el sólido prismático, todas y cada una de sus rebanadas siguen siendo planas y perpendiculares a línea media.

Para este cálculo se precisará las ecuaciones del equilibrio y la ley de comportamiento. El objetivo final, será expresar a través de una ecuación diferencial la relación entre la carga distribuida y el desplazamiento provocado por la flexión (v_f).

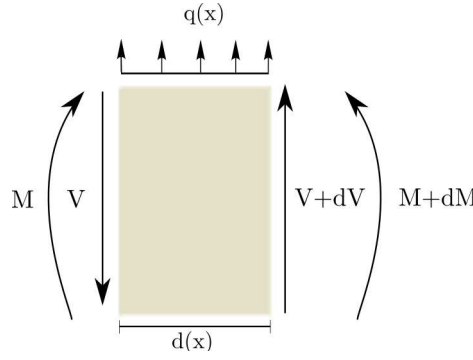


Figura 2.1: Representación de una rebanada en equilibrio

Primeramente se plantea las ecuaciones del equilibrio de esfuerzos en un rebanada tal como la de la figura 2.1. Se obtiene la ecuación (2.1)

$$\begin{aligned}
 V + dV - V + q(x) \cdot dx &= 0 \\
 dV + q(x) \cdot dx &= 0 \\
 \frac{dV}{dx} + q(x) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Se procede a plantear el equilibrio de momentos. A partir de la representación de la rebanada y teniendo en cuenta que la diferenciales de segundo orden son despreciables:

$$\begin{aligned}
M + dM - M + (V + dV) \cdot dx + q(x) \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} &= 0 \\
dM + V \cdot dx &= 0 \\
\frac{dM}{dx} + V &= 0
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

Es conveniente recordar, que el momento es resultado de la integral extendida en el área transversal del momento generado por la tensión normal. Usando la ecuación siguiente, (2.3), se consigue expresar el momento en función del desplazamiento vertical provocado por el esfuerzo de flexión, (v_f), y siendo dependiente del módulo de elasticidad (E) y del momento de inercia (I) .

$$M = - \int \int_A y \cdot \sigma_x \cdot dA = EI \frac{d^2 v_f}{dx^2} \tag{2.3}$$

Tras combinar (2.2) y (2.3), se obtiene (2.4). Ahora se debe expresar ese cortante, V , en función del desplazamiento y la carga externa.

$$V = -EI \cdot \frac{d^3 v_f}{dx^3} \tag{2.4}$$

Ahora la ecuación (2.4) es sustituida en (2.1). Con ello se consigue hacer desaparecer el término del cortante y expresarlo en función del desplazamiento provocado por la flexión, la carga aplicada, el módulo de elasticidad y el momento de inercia.

$$q(x) = EI \cdot \frac{d^4 v_f}{dx^4} \tag{2.5}$$

Más adelante, en este presente capítulo se observará, que esta expresión es la ecuación diferencial que gobierna los desplazamientos queda englobada en el modelo Timoshenko. Siendo ambos resultados coincidentes cuando son sólidos esbeltos.

2.3. Viga Timoshenko

El modelo de Timoshenko se caracteriza por dar respuesta además al efecto provocado por la deformación de cortante que el anterior no contemplaba. Éste recoge matemáticamente, la desviación del modelo Euler-Bernoulli, que se observaba para vigas de gran canto. Siendo más específico,

este fenómeno aparece en vigas(sólidos en general) de escasa esbeltez. En otras palabras, es un modelo es el único adecuado para sólidos prismáticos donde la dimensión longitudinal no predomine sobre las transversales.

La principal premisa que añade esta teoría es que la línea media y las rebanadas dejan de ser perpendiculares. Es decir, los desplazamientos de la viga tiene un comportamiento que obedece, al efecto conjunto de la flexión(giro de la línea media) y el del cortante (giro de las rebanadas respecto a línea media, dejando de ser perpendiculares). El efecto de la flexión se puede observar en la figura 2.2. Mientras el del cortante aparece en la figura 2.3 .

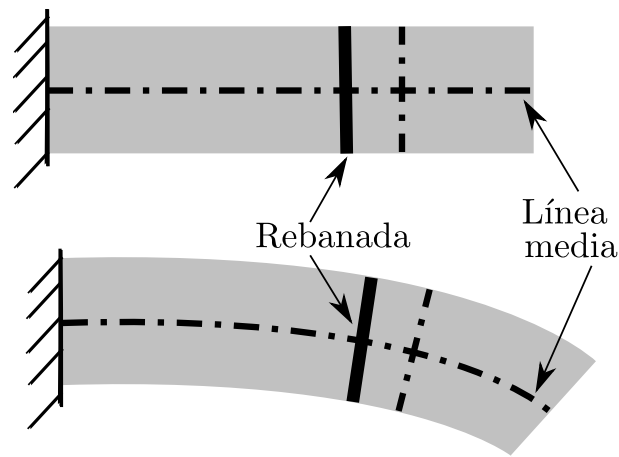


Figura 2.2: Configuración indeformada y deformada debido al efecto de la flexión

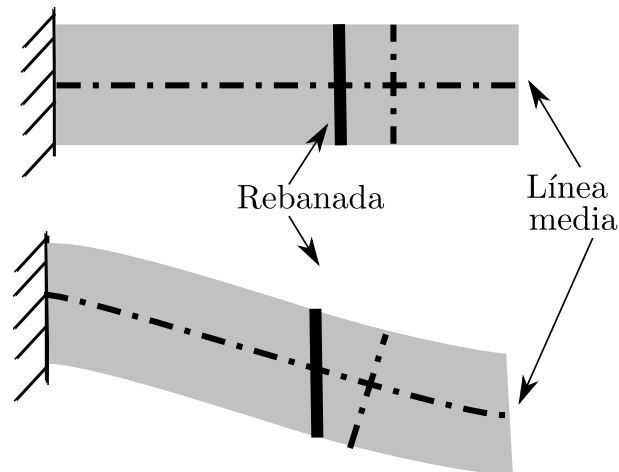


Figura 2.3: Configuración indeformada y deformada debido al efecto del cortante

El desplazamiento de los puntos de la viga se debe a dos motivos, flexión y cortante. Por tanto, el desplazamiento total en la dirección transversal (flecha) puede ser expresada:

$$v(x) = v_f(x) + v_c(x) \quad (2.6)$$

Donde $v_f(x)$ es el mismo desplazamiento que aparece en la ecuación (2.5). Mientras por su parte $v_c(x)$, está relacionado con el esfuerzo cortante a través de la expresión (2.7). Este esfuerzo cortante es dependiente del desplazamiento provocado $v_c(x)$, del área A , el módulo de rigidez transversal G y por primera vez se incluye el término α , el denominado factor de cortadura. Este factor de cortadura es una constante dependiente únicamente de la geometría de la sección.

$$V = \int \int_A \vec{\tau}_{xy} \cdot dA = \alpha \cdot G \cdot A \frac{dv_c}{dx} \quad (2.7)$$

Teniendo las expresiones del cortante, 2.7 y 2.4 se puede establecer la siguiente igualdad.

$$-EI \cdot \frac{d^3 v_f}{dx^3} = \alpha \cdot G \cdot A \frac{dv_c}{dx} \quad (2.8)$$

Si se despeja se obtiene

$$\frac{d^3 v_f}{dx^3} = \frac{\alpha \cdot G \cdot A}{-EI} \cdot \frac{dv_c}{dx} \quad (2.9)$$

Llegados a este punto, conviene recordar que se busca una relación entre el desplazamiento total y las cargas externas. Para ello, los desplazamientos asociados a la flexión y el cortante deben ser también relacionados con ellas.

Primeramente, tomando la ecuación (2.5), ya que en el modelo de Bernoulli el desplazamiento es únicamente asociado al efecto del esfuerzo de flexión, se obtiene la relación de éste con las cargas externas, (2.10):

$$\frac{d^4 v_f}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \quad (2.10)$$

En segundo lugar, el desplazamiento asociado al cortante se puede relacionar con el desplazamiento provocado por la flexión a través de (2.9). Mientras, este desplazamiento asociado a la flexión ya estaba relacionado con las cargas externas como se refleja en (2.10). Por tanto, ya se puede relacionar ambos desplazamientos con las cargas externas. Ahora, el siguiente paso, es derivar (2.9) para poder sustituirla en (2.10). Su resultado es la ecuación (2.11), que es muy importante, puesto que ya permite relacionar desplazamiento asociado al cortante con las cargas externas.

$$\frac{q(x)}{EI} = \frac{-\alpha \cdot G \cdot A}{EI} \cdot \frac{d^2 v_c}{dx^2} \quad (2.11)$$

Ahora se debe reordenar y derivar la ecuación anterior dos veces, porque en (2.10) el desplazamiento, v_f , está expresado en términos de su derivada cuarta. Así, v_c queda como se recoge en (2.12) y consecuentemente ya se está en disposición de ser relacionado con v_f .

$$\frac{d^4 v_c}{dx^4} = \frac{-1}{\alpha \cdot G \cdot A} \cdot \frac{d^2 q(x)}{dx^2} \quad (2.12)$$

Ahora se toma la ecuación (2.6) y se halla su cuarta derivada. Teniendo en cuenta que los desplazamientos están expresadas en función de las cargas externas en las expresiones (2.10) y (2.12), se obtiene finalmente la ecuación (2.13), .

$$\begin{aligned} v(x) = v_f(x) + v_c(x) &\Rightarrow \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{d^4 v_f(x)}{dx^4} + \frac{d^4 v_c(x)}{dx^4} \\ \frac{d^4 v(x)}{dx^4} &= \frac{q(x)}{EI} - \frac{1}{\alpha \cdot G \cdot A} \cdot \frac{d^2 q(x)}{dx^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

A partir de la expresión (2.13) se permitirá, por su parte, calcular los desplazamientos en cada punto del sólido en estudio, conociendo la coordenada longitudinal. El desplazamiento perpendicular a la directriz del sólido prismático depende de propiedades inherentes a la naturaleza del material, tales como el módulo de elasticidad, E y el módulo de rigidez transversal, G . Asimismo, depende de las características geométricas tales como el momento de inercia, I , el área, A y el factor de cortadura, α , dependiente de la forma de la sección. Evidentemente, también, depende de la carga distribuida ($q(x)$).

Si se observa la expresión, la aportación de Timoshenko al modelo de Euler-Bernoulli es el término negativo (el sustraendo de la resta). Este término añadido por el modelo de Timoshenko, al contemplar la deformación por cortante, es lo que diferencia esta expresión, (2.13), de (2.5). Posteriormente, se demostrará que ambos modelos ofrecen una respuesta semejante, convergen, cuando el sólido estudiado es esbelto. Ello se debe a que al integrar (2.13), en el término de Timoshenko aparecerá la longitud total del elemento y, como se observará más adelante, dependerá de la inversa del cuadrado de la esbeltez mecánica, teniendo un valor despreciable respecto al otro sumando.

Se debe puntualizar, la expresión (2.13) rara vez se puede resolver analíticamente, por tanto en ocasiones se debe acudir a soluciones numéricas para hallar el valor de los desplazamientos y giros del sólido en estudio.

2.4. Discretización mediante el método de elementos finitos

Tal como se ha mencionado, el problema elástico y su formulación en desplazamientos como la expresión (2.13), pueden tener una solución analítica que en multitud de ocasiones se antoja como poco difícil, . Como se recoge en [4] es imposible encontrar un función que satisfaga, las frecuentes exigencias del planteamiento diferencial sobre la variable desplazamiento.

La ecuación (2.13) carecerá, normalmente, de solución analítica, tal como se mencionó anteriormente. Por ello, se hace preciso acudir como alternativa a alguna solución aproximada haciendo uso de un método numérico, comúnmente, el método de elementos finitos(cuya nomenclatura abreviada es MEF).

El método de elementos finitos no es más que un procedimiento por el que se cambia un problema físico gobernado por una ecuación diferencial por un modelo matemático equivalente. Esta aproximación, consiste en conservar las propiedades físicas y geométricas del problema pero, dentro de un modelo con un número finito de grados de libertad. Este modelo desemboca en un sistema de ecuaciones con un número finito de ecuaciones [10].

La discretización, consiste en crear un sistema de grados de libertad interrelacionado, organizado en elementos. El número y naturaleza de los elementos siempre es una elección del autor del estudio. El número de elementos hará el análisis más preciso a la par que complejo, cuánto mayor sea este número. Cada uno de estos elementos posee un número determinado de nodos.

En el caso de este documento, la estrategia de discretización será muy parecida la realizada en [7], sin embargo, los elementos serán elementos más complejos,puesto serán elementos de tres nodos que incluyan la deformación por cortante también. El elemento usado en este Proyecto será un elemento de tres nodos y cinco grados de libertad, los tres desplazamientos perpendiculares a la dirección de la barra y los dos giros en los extremos. La otra de las novedades introducidas es que todas las variables serán expresadas en función del la coordenada local ξ . Para ello, el cambio de variable será el siguiente $x = \frac{L(\xi + 1)}{2}$

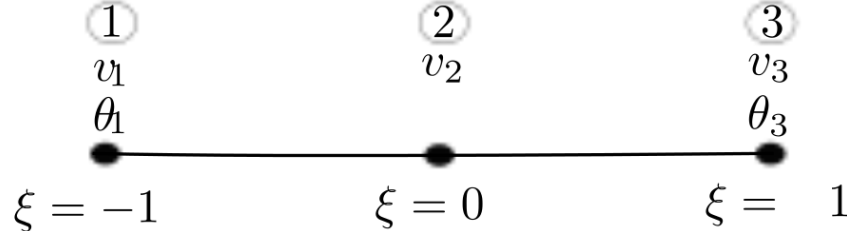


Figura 2.4: Elemento de tres nodos

En la práctica, cada elemento posee estos 5 grados de libertad en cada uno de los dos planos coordenados perpendiculares a la dirección longitudinal. Además, debemos incluir, los tres desplazamiento en la dirección longitudinal, que son completamente independientes de la esbeltez pieza (puesto que los grados de libertad relacionados con el esfuerzo axial están completamente desacoplados), por tanto, su valor queda inalterado, usando cualquiera de los modelos. Así, como el que será usado en este proyecto, tendrá trece grados de libertad en total. Sin embargo, en la práctica se podrá simplificar como si sólo tuviese cinco porque todas las conclusiones extraídas para un plano coordenado son extrapolables para el otro. Asimismo, al estar completamente desacoplado, el problema de axil no será objeto de estudio.

Los sólidos tipo viga serán modelados por un número de estos elementos lineales de tres nodos. En la figura 2.5 aparece una aplicación, un ejemplo, de tres elementos de tres nodos interconectados, que modelizan una viga bi-articulada. En un la práctica, los sólidos podrán ser modelados, con tantos nodos como sea preciso.



Figura 2.5: Viga modelada por tres elementos de tres nodos

2.4.1. Cálculo del desplazamiento

El cálculo del desplazamiento consistirá en expresar el desplazamiento vertical para cada rebanada en función de las variables cinemáticas totales (desplazamientos y giros), en los nodos de los elementos. Los desplazamientos, en cualquier punto, serán una combinación de los desplazamientos y giros de los nodos del elemento debido al efecto combinado de los esfuerzos de

flexión y cortante. Por tanto, tendrán una expresión tal como se muestra a continuación.

$$v_f(\xi) = \varphi_1 \cdot v_1^f + \varphi_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 + \varphi_3 \cdot v_2^f + \varphi_4 \cdot v_3^f + \varphi_5 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 \quad (2.14)$$

$$v_c(\xi) = N_1 \cdot v_1^c + N_2 \cdot v_2^c + N_3 \cdot v_3^c \quad (2.15)$$

Las expresiones (2.14) y (2.15), están compuestas por los giros y desplazamientos asociados a la flexión y el cortante, y también, las funciones de forma. Cabe reseñar que las funciones de forma son polinomios de cuarto grado y segundo en ξ , y cuya principal característica es que toman valor la unidad en el grado de libertad pertinente y cero para el resto de grados de libertad.

Las funciones de forma asociadas a la flexión son:

$$\varphi_1 = -\frac{3}{4} \cdot \xi + \xi^2 + \frac{1}{4} \cdot \xi^3 - \frac{1}{2} \cdot \xi^4 \quad (2.16a)$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{4} \cdot \xi + \frac{1}{4} \cdot \xi^2 + \frac{1}{4} \cdot \xi^3 - \frac{1}{4} \cdot \xi^4 \quad (2.16b)$$

$$\varphi_3 = 1 - 2 \cdot \xi^2 + \xi^4 \quad (2.16c)$$

$$\varphi_4 = \frac{3}{4} \cdot \xi + \xi^2 - \frac{1}{4} \cdot \xi^3 - \frac{1}{2} \cdot \xi^4 \quad (2.16d)$$

$$\varphi_5 = -\frac{1}{4} \cdot \xi - \frac{1}{4} \cdot \xi^2 + \frac{1}{4} \cdot \xi^3 + \frac{1}{4} \cdot \xi^4 \quad (2.16e)$$

Las funciones de forma asociadas al cortante son:

$$N_1 = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \quad (2.17a)$$

$$N_2 = 1 - \xi^2 \quad (2.17b)$$

$$N_3 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \quad (2.17c)$$

Una vez conocidas las funciones de forma, el objetivo final será expresar el desplazamiento total en cada punto en función de los desplazamientos y giros totales (debido a ambos esfuerzos) en cada uno de los nodos del elemento.

Para ello, las funciones de forma (2.16a), (2.16b), (2.16c), (2.16d) y (2.16e) se sustituyen en la ecuación (2.14). Por su parte, las funciones de forma (2.17a), (2.17b) y (2.17c) son sustituidas en (2.15). Quedando finalmente:

$$\begin{aligned}
v_f(\xi) = & \left(-\frac{3}{4} \cdot \xi + \xi^2 + \frac{1}{4} \cdot \xi^3 - \frac{1}{2} \cdot \xi^4 \right) \cdot v_1^f \\
& + \left(-\frac{1}{4} \cdot \xi + \frac{1}{4} \cdot \xi^2 + \frac{1}{4} \cdot \xi^3 - \frac{1}{4} \cdot \xi^4 \right) \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 \\
& + (1 - 2 \cdot \xi^2 + \xi^4) \cdot v_2^f + \left(\frac{3}{4} \cdot \xi + \xi^2 - \frac{1}{4} \cdot \xi^3 - \frac{1}{2} \cdot \xi^4 \right) \cdot v_3^f \\
& + \left(-\frac{1}{4} \cdot \xi - \frac{1}{4} \cdot \xi^2 + \frac{1}{4} \cdot \xi^3 + \frac{1}{4} \cdot \xi^4 \right) \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 \quad (2.18)
\end{aligned}$$

$$v_c(\xi) = \left(\frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \right) \cdot v_1^c + (1 - \xi^2) \cdot v_2^c + \left(\frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \right) \cdot v_3^c \quad (2.19)$$

El desplazamiento tiene que ser expresado en función de variables cinemáticas totales. En primer lugar, se expresa el desplazamiento provocado por la flexión como la diferencia en entre el desplazamiento total y el generado por el cortante, tal como se observa en (2.20) y (2.21)

$$v_i^f = v_i - v_i^c \quad (2.20)$$

$$\frac{d^3 v_f}{dx^3} = \frac{-\alpha \cdot G \cdot A}{EI} \cdot \frac{dv_c}{dx} \Leftrightarrow \frac{dv_c}{d\xi} = -\frac{4EI}{\alpha GAL^2} \cdot \frac{d^3 v_f}{d\xi^3} \quad (2.21)$$

Para posteriormente hacer uso de la ecuación (2.21) se hará un cambio de variable, para ello se ha sustituido (2.22) y (2.23) en (2.21).

$$\frac{d^3 v_f}{dx^3} = \frac{d^3 v_f}{d^3 \xi} \cdot \frac{d^3 \xi}{dx^3} = \frac{d^3 v_f}{d^3 \xi} \cdot \left(\frac{2}{L} \right)^3 \quad (2.22)$$

$$\frac{dv_c}{dx} = \frac{dv_c}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{dv_c}{d\xi} \cdot \left(\frac{2}{L} \right) \quad (2.23)$$

Ahora la expresión del desplazamiento total puede ser reescrita, de la siguiente forma donde los desplazamientos provocados por la flexión no aparezcan.

$$\begin{aligned}
v(\xi) = & \varphi_1 \cdot v_1 + \varphi_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 + \varphi_3 \cdot v_2 + \varphi_4 \cdot v_3 + \varphi_5 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 \\
& + (N_1 - \varphi_1) \cdot v_1^c + (N_2 - \varphi_3) \cdot v_2^c + (N_3 - \varphi_4) \cdot v_3^c \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Llegados a este punto, se debe hacer desaparecer todos los desplazamientos asociados al cortante, para ello se hará uso de la expresión (2.21) en la que previamente se ha sustituido la expresión (2.20) :

$$\begin{aligned} \left(\xi - \frac{1}{2}\right) v_1^c - 2\xi v_2^c + \left(\xi + \frac{1}{2}\right) v_3^c = & -\frac{12EI}{\alpha GAL^2} \left[\left(\frac{1}{2} - 4\xi\right) (v_1 - v_1^c) \right. \\ & + \left(\frac{1}{2} - 2\xi\right) \frac{L}{2} \theta_1 + 8\xi (v_2 - v_2^c) - \left(\frac{1}{2} + 4\xi\right) (v_3 - v_3^c) \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} - 2\xi\right) \frac{L}{2} \theta_1 \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Si se reordena la expresión (2.25) y al término constante que en ella aparece se le llama ' ϕ ' tal como se recoge en (2.26). Se obtendrán unas expresiones que podrán ser usadas para escribir la expresión (2.24) en función de los variables cinemáticas (giros y desplazamientos totales). También, ' ϕ ' puede ser expresada en función de la esbeltez mecánica. ($\lambda = L/i_g$), conociendo el radio de giro, ($i_g = \sqrt{I/A}$), que es una característica dependiente de la sección.

$$\phi = \frac{12EI}{\alpha GAL^2} = \frac{12Ei_g^2}{\alpha GL^2} = \frac{12E}{\alpha G\lambda^2} \quad (2.26)$$

Este término ϕ es muy importante, puesto será aquél que determina el efecto del cortante en los grados de libertad. Este valor, ϕ , y el efecto consecuente del cortante son despreciables cuando se estudian piezas muy esbeltas, como muestra (2.26).

Reordenando (2.25) queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 + \phi) (v_3^c - v_1^c) + \xi (1 + 4\phi) (v_1^c - 2v_2^c + v_3^c) = \\ -\frac{1}{2}\phi \left(v_1 + \frac{L}{2}\varphi_1 - v_3 + \frac{L}{2}\varphi_3 \right) \\ + 2\phi\xi \left(2v_1 + \frac{L}{2}\varphi_1 - 4v_2 + 2v_3 - \frac{L}{2}\varphi_3 \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

La expresión (2.27) arroja dos nuevas igualdades.

$$\frac{1}{2} (1 + \phi) (v_3^c - v_1^c) = -\frac{1}{2}\phi \left(v_1 + \frac{L}{2}\theta_1 - v_3 + \frac{L}{2}\theta_3 \right) \quad (2.28a)$$

$$(1 + 4\phi) (v_1^c - 2v_2^c + v_3^c) = 2\phi \left(2v_1 + \frac{L}{2}\theta_1 - 4v_2 + 2v_3 - \frac{L}{2}\theta_3 \right) \quad (2.28b)$$

Sólo se poseen dos ecuaciones, por tanto, si se sustituye las ecuaciones anteriores en (2.24) seguiría apareciendo algún término del cortante. En su lugar, se irá a la expresión (2.24) y se intentará reordenar los términos $N_i - \varphi_i$ y ver si así, si se puede hacer otra sustitución.

$$N_1 - \varphi_1 = \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^4 = \frac{1}{4}(\xi - \xi^3) - \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi^4) \quad (2.29a)$$

$$N_2 - \varphi_3 = (\xi^2 - \xi^4) \quad (2.29b)$$

$$N_3 - \varphi_4 = -\frac{1}{4}\xi - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^4 = -\frac{1}{4}(\xi - \xi^3) - \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi^4) \quad (2.29c)$$

Sustituyendo (2.29a), (2.29b) y (2.29c) en la expresión (2.24).

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \varphi_1 \cdot v_1 + \varphi_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 + \varphi_3 \cdot v_2 + \varphi_4 \cdot v_3 + \varphi_5 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 \\ &\quad + \frac{1}{4}(\xi - \xi^3)(v_1^c - v_c^3) - \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi^4)(v_1^c - 2v_2^c + v_3^c) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ahora se observa que en la expresión (2.30) se puede sustituir (2.28a) y (2.28b), con ello desaparecen v_i^c . Se ha conseguido expresar $v(\xi)$ esté en función de los grados de libertad del elemento, $(v_1, \theta_1, v_2, v_3$ y $\theta_3)$ como se ve en (2.31)

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \varphi_1 \cdot v_1 + \varphi_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 + \varphi_3 \cdot v_2 + \varphi_4 \cdot v_3 + \varphi_5 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 \\ &\quad + \frac{\phi}{4(1+\phi)}(\xi - \xi^3) \left(v_1 + \frac{L}{2}\theta_1 - v_3 + \frac{L}{2}\theta_3 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi^4) \frac{2\phi}{1+4\phi} \left(2v_1 + \frac{L}{2}\theta_1 - 4v_2 + 2v_3 - \frac{L}{2}\theta_3 \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Si se comparan las expresiones (2.30) y (2.31) ya han desaparecido términos relacionados con el cortante de (2.30) ahora aparecen términos relacionados con los grados de libertad totales. También se contempla que los términos que llevan ϕ , son los que hacen que difiera de la ecuación que se obtendrían según el modelo clásico de Bernoulli (2.32). En resumen, aquellos términos multiplicados por ϕ son los nuevos y por tanto asociados al cortante, mientras los otros están relacionados con la flexión.

$$v(\xi) = \varphi_1 \cdot v_1 + \varphi_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 + \varphi_3 \cdot v_2 + \varphi_4 \cdot v_3 + \varphi_5 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 \quad (2.32)$$

Ahora, reordenando (2.31), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 v(\xi) = & v_1 \left(\varphi_1 + \frac{\phi}{4(1+\phi)} (\xi - \xi^3) - 2(\xi^2 - \xi^4) \frac{\phi}{1+4\phi} \right) \\
 & + \theta_1 \frac{L}{2} \left(\varphi_2 + \frac{\phi}{4(1+\phi)} (\xi - \xi^3) - (\xi^2 - \xi^4) \frac{\phi}{1+4\phi} \right) \\
 & \quad v_2 \left(\varphi_3 + 4(\xi^2 - \xi^4) \frac{\phi}{1+4\phi} \right) \\
 & \quad v_3 \left(\varphi_3 - \frac{\phi}{4(1+\phi)} (\xi - \xi^3) - 2(\xi^2 - \xi^4) \frac{\phi}{1+4\phi} \right) \\
 & + \theta_3 \frac{L}{2} \left(\varphi_5 + \frac{\phi}{4(1+\phi)} (\xi - \xi^3) + (\xi^2 - \xi^4) \frac{\phi}{1+4\phi} \right)
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Observando (2.33) y llamando ψ_i a cada uno de los polinomios en ξ se puede escribir de la siguiente manera

$$v(\xi) = \psi_1 \cdot v_1 + \psi_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 + \psi_3 \cdot v_2 + \psi_4 \cdot v_3 + \psi_5 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 \tag{2.34}$$

2.4.2. Cálculo del giro

Se intentará escribir el giro en cualquier punto como una función de $(v_1, \theta_1, v_2, v_3$ y $\theta_3)$. Para ello, se recuerda que el giro es la derivada del desplazamiento provocado por la flexión. En otras palabras, la derivada de (2.14). Primeramente, se expresa (2.14), como se ve en (2.35)

$$v_f(\xi) = \varphi_1 \cdot v_1 + \varphi_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 + \varphi_3 \cdot v_2 + \varphi_4 \cdot v_3 + \varphi_5 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 - \varphi_1 \cdot v_1^c - \varphi_3 \cdot v_2^c - \varphi_4 \cdot v_3^c \tag{2.35}$$

Todavía (2.35) depende de los desplazamientos v_i^c , pero sólo puede depender de las variables cinemáticas totales. Para ello, se intentará buscar alguna manera de asociar los desplazamiento provocados por el cortante en (2.36), para luego sustituir las expresiones del cortante (2.28a) y (2.28b) y la expresión de $v_f(\xi)$ dependa de las variables totales. Una vez obtenido el desplazamiento provocado únicamente por la flexión, quedaría derivarlo y se tendría el giro.

$$\begin{aligned}
v_f(\xi) &= \varphi_1 \cdot v_1 + \varphi_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 + \varphi_3 \cdot v_2 + \varphi_4 \cdot v f_3 + \varphi_5 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 \\
&- \left[\frac{-1}{4} (3\xi - \xi^3) + \left(\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^4 \right) \right] \cdot v_1^c - \left[1 - 2 \left(\xi^2 + \frac{\xi^4}{2} \right) \right] \cdot v_2^c \\
&- \left[\frac{1}{4} (3\xi - \xi^3) + \left(\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^4 \right) \right] \cdot v_3^c \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Ordenando (2.36) quedaría:

$$\begin{aligned}
v_f(\xi) &= \varphi_1 \cdot v_1 + \varphi_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 + \varphi_3 \cdot v_2 + \varphi_4 \cdot v f_3 + \varphi_5 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 \\
&- \left[\frac{1}{4} (3\xi - \xi^3) (v_3^c - v_1^c) + \left(\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^4 \right) (v_1^c - v_2^c + v_3^c) + v_2^c \right] \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Ahora se está en disposición de sustituir (2.28a) y (2.28b) en (2.37), obteniendo:

$$\begin{aligned}
v_f(\xi) &= \varphi_1 \cdot v_1 + \varphi_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 + \varphi_3 \cdot v_2 + \varphi_4 \cdot v f_3 + \varphi_5 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 \\
&- \left[\frac{1}{4} (3\xi - \xi^3) \left(\frac{-\phi}{(1+\phi)} \left(v_1 + \frac{L}{2}\theta_1 - v_3 + \frac{L}{2}\theta_3 \right) \right) \right. \\
&- \left. \left(\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^4 \right) \frac{2\phi}{1+4\phi} \left(2v_1 + \frac{L}{2}\theta_1 - 4v_2 + 2v_3 - \frac{L}{2}\theta_3 \right) - v_2^c \right] \quad (2.38)
\end{aligned}$$

En este punto, se debe tener en que la expresión que interesa es la derivada de (2.38), el giro, por tanto el término v_2^c , carece de toda importancia puesto que desaparecerá al derivar. Así, tras ordenar y derivar en (2.38) se obtiene el giro.

$$\theta(\xi) = v'_f(\xi) = H'_1 \cdot v_1 + H'_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 + H'_3 \cdot v_2 + H'_4 \cdot v f_3 + H'_5 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 \quad (2.39)$$

Donde los términos $H_i(\xi)$ se detallan a continuación:

$$H_1 = \varphi_1 + \frac{1}{4} (3\xi - \xi^3) \frac{\phi}{(1+\phi)} - \left(\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^4 \right) \frac{4\phi}{1+4\phi} \quad (2.40a)$$

$$H_2 = \varphi_2 + \frac{1}{4} (3\xi - \xi^3) \frac{\phi}{(1+\phi)} - \left(\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^4 \right) \frac{2\phi}{1+4\phi} \quad (2.40b)$$

$$H_3 = \varphi_3 + \left(\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^4 \right) \frac{8\phi}{1+4\phi} \quad (2.40c)$$

$$H_4 = \varphi_4 - \frac{1}{4} (3\xi - \xi^3) \frac{\phi}{(1+\phi)} - \left(\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^4 \right) \frac{4\phi}{1+4\phi} \quad (2.40d)$$

$$H_5 = \varphi_5 + \frac{1}{4} (3\xi - \xi^3) \frac{\phi}{(1+\phi)} + \left(\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^4 \right) \frac{2\phi}{1+4\phi} \quad (2.40e)$$

2.5. Teorema de los trabajos virtuales

Dado un dominio (Ω) como el mostrado en la figura 2.6, delimitado por un contorno (Γ), que está sometido a unas cargas exteriores $\bar{t}$ y unas restricciones en desplazamiento $\bar{u}_i$, se establecen dos estados, uno de ellos es virtual y otro real, pero ambos satisfacen las ecuaciones de la elastodinámica y donde cada uno de ellos posee su campo de tensiones y deformaciones.

$$S(\bar{t}, \bar{u}_i) \Longleftrightarrow (u_i, \epsilon_{ij}, \sigma_{ij})$$

$$S^{virt}(\bar{t}^{virt}, \bar{u}_i^{virt}) \Longleftrightarrow (u_i^{virt}, \epsilon_{ij}^{virt}, \sigma_{ij}^{virt})$$

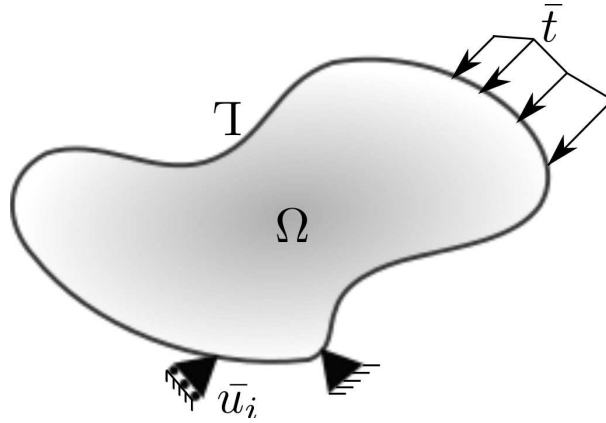


Figura 2.6: Configuración general de un problema elástico

El teorema de los trabajos virtuales establece que en el dominio, el trabajo generado por las tensiones internas sobre un campo de deformaciones virtuales es el mismo que el generado por las fuerzas exteriores sobre los desplazamientos virtuales, [12]. Esto se puede expresar matemáticamente así:

$$\int_{\Omega} \epsilon_{ij}^{virt} \cdot \sigma_{ij} \cdot dV = \int_{\Gamma} \bar{u}_i^{virt} \cdot \bar{t} \cdot dA \quad (2.41)$$

Contemplando los efectos de la flexión y el cortante, queda:

$$\int_{\Omega} (\epsilon_{ij}^{virt} \cdot \sigma_{ij} + \gamma_{ij}^{virt} \cdot \tau_{ij}) dV = \int_{\Gamma} \bar{u}_i^{virt} \cdot \bar{t} \cdot dA \quad (2.42)$$

Si la expresión (2.42) se particulariza para un elemento y además, la tensiones y deformaciones se escriben como las derivadas en x de los respectivos desplazamientos. Mientras, el segundo miembro será denominado F_i que será la fuerza equivalente aplicada en el nodo en cuestión. Considerando todo ello, queda:

$$\int_{V_e} \left[\left(-y \frac{d^2 v_f^{virt}}{dx^2} \right) E \left(-y \frac{d^2 v_f}{dx^2} \right) + \left(\frac{d v_c^{virt}}{dx} \right) \alpha G \left(\frac{dv_c}{dx} \right) \right] dx dA = F_i \quad (2.43)$$

Ahora, (2.43) se expresa en función de ξ quedando:

$$\int_{V_e} \left[\left(-y \left(\frac{2}{L_e} \right)^2 \frac{d^2 v_f^{virt}}{d\xi^2} \right) E \left(-y \left(\frac{2}{L_e} \right)^2 \frac{d^2 v_f}{d\xi^2} \right) + \left(\frac{2}{L_e} \frac{d v_c^{virt}}{d\xi} \right) \alpha G \left(\frac{2}{L_e} \frac{dv_c}{d\xi} \right) \right] \frac{L_e}{2} d\xi dA = F_i \quad (2.44)$$

Al realizar la integral en el área transversal, (2.44) se puede escribir de esta manera:

$$\int_{L_e} \left[\frac{8EI}{(L_e)^3} \left(\frac{d^2 v_f^{virt}}{d\xi^2} \right) \left(\frac{d^2 v_f}{d\xi^2} \right) + \frac{2\alpha GA}{L_e} \left(\frac{d v_c^{virt}}{d\xi} \right) \left(\frac{dv_c}{d\xi} \right) \right] d\xi = F_i \quad (2.45)$$

Recordando que $\frac{dv_f}{dx} = \theta$ y que la longitud del elemento desde $\xi = -1$ a $\xi = 1$ queda:

$$\int_{-1}^1 \left[(\theta^{(virt)}) \frac{8EI}{(L_e)^3} (\theta') + v_c^{(virt)} \frac{2\alpha GA}{L_e} v_c' \right] d\xi = F_i \quad (2.46)$$

Ahora se toma (2.39) y se desglosa en dos vectores, (2.47) y (2.48)

$$B_f = \begin{pmatrix} H_1'' & \frac{L}{2} H_2'' & H_3'' & H_4'' & \frac{L}{2} H_5'' \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$u_e = (v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \theta_3) \quad (2.48)$$

Con (2.47) y (2.48) será posible expresar θ'^{virt} y θ' como el producto de los vectores anteriores .

Se intentará expresar lo mismo con los términos dependientes de la derivada del cortante. Para ello, se usa (2.20) y (2.39) se puede llegar :

$$v^c = v - v^f \iff (v^c)' = v' - v'^f = v' - \theta \quad (2.49)$$

Ahora, se debe hacer uso de las expresiones (2.34) y (2.39), que son las expresiones para el desplazamiento y giro totales en cualquier punto respectivamente. Estas expresiones arrojan un vector B_c , (2.48), que se multiplicará por el mismo u_e .

$$B_c = \begin{pmatrix} \psi'_1 - H'_1 & \frac{L}{2}(\psi'_2 - H'_2) & \psi'_3 - H'_3 & \psi'_4 - H'_4 & \frac{L}{2}(\psi'_5 - H'_5) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Observando las ecuaciones (2.47), (2.48) y (2.50) se puede reescribir v'_c y θ' en función de los variables cinemáticas totales:

$$\theta' = \mathbf{B}_f * \mathbf{u}_e \quad (2.51)$$

$$v'_c = \mathbf{B}_c * \mathbf{u}_e \quad (2.52)$$

Ahora, se debe sustituir (2.51) y (2.52) en (2.46), pero previamente considerando el carácter matricial y que hay términos que dependen de los desplazamientos virtuales, con todo ello (2.46) queda:

$$\int_{-1}^1 \left[\mathbf{u}_e^{virtT} \mathbf{B}_f^T \frac{EI}{(L_e)^3} \mathbf{B}_f \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_e^{virtT} \mathbf{B}_c^T \frac{\alpha GA}{L_e} \mathbf{B}_c \mathbf{u}_e \right] d\xi = F_i \quad (2.53)$$

Sabiendo que (2.53) se debe cumplir independientemente de los campo de desplazamientos virtuales al que está sometido, esta expresión puede ser rescrita tal como se expresa en (2.54)

$$\left(\int_{-1}^1 \left[\mathbf{B}_f^T \frac{EI}{(L_e)^3} \mathbf{B}_f + \mathbf{B}_c^T \frac{\alpha GA}{L_e} \mathbf{B}_c \right] d\xi \right) * \mathbf{u}_e = F_i \quad (2.54)$$

Identificándose una relación matricial para cada uno de los elementos.

$$\mathbf{K}_{ij} * \mathbf{u}_i = \mathbf{F}_i \quad (2.55)$$

2.6. Matrices elementales

Las matrices elementales o del elemento son aquellas que definen la configuración geométrica de las propiedades del elemento. Cada elemento tiene la suya, pudiéndose ensamblar para la resolución global del problema.

2.6.1. Matriz de rigidez

La matriz de rigidez, es toda aquella que permita la relación de la variables cinemáticas con las acciones exteriores. Esta matriz recoge el comportamiento ante esfuerzos de flexión y cortante y se obtiene a partir de las expresiones (2.54) y (2.55).

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \left[\mathbf{B}_f^T \frac{EI}{(L_e)^3} \mathbf{B}_f + \mathbf{B}_c^T \frac{\alpha GA}{L_e} \mathbf{B}_c \right] d\xi \quad (2.56)$$

Si se realiza la integral para cada uno de los grados de libertad. Se obtendrá una matriz simétrica cuadrada, con cinco filas y otras tantas columnas, donde sus términos son:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{4EI(79 + 504\phi + 560\phi^2)}{5L^3(1 + \phi)(1 + 4\phi)^2} \\ K_{12} &= \frac{2EI(47 + 312\phi + 400\phi^2)}{5L^2(1 + \phi)(1 + 4\phi)^2} \\ K_{13} &= \frac{-512EI(1 + 5\phi)}{5L^3(1 + 4\phi)^2} \\ K_{14} &= \frac{4EI(49 + 264\phi + 80\phi^2)}{5L^3(1 + \phi)(1 + 4\phi)^2} \\ K_{15} &= \frac{-2EI(17 + 72\phi - 80\phi^2)}{5L^2(1 + \phi)(1 + 4\phi)^2} \\ K_{22} &= \frac{EI(36 + 261\phi + 440\phi^2 + 80\phi^3)}{5L(1 + \phi)(1 + 4\phi)^2} \\ K_{23} &= \frac{-128EI(1 + 5\phi)}{5L^2(1 + 4\phi)^2} \\ K_{24} &= -K_{15} \\ K_{25} &= \frac{-EI(6 + 21\phi - 40\phi^2 + 80\phi^3)}{5L(1 + \phi)(1 + 4\phi)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{33} &= \frac{-1024EI(1+5\phi)}{5L^3(1+4\phi)^2} \\
K_{34} &= K_{13} \\
K_{35} &= -K_{23} \\
K_{44} &= K_{11} \\
K_{45} &= -K_{12} \\
K_{55} &= K_{22}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

2.6.2. Matriz de masa

La matriz de masa, m_{ij} , queda definida por [3], donde $\bar{m}$ densidad lineal de masa o la masa distribuida por unidad de longitud:

$$m_{ij} = \int_L \psi_i \cdot \bar{m} \cdot \psi_j dL = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \psi_i \cdot \bar{m} \cdot \psi_j d\xi \tag{2.58}$$

Si se integra (2.58) para cada grado de libertad se obtendrían todos los términos de la matriz de masa. Esta matriz tiene las mismas dimensiones que la de rigidez además de compartir la característica de ser simétrica.

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \frac{\bar{m}L(130 + 1169\phi + 3490\phi^2 + 3768\phi^3 + 1344\phi^4)}{630(1+\phi)^2(1+4\phi)^2} \\
m_{12} &= \frac{\bar{m}L^2(40 + 299\phi + 685\phi^2 + 372\phi^3)}{2520(1+\phi)^2(1+4\phi)^2} \\
m_{13} &= \frac{4\bar{m}L(5 + 45\phi + 84\phi^2)}{315(1+4\phi)^2} \\
m_{14} &= \frac{-\bar{m}L(23 + 307\phi + 1079\phi^2 + 1104\phi^3 + 336\phi^4)}{630(1+\phi)^2(1+4\phi)^2} \\
m_{15} &= \frac{\bar{m}L^2(14 + 175\phi + 515\phi^2 + 300\phi^3)}{2520(1+\phi)^2(1+4\phi)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{22} &= \frac{\bar{m}L^3 (4 + 26\phi + 49\phi^2)}{2520 (1 + \phi)^2 (1 + 4\phi)^2} \\
m_{23} &= \frac{2\bar{m}L^2 (1 + 6\phi)}{315 (1 + 4\phi)^2} \\
m_{24} &= -m_{15} \\
m_{25} &= \frac{\bar{m}L^3 (2 + 22\phi + 47\phi^2)}{2520 (1 + \phi)^2 (1 + 4\phi)^2} \\
m_{33} &= \frac{128\bar{m}L (1 + 9\phi + 21\phi^2)}{315 (1 + 4\phi)^2} \\
m_{34} &= m_{13} \\
m_{35} &= -m_{23} \\
m_{44} &= m_{11} \\
m_{45} &= -m_{12} \\
m_{55} &= m_{22}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Estos valores dejan completamente definida la matriz elemental de masa para el modelo de Timoshenko, al igual que anteriormente quedó definida la de rigidez, ambas incluyen ϕ , o sea, incorporan el efecto de la deformación por cortante.

Estas matrices son semejantes a las que expresaría el modelo Bernoulli para un elemento similar, si este elemento fuese suficiente esbelto y el efecto de la deformación por cortante no es considerable. Esta deformación, como se ha repetido en múltiples ocasiones, es despreciable cuando el valor de ϕ sea extremadamente pequeño. El caso más radical es que $\phi = 0$, entonces, las matrices obtenidas serían idénticas a las obtenidas siguiendo la metodología clásica de Bernoulli, como las de [11]

2.6.3. Matriz Q

Por su parte la matriz Q obedece por su parte a la siguiente expresión:

$$q_{ij} = \int_L \varphi_i \cdot \phi_j \cdot dx = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \varphi_i \cdot \phi_j d\xi \tag{2.60}$$

siendo sus términos:

$$\begin{aligned}
q_{11} &= \frac{L(11 + 39\phi + 24\phi^2)}{420(1 + \phi)^2(1 + 4\phi)^2} \\
q_{12} &= \frac{L(69 + 314\phi + 224\phi^2)}{105(1 + \phi)^2(1 + 4\phi)^2} \\
q_{13} &= -\frac{L(15 + 92\phi + 56\phi^2)}{420(1 + \phi)^2(1 + 4\phi)^2} \\
q_{21} &= \frac{L^2(10 + 31\phi)}{840(1 + \phi)^2(1 + 4\phi)^2} \\
q_{22} &= \frac{L^2}{105(1 + 4\phi)^2} \\
q_{23} &= -\frac{L^2(4 + 25\phi)}{840(1 + \phi)^2(1 + 4\phi)^2} \\
q_{31} &= \frac{L(4 + 28\phi)}{105(1 + 4\phi)^2} \\
q_{32} &= \frac{L(48 + 224\phi)}{105(1 + 4\phi)^2} \\
q_{33} &= q_{31} \\
q_{41} &= q_{13} \\
q_{42} &= \frac{L(11 + 28\phi)}{105(1 + 4\phi)^2} \\
q_{43} &= q_{12} \\
q_{51} &= -q_{23} \\
q_{52} &= -q_{22} \\
q_{53} &= -\frac{L^2(10 + 31\phi)}{840(1 + \phi)^2(1 + 4\phi)^2}
\end{aligned}$$

2.7. Resolución matricial

Este Proyecto pretende realizar un estudio sobre el comportamiento dinámico, por tanto, la ecuación matricial que determina este comportamiento dinámico de un elemento será :

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{F}_e \quad (2.61)$$

En (2.61) el término corresponde a $\mathbf{M}_e$ y $\mathbf{K}_e$ son la matriz de masa y rigidez elementales cuyos términos se definieron en (2.59) y en (2.57)

respectivamente, $\ddot{\mathbf{u}}_e$ es un vector que recoge el campo de aceleraciones del elemento, obtenido a partir de la segunda derivada del campo de desplazamientos $\mathbf{u}_e$ y finalmente $\mathbf{F}_e$ es el vector de fuerzas nodales equivalentes, el mismo que apareció en (2.43)

Debe señalarse, la importancia que posee el amortiguamiento histerético en este tipo de problemas. El efecto de este amortiguamiento no se recoge en los cálculos realizados en estática, puesto que la matriz de rigidez ha sido expresada como en (2.62). El efecto de este amortiguamiento se refleja en la matriz de rigidez de la siguiente forma :

$$K_{i,j} = Re [(1 + 2\zeta i) \cdot K_{i,j}] \quad (2.62)$$

Donde ζ es el coeficiente de amortiguamiento y la parte imaginaria de $2\zeta i \cdot K_{i,j}$ representa el amortiguamiento. La matriz de rigidez podrá ser compleja cuando recoja el efecto del amortiguamiento.

Siguiendo con el análisis dinámico, todas las variables están sujetas al tiempo, variando armónicamente como se ve en la ecuación (2.63). Es decir, son función del tiempo. Por tanto, los desplazamiento estarán ligados al tiempo y variarán con éste, pudiéndose escribir de como se ve en (2.63)

$$\mathbf{F}(\omega, t) = \mathbf{F} \cdot e^{i\omega t} \quad (2.63)$$

En los desplazamientos se diferencian dos partes claras. Por un lado, la parte transitoria y por otro la estacionaria, siendo esta última la que depende de t y ω .

$$\mathbf{u}(\omega, t) = \mathbf{u}^t + \mathbf{u} \cdot e^{i\omega t} \quad (2.64)$$

El régimen transitorio, como tal, desaparece pasado un cierto tiempo y Por ello, para un tiempo considerado infinito, el valor de la componente transitoria del desplazamiento será nula de (2.64) y se obtendrá (2.65)

$$\mathbf{u}(\omega, t) = \mathbf{u} \cdot e^{i\omega t} \quad (2.65)$$

La segunda derivada de la expresión (2.65) será:

$$\ddot{\mathbf{u}}(\omega, t) = -\omega^2 \cdot \mathbf{u} \cdot e^{i\omega t} \quad (2.66)$$

Ahora si se introducen las expresiones (2.63), (2.65) y (2.66) en la expresión (2.61). Se obtiene tras aplicar la propiedad distributiva:

$$(\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e) e^{i\omega t} \cdot \mathbf{u}_e = e^{i\omega t} \cdot \mathbf{F}_e \quad (2.67)$$

Simplificándola queda finalmente:

$$(\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e) \mathbf{u}_e = \mathbf{F}_e \quad (2.68)$$

Esta expresión matricial para un elemento es análoga a la que se pueden encontrar en [5]. La resolución de un sólido prismático pasa por extender esta expresión para una cadena de elementos, cuyo resultado será un sistema semejante a (2.68) donde aparecen las matrices globales en lugar de las elementales, tras el proceso de ensamblaje. Finalmente, la expresión matricial a resolver será tal como:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (2.69)$$

2.8. Validación del elemento Timoshenko

Esta validación consiste en comparar la solución numérica obtenida con la subrutina de Matlab con la solución analítica para el problema 2.7.

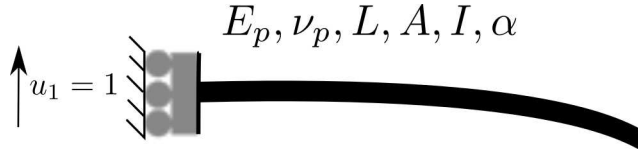


Figura 2.7: Viga en voladizo sometida a un desplazamiento unitario

Se debe contemplar en la resolución de la ecuación, que la carga, $q(x)$ depende de la coordenada longitudinal y del tiempo, puesto que es un problema dinámico. Esto se traduce en una carga distribuida por unidad de longitud, que está relacionada con $v(x, t) = v(x, \omega)e^{i\omega t}$. Por tanto:

$$q(x) = -\bar{m} \cdot a = -\bar{m} \cdot \ddot{v} = \bar{m} \cdot \omega^2 \cdot v \quad (2.70)$$

Para resolver analíticamente este problema consiste en tomar (2.13), reescribirla tras sustituir (2.70), y que quede tal como se ve (2.71)

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{\bar{m} \omega^2}{EI} v - \frac{\bar{m} \omega^2}{\alpha \cdot G \cdot A} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (2.71)$$

Expresando:

$$v(x) = e^{sx} \quad (2.72)$$

Ahora, se sustituye (2.72) en (2.71) se obtiene una ecuación polinómica en s como la que se observa en (2.73) .

$$s^4 + \frac{\bar{m} \omega^2}{\alpha \cdot G \cdot A} s^2 - \frac{\bar{m} \omega^2}{EI} = 0 \quad (2.73)$$

La ecuación (2.71) tendrá una solución cuya forma es como (2.74). En ella las constantes quedarán determinadas por las condiciones de contorno, mientras que los términos s_i son las respectivas raíces del polinomio (2.73).

$$v(x) = A \cdot e^{s_1 x} + B \cdot e^{s_2 x} + C \cdot e^{s_3 x} + D \cdot e^{s_4 x} \quad (2.74)$$

Modelo de Bernoulli

El modelo de Bernoulli que se caracteriza porque el efecto del cortante es despreciado, y por tanto, su ecuación de gobierno es la (2.5). Consecuentemente, en este caso la ecuación polinómica (2.73) queda:

$$s^4 - \frac{\bar{m} \omega^2}{EI} = 0 \quad (2.75)$$

La expresión (2.75) tendrá las siguiente raíces:

$$s_1 = \sqrt[4]{\frac{\bar{m} \omega^2}{EI}} \quad (2.76a)$$

$$s_2 = -\sqrt[4]{\frac{\bar{m} \omega^2}{EI}} = -s_1 \quad (2.76b)$$

$$s_3 = \sqrt[4]{\frac{\bar{m} \omega^2}{EI}} \cdot i = s_1 \cdot i \quad (2.76c)$$

$$s_4 = -\sqrt[4]{\frac{\bar{m} \omega^2}{EI}} \cdot i = -s_1 \cdot i \quad (2.76d)$$

Llegados a este punto, se deben aplicar condiciones de contorno. Teniendo en cuenta 2.7, el extremo izquierdo de la figura sufre un desplazamiento unitario y giro nulo mientras el derecho el valor de las acciones externas es nulo. Por tanto, las condiciones de contorno ser

$$v(0) = 1 \quad (2.77a)$$

$$\theta(0) = \frac{dv_f(0)}{dx} = 0 \iff \frac{dv(0)}{dx} = 0 \quad (2.77b)$$

$$M(L) = EI \frac{dv_f^2(L)}{dx^2} = 0 \iff \frac{dv^2(L)}{dx^2} = 0 \quad (2.77c)$$

$$V(L) = \alpha GA \frac{dv_f^3(L)}{dx^3} = 0 \iff \frac{dv^3(L)}{dx^3} = 0 \quad (2.77d)$$

Ahora, se tendría que resolver un sistema de ecuaciones de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que se obtiene de usar (2.77a), (2.77b), (2.77c) y (2.77d) respectivamente.

$$v(0) = A \cdot e^{s_1 \cdot 0} + B \cdot e^{-s_1 \cdot 0} + C \cdot e^{s_1 \cdot i \cdot 0} + D \cdot e^{-s_1 \cdot i \cdot 0} = 1 \quad (2.78a)$$

$$\theta(0) = \frac{dv(0)}{dx} = A \cdot s_1 \cdot e^{s_1 \cdot 0} - B \cdot s_1 \cdot e^{-s_1 \cdot 0} + C \cdot s_1 \cdot i \cdot e^{s_1 \cdot i \cdot 0} - D \cdot s_1 \cdot i \cdot e^{-s_1 \cdot i \cdot 0} = 0 \quad (2.78b)$$

$$M(L) = \frac{dv^2(L)}{dx^2} = A \cdot s_1^2 \cdot e^{s_1 \cdot L} + B \cdot s_1^2 \cdot e^{-s_1 \cdot L} - C \cdot s_1^2 \cdot e^{s_1 \cdot i \cdot L} + D \cdot s_1^2 \cdot i \cdot e^{-s_1 \cdot i \cdot L} = 0 \quad (2.78c)$$

$$V(L) = \frac{dv^3(L)}{dx^3} = A \cdot s_1^3 \cdot e^{s_1 \cdot L} - B \cdot s_1^3 \cdot e^{-s_1 \cdot L} - C \cdot s_1^3 \cdot i \cdot e^{s_1 \cdot i \cdot L} + D \cdot s_1^3 \cdot i \cdot e^{-s_1 \cdot i \cdot L} = 0 \quad (2.78d)$$

Ahora, que se tiene un sistema lineal de ecuaciones se procede a resolverlo con software comercial y una vez conocidas las incógnitas, que se las constantes de relacionadas con las condiciones de contorno, se sustituyen en (2.74), donde ya se han sustituido previamente (2.76a), (2.76b), (2.76c) y (2.76d). Con todo ello, se obtiene la solución analítica del problema.

Modelo de Timoshenko

El modelo de Timoshenko se caracteriza porque se incluye el efecto del cortante, siendo el desplazamiento $v(x) = v_f(x) + v_c(x)$. Por tanto, este caso obedece a la ecuación polinómica (2.73).

El primer paso para la resolución de ésta pasa por definir a y b en (2.79) y (2.80), respectivamente.

$$a = \frac{m \cdot \omega^2}{\alpha G A} \quad (2.79)$$

$$b = \frac{m \cdot \omega^2}{EI} \quad (2.80)$$

Por lo tanto, las raíces del polinomio serán:

$$s_1 = -\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}} \quad (2.81a)$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}} = -s_1 \quad (2.81b)$$

$$s_3 = -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}} \quad (2.81c)$$

$$s_4 = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}} = -s_3 \quad (2.81d)$$

Ahora, se deben aplicar las condiciones de contorno. Éstas son las mismas que en el caso anterior, desplazamiento unitario y giro nulo en el extremo izquierdo mientras que el cortante y el momento en el extremo derecho son nulos.

$$v(0) = 1 \quad (2.82a)$$

$$\theta(0) = \frac{dv_f(0)}{dx} = 0 \quad (2.82b)$$

$$M(L) = EI \frac{dv_f^2(L)}{dx^2} = 0 \quad (2.82c)$$

$$V(L) = \alpha GA \frac{dv_f^3(L)}{dx^3} = 0 \quad (2.82d)$$

Estas condiciones contorno no depende directamente de $v(x)$ tal como se recoge [8]. Por tanto, se tiene que buscar una relación entre las condiciones de contorno (2.82b), (2.82c) y (2.82d) que están expresadas en función v_f y deben estarlo en función de $v(x)$, donde $v(x) = v_f(x) + v_c(x)$.

Giros Se procederá a encontrar una relación entre el giro y el desplazamiento total o sus derivadas. Se parte de las ecuaciones de equilibrio:

$$-\frac{dV}{dx} + q(x) = 0 \quad (2.83)$$

$$-\frac{dM}{dx} + V = 0 \quad (2.84)$$

También se hace uso de la ley de comportamiento.

$$M = \int \int E \cdot y \cdot \sigma_x \cdot dA = EI \cdot \frac{d^2 v_f}{dx^2} \quad (2.85)$$

$$V = \int \int \alpha \cdot G \cdot \tau_{xy} \cdot dA = \alpha GA \cdot \frac{dv_c}{dx} \quad (2.86)$$

Además, se expresa el desplazamiento total y el giro de la siguiente forma:

$$v = X(x, \omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.87a)$$

$$\theta = \frac{dv_f}{dx} = Y(x, \omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.87b)$$

Combinando (2.87a) y (2.87b) con (2.83) (2.84) (2.85) y (2.86) y teniendo en cuenta que $q(x)$ es tal como se ve en (2.70), y además recordando a su vez ($v_c = v - v_f$), se obtiene:

$$-\alpha GA(X'' - Y') + m\omega^2 X = 0 \quad (2.88)$$

$$-EI \cdot Y'' + \alpha GA(X' - Y) = 0 \quad (2.89)$$

Operando se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$(X'' - Y') - aX = 0 \quad (2.90)$$

$$Y'' - \frac{a}{b}(X' - Y) = 0 \quad (2.91)$$

El objetivo final sigue siendo despejar el giro en función de desplazamiento total (X) o sus derivadas (X^n). La estrategia será derivar la ecuación (2.90) respecto a x . Quedando tal como se muestra en (2.92)

$$X''' - Y'' - aX' = 0 \quad (2.92)$$

El siguiente paso es sumar las ecuaciones (2.91) y (2.92). Para luego, despejar (Y) el giro.

$$\begin{aligned} X''' - \frac{a}{b}X' + \frac{a}{b}Y - aX' &= 0 \\ Y &= \frac{(a + \frac{a}{b})X' - X'''}{\frac{a}{b}} \\ Y &= (b + 1)X' - \frac{b}{a}X''' \end{aligned} \quad (2.93)$$

Se observa que el giro dependerá de la primera y tercera derivada del desplazamiento total, puesto que a y b son constantes para ω dada.

Esfuerzo cortante La determinación de este esfuerzo se calculará a partir de la expresión (2.86), previamente habiendo contemplando $v_c = v - v_f$.

$$V = \alpha GA \cdot \left(\frac{dv}{dx} - \frac{dv_f}{dx} \right) = \alpha GA \cdot \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) \quad (2.94)$$

En (2.94) el esfuerzo cortante aparece en función de la derivada del desplazamiento total y el giro respectivamente. Evidentemente, si se sustituye la expresión del giro Y de (2.93), ya se expresaría solamente en términos de derivadas del desplazamiento total.

$$V = \alpha GA \cdot \left(-bX' + \frac{b}{a}X''' \right) \quad (2.95)$$

Momento flector El momento flector se determina en función del giro(Y) con la ecuación (2.85) y la (2.87b).

$$M = EI \cdot \frac{d^2 v_f}{dx^2} = EI \cdot Y' \quad (2.96)$$

Además si el giro(Y) se expresa tal como recoge la expresión (2.93) quedaría el momento de la siguiente manera:

$$M = EI \cdot \left((b+1)X'' - \frac{b}{a}X^{IV} \right) \quad (2.97)$$

Ahora, se está en disposición de aplicar condiciones de contorno, puesto que todas ellas se pueden relacionar con $v(x)$ tal como se refleja en (2.93) , (2.95) y (2.97).

$$v(0) = A \cdot e^{s_1 \cdot 0} + B \cdot e^{s_2 \cdot 0} + C \cdot e^{s_3 \cdot 0} + D \cdot e^{s_4 \cdot 0} = 1$$

$$A + B + C + D = 1 \quad (2.98a)$$

$$\begin{aligned} \theta(0) = & A \cdot s_1 \cdot e^{s_1 \cdot 0} \left(b+1 - \frac{b}{a} \cdot s_1^2 \right) + B \cdot s_2 \cdot e^{s_2 \cdot 0} \left(b+1 - \frac{b}{a} \cdot s_2^2 \right) + \\ & + C \cdot s_3 \cdot e^{s_3 \cdot 0} \left(b+1 - \frac{b}{a} \cdot s_3^2 \right) + D \cdot s_4 \cdot e^{s_4 \cdot 0} \left(b+1 - \frac{b}{a} \cdot s_4^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

$$(A - B) \cdot s_1 \cdot \left(b+1 - \frac{b}{a} \cdot s_1^2 \right) + (C - D) \cdot s_3 \cdot \left(b+1 - \frac{b}{a} \cdot s_3^2 \right) = 0 \quad (2.98b)$$

$$M(L) = A \cdot e^{s_1 L} \cdot s_1^2 \left(b + 1 - \frac{b}{a} \cdot s_1^2 \right) + B \cdot e^{s_2 L} \cdot s_2^2 \left(b + 1 - \frac{b}{a} \cdot s_2^2 \right) + \\ + C \cdot e^{s_3 L} \cdot s_3^2 \left(b + 1 - \frac{b}{a} \cdot s_3^2 \right) + D \cdot e^{s_4 L} \cdot s_4^2 \left(b + 1 - \frac{b}{a} \cdot s_4^2 \right) = 0$$

$$(A + B) \cdot s_1^2 \cdot \left(b + 1 - \frac{b}{a} \cdot s_1^2 \right) + (C + D) \cdot s_3^2 \cdot \left(b + 1 - \frac{b}{a} \cdot s_3^2 \right) = 0 \quad (2.98c)$$

$$V(L) = A \cdot e^{s_1 L} \cdot s_1 \left(-1 + \frac{1}{a} \cdot s_1^2 \right) + B \cdot e^{s_2 L} \cdot s_2 \left(-1 + \frac{1}{a} \cdot s_2^2 \right) + \\ + C \cdot e^{s_3 L} \cdot s_3 \left(-1 + \frac{1}{a} \cdot s_3^2 \right) + D \cdot e^{s_4 L} \cdot s_4 \left(-1 + \frac{1}{a} \cdot s_4^2 \right) = 0$$

$$(A - B) \cdot e^{s_1 L} \cdot s_1 \left(-1 + \frac{1}{a} \cdot s_1^2 \right) + (C - D) \cdot e^{s_3 L} \cdot s_3 \left(-1 + \frac{1}{a} \cdot s_3^2 \right) = 0 \quad (2.98d)$$

Ahora se ha obtenido otro sistema lineal con cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas parecido al modelo de Bernoulli. Al igual que antes, se procede a resolver el sistema de ecuaciones mediante el mismo software. Una vez hecho, se sustituyen los valores de las incógnitas en (2.74) y las raíces de este polinomio, teniendo así, la solución analítica para el modelo Timoshenko.

2.8.1. Representación gráfica

La representación gráfica será el procedimiento final que permite visualizar y analizar mejor los datos. La obtención y representación de variables cinemáticas, permitirá verificar si la formulación del elemento de tres nodos, usado, que incorpora la deformación por cortante es apropiado. La precisión del modelo usado se contrastará con la solución analítica.

Representación conjunta de soluciones analíticas y numéricas

El modelo del problema sencillo planteado en 2.7, será el usado para comprobar que la formulación del elemento tipo viga Timoshenko de tres nodos. Esta verificación consiste en representar, conjuntamente, la solución analítica y numérica para ambos modelos. Las soluciones analíticas son la

soluciones de (2.74), para el planteamiento de Bernoulli y Timoshenko, respectivamente. Por su parte, las numéricas son la solución para (2.99), donde los desplazamientos y giros se han calculado con la resolución del sistema ecuaciones obtenida a través de la subrutina de Matlab, considerando la especificidades de ambos modelos.

$$v(\xi) = \psi_1 \cdot v_1 + \psi_2 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_1 + \psi_3 \cdot v_2 + \psi_4 \cdot v_3 + \psi_5 \cdot \frac{L}{2} \cdot \theta_3 \quad (2.99)$$

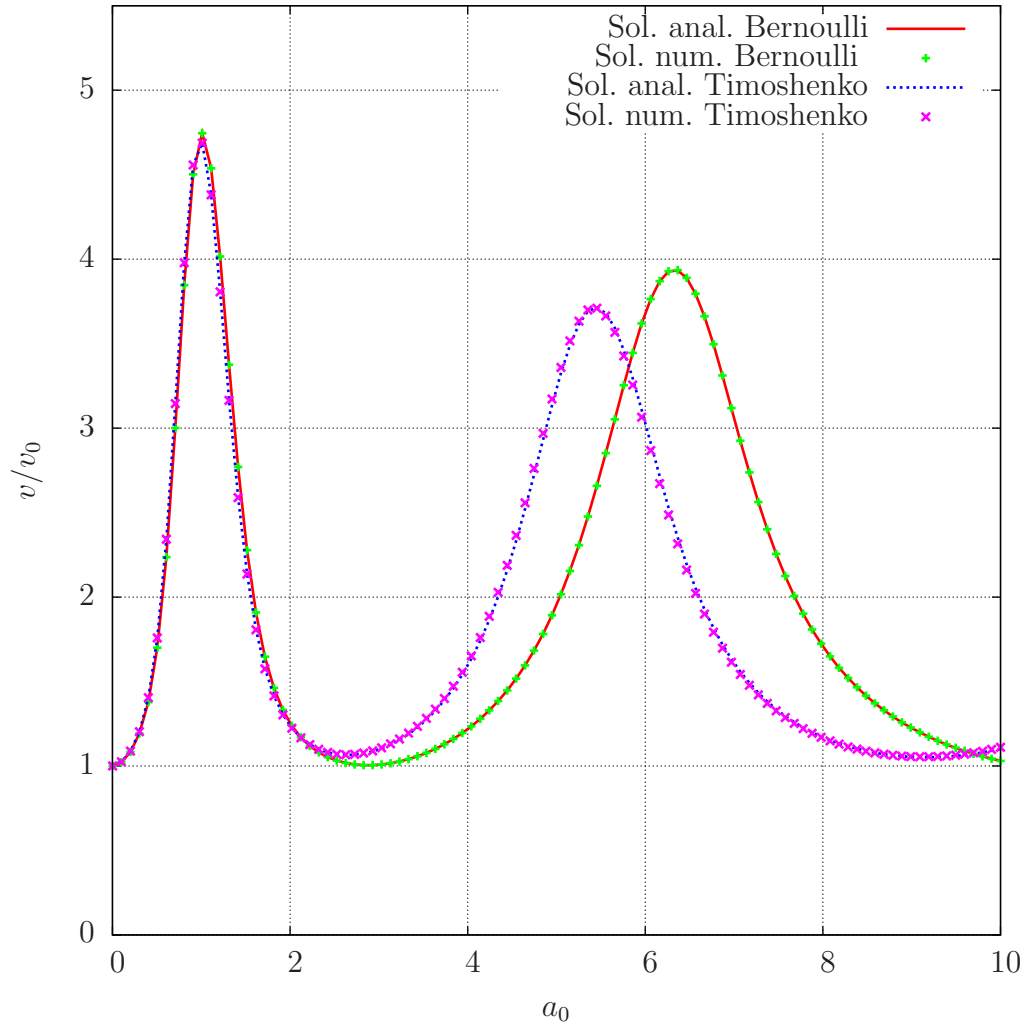


Figura 2.8: Soluciones analíticas y numéricas para modelos Bernoulli y Timoshenko

Las soluciones numéricas coinciden con las analíticas. Evidentemente, las soluciones de Bernoulli y Timoshenko analíticas coinciden con sus homólogas numéricas para todo este espectro de frecuencias. Evidentemente, los modelos de Bernoulli y Timoshenko presentan diferencias, puesto que tienen diferentes consideraciones.

Se puede concluir, que la solución numérica, se ajusta a la analítica para un problema como el 2.7. Por tanto, el elemento de tres nodos implementado y desarrollado en éste documento da una respuesta precisa y fiable, muy próxima a la solución analítica y consecuentemente, a la realidad.

Posteriormente, se representa conjuntamente diferentes perfiles para la serie normalizada IPE frente a un viga resuelta por el modelo de Bernoulli en 2.9, con la finalidad de observar la convergencia. Esta convergencia se produce cuando las piezas lo suficiente esbeltas, es decir, cuanto mayor esbeltez(perfiles menores) mayor parecido al modelo Bernoulli.

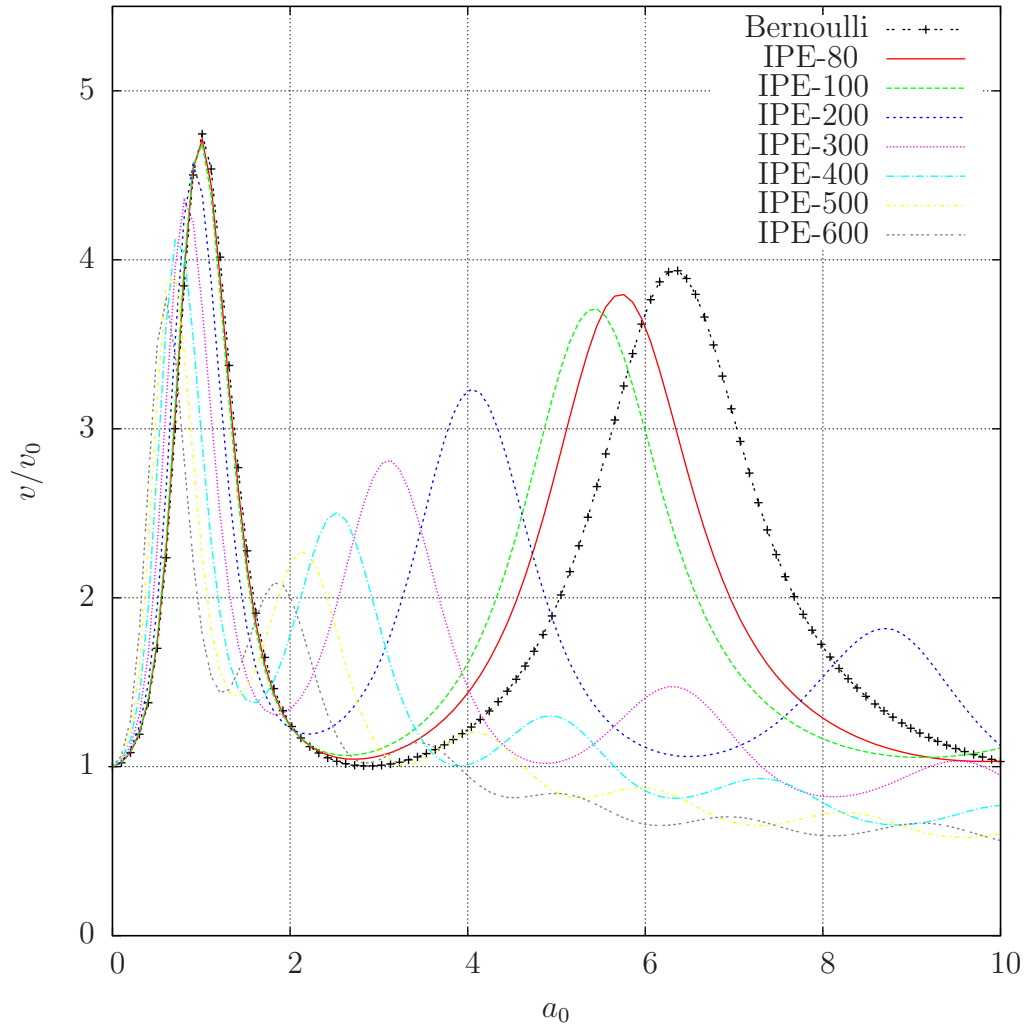


Figura 2.9: Comparación de soluciones para diferentes perfiles IPE con respecto al modelo Bernoulli

Se contempla en 2.9, que aquellos perfiles más pequeños, o sea, aquellos con mayor esbeltez, son los mismos que su solución está más próxima a la del modelo de viga Bernoulli como cabía esperar. Asimismo, en 2.9 se observa que las soluciones, que se han tratado se distancian progresivamente de la solución para una viga tipo Bernoulli a medida que el perfil es mayor.

Finalmente, este problema se resuelve para diferente tipos secciones para conocer su influencia, puesto que el modelo de Bernoulli era completamente insensible al valor o la geometría de la sección. Para este estudio, se centrara en el valor de ω del primer pico, que se tomará como referencia para medir

el grado de similitud respecto al modelo Bernoulli. El objetivo de este último gráfico será relacionar $(\omega_1/\omega_{1,Bernoulli})$, con la esbeltez mecánica ($\lambda = L/i_g$) y con ello permite, estudiar la evolución de los valores de ω en función de la esbeltez.

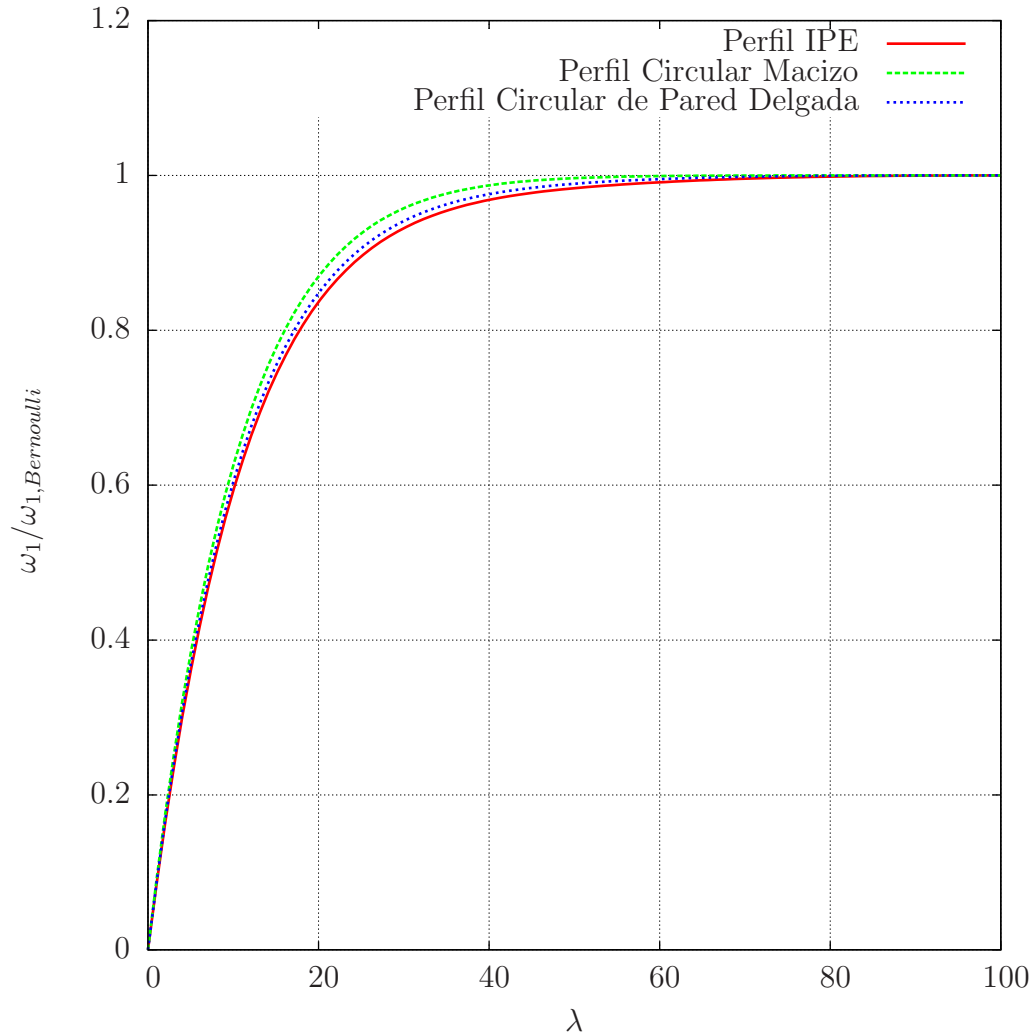


Figura 2.10: Representación de la influencia de la esbeltez

Claramente, en la figura 2.10 se indica que para esbelteces considerablemente grandes las gráficas tienden al valor uno, es decir, para valores suficientemente elevados de la esbeltez, ω_1 tendrá un valor muy próximo al de $\omega_{1,Bernoulli}$. Recordando la figura 2.9, se verifica una vez más que el modelo Bernoulli es una particularización del modelo Timoshenko para vigas esbeltas. Sírvese a modo de referencia, para un valor de esbeltez de 20 (por

ejemplo para el caso del perfil redondo macizo cuya $L/d = 5$), valor de ω_1 ronda el 90 por ciento del mismo valor para el caso Bernoulli.

Recordando el valor de ϕ , (2.100), se puede valorar el efecto de la sección en el problema. Se arroja de 2.10 que cuanto más esbelta sea la pieza más próxima a la unidad está su curva y más cerca se está del modelo Bernoulli. Sin embargo, para un mismo valor de esbeltez mecánica las curvas de diferentes tipologías de secciones no coinciden. Ello se debe a que ϕ depende además del factor de cortadura.

$$\phi = \frac{12EI}{\alpha G A L^2} = \frac{12E i_g^2}{\alpha G L^2} = \frac{12E}{\alpha G \lambda^2} = \frac{24(1 + \nu)}{\alpha \lambda^2} \quad (2.100)$$

El valor de este factor para perfiles redondos macizos es 0.9, para los redondos de pared delgada es 0.5 y para los IPE es 0.4 para el eje de mayor inercia según [13]. Por tanto, las curvas estarán ordenadas de arriba hacia abajo en ese mismo orden, puesto cuanto mayor sea α menor será ϕ y tanto más se parece al modelo Bernoulli.

Capítulo 3

Modelo acoplado de elementos finitos y elementos de contorno para la resolución de la interacción suelo-estructura

Este capítulo del documento establecerá las bases para la formulación del modelo acoplado de elementos finitos y elementos de contorno. Este modelo se caracteriza porque usará elementos de contorno para la resolución del comportamiento del terreno y elementos finitos para la estructura como se indicó en el capítulo anterior. El uso de elementos de contorno para modelizar el comportamiento del suelo atiende a que éstos son especialmente apropiados para estudiar el comportamiento de semi-espacios infinitos como es el terreno que envuelve las cimentaciones pilotadas de los problemas tratados en este Proyecto.

Esta resolución del comportamiento del suelo y su interacción con la estructura se compone de varias etapas que serán descritas en profundidad a lo largo del capítulo. La primera, es el planteamiento integral del problema elastodinámico a partir de las ecuaciones de gobierno. El segundo paso es abordar la resolución de esas integrales a través de un método numérico que permita obtener las soluciones en los contornos de los elementos. Posteriormente, se formula un modelo donde se acoplan elementos finitos y de contorno que reproducirá la interacción suelo-estructura.

3.1. Representación integral del problema elastodinámico

Se parte de las ecuaciones de gobierno en un medio elástico, lineal, isótropo y homogéneo. Se debe producir la transformación de ese conjunto de ecuaciones diferenciales en expresiones integrales que dará como resultado la formulación del problema en términos del método de elementos de contorno.

3.1.1. Teorema de reciprocidad en la elastodinámica

Se hará uso del teorema de reciprocidad entre estos dos estados elastodinámicos que es una extensión del clásico teorema de la reciprocidad en la elastoestática de Betti, formulado en el dominio del tiempo. El teorema de reciprocidad en la elastodinámica fue propuesto inicialmente en el dominio del tiempo y posteriormente fue extendido al de la frecuencia.

Sean $\mathcal{S}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b}; \Omega)$ y $\mathcal{S}^*(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{b}^*; \Omega)$ dos estados elastodinámicos diferentes que satisfacen las ecuaciones de Navier en un dominio regular Ω . $\mathcal{S}^*$ será una solución de referencia conocida de antemano que se empleará para resolver el problema y obtener el estado desconocido $\mathcal{S}$. Asumiendo condiciones iniciales nulas, el teorema de reciprocidad en la elastodinámica puede escribirse como:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{p} * \mathbf{u}^*) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{b} * \mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{p}^* * \mathbf{u}) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{b}^* * \mathbf{u}) d\Omega \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}^*$ son los vectores de desplazamiento en cualquier punto del dominio, mientras que $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}^*$ son los vectores de tensión en Γ , en equilibrio con los correspondientes tensores de tensión $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\sigma}^*$, en los estados $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^*$ respectivamente. El operador $*$ representa la convolución de Riemann.

La formulación elastodinámica desarrollada en el presente trabajo considera fuerzas de volumen y condiciones de contorno armónicas en el tiempo con frecuencia angular ω , *i.e.*, del tipo $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t}$. En este caso, los movimientos consisten en una parte transitoria ($\mathbf{u}^t(\mathbf{x}, t)$) y una permanente ($\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$) variando armónicamente en el tiempo, de modo que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

Sin embargo, todos los sistemas físicos reales poseen alguna clase de mecanismo de disipación de energía, de modo que cuando $t \rightarrow \infty$, la parte transitoria desaparece. Esto hace posible la formulación del problema cuando es sólo la parte permanente (causada por las condiciones de contorno

armónicamente variables) la que tiene influencia. En general, $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$ será una función compleja desfasada con la excitación. Entonces, asumiendo que las propiedades del medio elástico no varían con el tiempo, los campos de desplazamientos y tensiones se pueden expresar como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t} \quad (3.3a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t} \quad (3.3b)$$

La sustitución de las ecuaciones (3.3) en las ecuaciones de gobierno permite eliminar el término repetido $e^{i\omega t}$ y reescribir las ecuaciones para el estado elastodinámico permanente. Por lo tanto, es posible redefinir los dos estados elastodinámicos expuestos con anterioridad en el dominio de la frecuencia $\mathcal{S}_\omega(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b}; \omega, \Omega)$ y $\mathcal{S}_\omega^*(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{b}^*; \omega, \Omega)$. Bajo estas consideraciones, los productos de convolución desaparecen de la ecuación (3.1), simplificándose la expresión y quedando, entonces, del modo siguiente:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{p} \mathbf{u}^* d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{b} \mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{b}^* \mathbf{u} d\Omega \quad (3.4)$$

3.1.2. Solución fundamental

La formulación de la ecuación integral de la elastodinámica de la ecuación (3.4) pasa por escoger un estado de referencia $\mathcal{S}_\omega^*$ adecuado, generalmente denominado *solución fundamental*. Existen distintas soluciones fundamentales (o funciones de Green) para diversos problemas de referencia. La solución empleada en el presente trabajo representa la respuesta, en términos de desplazamientos y tensiones, de un medio elástico, lineal, isótropo y homogéneo no acotado cuando es sometido a una carga armónica unitaria concentrada de la forma:

$$\rho b_k^* = \delta(\boldsymbol{\iota}) \delta_{lk} e^{i\omega t} \quad (3.5)$$

aplicada en el punto $\boldsymbol{\iota}$, en dirección l , siendo δ_{lk} la delta de Kronecker y $\delta(\boldsymbol{\iota})$ la delta de Dirac, definida como:

$$\int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\iota}) d\Omega = \begin{cases} 1, & \text{si } \boldsymbol{\iota} \in \Omega \\ 0, & \text{si } \boldsymbol{\iota} \notin \Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

3.1.3. Representación integral

La aplicación del teorema de reciprocidad (3.4) entre el estado desconocido en estudio y el de referencia $\mathcal{S}_\omega^*$ definido con anterioridad lleva a la representación integral del problema. En lo sucesivo, las ecuaciones se escribirán representando un conjunto de tres ecuaciones, que aparecen de la colocación de la carga unitaria en las tres direcciones del espacio, de modo que los vectores $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{p}^*$ y $\mathbf{b}^*$ se organizarán en las matrices de 3×3 $\mathbf{u}^*$, $\mathbf{p}^*$ y $\mathbf{b}^*$. De esta manera, cuando se considera la solución fundamental definida anteriormente, y teniendo en cuenta la ecuación (3.5), el último término de la ecuación (3.4) se convierte en:

$$\rho \int_{\Omega} \mathbf{b}^* \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\iota}) \mathbf{u} d\Omega = \mathbf{u}^{\boldsymbol{\iota}} \quad (3.7)$$

lo que hace que la ecuación (3.4) se transforme en:

$$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\iota}} + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \quad (3.8)$$

que es la representación integral del campo de desplazamientos del problema elastodinámico armónico cuando la carga puntual se aplica en $\boldsymbol{\iota} \in \Omega$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{p}$ son los vectores de desplazamientos y tensión, mientras que $\mathbf{u}^*$ y $\mathbf{p}^*$ son los tensores de la solución fundamental, que en forma matricial se pueden escribir como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3.1.4. Representación integral en el contorno

La ecuación (3.8) permite obtener los desplazamientos en puntos internos de Ω cuando se conocen los desplazamientos y tensiones en Γ . Para formular el problema de modo que, dadas las condiciones de contorno, puedan obtenerse las incógnitas en los contornos, la ecuación integral debe escribirse únicamente en términos de variables en Γ , lo que implica aplicar la carga unitaria en el contorno. Sin embargo, el caso específico de $\boldsymbol{\iota} \in \Gamma$, que lleva a la representación integral en el contorno, requiere atención especial debido a

la singularidad de la solución fundamental cuando la distancia entre el punto de referencia y estudio ($r = x - \iota$) tiende a cero, es decir, $r \rightarrow 0$. Ello se debe a la distancia r está presente en el numerador y denominador de las expresiones de las variables, por tanto, cuando el punto de estudio y referencia tienden a coincidir, y se requiere de una estrategia para abordar la ya mencionada singularidad.

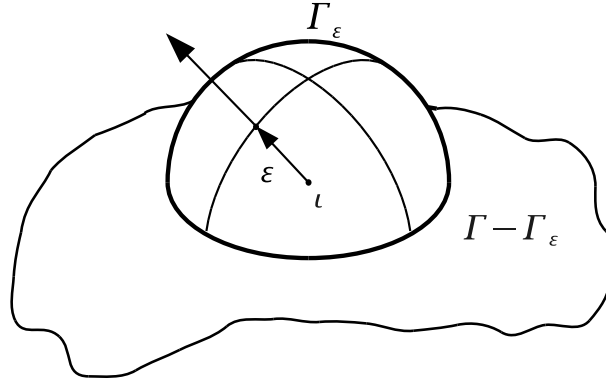


Figura 3.1: Procedimiento de eliminación de la singularidad. Semiesfera alrededor del punto de colocación para integración

El proceso de eliminación de la singularidad suele llevarse a cabo modificando ligeramente Γ para evitar el caso $r = 0$. Para este fin, se considera un contorno aproximado, elaborado aumentando el contorno Γ del dominio Ω mediante una semiesfera Γ_ε de radio $\varepsilon \rightarrow 0$. Como se puede observar en la figura 3.1, el punto de colocación ι se supone en el centro de la semiesfera. De esta manera, cada integral en el contorno se puede descomponer en otras dos, extendidas a $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ y Γ_ε respectivamente. Así, la ecuación (3.8) puede expresarse como:

$$\mathbf{u}^\iota + \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \quad (3.11)$$

Las integrales extendidas sobre $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ no contienen la singularidad, y para $\varepsilon \rightarrow 0$ representan el valor principal de Cauchy de la integral original.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \text{val. princ.} \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma \quad (3.12)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma = \text{val. princ.} \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma \quad (3.13)$$

Por otra parte, las integrales que se extienden sobre Γ_ε se definen en el límite. Teniendo en cuenta que el desplazamiento tiene un valor aproximado de $(1/\varepsilon)$, la tensión de $(1/\varepsilon^2)$ y la integral en el contorno es del orden (ε^2) , se puede escribir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma = 0 \quad (3.14)$$

$$\mathbf{u}^\iota + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota \quad (3.15)$$

donde $\mathbf{c}^\iota$ es el *término libre* que, en un caso tridimensional, es un tensor de 3×3 dependiente de la geometría del contorno en el punto ι y del coeficiente de Poisson del dominio (ver, p. ej., [6]). Si el contorno es suave en ι , entonces $\mathbf{c}^\iota = 1/2 \mathbf{I}$, mientras que $\mathbf{c}^\iota = \mathbf{I}$ en puntos internos, siendo $\mathbf{I}$ la matriz unidad de 3×3 . Teniendo en cuenta las ecuaciones desde (3.12) a (3.15), la ecuación (3.11) se convierte en:

$$\mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} \, d\Omega \quad (3.16)$$

donde todas las integrales son integrales en el sentido del valor principal de Cauchy, a pesar de que se ha omitido *val. princ.* por simplicidad.

3.2. El método de elementos de contorno

Para puntos $\iota \in \Gamma$, la ecuación (3.16), junto con las condiciones de contorno, constituye una formulación cerrada que puede permitir obtener los campos de desplazamiento y tensiones en el contorno. Una vez conocidos estos campos, los desplazamientos en cualquier punto $\iota \in \Omega$ se pueden conocer mediante la ecuación (3.8). Sin embargo, no es posible obtener, en general, la solución analítica del problema, excepto para algunos casos simples. Por este motivo, es preciso llevar a cabo un proceso de discretización para obtener un sistema de ecuaciones lineal de donde puede obtenerse la solución numérica del problema en un conjunto de puntos.

En esta sección, las fuerzas de volumen se asumirán, como es habitual, nulas. De esta manera, la ecuación (3.16) queda:

$$\mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma \quad (3.17)$$

3.2.1. Proceso de discretización

La solución numérica de la ecuación (3.17) requiere, en primer lugar, la discretización del contorno en $\mathcal{N}_e$ elementos Γ_j y en $\mathcal{N}_n$ nodos, de forma que:

$$\Gamma \simeq \bigcup_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \Gamma_j \quad (3.18)$$

donde cada elemento se define mediante $\mathcal{N}_n^j$ nodos. Se aproximan los campos de desplazamientos $\mathbf{u}$ y tensiones $\mathbf{p}$ sobre cada elemento j en términos de sus valores nodales haciendo uso de un conjunto de funciones polinómicas de interpolación $\Phi(\xi)$. ξ representa el conjunto de coordenadas naturales empleado para definir un punto en el elemento de referencia, que se presentará con posterioridad. De esta manera, los campos de desplazamientos ($\mathbf{u}(\xi)$) y tensiones ($\mathbf{p}(\xi)$) en un elemento se aproximan como:

$$\mathbf{u}(\xi) = \Phi(\xi) \mathbf{u}^j; \quad \mathbf{p}(\xi) = \Phi(\xi) \mathbf{p}^j \quad (3.19)$$

donde $\mathbf{u}^j$ y $\mathbf{p}^j$ son vectores de $3\mathcal{N}_n^j \times 1$ que contienen los desplazamientos y tensiones nodales de los elementos, y $\Phi(\xi)$ es una matriz de $3 \times 3\mathcal{N}_n^j$ en la forma:

$$\Phi(\xi) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \cdots & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \cdots & 0 & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

conteniendo las funciones de interpolación específicas del elemento, que se definirán con posterioridad. Por otra parte, la geometría de cada elemento se puede definir empleando las mismas funciones de interpolación:

$$\mathbf{x}(\xi) = \Phi(\xi) \mathbf{x}^j \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{x}^j$ es un vector de $3\mathcal{N}_n^j \times 1$ que contiene las coordenadas de los nodos que definen al elemento j . Esta clase de elemento, en el que se emplean las mismas funciones de interpolación para describir la geometría y las incógnitas, recibe el nombre de *elemento isoparamétrico*.

Se debe destacar que la geometría aproximada mediante la ecuación (3.21) no será, en general, completamente coincidente con el contorno original, como se expresa en la ecuación (3.18). El error en la aproximación depende de la complejidad de la geometría original, de la discretización empleada y de las funciones de interpolación ϕ_i . Sin embargo, esta clase de errores, que también existen en los campos aproximados, son inherentes al concepto de

aproximación en el que el MEC, como muchos otros métodos, se basa y, en consecuencia, no invalida esta clase de aproximación.

Una vez que todos los contornos han sido discretizados, y teniendo en cuenta que tanto $\mathbf{u}^j$ como $\mathbf{p}^j$ son vectores constantes en Γ_j , la sustitución de las ecuaciones (3.19) en (3.17) da como resultado:

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \quad (3.22)$$

que constituye un conjunto de tres ecuaciones algebraicas que dependen de los desplazamientos en el punto de colocación y de los desplazamientos y tensiones en todos los nodos del contorno correspondiente. La ecuación (3.22) se puede escribir, en forma matricial, como:

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \hat{\mathbf{H}}^{lm} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{G}^{lm} \mathbf{p}^m \quad (3.23)$$

donde, en esta ocasión, los sumatorios se extienden a todos los nodos de la discretización.

Se debe destacar que cada punto posee un único valor del desplazamiento. Sin embargo, pueden existir valores distintos de las tensiones en el mismo punto si éste pertenece a más de un elemento con normales exteriores no paralelas. Esta situación puede resolverse considerando más de un nodo en el mismo punto. Cuando al menos una de las tensiones es conocida, los desplazamientos en ambos nodos serán, de la solución del sistema de ecuaciones resultante, iguales. Por el contrario, cuando ambas tensiones son desconocidas, la matriz del sistema de ecuaciones se convierte en singular porque las ecuaciones asociadas a los nodos duplicados son iguales entre sí. En este caso, conocido como *problema de esquina*, se lleva a cabo una técnica denominada estrategia de colocación no nodal. Este procedimiento, empleado por primera vez por Medina [9], fue estudiado en profundidad por Aznárez [2].

Los vectores $\mathbf{u}^m$ y $\mathbf{p}^m$, de dimensiones 3×1 , representan las tres componentes nodales de los desplazamientos y tensiones en el nodo m . Por su parte, las matrices $\hat{\mathbf{H}}^{lm}$ y $\mathbf{G}^{lm}$, de dimensiones 3×3 , representan la respuesta en el nodo m debida a una carga armónica unitaria en el punto de colocación l , y se definen como:

$$\hat{\mathbf{H}}^{lm} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_{e_m}} \mathbf{p}^* \phi_k d\Gamma \quad (3.24)$$

$$\mathbf{G}^{lm} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_{e_m}} \mathbf{u}^* \phi_k d\Gamma \quad (3.25)$$

donde los sumatorios se extienden sobre todos los elementos e_m a los que pertenece el nodo m y ϕ_k es la función de forma del nodo m en el elemento Γ_{e_m} . Generalmente, el punto de colocación ι se corresponderá con un cierto nodo m de la discretización. En este caso, llamando:

$$\mathbf{H}^{\iota m} = \begin{cases} \hat{\mathbf{H}}^{\iota m} & , \text{ si } \iota \neq m \\ \mathbf{c}^{\iota} + \hat{\mathbf{H}}^{\iota m} & , \text{ si } \iota = m \end{cases} \quad (3.26)$$

la ecuación (3.23) se puede expresar como:

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{H}^{\iota m} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{G}^{\iota m} \mathbf{p}^m \quad (3.27)$$

que representa la ecuación integral en el contorno discretizada.

3.2.2. Sistema de ecuaciones que surge del método de elementos de contorno

Finalmente, escribiendo la ecuación (3.27) para cada nodo, se obtiene un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{p}} \quad (3.28)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{p}}$ son vectores de dimensión $3\mathcal{N}_n \times 1$ que contienen los valores nodales del problema, y donde las matrices $\mathbf{H}$ y $\mathbf{G}$ se componen de las submatrices $\mathbf{H}^{\iota m}$ y $\mathbf{G}^{\iota m}$. Aplicando las condiciones de contorno y reordenando las columnas de modo que todas las incógnitas (desplazamientos y tensiones) estén agrupadas en un vector $\bar{\mathbf{x}}$, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones linealmente independiente de la forma:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (3.29)$$

donde $\bar{\mathbf{f}}$ es el vector de valores conocidos, obtenido por aplicación de las condiciones de contorno y por reordenación de las ecuaciones.

3.2.3. Tipología de elementos de contorno

A pesar de que la formulación presentada con anterioridad es genérica y, por tanto, válida para cualquier clase de elementos, en el presente trabajo se emplean elementos cuadráticos de forma triangular y cuadrilátera de seis y nueve nodos respectivamente. Estos elementos, en conjunción con sus funciones de aproximación (también llamadas funciones de forma), que se

escriben en términos de las coordenadas naturales ξ_1 y ξ_2 , se definen en el cuadro 3.1. La función de aproximación ϕ_i se define de modo que toman un valor unitario en el nodo i y cero en el resto de nodos del elemento.

$\begin{aligned} \phi_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1) & ; & & \phi_4 &= 4\xi_1\xi_2 \\ \phi_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1) & ; & & \phi_5 &= 4\xi_2\xi_3 \\ \phi_3 &= \xi_3(2\xi_3 - 1) & ; & & \phi_6 &= 4\xi_1\xi_3 \\ \xi_3 &= 1 - \xi_2 - \xi_3 & ; & & 0 \leq \xi_1 \leq 1 & ; & 0 \leq \xi_2 \leq 1 \end{aligned}$	
$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 - 1)\xi_2(\xi_2 - 1) & ; & & \phi_2 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)\xi_2(\xi_2 - 1) \\ \phi_3 &= \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 + 1)\xi_2(\xi_2 - 1) & ; & & \phi_4 &= \frac{1}{2}(1 + \xi_1)\xi_2(1 - \xi_2^2) \\ \phi_5 &= \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 + 1)\xi_2(\xi_2 + 1) & ; & & \phi_6 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)\xi_2(\xi_2 + 1) \\ \phi_7 &= \frac{1}{4}\xi_1(\xi_1 - 1)\xi_2(\xi_2 + 1) & ; & & \phi_8 &= \frac{1}{2}(\xi_1 - 1)\xi_2(1 - \xi_2^2) \\ \phi_9 &= (1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2) \end{aligned}$ $-1 \leq \xi_1 \leq 1 \quad ; \quad -1 \leq \xi_2 \leq 1$	

Tabla 3.1: Tipos de elementos triangulares y cuadriláteros cuadráticos

3.2.4. Aspectos numéricos del MEC

Como se ha comentado anteriormente, la resolución del problema de los valores en el contorno mediante el método de elementos de contorno se apoya en la discretización del problema, en la evaluación numérica de las submatrices $\mathbf{H}^m$ y $\mathbf{G}^m$, en el ensamblaje de la matriz $\mathbf{A}$ del sistema de ecuaciones y del vector de valores conocidos (mediante la aplicación de las condiciones de contorno) y, finalmente, en la resolución del sistema lineal de ecuaciones algebraicas resultante. De esta manera, se obtiene una aproximación numérica de los campos de interés en un conjunto de puntos del contorno pudiendo, entonces, obtenerse los desplazamientos en cualquier punto interno $\mathbf{x} \in \Omega$ mediante la aplicación de la ecuación (3.8). Por lo tanto, uno de los puntos clave del método es la correcta y eficiente evaluación numérica de las integrales que intervienen, aspecto que se tratará en lo sucesivo.

3.3. Acoplamiento del método de elementos de contorno y elementos finitos para el análisis dinámico para estructuras enterradas

La resolución de problemas elastodinámicos por el método directo de los elementos de contorno aplicado en el dominio de la frecuencia, la ecuación integral en el contorno requiere, generalmente, partir del teorema de reciprocidad en la elastodinámica, considerando las fuerzas por unidad de volumen. Sin embargo, antes del proceso de discretización que permite plantear el sistema lineal de ecuaciones del método de los elementos de contorno se asume, en la mayor parte de las aplicaciones, que dichas fuerzas por unidad de volumen son nulas en todo el dominio, lo que permite cancelar el último término de la ecuación integral, tal y como se mostró en la sección anterior.

En este proyecto, por contra, se incluye el término de considerar que las tensiones que aparecen en la interfase suelo-estructura. Estos términos pueden entenderse como fuerzas de volumen que actúan en el interior del dominio. Por otro lado, la rigidez aportada por los elementos estructurales es tomada en cuenta a través de elementos finitos longitudinales que relacionan los desplazamientos de distintos puntos internos del suelo alineados a lo largo del eje. De este modo, es completamente innecesario discretizar la interfase suelo-estructura utilizando elementos de contorno, disminuyendo los grados

de libertad. Así, no se considera un vaciado en el suelo, que se modela como un medio continuo.

Las fuerzas y las tensiones que aparecen en la interfase estructura-suelo son consideradas como líneas de carga y fuerzas internas que aparecen en el interior del dominio. Mientras los elementos estructurales son modelados mediante elementos finitos. La principal característica de ambas discretizaciones es que pueden ser acopladas, generando en un sistema de ecuaciones final que permite evaluar el impacto de la interacción suelo-estructura.

3.3.1. Ecuaciones de elementos de contorno para el suelo

El terreno se modela a través del método de los elementos de contorno como una región lineal, homogénea e isótropa. La ecuación integral en el contorno para un estado elastodinámico definido en un dominio Ω con un contorno Γ puede ser escrito de forma general y condensada como:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{u}^t + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{X} d\Omega \quad (3.30)$$

donde $\mathbf{c}^t$ es el tensor del término libre en el punto de colocación $\mathbf{x}^t$, $\mathbf{X}$ son las fuerzas de volumen en el dominio Ω , $\mathbf{u}$ y $\mathbf{p}$ son los vectores de desplazamientos y tensiones, y $\mathbf{u}^*$ y $\mathbf{p}^*$ son los tensores de la solución fundamental elastodinámica, que representan la respuesta de una región no acotada a una carga armónica unitaria concentrada en un punto $\mathbf{x}^t$ y con una variación temporal del tipo $e^{i\omega t}$

En gran número de aplicaciones se considera que las fuerzas de volumen $\mathbf{X}$ son nulas, sin embargo, éstas recogen el efecto de la estructura enterrada en el mencionado suelo. Se considera, por tanto, que la continuidad del terreno no se ve alterada. Las líneas de carga dentro del suelo, representadas las tensiones a lo largo de la interfase, actuando sobre la estructura y en el interior del suelo ($\mathbf{q}^{p_j} = -\mathbf{q}^{s_j}$), siendo éstas de igual módulo y sentido contrario. Resumiendo, el suelo con estructuras enterradas en el mismo se sustituye por un terreno continuo con una fuerzas equivalentes (líneas de carga) que simulan la presencia de la estructura.

Por tanto la ecuación (3.30) contemplando la presencia de líneas de carga se reescribe como:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{u}^t + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_p} \left[\int_{\Gamma_{p_j}} \mathbf{u}^* \mathbf{q}^{s_j} d\Gamma_{p_j} - \delta_j \mathbf{\Upsilon}_k^j F_{p_j} \right] \quad (3.31)$$

donde Γ_{p_j} es la interfase de la línea de carga j en el interior del dominio Ω , n_p es el número total de pilotes en el dominio Ω .

Los contornos Γ son discretizados por medio de elementos cuadráticos triangulares o cuadriláteros con seis o nueve nodos, respectivamente. Cuando los contornos han sido discretizados, la ecuación (3.31) puede escribirse para cada región Ω en todos los nodos sobre Γ con el fin de obtener una ecuación matricial del tipo:

$$\mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{sp_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \mathbf{\Upsilon}^{sj} F_{p_j} = 0 \quad (3.32)$$

donde $\mathbf{u}^s$ y $\mathbf{p}^s$ son los vectores de desplazamientos y tensiones nodales de los elementos de contorno, $\mathbf{H}^{ss}$ y $\mathbf{G}^{ss}$ son las matrices de coeficientes obtenidas de la integración numérica sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental por las funciones de forma correspondientes y $\mathbf{G}^{sp_j}$ es la matriz de coeficientes obtenida de la integración numérica sobre cada línea de carga j multiplicado por las funciones de interpolación. Mientras que $\mathbf{\Upsilon}_k^j$ es un vector de tres componentes que representa la contribución de la fuerza axial F_{p_j}

Por otro lado, la ecuación (3.31) se aplica también en los puntos internos que pertenecen a la línea de carga Γ_{p_i} , lo que lleva a la siguiente expresión:

$$\mathbf{c} \mathbf{u}^{p_i} + \mathbf{H}^{p_i s} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{p_i s} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{p_i p_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \mathbf{\Upsilon}^{p_i j} F_{p_j} = 0 \quad (3.33)$$

donde $\mathbf{H}^{p_i s}$ y $\mathbf{G}^{p_i s}$ son matrices de coeficientes obtenidas a través de la integración numérica sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental por las funciones de forma correspondientes y $\mathbf{G}^{p_i p_j}$ es la matriz de coeficientes obtenida a través de la integración numérica sobre la línea de carga j del producto de la solución fundamental por las funciones de interpolación. Aquí, $\mathbf{u}^{p_i}$ es el vector de desplazamientos nodales de la línea de carga i , el cual es multiplicado por el vector $\mathbf{c}$, que toma el valor 1/2 en posiciones correspondientes a nodos del pilote localizados sobre un contorno suave (como en el caso de las cabezas de los pilotes) o toma un valor unitario en los puntos internos. Debe tenerse en cuenta que la posición del nodo que define la cabeza del pilote puede coincidir con la posición de algún nodo de la superficie. En este caso, existirán dos nodos con idénticas coordenadas espaciales. Entonces, dos de las ecuaciones del sistema, la escrita para el nodo de la superficie y la escrita para el nodo de la línea de carga, serán equivalentes, pero el término libre ocupará diferentes posiciones en la

matriz de coeficientes, lo que evitará que se tenga un sistema de ecuaciones singular.

Además, en este tipo de estructura la presencia de fuerzas axiales que modelizada a través de la siguiente ecuación, tal como se indica en [11].

$$\frac{(3u_3^{b_k} + 6u_3^{b_l} - u_3^{b_m})}{8} + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{p}}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{p} d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_p} \int_{\Gamma_{p_j}} \hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{q}^{s_j} d\Gamma_{p_j} - \delta_j (\Upsilon_b^j)_3 F_{p_j} \quad (3.34)$$

donde $u_3^{b_k}, u_3^{b_l}$ y $u_3^{b_m}$ son los desplazamientos verticales de los nodos del elemento inferior, $\hat{\mathbf{p}}^* = \{p_{31}^*, p_{32}^*, p_{33}^*\}$ y $\hat{\mathbf{u}}^* = \{u_{31}^*, u_{32}^*, u_{33}^*\}$. Que se puede compactar matricialmente de la siguiente forma.

$$\mathbf{D}^T \mathbf{u}_b^{p_i} + \mathbf{H}_e^{p_i s} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}_e^{p_i s} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}_e^{p_i p_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon_{b_3}^{p_i j} F_{p_j} = 0 \quad (3.35)$$

donde $\mathbf{u}_b^{p_i}$ es el vector de desplazamientos nodales en los nodos del elemento inferior de la línea de carga i (que corresponde al extremo inferior de un pilote flotante), donde la carga unitaria está aplicada, $\mathbf{H}_e^{p_i s}$ y $\mathbf{G}_e^{p_i s}$ son vectores obtenidos por integración numérica sobre Γ del producto de la solución fundamental elastodinámica por las funciones de forma de los elementos de contorno y $\mathbf{G}_e^{p_i p_j}$ es el vector obtenido de la integración sobre Γ_{p_j} del producto de la solución fundamental elastodinámica por las funciones de forma. Por último, $\mathbf{D}^T = 1/8\{0, 0, 3, 0, 0, 6, 0, 0, -1\}$.

3.3.2. Sistema de ecuaciones para el pilote simple

Una vez que todas las matrices elementales han sido obtenidas para el pilote completo, es posible escribir, para cada pilote, la siguiente expresión

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}^p = \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{Q} \mathbf{q}^p \quad (3.36)$$

donde $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$. Dado que cada pilote es discretizado utilizando tantos elementos como sea necesario para poder seguir de forma precisa su deformada, las matrices $\bar{\mathbf{K}}$ y $\mathbf{Q}$ deben ser entendidas como matrices globales, obtenidas a partir de las matrices elementales siguiendo los procedimientos usuales del método de los elementos finitos. Mientras que el segundo miembro, está incluidas el sistema de cargas equivalente nodal.

Estas cargas equivalentes nodales pueden ser expresadas de forma más detallada tal como se indica (3.36)

La ecuación (3.36), escrita para el pilote j , puede expresarse ahora como:

$$\bar{\mathbf{K}}^{pj} \mathbf{u}^{pj} - \mathbf{F}_{pj} + \mathbf{Q} \mathbf{q}^{sj} = \mathbf{F}_{top}^j \quad (3.37)$$

Se debe haber contemplado finalmente, que la continuidad del suelo que se ha supuesto implica, que ella no se ve alterada por la presencia de los pilotes. Por tanto, la masa distribuida de cada pilote será $\bar{m} = A(\rho_p - \rho_s)$, siendo ρ_p y ρ_s , respectivamente, las densidades del pilote y del suelo. Esto se hace con el fin de no considerar una masa distribuida mayor a la real.

3.4. Acoplamiento MEF-MEC

El siguiente paso es la construcción de un sistema de ecuaciones global a partir de las expresiones deducidas en las secciones anteriores. El acoplamiento se realiza a través de las tensiones $\mathbf{q}^{sj} = -\mathbf{q}^{pj}$ a lo largo de la interfase pilote-suelo y de los desplazamientos $\mathbf{u}^{pj}$ a lo largo del pilote j , en otras palabras, en la región de contacto entre estructura y suelo las tensiones son igual módulo y sentido opuesto mientras que el valor de los desplazamientos es el mismo.

Por tanto, se escribirán las ecuaciones (3.32), (3.33), (3.35) y (3.36) que permiten conocer las relaciones entre tensiones y desplazamiento del suelo, tanto para puntos de la superficie como del interior, el efecto de cargas axiales y los desplazamiento de la estructura. Como se ha visto justo anteriormente, existe una relación en la interfase, de esta manera se pueden vincular, compatibilizar, las variables pertenecientes al suelo y a la estructura. Tomando las ecuaciones en función del desplazamiento de la estructura en la interfase y la tensión perteneciente al terreno, siendo ella positiva, se puede escribir matricialmente en el siguiente sistema de ecuaciones para un suelo homogéneo.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{ss} & -\mathbf{G}^{sp} & \mathbf{\Upsilon}^s & \\ \mathbf{H}^{ps} & -\mathbf{G}^{pp} & \mathbf{\Upsilon}^p & \mathbf{C}' \\ \mathbf{H}_e^{ps} & -\mathbf{G}_e^{pp} & \mathbf{\Upsilon}_{b_3}^p & \mathbf{D}' \\ & \mathbf{Q} & -\mathbf{I}' & \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{q}^s \\ \mathbf{F}_p \\ \mathbf{u}^p \end{bmatrix} = \mathcal{B} \quad (3.38)$$

donde $\mathbf{H}^{ss}$ es una matriz de dimensiones $3N \times 3N$ obtenida mediante la integración, sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental armónica en tensiones por las funciones de forma correspondientes, cuando la carga es aplicada sobre los contornos, N es el número de nodos en el contorno, $\mathbf{D}'$ es una matriz constituida por los distintos vectores $\mathbf{D}$, $\mathbf{C}'$ es una matriz que contiene los términos libres correspondientes a la colocación

sobre los nodos del pilote e $\mathbf{I}'$ es una matriz nula excepto en los términos correspondientes a las incógnitas F_{p_j} , donde se coloca un término de valor unidad. El resto de las submatrices son:

$$\mathbf{G}^{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{p_1 p_1} & \mathbf{G}^{p_1 p_2} & \dots & \mathbf{G}^{p_1 p_n} \\ \mathbf{G}^{p_2 p_1} & \mathbf{G}^{p_2 p_2} & \dots & \mathbf{G}^{p_2 p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}^{p_n p_1} & \mathbf{G}^{p_n p_2} & \dots & \mathbf{G}^{p_n p_n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_e^{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_e^{p_1 p_1} & \mathbf{G}_e^{p_1 p_2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p_1 p_n} \\ \mathbf{G}_e^{p_2 p_1} & \mathbf{G}_e^{p_2 p_2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p_2 p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_e^{p_n p_1} & \mathbf{G}_e^{p_n p_2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p_n p_n} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon^p = \begin{bmatrix} \Upsilon^{p_1 1} & \Upsilon^{p_1 2} & \dots & \Upsilon^{p_1 n} \\ \Upsilon^{p_2 1} & \Upsilon^{p_2 2} & \dots & \Upsilon^{p_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Upsilon^{p_n 1} & \Upsilon^{p_n 2} & \dots & \Upsilon^{p_n n} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_{b_3}^p = \begin{bmatrix} \Upsilon_{b_3}^{p_1 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_1 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_1 n} \\ \Upsilon_{b_3}^{p_2 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_2 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Upsilon_{b_3}^{p_n 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_n 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_n n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^{sp} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{sp_1} & \mathbf{G}^{sp_2} & \dots & \mathbf{G}^{sp_n} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon^s = \begin{bmatrix} \Upsilon^{s1} & \Upsilon^{s2} & \dots & \Upsilon^{sn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}^{ps} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{p_1 s} & \mathbf{H}^{p_2 s} & \dots & \mathbf{H}^{p_n s} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{H}_e^{ps} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_e^{p_1 s} & \mathbf{H}_e^{p_2 s} & \dots & \mathbf{H}_e^{p_n s} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{p_1} & & \dots & \\ & \mathbf{Q}^{p_2} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \dots & \mathbf{Q}^{p_n} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^{p_1} & & \cdots & \\ & \bar{\mathbf{K}}^{p_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & \bar{\mathbf{K}}^{p_n} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B}$ es el vector del lado derecho, obtenido de aplicar las condiciones de contorno, mientras que el vector de incógnitas es:

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{u}^s, \mathbf{q}^{s_1}, \mathbf{q}^{s_2}, \dots, \mathbf{q}^{s_n}, F_{p_1}, F_{p_2}, \dots, F_{p_n}, \mathbf{u}^{p_1}, \mathbf{u}^{p_2}, \dots, \mathbf{u}^{p_n}\}^T \quad (3.39)$$

En el caso de dominios estratificados, la estructura del sistema de ecuaciones es la misma, aunque deben imponerse también condiciones de equilibrio y compatibilidad todas las interfases de los estratos de terreno.

Capítulo 4

Resultados

El modelo numérico que se ha expuesto ha sido implementado con la finalidad de ser incluido en un software de cálculo y por tanto, permita la resolución problemas de especial interés en el campo de la dinámica de estructuras. Primeramente, como se ha visto, ha sido implementada una subrutina de Matlab con la que se verificó que la respuesta era semejante a la de modelos analíticos ya contrastados. Una vez que se ha determinado que el elemento usado en este Proyecto Fin de Carrera es fiable, el siguiente paso será integrarlo en software de cálculo más general que permita dar respuesta a estructuras enterradas cuya esbeltez comprometa las hipótesis Euler-Bernoulli.

Este programa general permite la resolución mediante una discretización de elementos de contorno para el terreno y elementos finitos para la estructura enterrada (en lo sucesivo, se le denominará MEC-MEF). El programa es capaz de acoplar ambas discretizaciones y resolver el sistema matricial que se genera. Tras resolverlo, es capaz de devolver las soluciones de variables que se le requieran. Además, es capaz de hacerlo para el rango de frecuencias adimensionales (a_0) que se le indique. Así, los datos que se deseen conocer serán volcados en un fichero de texto que posteriormente pueden ser representados por alguna herramienta gráfica.

Este software, tal como se ha mencionado, es capaz de arrojar el valor de desplazamientos, giros, esfuerzos o momentos. En el caso de este Proyecto se estudian impedancias, donde serán estudiados cuerpos con diferentes longitudes y tipos de secciones, que generarán diferentes configuraciones geométricas y por tanto diferentes esbelteces. Asimismo, se analizarán los sólidos enterrados en diferentes tipos de suelo con el fin de valorar el efecto de la interacción.

4.1. Impedancias horizontales

El cálculo de la impedancias consiste en conocer la respuesta tras someter a la estructura enterrada a un desplazamiento horizontal del tipo $1 \cdot e^{i\omega t}$. Este desplazamiento es aplicado en la cabeza pilote, o sea, en la parte superior del mismo. La solución del problema será la fuerza precisa para provocar este desplazamiento, para cada una de las frecuencias adimensionales (a_0) que se precise.

Esta respuesta es la resistencia que ofrece el conjunto suelo-estructura a ser desplazado. En el problema tratado se estudiará la impedancia horizontal que es aquella fuerza que resultará para provocar un desplazamiento unitario en la mencionada dirección horizontal, tal como se observa en la figura 4.1.

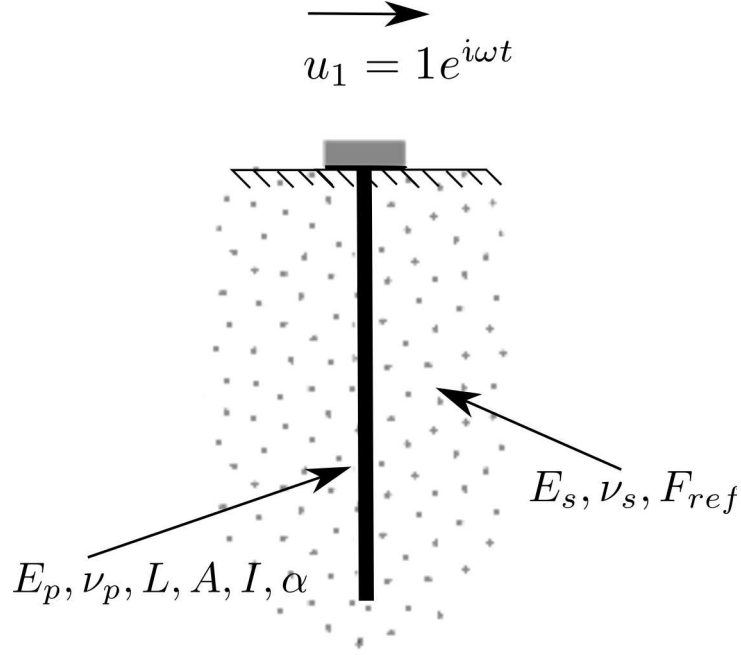


Figura 4.1: Modelo de estructura enterrada para calcular la impedancia

El cálculo de la impedancia se realizará para diferentes configuraciones geométricas con el fin de medir la influencia de la esbeltez mecánica de la pieza. También, se estudiarán diferentes tipologías de sección que tendrán su momento de inercia y su área, es decir, cada una tendrá diferente radio de giro y con ello, diferente esbeltez mecánica. Además, la morfología de la sección de estas secciones determinará su correspondiente factor de cortadura. Finalmente, se tendrán en cuenta para el estudio de la estructura enterrada las condiciones en el extremo del pilote y el tipo de terreno, puesto que la

interacción entre ese terreno y la estructura será diferente dependiendo sus propiedades.

Tal como se ha indicado anteriormente, el cálculo de la impedancia se realizará con el programa MEC-MEF. Para ello, se resolverá un sólido como el que está en la figura 4.1 para toda la casuística que se detallará a continuación. Éste sólido tendrá diferentes configuraciones de longitud-diámetro que serán $L/d = 3$; $L/d = 5$; y $L/d = 10$. Además, se estudiarán secciones redondas macizas y de pared delgada, siendo su ratio espesor-diámetro de: $e/d = 0,1$. También, será analizado para el caso de pilote flotante y con punta hincada en el terreno. Finalmente, se evaluará para dos tipos de terrenos, uno duro y otros más blando, siendo para cada caso ($E_p/E_s = 100$) y ($E_p/E_s = 1000$) respectivamente.

4.1.1. Pilote flotante, macizo, $E_p/E_s = 100$

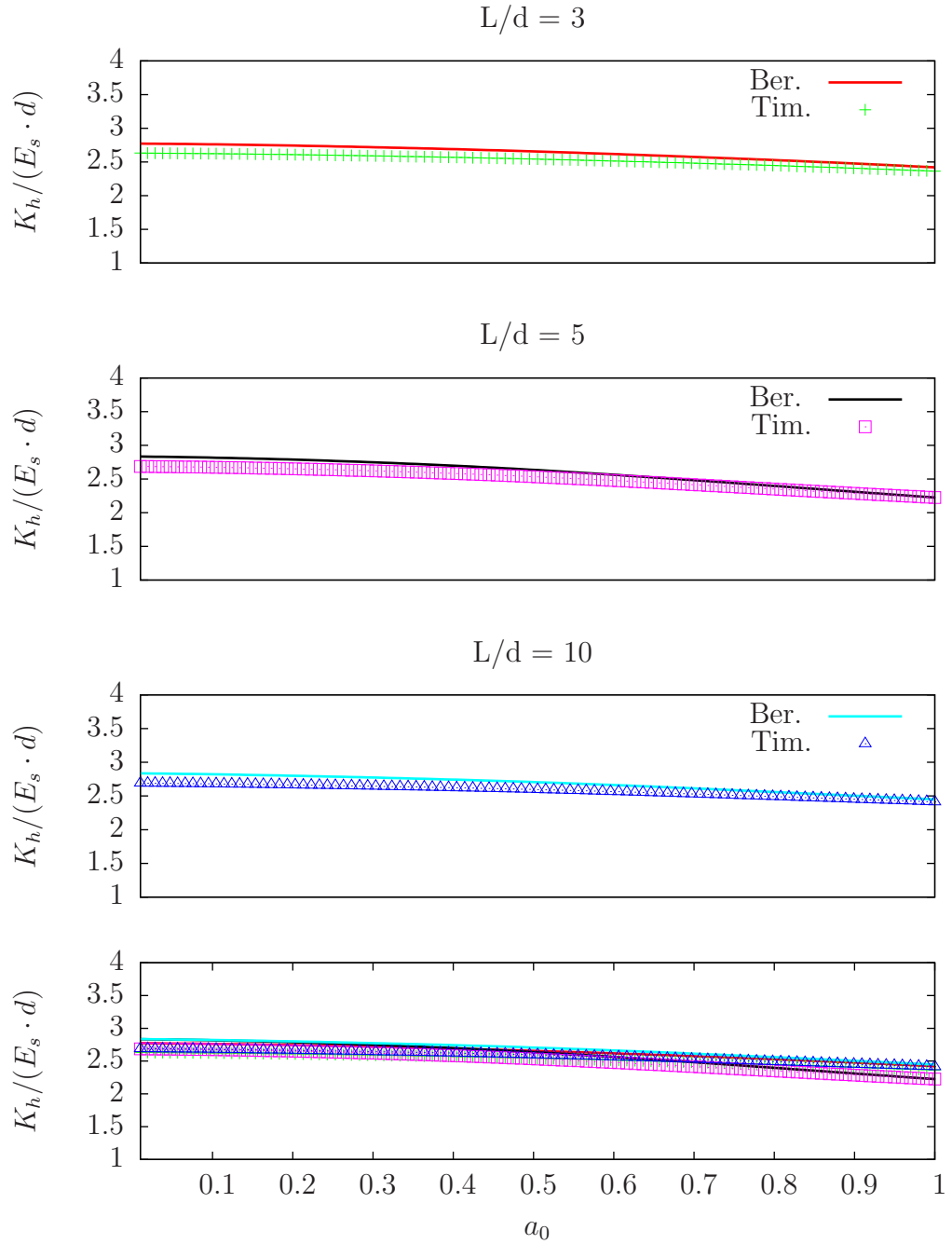
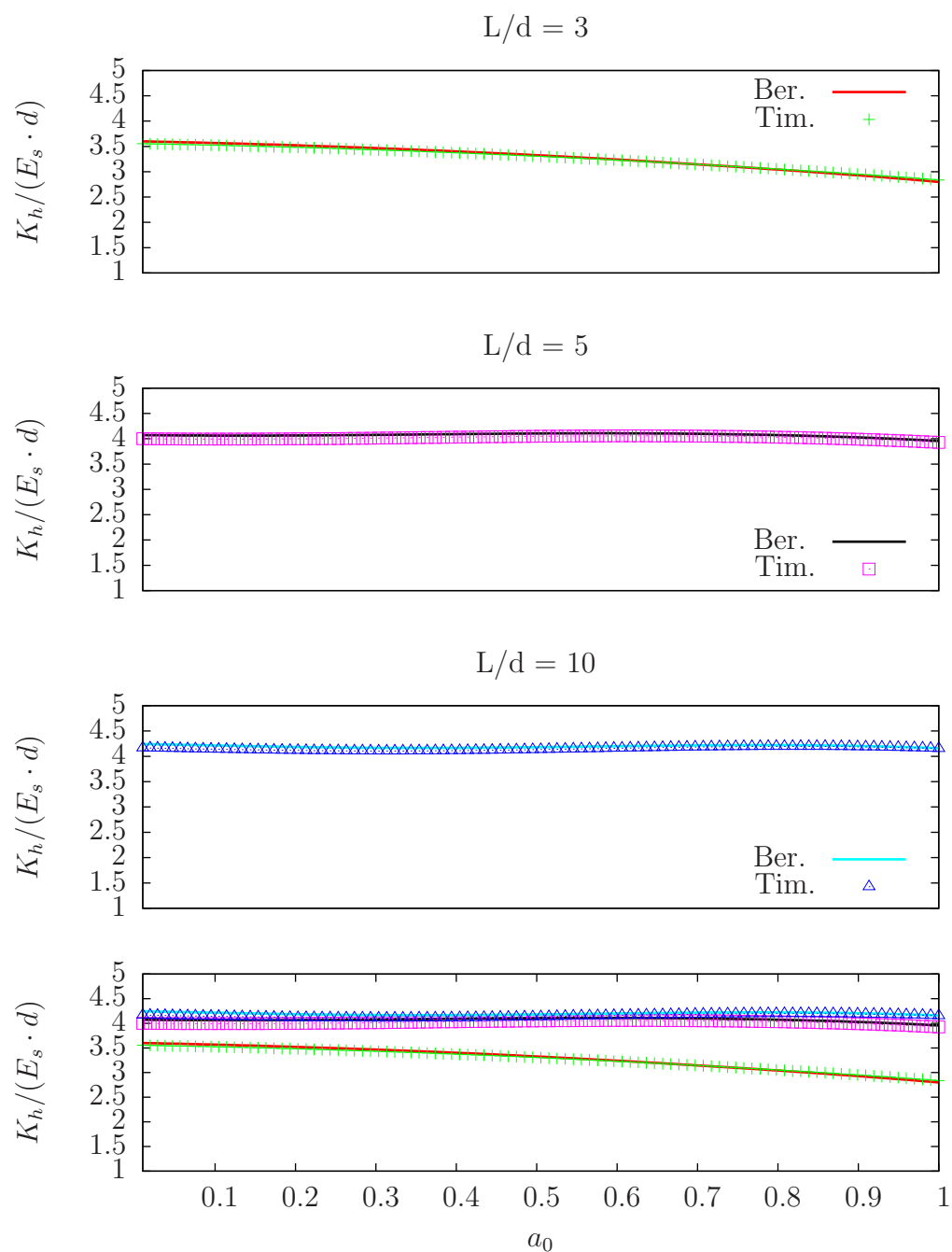


Figura 4.2: Pilote flotante, sección circular maciza, terreno duro

4.1.2. Pilote flotante, macizo, $E_p/E_s = 1000$ Figura 4.3: Pilote flotante, sección circular maciza, $E_p/E_s = 1000$

4.1.3. Pilote hincado, macizo, $E_p/E_s = 100$

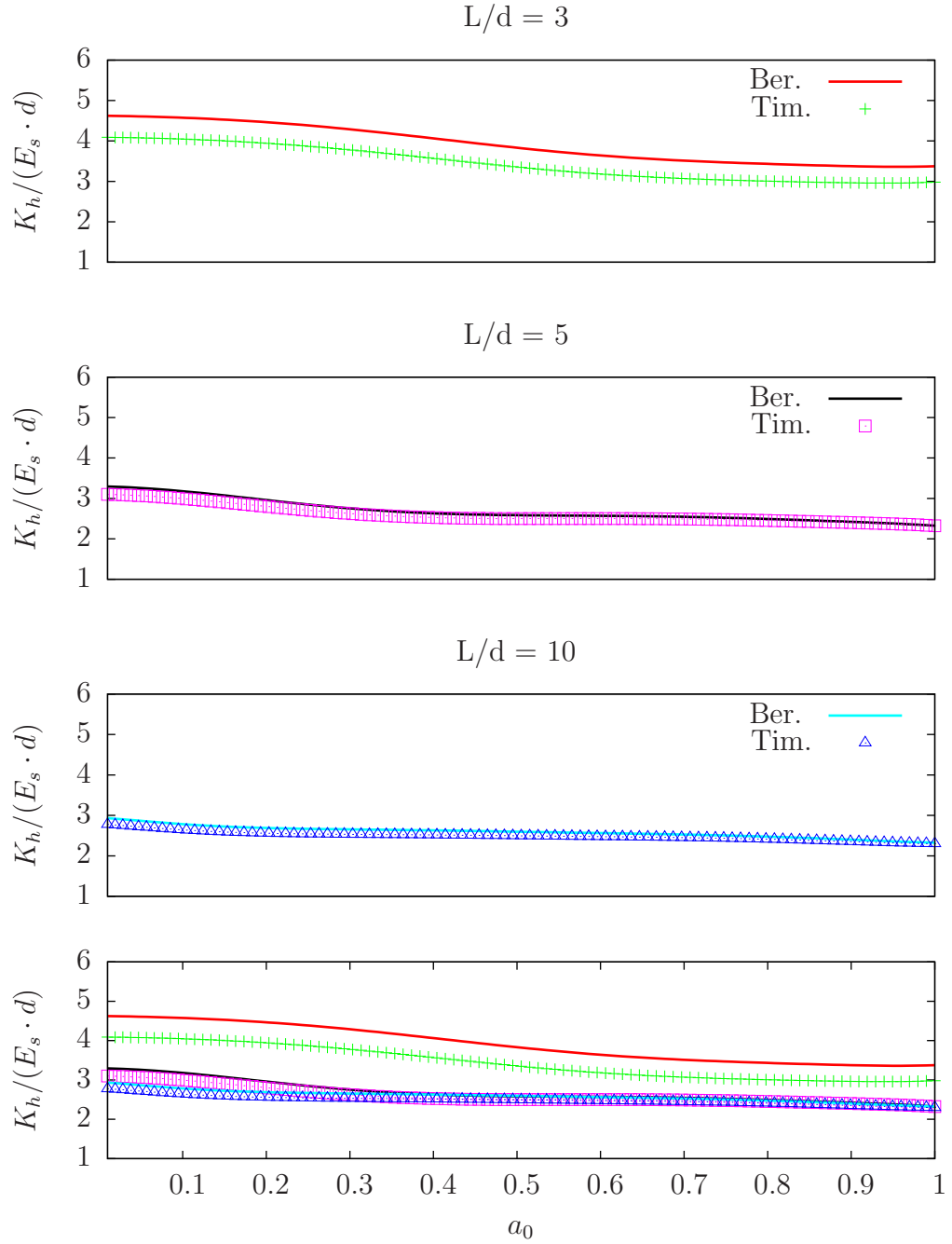
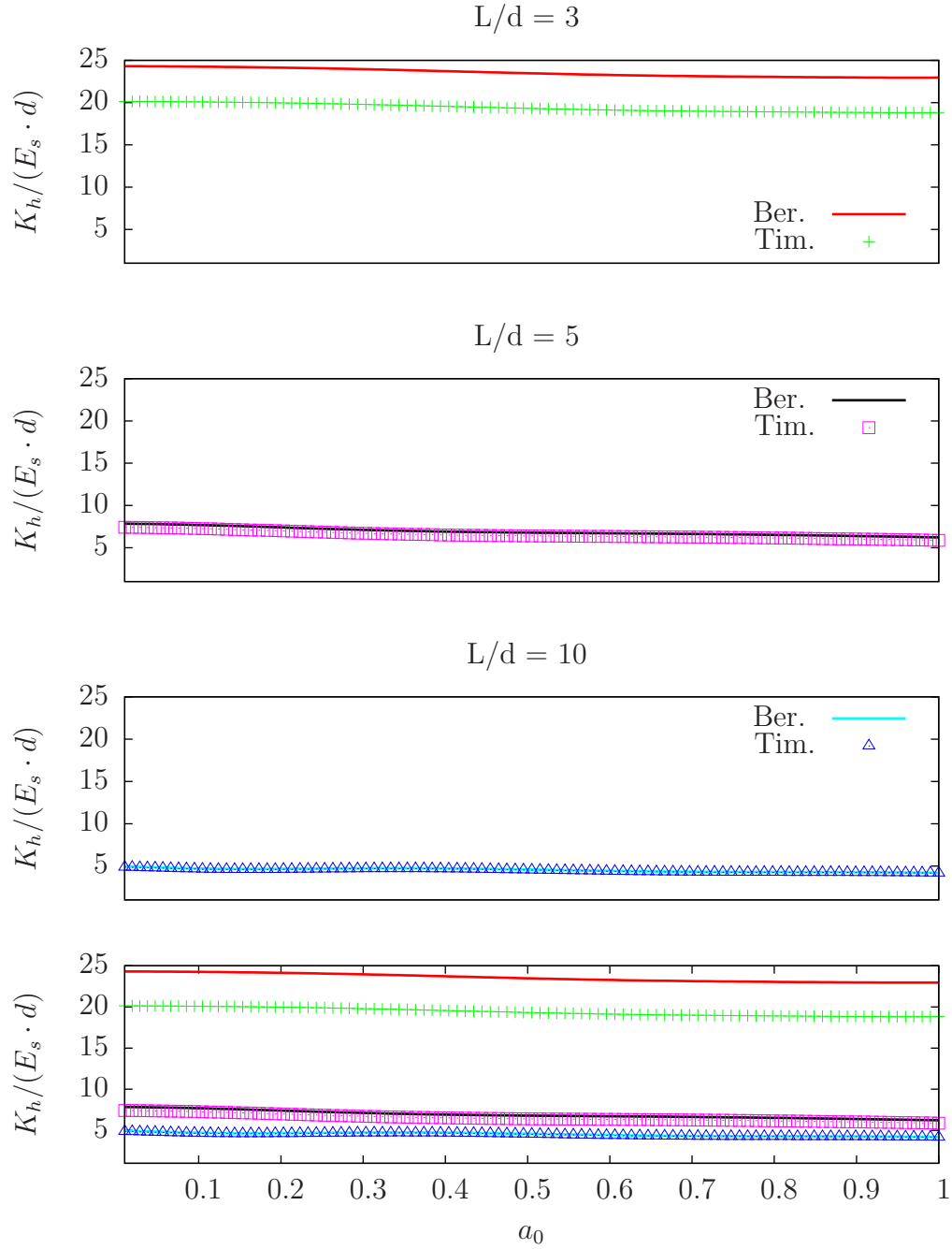


Figura 4.4: Pilote hincado, sección circular maciza, $E_p/E_s = 100$

4.1.4. Pilote hincado, macizo, $E_p/E_s = 1000$ Figura 4.5: Pilote hincado, sección circular maciza, $E_p/E_s = 1000$

4.1.5. Pilote flotante, hueco, $E_p/E_s = 100$

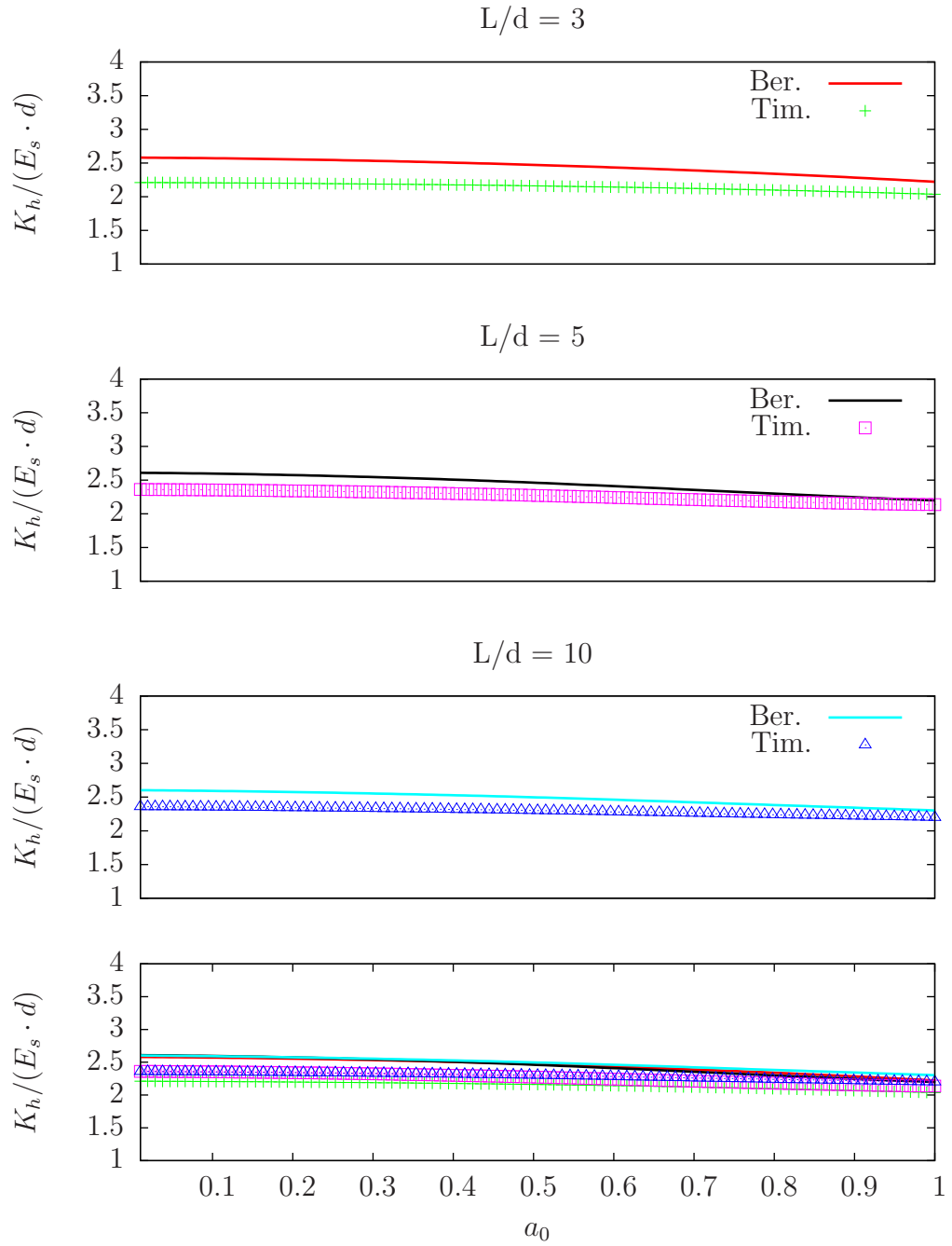
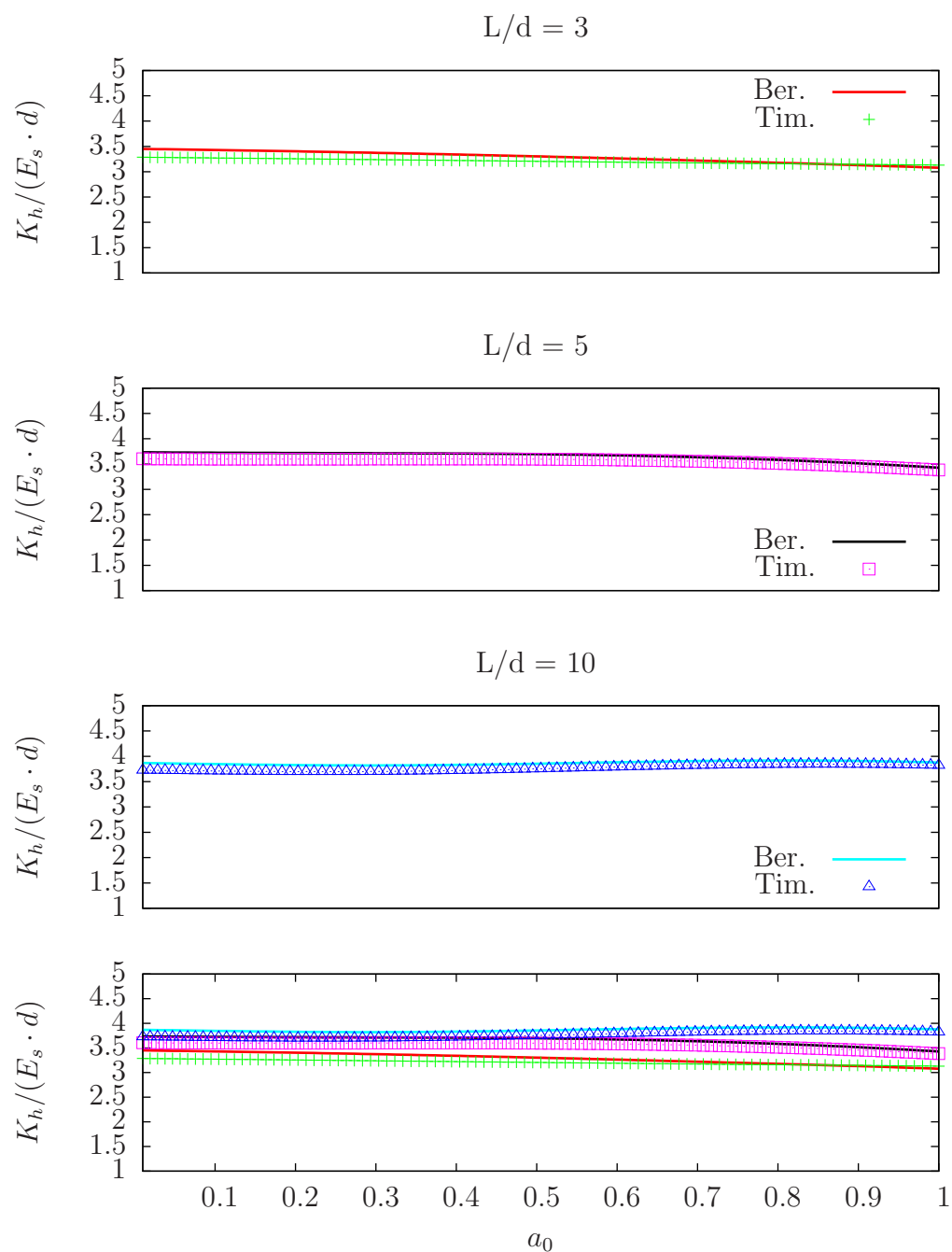
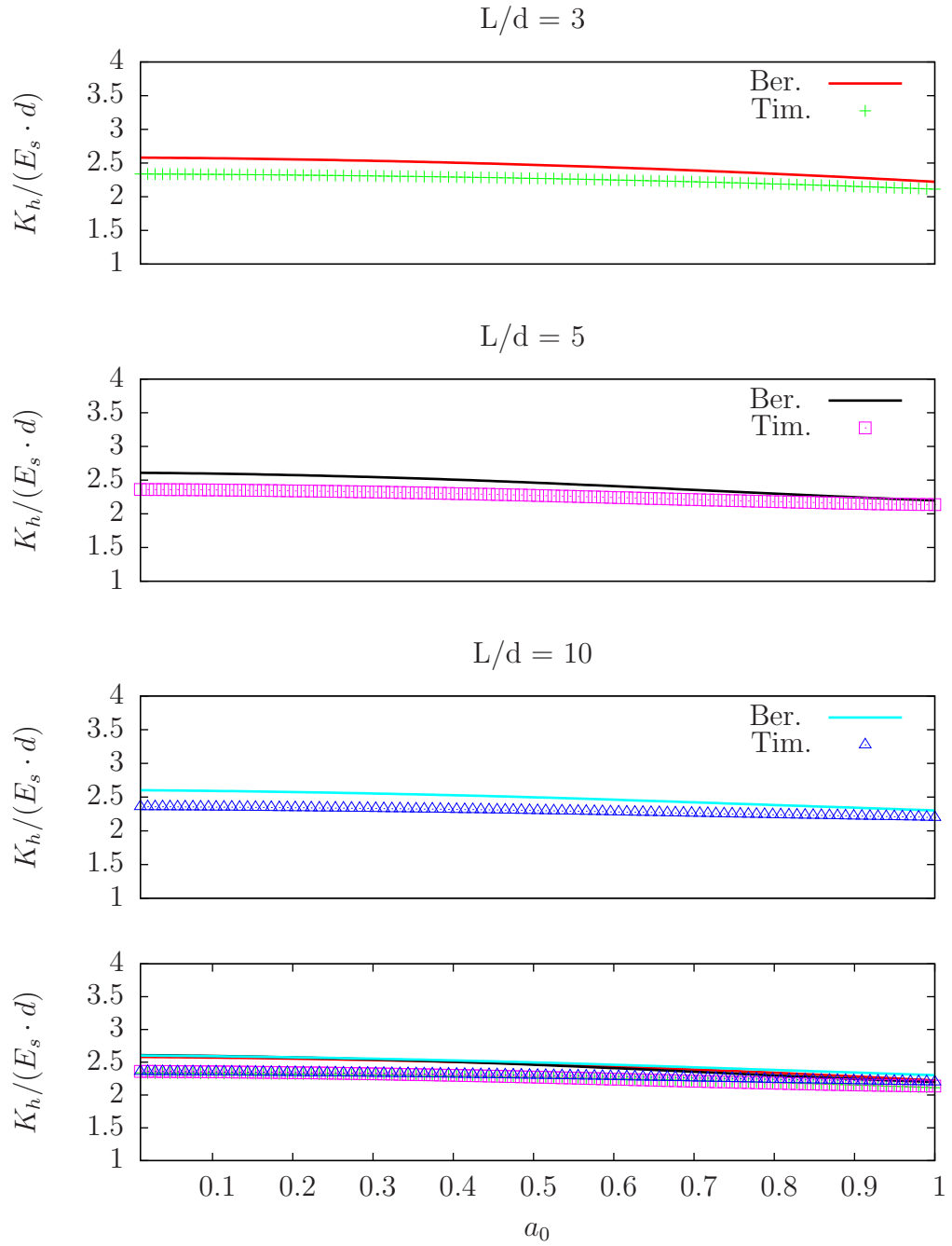
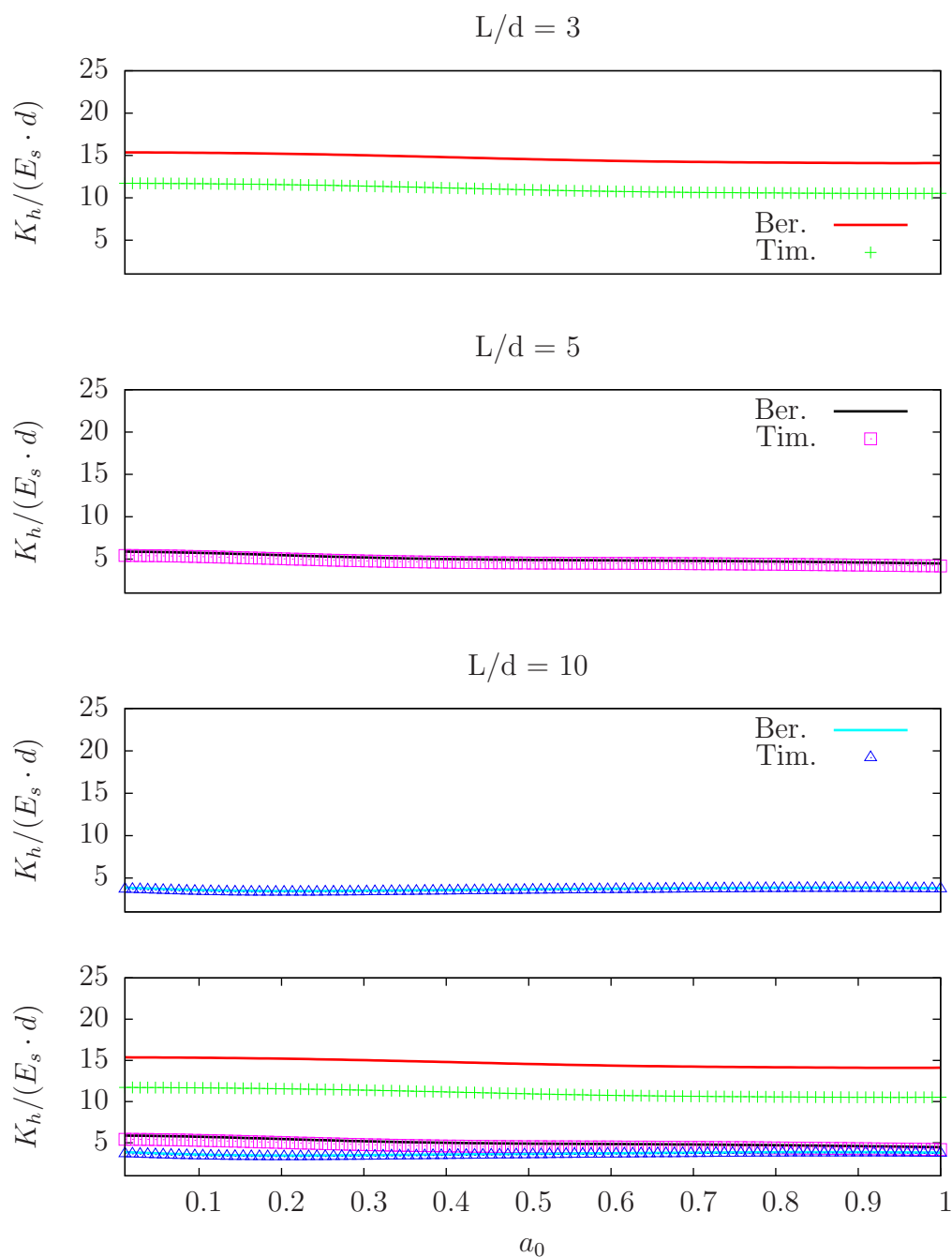


Figura 4.6: Pilote flotante, sección circular hueca, $E_p/E_s = 100$

4.1.6. Pilote flotante, hueco, $E_p/E_s = 1000$ Figura 4.7: Pilote flotante, sección circular hueca, $E_p/E_s = 1000$

4.1.7. Pilote hincado, hueco, $E_p/E_s = 100$ Figura 4.8: Pilote hincado, sección circular hueca, $E_p/E_s = 100$

4.1.8. Pilote hincado, hueco, $E_p/E_s = 1000$ Figura 4.9: Pilote hincado, sección circular hueca, $E_p/E_s = 1000$

4.2. Relación de impedancias horizontales

En esta sección se medirá la divergencia entre ambos modelos. Ésta permitirá dar a conocer, para ambos modelos, el mayor o menor grado de semejanza que presentan. Esto es importante puesto que esta disparidad de resultados justifica la necesidad de hacer uso del modelo de Timoshenko para el análisis de piezas poco esbeltas en lugar del clásico modelo de Bernoulli. Será el ratio entre las impedancias del modelo de Bernoulli y de Timoshenko el parámetro usado para que mida esta desviación. Así, cuando se supere la unidad se indica que el valor de impedancia arrojado por el modelo Bernoulli es mayor que el de Timoshenko, y consecuentemente, la rigidez de la estructura es inferior a la realidad.

Otro aspecto importante es la comparación de los pilotes enterrados con el denominado modelo simple, de la figura 4.10. Este modelo simple reproduce un sólido prismático sin estar rodeado de terreno. El fin de esta relación de modelos es cerciorarse de que para modelos con una esbeltez elevada los modelos convergen independientemente de las otras características del problema.

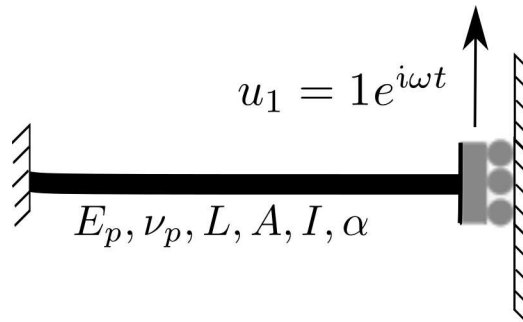


Figura 4.10: Modelo simple

4.2.1. Relación de impedancias K_h^b/K_h^t para un pilote flotante de sección circular maciza y $E_p/E_s = 100$

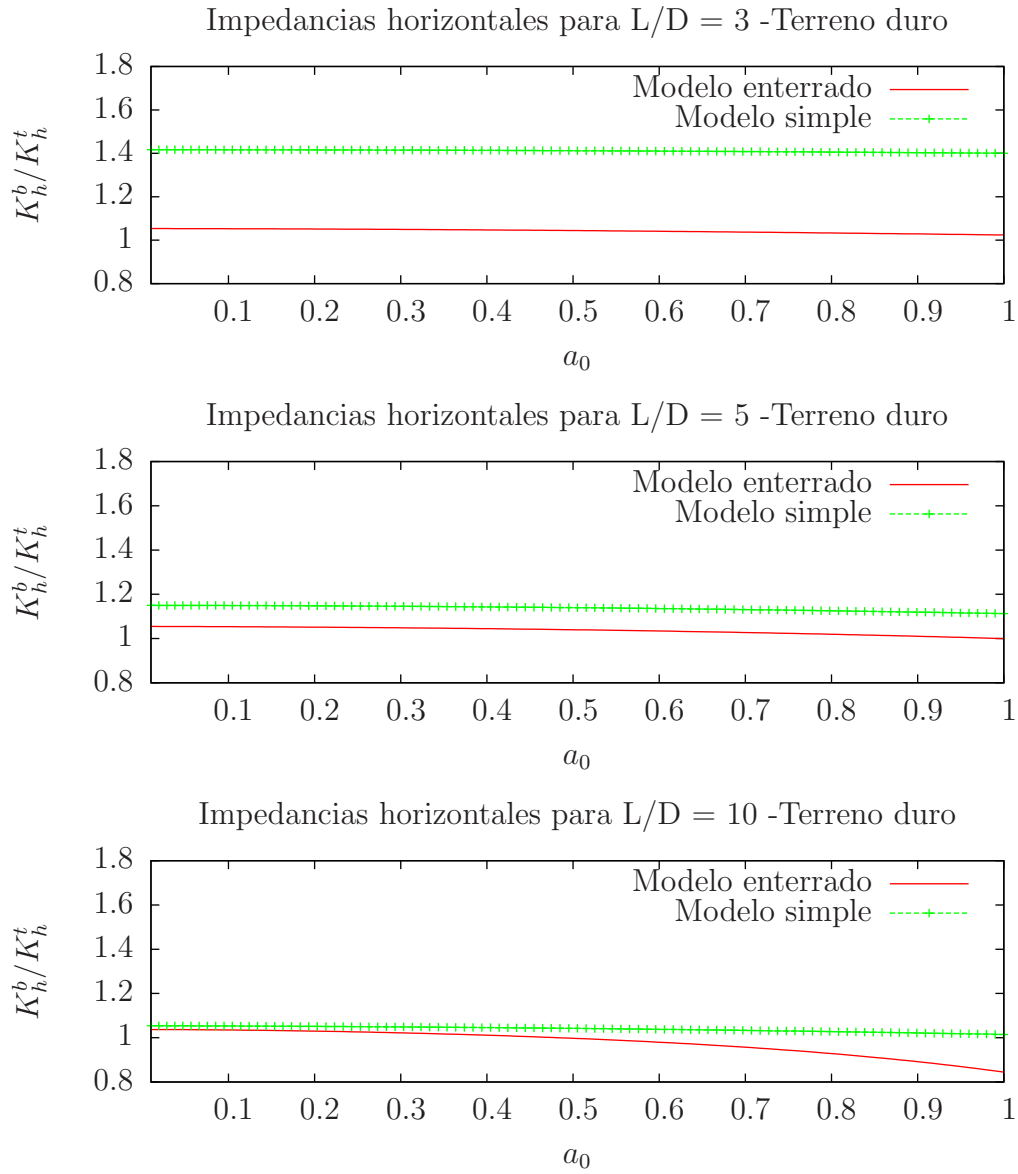


Figura 4.11: Relación de modelos para un pilote un flotante de sección circular maciza y $E_p/E_s = 100$

4.2.2. Relación de impedancias K_h^b/K_h^t para un pilote flotante de sección circular maciza y $E_p/E_s = 1000$

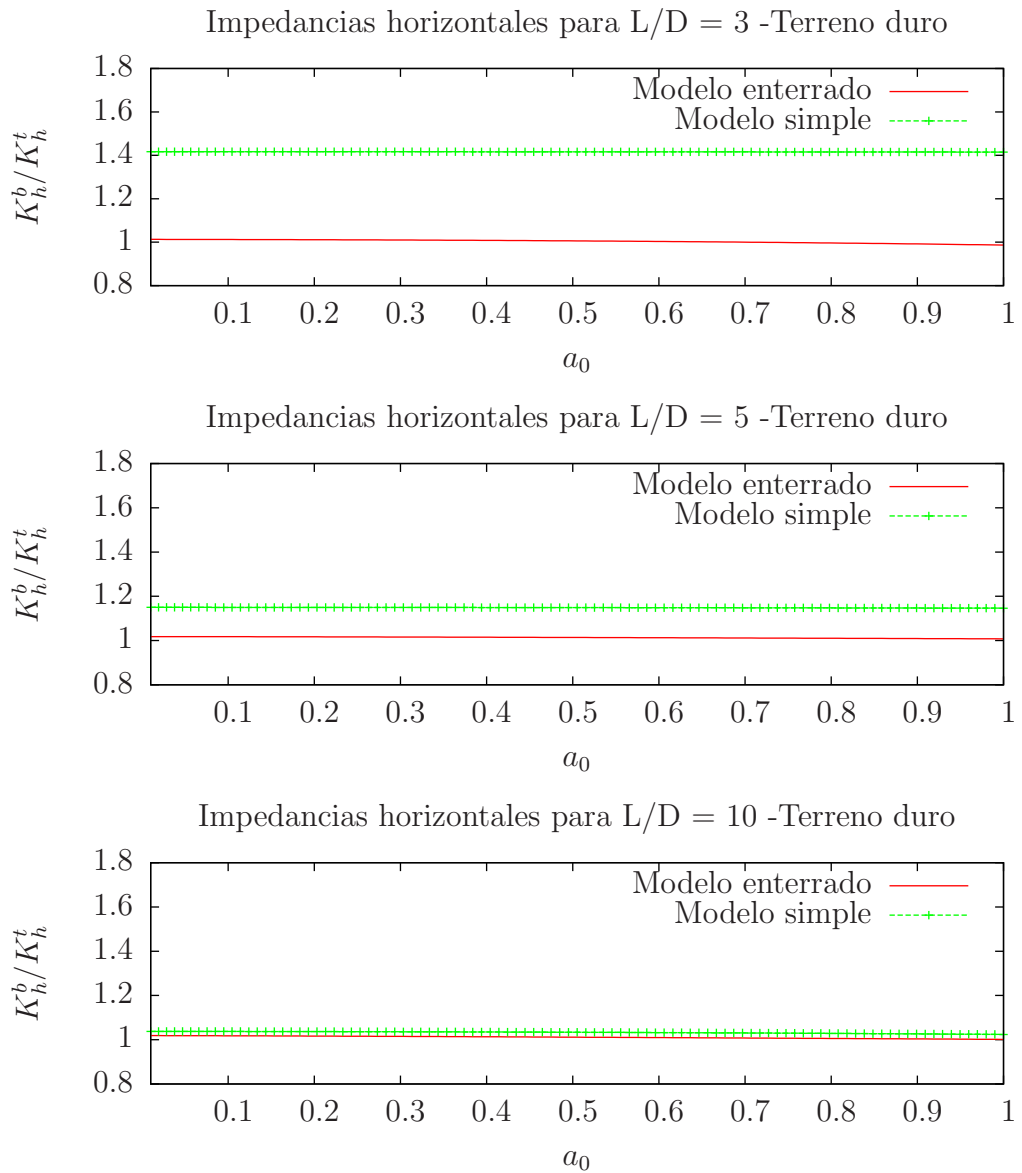


Figura 4.12: Relación de modelos para un pilote un flotante de sección circular maciza y $E_p/E_s = 1000$

4.2.3. Relación de impedancias K_h^b/K_h^t para un pilote hincado de sección circular maciza y $E_p/E_s = 100$

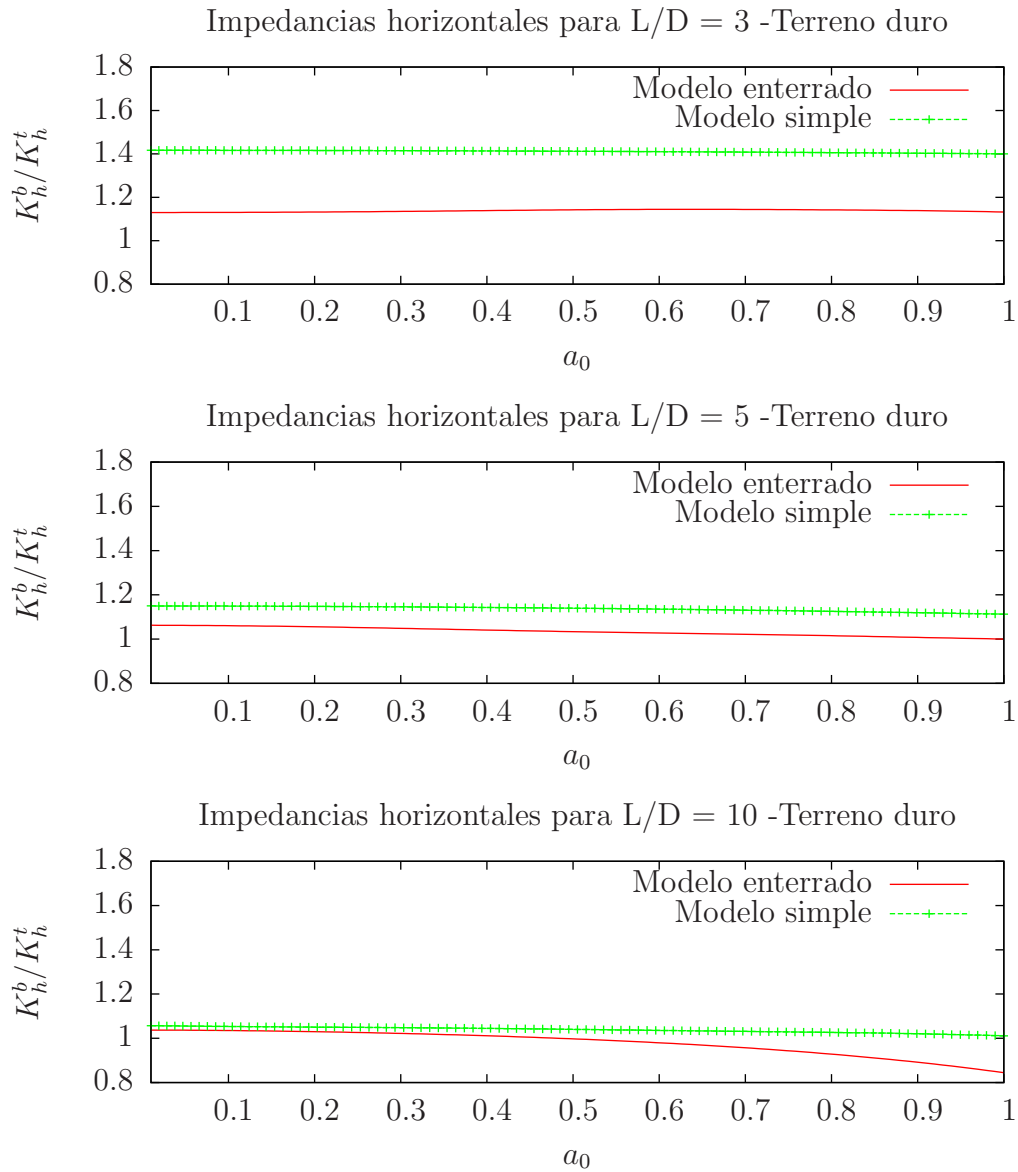


Figura 4.13: Relación de modelos para un pilote un hincado de sección circular maciza y terreno duro

4.2.4. Relación de impedancias K_h^b/K_h^t para un pilote hincado de sección circular maciza y $E_p/E_s = 1000$

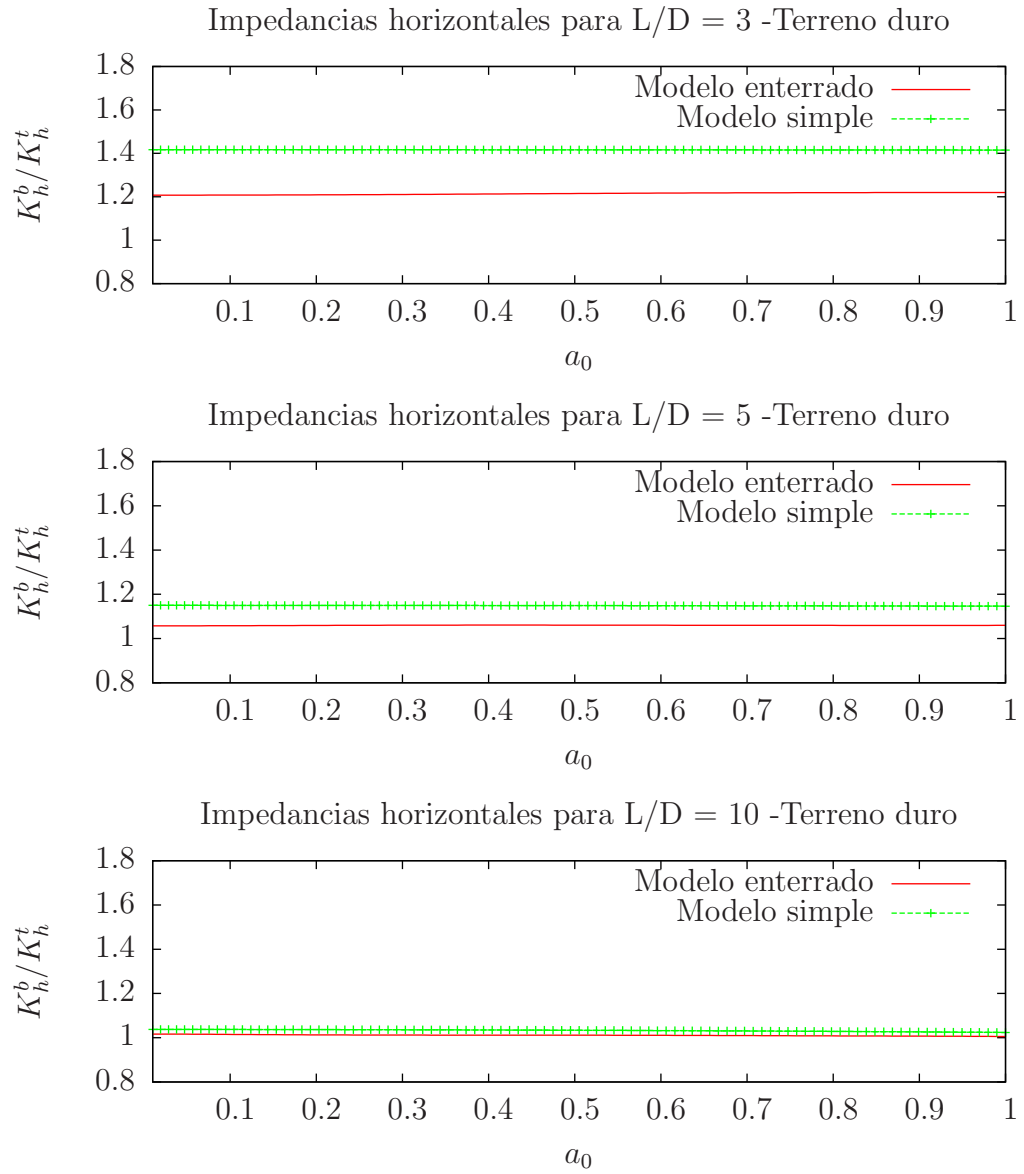


Figura 4.14: Relación de modelos para un pilote un hincado de sección circular maciza y $E_p/E_s = 1000$

4.2.5. Relación de impedancias K_h^b/K_h^t para un pilote flotante de sección circular hueca y $E_p/E_s = 100$

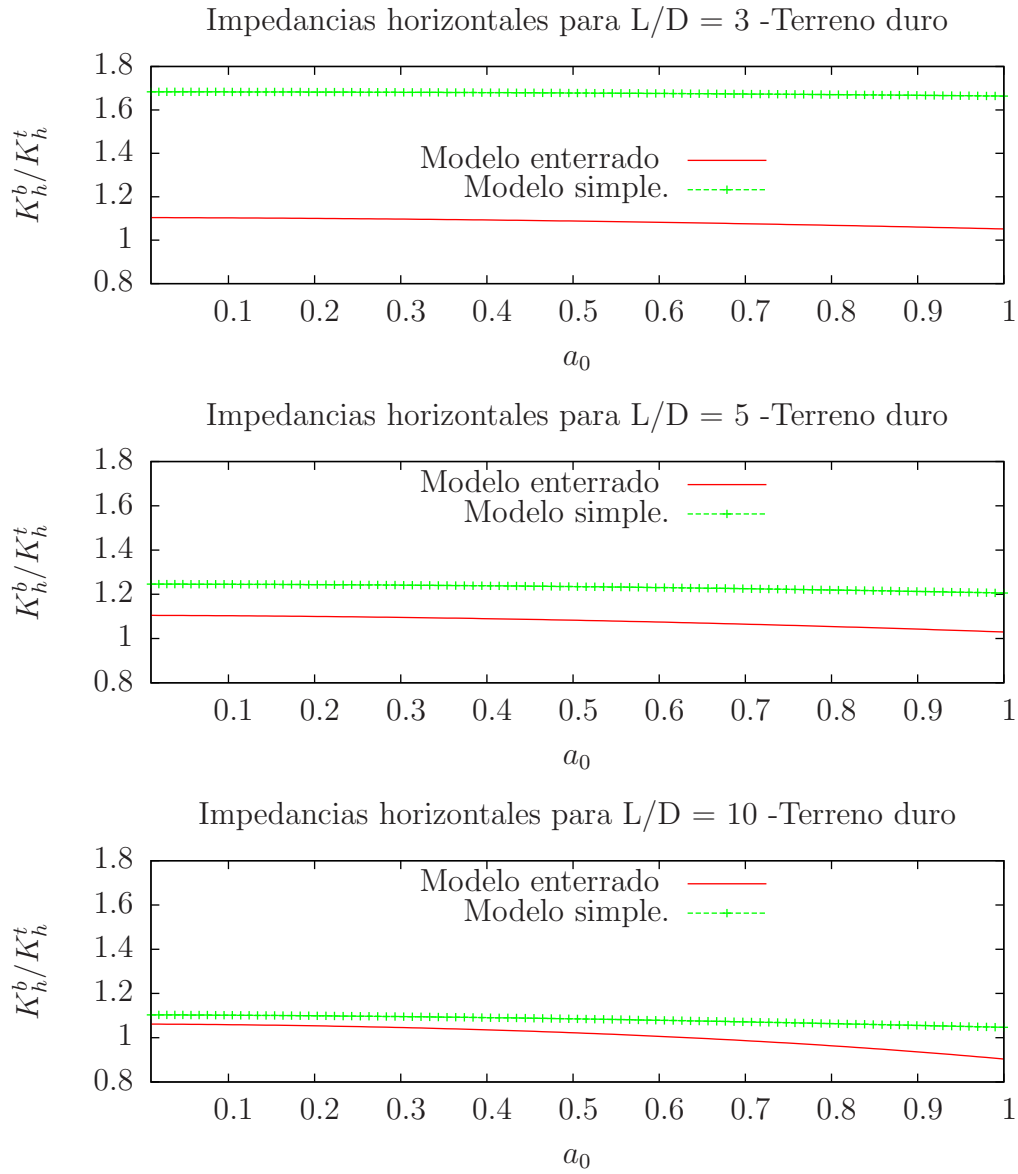


Figura 4.15: Relación de modelos para un pilote un flotante de sección circular hueca y $E_p/E_s = 100$

4.2.6. Relación de impedancias K_h^b/K_h^t para un pilote flotante de sección circular hueca y $E_p/E_s = 1000$

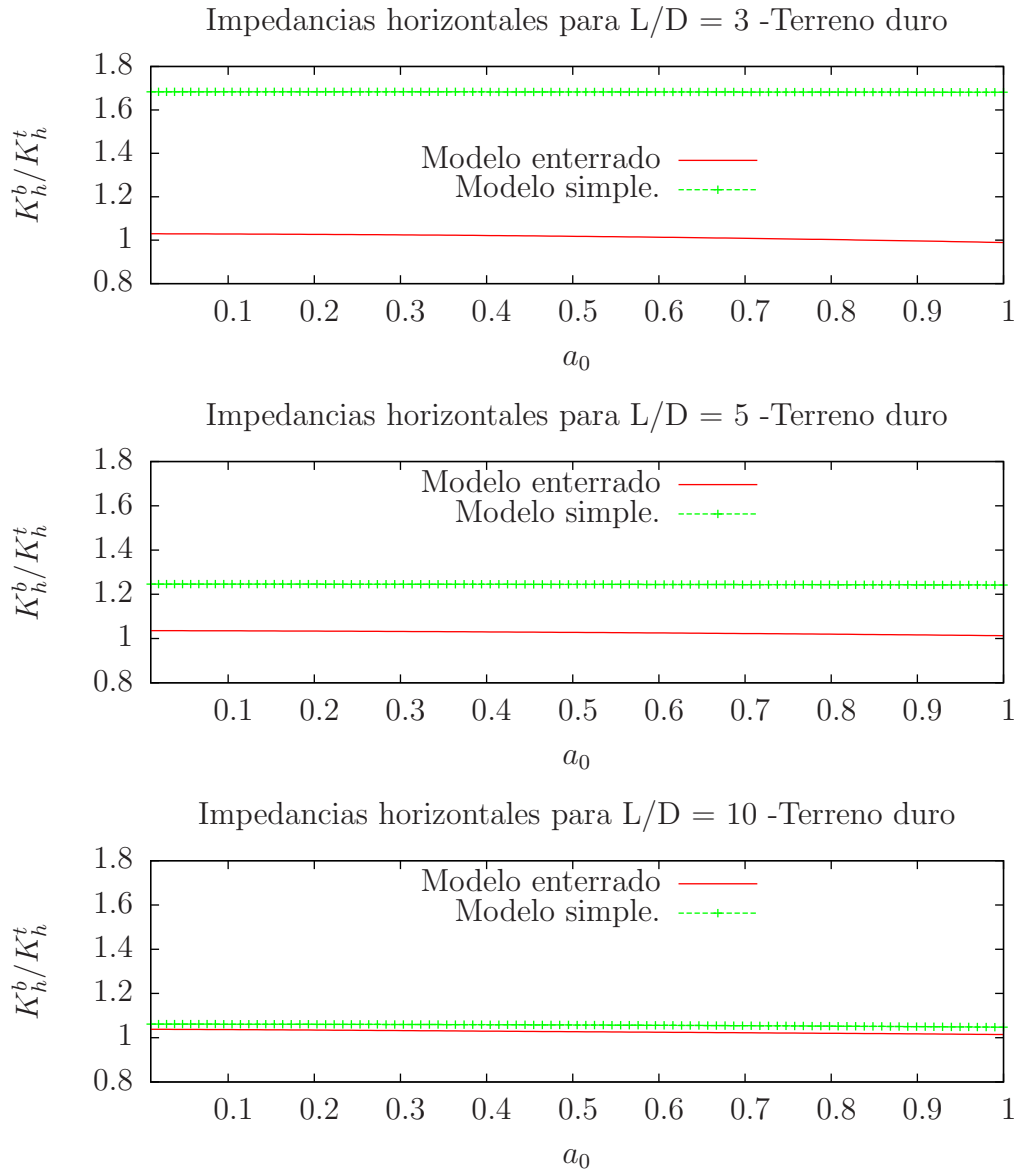


Figura 4.16: Relación de modelos para un pilote un flotante de sección circular hueca y $E_p/E_s = 1000$

4.2.7. Relación de impedancias K_h^b/K_h^t para un pilote hincado de sección circular hueca y $E_p/E_s = 100$

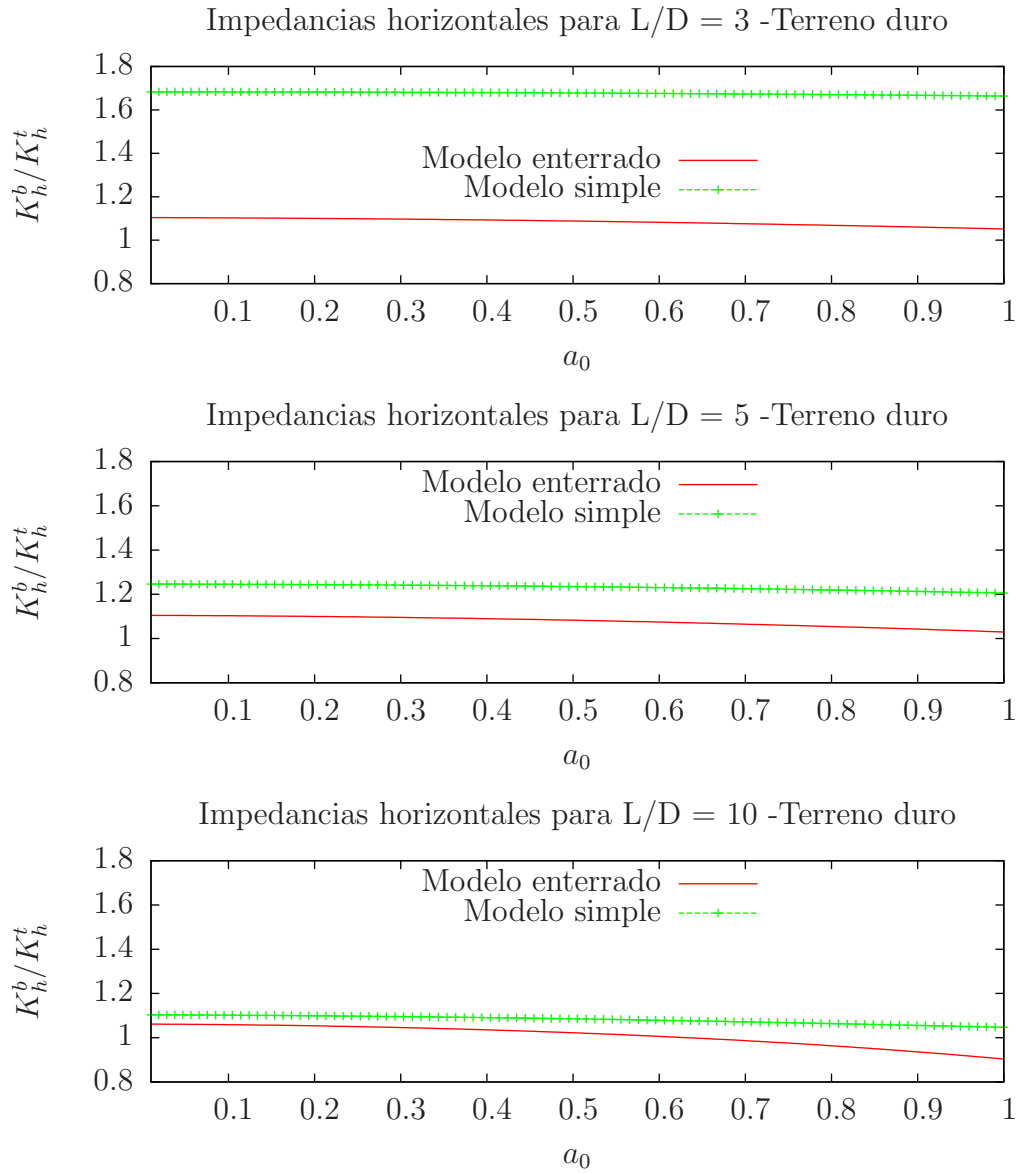


Figura 4.17: Relación de modelos para un pilote un hincado de sección circular hueca y $E_p/E_s = 100$

4.2.8. Relación de impedancias K_h^b/K_h^t para un pilote hincado de sección circular hueca y $E_p/E_s = 1000$

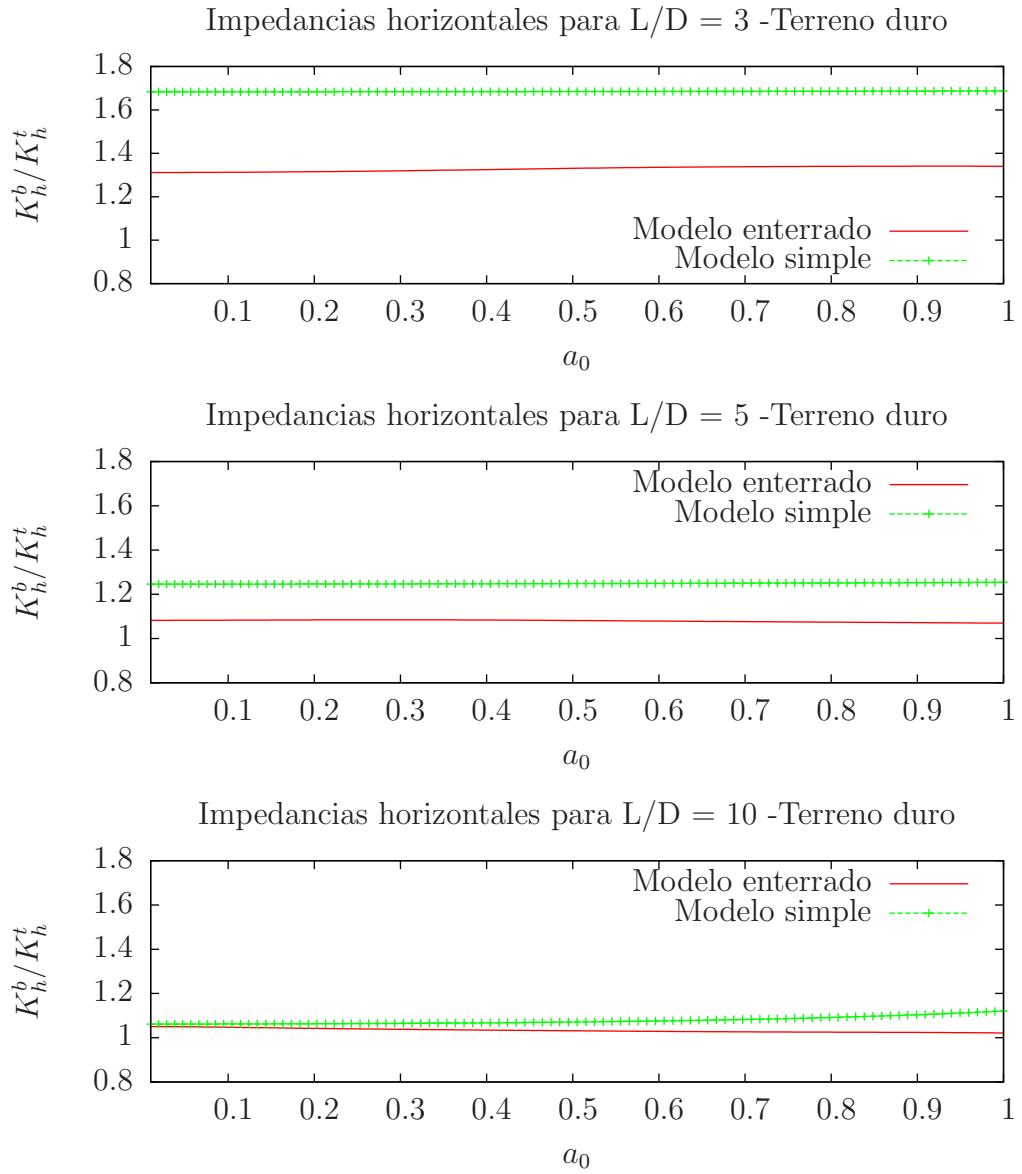


Figura 4.18: Relación de modelos para un pilote un hincado de sección circular hueca y $E_p/E_s = 1000$

4.3. Análisis de Resultados y Conclusiones

4.3.1. Comparación con un modelo contrastado

Para el análisis de resultados se comparará el modelo de tres nodos con un clásico elemento de dos nodos, como el de [1]. Se pretende evaluar la diferencia entre un elemento de dos nodos que incluya la deformación por cortante (modelo de Timoshenko) y otro que no la incluya (Modelo de Bernoulli) y así, cotejarlo con cada caso tratado. Con todo ello, se intenta observar y cuantificar aproximadamente la influencia del modelo Timoshenko.

Para esto, se tomará como referencia el primer elemento de la diagonal principal de la matriz de rigidez para el elemento de dos nodos. Ésta observación se hará sólo para régimen estático y tendrá una forma como la siguiente:

$$K_{11,t} = \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} \quad (4.1)$$

Donde:

$$\phi = \frac{12EI}{\alpha G A L^2} \quad (4.2)$$

La expresión (4.2) se puede simplificar teniendo en cuenta la relación entre G y E en (4.3) y la expresión de la esbeltez mecánica (4.4)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.3)$$

$$\lambda = \frac{L}{i_g} = L\sqrt{\frac{A}{I}} \quad (4.4)$$

Sustituyendo, (4.3) y (4.4) en (4.2) se obtiene una expresión de ϕ

$$\phi = \frac{24(1+\nu)}{\alpha\lambda^2} \quad (4.5)$$

Tal como es sabido y se ve en (4.5), cuando la esbeltez mecánica tenga un valor muy alto ϕ será prácticamente nulo. Por tanto, para un sólido esbelto la expresión (4.1), coincide prácticamente con el término de la matriz de rigidez de Bernoulli como se observa (4.6)

$$K_{11,b} = \frac{12EI}{L^3} \quad (4.6)$$

Ahora, si se divide la expresión, (4.1), perteneciente al modelo de Bernoulli entre (4.6) la perteneciente al de Timoshenko:

$$\frac{K_{11,b}}{K_{11,t}} = 1 + \phi \quad (4.7)$$

Esta comparativa se extiende a todas las relaciones longitud-diámetro que se tienen. Primeramente, se recoge los datos para la sección circular maciza. Para ello, se debe particularizar la expresión (4.4) teniendo en cuenta que para este tipo de sección $I = \frac{\pi r^4}{4}$ y $A = \pi r^2$, quedando la esbeltez mecánica como indica (4.8).

$$\lambda = \frac{L}{i_g} = L \sqrt{\frac{A}{I}} = \frac{2L}{R} = \frac{4L}{d} \quad (4.8)$$

Evidentemente, (4.5) puede ser expresada en función de (4.8). Además, teniendo que para una sección circular de alma llena, $\alpha = 0,9$ y tomando el valor del coeficiente de Poisson ($\nu = 0,25$), se puede escribir ϕ para esta sección tal como se escribe a continuación en (4.9)

$$\phi = \frac{100}{3 \lambda^2} \quad (4.9)$$

$\frac{L}{d}$	$\lambda = \frac{4L}{D}$	ϕ	$\frac{K_{11,b}}{K_{11,t}}$	$\frac{K_{11,b}}{K_{11,t}}$	%
10	40	$\frac{1}{48}$	$1 + \frac{1}{48}$	1,021	2,1 %
5	20	$\frac{1}{12}$	$1 + \frac{1}{12}$	1,083	8,3 %
3	12	$\frac{25}{108}$	$1 + \frac{25}{108}$	1,23	23 %

Tabla 4.1: Comportamiento de una sección circular maciza ante la deformación por cortante

Tras realizar la comparativa entre los términos primeros de las diagonales principales de las matrices de rigidez de Timoshenko y Bernoulli para el perfil circular de alma llena, se hará lo mismo para la sección circular hueca. Ante todo, se debe tener en cuenta que ambas secciones, tienen propiedades geométricas diferentes. Por tanto, las expresiones anteriores deberán ser expresadas en función de los radios, el interior y exterior.

Se tendrá que hallar la esbeltez mecánica expresada en (4.4) en función de los radios interior y exterior que se ven en la figura 4.19. Previamente, se debe recordar, que una sección como la de la figura 4.19 tendrá una expresión del área como (4.10) y del momento de inercia tal como (4.11)

$$A = \pi (R_e^2 - R_i^2) \quad (4.10)$$

$$I = \frac{\pi}{4} (R_e^4 - R_i^4) \quad (4.11)$$

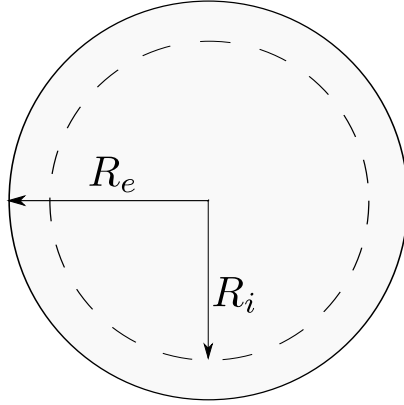


Figura 4.19: Sección circular hueca

Combinando (4.10) y (4.11) con (4.4) y simplificando, se obtiene:

$$\lambda^2 = \frac{L^2}{i_g^2} = L^2 \frac{A}{I} = L^2 \frac{\pi (R_e^2 - R_i^2)}{\frac{\pi}{4} (R_e^4 - R_i^4)} = \frac{4L^2}{(R_e^2 + R_i^2)} \quad (4.12)$$

Ahora, se introduce el término δ que relaciona ambos radios como se ve en (4.13).

$$\delta = \frac{R_i}{R_e} = \frac{d_i}{d} \quad (4.13)$$

A partir de ella se podrá expresar λ en función del diámetro (sobrentendiéndose que es el exterior) y δ .

$$\lambda^2 = \frac{L^2}{i_g^2} = \frac{4L^2}{(R_e^2 + R_i^2)} = \frac{16L^2}{4R_e^2(1 + \delta^2)} = \frac{16L^2}{d^2(1 + \delta^2)} \quad (4.14)$$

Ahora se particulariza la expresión (4.4) para el mismo coeficiente de Poisson ($\nu = 0,25$) y para el respectivo factor de cortadura del caso de secciones circulares huecas, $\alpha = 0,5$.

$$\phi = \frac{60}{\lambda^2} \quad (4.15)$$

La expresión (4.15) es válida para secciones huecas, teniendo diferentes λ para diferentes relaciones de aspecto. Así para una relación $\frac{e}{d} = 0,1$ se tiene una δ cuyo valor es:

$$\frac{e}{D} = 0,1 = \frac{R_e - R_i}{2R_e} = \frac{1 - \delta}{2} \iff \delta = 1 - 0,1 \cdot 2 = 0,8 \quad (4.16)$$

Consecuentemente el valor de λ será:

$$\lambda = \frac{16L^2}{d^2(1 + \delta^2)} = \frac{400}{41} \left(\frac{L}{d} \right)^2 \quad (4.17)$$

Por tanto, ϕ queda:

$$\phi = \frac{123}{20} \left(\frac{d}{L} \right)^2 \quad (4.18)$$

Ahora, se procede a completar la tabla pertinente para la sección circular de pared delgada ($\frac{e}{d} = 0,1$).

$\frac{L}{d}$	$\lambda^2 = \frac{400}{41} \left(\frac{L}{d}\right)^2$	λ	ϕ	$\frac{K_{11,b}}{K_{11,t}}$	$\frac{K_{11,b}}{K_{11,t}}$	%
10	$\frac{40000}{41}$	31,23	$\frac{123}{2000}$	$1 + \frac{123}{2000}$	1,062	6,2 %
5	$\frac{10000}{41}$	15,62	$\frac{123}{500}$	$1 + \frac{123}{500}$	1,246	25 %
3	$\frac{3600}{41}$	9,37	$\frac{1107}{20}$	$1 + \frac{1107}{20}$	1,55	55 %

Tabla 4.2: Comportamiento de una sección circular de pared delgada ($\frac{e}{d} = 0,1$) ante la deformación por cortante

Observando ambas tablas, se está en disposición de sacar algunas conclusiones del efecto de la esbeltez. Se puede observar, que factores como la longitud y el área condicionan la esbeltez. Este último es bastante influyente puesto que la tipología de sección del sólido estudiado afectará, obviamente, al valor del área, del momento de inercia y también del factor de cortadura.

La longitud es uno de los factores más importantes, puesto que si es suficientemente mayor que las otras dimensiones el efecto del cortante será completamente despreciable. Normalmente valores de λ superiores a veinte, o lo que los es mismo para pilotes circulares macizos cuya longitud sea igual o superior a a cinco veces su diámetro, se considera que es pilote esbelto. Los valores de su diferencia son menores a un diez por ciento.

Otro factor importante es el tipo de sección, puesto que determinará el radio de giro y para aquellas secciones cuyo radio de giro sea grande, es decir que tenga un gran momento de inercia para una sección pequeña, serán menos esbeltos aún. Por ejemplo, los perfiles de pared delgada tienen un radio de giro mayor que los macizos y obviamente, por tanto, la diferencia entre ambos será más notoria si cabe.

Esta comparación permite conocer tal como demuestran las tablas que las impedancias del modelo Bernoulli, en estática, son mayores que las del modelo Timoshenko, aunque, esta relación entre ambos modelos se puede alterar ligeramente con la frecuencia. Sin embargo, de este hecho desprende que el modelo de Bernoulli establece que la rigidez de la estructura es mayor

que la real al despreciar el efecto del esfuerzo cortante, y claramente, se aleja más de la realidad cuanto menos esbelto es el sólido.

Por contra, se debe tener en cuenta que en el análisis numérico con la presencia de terreno los resultados serán influenciados por el tipo de terreno que rodee a la estructura enterrada y las condiciones en los extremos de ésta. La idiosincrasia del problema de la estructura enterrada hará que tenga una respuesta cuantitativamente distinta cuando se varíe la esbeltez.

4.3.2. Comparación de las diferentes longitudes

Primeramente, de los cuatro factores a analizar (longitud, sección, condiciones en los extremos y tipo de terreno) será la longitud el primero puesto que es de los más influyentes.

Para ello se observarán las gráficas de las figuras 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9 donde dada una de ellas comparte las mismas condiciones en los extremos, el tipo de terreno y la tipología de la sección. Además, la observación será completada analizando las relaciones entre impedancias contenidas en las gráficas 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18

Pilote flotante, sección circular maciza, $E_p/E_s = 100$

Si se observa la gráfica 4.2, se ve como prácticamente no existe diferencia para las diferentes longitudes y si se observan las gráficas conjuntas están prácticamente coinciden. Todas las gráficas realizadas prácticamente coinciden, y esto se debe a que la longitud del sólido estudiado es mayor que la longitud activa del pilote, es decir, que la longitud del elemento tipo viga es lo suficientemente grande para que una porción de él sea insensible a la perturbación, concretamente la porción inferior. Si se observa 4.11, se contempla como las gráficas del problema enterrado continúan siendo muy parecidas y evidentemente cada vez se parecen más al modelo simple. Observando estas gráficas, se arroja que todos los valores están próximos a la unidad, indicando que ambos modelos reproducen el comportamiento del pilote enterrado fehacientemente.

Pilote flotante, sección circular maciza, $E_p/E_s = 1000$

Observando la gráfica 4.3, se ve como prácticamente no existe diferencia entre el modelo Bernoulli y Timoshenko para las distintas longitudes. Si se estudian las gráficas conjuntas están prácticamente coinciden, salvo $L/d = 3$, que es ligeramente diferente. Este gran parecido es la consecuencia de que se ha sobrepasado la longitud activa del pilote para las esbelteces mayores,

mientras para el caso de $L/d = 3$, difiere un poco porque en este caso la longitud activa del pilote es algo mayor que la real. Atendiendo a 4.12, se ve como todas las gráficas del problema enterrado continúan siendo muy parecidas y evidentemente, cada vez más se parecen al modelo simple, tal como el caso anterior. Si se observan las gráficas de 4.12, todos los valores están próximos a la unidad, tanto como en el caso anterior, indicando nuevamente que ambos modelos reproducen el comportamiento del pilote enterrado de manera veraz.

Pilote hincado, sección circular maciza, $E_p/E_s = 100$

La figura 4.4 presenta para todas sus gráficas un menor grado de similitud. En la representación conjunta de todas las gráficas se observa como las gráficas de los pilotes cuanto menos esbeltos son presentan mayor divergencia entre ambos modelos. Además en este caso, el pilote al tener su punta hincada en el suelo, la diferencia entre el modelo Bernoulli y Timoshenko es mayor como se recoge en la figura 4.13, reflejándose en que los valores del modelo enterrado son superiores a la unidad, siendo mayor cuanto menor es la esbeltez.

Pilote hincado, sección circular maciza, $E_p/E_s = 1000$

Si se analiza la gráfica 4.5 para la relación $L/d = 3$ se aprecia diferencia entre el modelo Bernoulli y Timoshenko, en cambio, para las otras esbelteces las gráficas son muy parecidas. Esto indica que para pilotes con $L/d = 5$ y $L/d = 10$, la parte inferior del pilote está siendo poco afectada por la perturbación, de ahí su similitud. Observando, 4.14 las representaciones de ambos problemas se aproximan entre sí y además de aproximarse a la unidad al aumentar la esbeltez. Esta evolución indica que el efecto del cortante tiende a ser despreciable con el aumento de la esbeltez.

Pilote flotante, sección circular hueca, $E_p/E_s = 100$

Viendo las gráficas de la figura 4.6 se extrae que la separación entre el modelo Bernoulli y Timoshenko es mayor. Esa separación se mantiene para todas las longitudes estudiadas. Esto, como siempre, se debe a que la longitud de todos los pilotes es mayor que la activa y por tanto, presentan una respuesta casi idéntica. Observando 4.15 se arroja que los valores de las gráficas están alejados de la unidad, bastante más que otro pilote similar de área maciza. Esto era de esperar puesto que los pilotes huecos poseen una esbeltez menor que los macizos.

Pilote flotante, sección circular hueca, $E_p/E_s = 1000$

En 4.7 se contempla que ambos modelos están muy cerca, tanto es así que en 4.16 cada gráfica de los diferentes pilotes enterrados están bastante próximos a la unidad y existe gran parecido entre todos ellos.

Pilote hincado, sección circular hueca, $E_p/E_s = 100$

Las gráficas de 4.8 son casi semejantes. En la representación gráfica conjunta, los modelos de Bernoulli están alineados independientemente de su longitud y por su parte, los de Timoshenko también lo están entre sí. Esto es corroborado por 4.17, donde las gráficas son similares, lo cual indica que la longitud del pilote sobrepasa la activa, por ello hay divergencia entre ambos modelos, pero ésta se conserva en lugar de atenuarse como debería con el aumento de la esbeltez.

Pilote hincado, sección circular hueca, $E_p/E_s = 1000$

Contemplando 4.9 se observa la progresiva convergencia entre el modelo Bernoulli y Timoshenko a medida que la longitud del pilote aumenta. En la gráfica conjunta se ve que para cada relación L/d tiende a juntarse más cuanto más esbelto es el sólido y claramente diferenciándose de los otros. Atendiendo a 4.18, se ve nítidamente que para $L/d = 3$ la diferencia entre el modelo Bernoulli y Timoshenko es muy notoria, mientras en $L/d = 5$ y en $L/d = 10$ el valor es netamente inferior.

4.3.3. Comparación de las diferentes secciones

De los cuatro factores a analizar (longitud, sección, condiciones en los extremos y tipo de tipo de terreno) el segundo será la tipología de la sección, puesto que esta característica afecta directamente a la esbeltez. Ahora, se tendrán cuatro categorías distintas atendiendo al número de tipos de suelo y las condiciones en los extremos.

Se compararán las figuras 4.2 con 4.6, 4.3 con 4.7, 4.4 con 4.8, y 4.9 con 4.5, donde cada una de las gráficas será comparada con su homóloga de la misma longitud. Asimismo, se usarán la gráficas contenidas en 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18 que relacionan las impedancia para terminar de sacar conclusiones.

Pilote flotante y $E_p/E_s = 100$

Para observar las diferencias se compararán de una en una todas las longitudes estudiadas, para ello, se contrastarán cada gráfica en las figura 4.2 con su homóloga en 4.6. En ellas se aprecia una divergencia mayor en las representaciones gráficas relacionadas con el perfil circular hueco, algo que es normal puesto que los perfiles de pared delgada poseen una esbeltez menor porque tienen mayor radio de giro. Observando, 4.11 y 4.15 también se puede verificar esto.

Pilote flotante y $E_p/E_s = 1000$

En este caso será preciso acudir a 4.3 y 4.7 donde la separación es ligeramente menor en la sección maciza como cabía esperar. Si se ve 4.12 y 4.15 se arroja la diferencia relativa de Los modelos Bernoulli y Timoshenko es pequeña puesto que todas las gráficas están próximas a la unidad.

Pilote hincado y $E_p/E_s = 100$

En este caso la influencia de la sección es parecida en términos absolutos como indican 4.4 y 4.8. Para la relación $L/d = 3$ la diferencia es más notoria, mientras que para $L/d = 5$ y $L/d = 10$ en el perfil macizo ambos modelos parecen casi converger completamente en el perfil de pared delgada se nota más la separación, puesto que también es menos esbelto. Atendido a la diferencia relativa de impedancias recogidas en 4.13 y 4.17, se puede ver que la diferencia entre modelos es mayor que la unidad para esbelteces pequeñas mientras que para mayores se acerca claramente a ésta.

Pilote hincado y $E_p/E_s = 1000$

En el caso de la sección llena, 4.5, se ve como la divergencia para $L/d = 3$, es apreciable, mientras tanto que para $L/d = 5$ y $L/d = 10$, la convergencia es casi total, en cambio, en secciones de pared delgada esa convergencia es más progresiva tal como se indica en 4.9. Las secciones huecas presentan una convergencia menos pronunciada puesto que tendrán un radio de giro mayor y por tanto serán menos esbeltos que las secciones macizas. Si se analiza la relación entre impedancias para el modelo enterrado haciendo uso de 4.14 y 4.18, para esbelteces altas, $L/d = 10$, la línea es casi horizontal y de valor la unidad, para esbelteces menores, el valor de esta relación aumenta. Observando 4.14 y 4.18 se desprende como para $L/d = 3$ es donde se muestra la mayor divergencia entre modelos, siendo mayor para la sección hueca.

4.3.4. Comparación de las condiciones en los extremos

Las condiciones en los extremos junto a las características geométricas del pilotes, es decir, longitud y tipología de sección además de la naturaleza del terreno, permitirán determinar la respuesta de la estructura. Estas condiciones en la punta de pilote son un factor importante a la hora de evaluar la impedancia y el comportamiento frente a cargas dinámicas, porque un pilote flotante no presenta la misma resistencia a ser perturbado que presenta uno cuya punta esté hincada en el terreno.

Para este estudio, se contrastarán gráficas de pilotes flotantes con otras de pilotes hincados. Así, se poseerán cuatro casos, dos correspondiente a los tipos de terreno habidos y la otra categoría será acorde a la morfología de la sección. Las figuras serán emparejadas de la siguiente forma, donde la 4.2 será contrastada con 4.4, la 4.3 con la 4.5, la 4.6 con 4.8 y la 4.7 con la 4.9

Además, si se requiere analizar la diferencia relativa entre ambos modelos o se quiere hacer alguna comparación con el modelo simple de pilote, se puede acudir a las figuras 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18

Pilote de sección circular maciza y $E_p/E_s = 100$

Comparando las gráficas del pilote flotante, 4.2, con las del hincado, 4.4, se observa que para el pilote flotante las impedancias, a parte de ser menores, están más juntas, lo cual indica que en este caso, los pilotes flotantes presentan una menor rigidez. Evidentemente y como era previsible se requiere un esfuerzo mayor para provocar el mismo desplazamiento en un pilote hincado que en uno flotante. También, la relación entre impedancias Bernoulli y Timoshenko para ambos problemas demuestra que en pilotes hincados la diferencia entre modelos se acentúa como se refleja en 4.11 y 4.13

Pilote de sección circular maciza y $E_p/E_s = 1000$

Observando las gráficas para pilotes flotantes e hincados en 4.3 y 4.5 respectivamente, de ellas se arroja que los pilotes hincados presentan impedancias mayores, incluso para $L/d = 3$ los modelos Bernoulli y Timoshenko están más ampliamente separados. Ahora, haciendo uso de las gráficas 4.12 y 4.14 se puede comprobar que las diferencia entre pilotes hincados son mayores que uno y aún mayores que sus homólogos para pilotes flotantes, con lo que se determina que los pilotes hincados son más rígidos y más sensibles al efecto de la deformación por cortante.

Pilote de sección circular hueca y $E_p/E_s = 100$

Para todas las longitudes, las figuras correspondientes a las gráficas de los pilotes flotantes e hincados, 4.6 y 4.8 son casi coincidentes. Además la representación de las relaciones 4.15 y 4.17 son, también, bastante similares. Esto se debe a que se ha sobrepasado la longitud activa y por tanto las condiciones en la punta muy poco influyentes.

Pilote de sección circular hueca y $E_p/E_s = 1000$

Viendo 4.7 y 4.9 se puede apreciar que la divergencia es más notoria en pilotes hincados que en los flotantes. No sólo en términos absolutos, que también, sino como se contempla en 4.16 y 4.18 donde la diferencia es aún mayor. Este fenómeno entra dentro de lo previsible puesto que mover un pilote hincado requiere de mayor esfuerzo que uno flotante, asimismo, en estos pilotes hincados se hace más notoria la diferencia de impedancias entre modelos de cálculo.

4.3.5. Comparación de los tipos de terreno

Finalmente, se estudiará la tipología de terreno, tras estudiar características tales como longitud, tipología de sección y condiciones en los extremos. El terreno que la envuelve es una parte importante a la hora de determinar la interacción suelo-estructura. Para conocer su influencia, se han decidido estudiar dos tipos de terreno. El primero es uno cuyo E es una centésima parte de la que posee el pilote, es decir $E_p/E_s = 100$, mientras, el otro tipo de terreno es tan sólo una milésima parte, $E_p/E_s = 1000$.

Para estudiar la influencia del terreno se comparará 4.2 con 4.3, la 4.4 con la 4.5, la 4.6 con 4.7 y la 4.8 con la 4.9. Los datos aportados por estas figuras serán complementados por las gráficas recogidas en 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18. De esta forma, se podrán analizar las siguientes cuatro categorías.

Pilote flotante de sección circular maciza

En el terreno más duro, $E_p/E_s = 100$, cuyas gráficas se albergan en 4.6 donde se refleja que la separación entre ambos modelos de cálculo para las gráficas de impedancias es mayor con respecto al terreno blando, $E_p/E_s = 1000$, visto en 4.7. No obstante, la diferencia relativa de impedancias, vista en 4.15 y 4.16, es también mayor para el caso del terreno más duro. Por tanto, se concluye que el pilote enterrado en terreno duro ofrece más resistencia a ser movido y además, la influencia de la esbeltez es mayor. Además, cabe

reseñar que la separación se mantiene pese a aumentar la esbeltez, lo cual indica que se ha superado la longitud activa del pilote lo cual muestra que para este tipo de terrenos se mantendrá la respuesta aunque se incremente la longitud del pilote.

Pilote hincado de sección circular maciza

Si se compara para este caso, el terreno cuyo $E_p/E_s = 100$, 4.8, con el terreno que posee $E_p/E_s = 1000$, 4.9, se contempla que las impedancias son menores para el terreno duro. Analizando las gráficas de relación de impedancia de las figuras 4.17 y 4.18, se observa como los valores relativos son mayores para el terreno blando.

Pilote flotante de sección circular hueca

En este caso como refleja 4.2, para terreno $E_p/E_s = 100$ las impedancias de Bernoulli y Timoshenko son menores, y ambos modelos presentan mayor divergencia que en el terreno $E_p/E_s = 1000$, 4.3. También lo corroboran las gráficas que relacionan las impedancias de ambos modelos, 4.11 y 4.12. Además la influencia de la esbeltez mecánica se nota más en este caso, puesto que progresiva y independientemente del tipo de terreno tratado la convergencia se produce con el aumento de la ésta.

Pilote hincado de sección circular hueca

Ahora se comparan 4.4 y 4.5, las gráficas para el terreno $E_p/E_s = 100$ y $E_p/E_s = 1000$ respectivamente, y se observa que las impedancias para el terreno $E_p/E_s = 1000$, para todas las longitudes estudiadas, son mayores, y también su separación es mayor. Esta divergencia es bastante notoria como se indica en las gráficas de relación de impedancias 4.13 y 4.14, llegando a superar el veinte por ciento.

Capítulo 5

Conclusiones y Líneas Futuras

5.1. Resumen

El objetivo de este Proyecto Fin de Carrera ha sido el estudio de sólidos prismáticos con elementos tipo viga Timoshenko que contemplasen la influencia de la deformación por esfuerzo cortante. Asimismo, el otro gran objetivo era hacer uso de estos elementos en la resolución de problemas de interacción suelo-estructura.

Inicialmente, se debía lograr implementar un software que fuese capaz de incluir el efecto de la deformación por cortante y con él resolver problemas de estructuras enterradas, como por ejemplos cimentaciones pilotadas. Para ello, se partió de un software desarrollado por La División de Mecánica de los Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario SIANI que era capaz de estudiar estructuras enterradas esbeltas y permitía el cálculo de respuestas dinámicas de cimentaciones pilotadas. Sin embargo, en el caso de sólidos prismáticos poco esbeltos el modelo de cálculo era impreciso, puesto que el modelo de Bernoulli es sólo apropiado para sólidos esbeltos. Por tanto, la razón de implementar subrutinas nuevas en Fortran 90, que permitiesen modelar cimentaciones sensibles a la deformación por cortante, era tener un software más completo, que permitiese calcular estructuras de cualquier rango de esbeltez de forma fiable. Además, ese efecto de esta mencionada deformación por cortante, se debe integrar en el software ya existente, de forma que quede plenamente disponible para ser usado.

El primer paso era plantear la ecuación diferencial que gobernase el problema de la viga Timoshenko y que incluyese, por tanto, el efecto de la deformación por cortante, siendo esa ecuación la 2.13. Posteriormente se hallará la solución para esa ecuación, que normalmente carece de solución analítica, por ello, fue necesario acudir a soluciones numéricas que condujeron

a una serie de matrices de masa y rigidez específicas para el elemento de tres nodos (fig. 2.4). A continuación se ensamblan estas matrices dando lugar a un sistema de ecuaciones que habría que resolver. Finalmente, una vez en disposición de hallar la solución del problema, se enfrenta con un ejemplo sencillo con solución analítica para constatar la rigurosidad de la respuesta obtenida.

En segundo lugar, se modeló el comportamiento del terreno y con ello, la interacción suelo-estructura, para ello, se procedió a usar el método de los elementos de contorno. Este método es especialmente apropiado para semi-espacios infinitos como es el terreno que envuelve a los pilotes. Una vez modelado el comportamiento del terreno quedaba vincularlo al de la estructura modelada con elementos finitos, una vez acoplado, se está en disposición de resolver el problema.

El tercer paso consistió en aplicar a diferentes problemas el software implementado. Este software permite modelar pilotes enterrados en diferentes condiciones tales como: el tipo de terreno que lo rodea, las condiciones en los extremos del pilote y, sobretodo, la longitud y tipología de la sección, que condicionan la esbeltez mecánica. Definidas las propiedades de cada problema se pueden obtener las impedancias y plasmar gráficamente la divergencia que presentan ambos modelos.

5.2. Conclusiones

A la luz de los resultados se puede extraer que la formulación con elementos tipo viga Timoshenko reproduce de manera más fidedigna, un comportamiento que sucede en la realidad para vigas poco esbeltas. Además, se ha llevado a la resolución práctica de diferentes realidades estructurales, con lo cual queda completamente operativo para la aplicación en problemas de diferente índole, en los que se precise conocer un comportamiento de una estructura bajo el efecto de la deformación por esfuerzo cortante.

La longitud es el factor más influyente, tal como se ha visto en este documento y condiciona fuertemente la esbeltez del sólido. Para valores $L/d \geq 5$ ambos modelos convergen independientemente del resto de propiedades, mientras, que para piezas menos esbeltas la divergencia entre los modelos es más acentuada, llegando a superar el veinte por ciento de diferencia.

El área, y su disposición geométrica, es otro factor importante puesto que el tipo de la misma determina la expresión del radio de giro. Ese radio de giro junto a la longitud determinan la esbeltez mecánica de la pieza estudiada. Las piezas con mayor radio de giro son menos esbeltas y su comportamiento,

usando el modelo Bernoulli, se aleja más de la realidad, esto es especialmente notorio en piezas que son adecuadas para resistir esfuerzos de flexión, puesto que poseen un gran momento de inercia en relación a su área, como por ejemplo los perfiles de pared delgada o los de doble T.

Las condiciones en la punta del pilote tienen gran influencia, puesto que el pilote con la punta hincada en el terreno ofrece siempre una mayor oposición al desplazamiento apareciendo esfuerzos mayores en la estructura. Además, la divergencia entre ambos modelos se acentúa en pilotes hincados porque resisten debido a la acción de la punta y el fuste, mientras que los flotantes sólo lo hacen por acción de este último.

Finalmente, y no por ello menos importante, se debe valorar la influencia del terreno. El terreno que rodea al pilote evita que los desplazamientos de los puntos del mismo sean tan elevados como para un sólido libre. Asimismo, cuanto más duro sea el terreno este ejercerá mayores esfuerzos sobre la estructura, y a ésta le costará más deformarse. Otro factor muy importante es la longitud activa que es una longitud límite que cuando se sobrepasa, los puntos del pilote más profundos permanecen insensibles a la perturbación. Esta longitud activa es menor cuanto más consistente es el terreno.

Para concluir, se ha procedido a crear unos diagramas que permiten, de manera simple, reflejar la divergencia presentada entre ambos modelos.

5.2.1. Relación de impedancias para $L/d = 3$

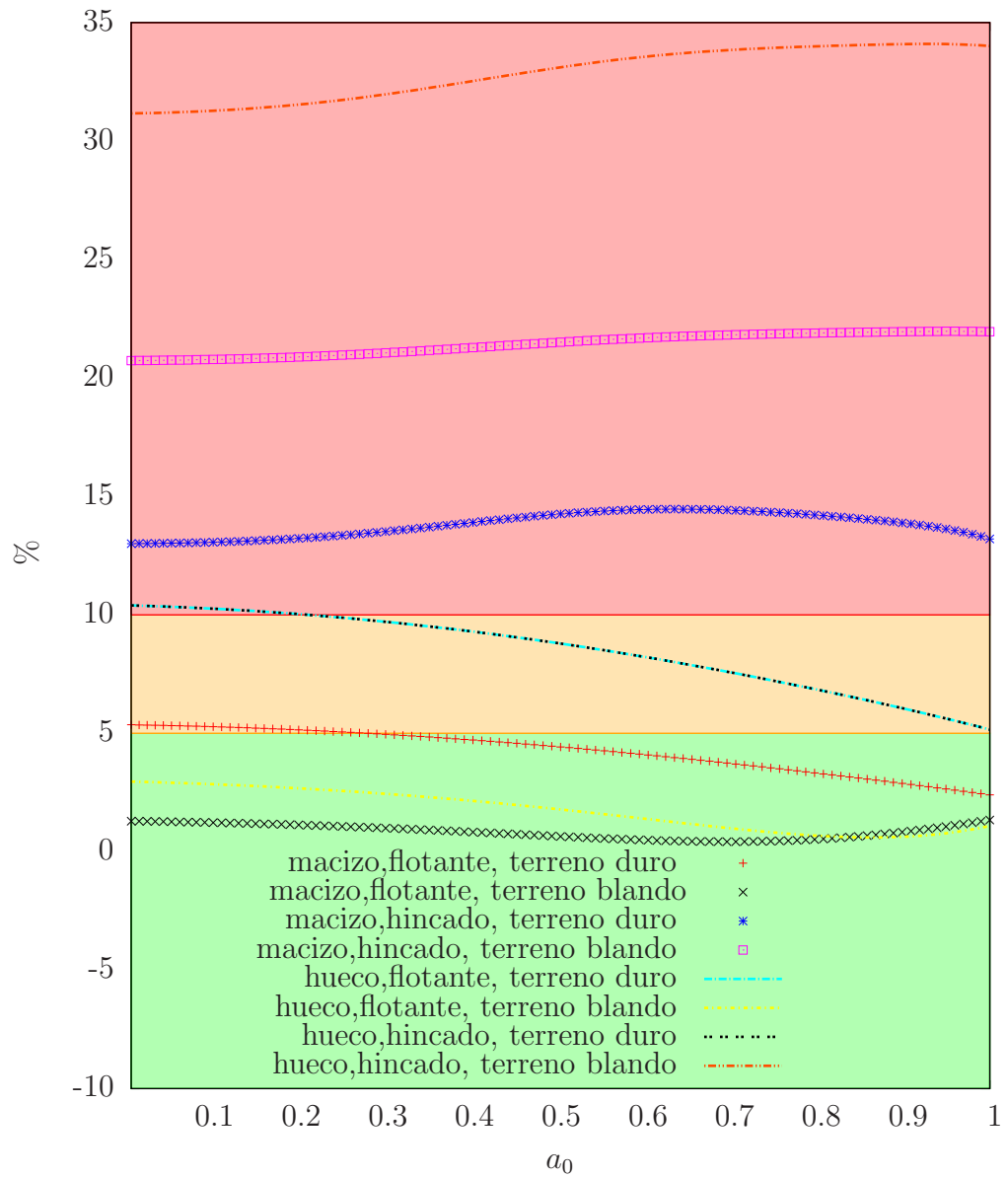
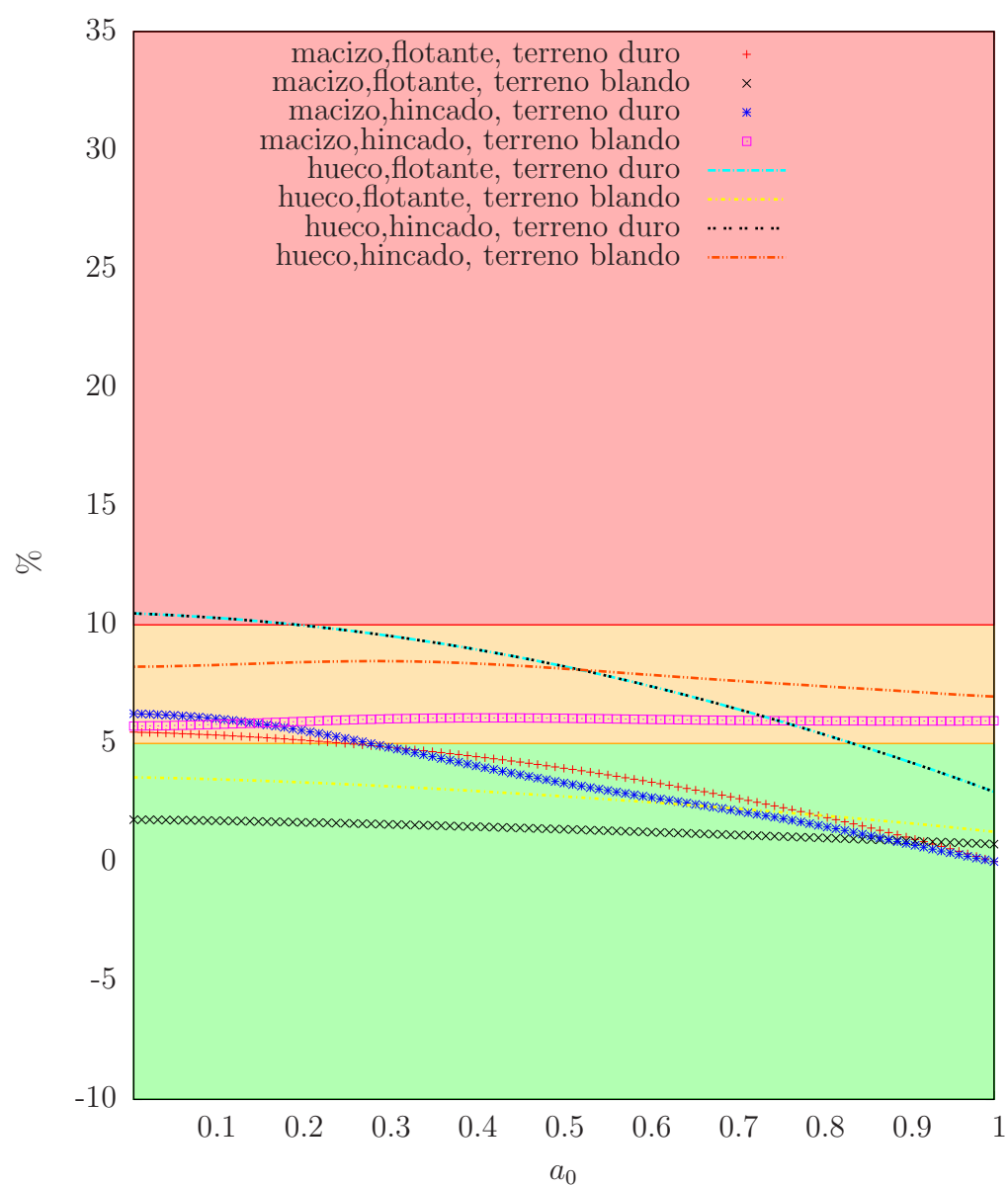


Figura 5.1: Relación de impedancias para $L/d = 3$

5.2.2. Relación de impedancias para $L/d = 5$ Figura 5.2: Relación de impedancias para $L/d = 5$

5.2.3. Relación de impedancias para $L/d = 10$

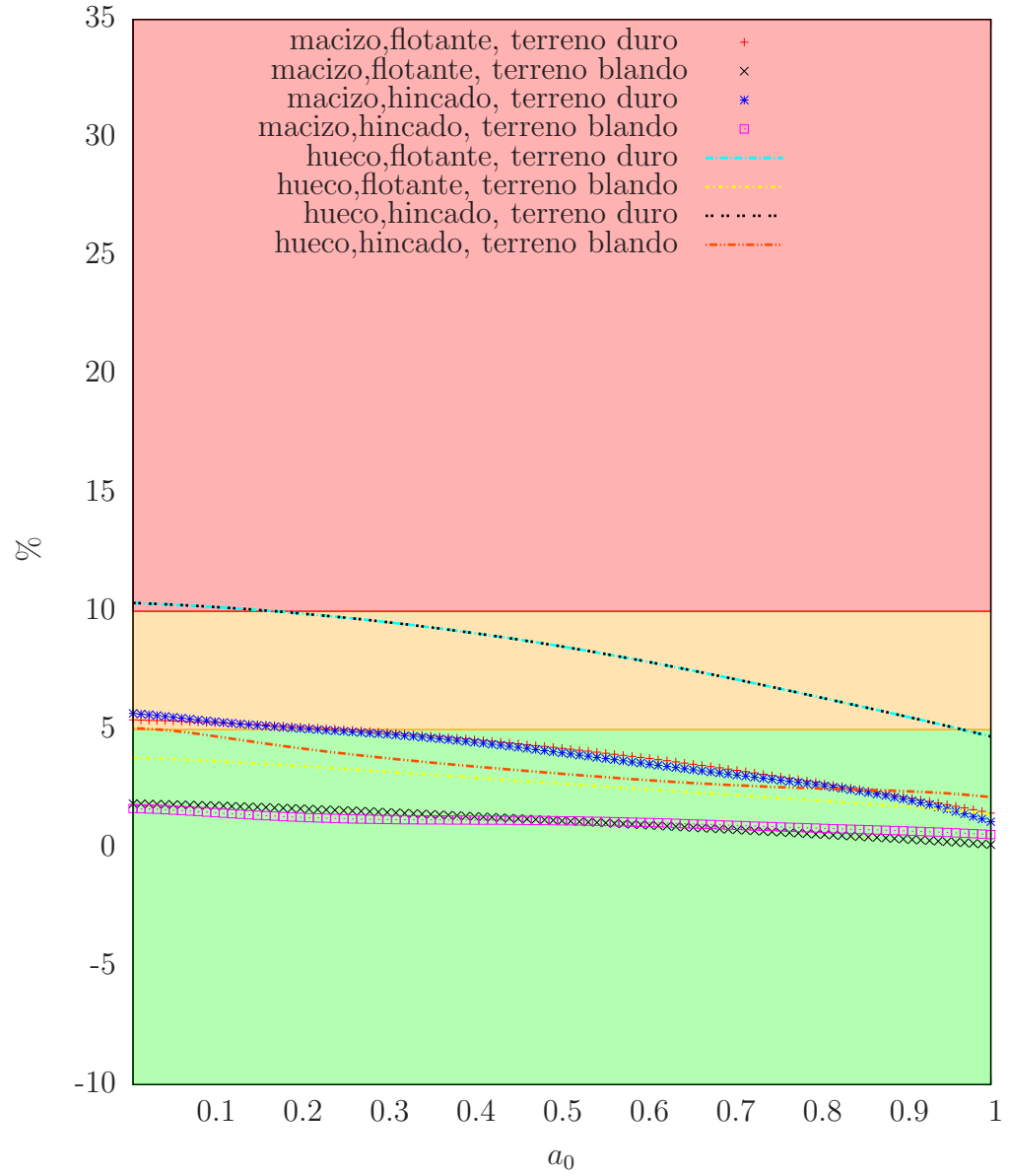


Figura 5.3: Relación de impedancias para $L/d = 10$

Estos diagramas expresan que la impedancia de Bernoulli es mayor respecto a la de Timoshenko, trasladado a la práctica, quiere decir que el pilote más rígido es el modelado por Bernoulli. En definitiva, el modelo de cálculo de Bernoulli usa un pilote más resistente de lo que en realidad es, puesto que desprecia la deformación por cortante cuando no debe, en cambio, el modelo de Timoshenko la contempla y por ello, se asemeja más al real.

En las gráficas 5.1, 5.2 y 5.3 se ilustran las diferencias según las características del pilote y las frecuencias a las que está sometido. Se establece en los gráficos que se interna en la zona de peligro, la zona roja, cuando las diferencias superan el diez por ciento y se tiene que usar siempre el método de Timoshenko, puesto que la esbeltez es tan pequeña que se estaría despreciando la deformación por cortante cuando en realidad tiene un valor apreciable, y consecuentemente, se aleja del lado de la seguridad. En la zona de advertencia, la naranja, aquélla entre el cinco y diez por ciento, se debe usar el modelo de Timoshenko, sin embargo, la persona responsable de cada estudio estructural podría considerar usar el de Bernoulli, si así lo estimase. En la zona verde, se puede usar cualquiera de los modelos, indiferentemente, aunque se recomienda el de Timoshenko.

5.3. Líneas Futuras

En este Proyecto Fin de Carrera, Formulación de un Elemento Tipo Viga Timoshenko; Implementación en un Modelo Numérico para el Análisis Dinámico de Problemas de Interacción Suelo-Estructura, se da respuesta a una parcela de este ambicioso campo de trabajo. Sin embargo, la envergadura del campo de trabajo de la dinámica estructural es tal, que permite estudios más profundos y detallados en futuros trabajos.

En primer lugar, en el futuro se podrá realizar nuevos análisis contemplando otros parámetros, por ejemplo como: nuevas tipologías de secciones, nuevas relaciones de aspecto, nuevos tipos de terreno, nuevas condiciones en los extremos, entre otras variantes. Estos análisis permitirán profundizar en el conocimiento más profundo del comportamiento de respuestas de vigas contemplando la deformación por el efecto del esfuerzo cortante.

En segundo lugar, el código actual, pese a no haberse usado para tal, es capaz de resolver otro tipo de problemas, tales como: interacción cinemática, impedancias de cabeceo, entre otros, con lo cual, en el futuro se podrá dar respuesta a estos problemas, para cualquier rango de esbeltez, puesto que se considera la deformación por cortante que antes se despreciaba. También, a partir de ahora, este software tendrá la capacidad de ser utilizado para la resolución de pilotes agrupados en un encepado para cualquier rango de

esbeltez. Esta variedad de problemas, como se ha indicado, podrá ser resuelta en trabajos futuros más profundos.

Además se podría incluir en el software, una subrutina para el cálculo del factor de cortadura, para otro tipo de secciones. También, se podría añadir otra subrutina que permitiera el estudio pormenorizado de la longitud activa, tras haber estudiado ésta en profundidad. Además, se podrá implementar una entrada y salida gráfica que faciliten el tratamiento de problemas de dinámica estructural a otros analistas.

Por supuesto, el código no está exento de optimizaciones informáticas que lo convierta en más potente y menos gravoso en lo que a recursos informáticos respecta.

Bibliografía

- [1] R. A. Abascal. *Cálculo Matricial de Estructuras*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Sevilla, 2000.
- [2] J J Aznárez. *Efectos de los fenómenos de interacción incluyendo los factores espaciales y sedimentos de fondo en la respuesta sísmica de presas bóveda*. PhD thesis, University of Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de G.C., Spain, 2002.
- [3] R. Clough. *Dynamics of Structures*. Mc Graw Hill, 1993.
- [4] F. Chirino & D.Greiner. *Resistencia de Materiales I*. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 2007.
- [5] M. Galante. *Dinámica de las Estructuras*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 1985.
- [6] F Hartmann. *Elastostatics*. Progress in boundary element methods. Pentech Press, London, 1981.
- [7] Z. Friedman & J. B. Kosmatka. An improved two-node timoshenko finite element. *Computers & Structures*, 47:473–481, 1993.
- [8] L. Majkut. Free and forced vibrations of timoshenko beams described by single difference equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 47:193–210, 2009.
- [9] Fernando Medina. *Análisis de la respuesta sísmica de presas incluyendo efectos de interacción suelo-fluido-estructura*. PhD thesis, University of Seville, Spain, 1987.
- [10] E. Onate. *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos*. CIMNE, Septiembre 1995.

- [11] L. Padrón. *Numerical Model for the Dynamic Analysis of Pile Foundations*. PhD thesis, Universidad de las Palmas de Gran Canaria, enero 2009.
- [12] F. París. *Teoría de la Elasticidad*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Sevilla, 1996.
- [13] R. Picón. *Resistencia de Materiales*. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 1989.
- [14] S. P. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic beams. *Philosophical Magazine*, 41:744–746, 1921.
- [15] S. P. Timoshenko. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine*, 43:125–131, 1922.

