

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES



PROYECTO FIN DE CARRERA

**MODELO ACOPLADO DE ELEMENTOS FINITOS Y ELEMENTOS
DE CONTORNO PARA EL ANÁLISIS DE PROBLEMAS
ARMÓNICOS TRIDIMENSIONALES**

AUTOR: JORGE SANTANA ARMAS

TUTORES: JUAN JOSÉ AZNÁREZ GONZÁLEZ

ORLANDO MAESO FORTUNY

Diciembre, 2004

Índice

1. Introducción	5
1.1. Definición del problema de acoplamiento.....	5
1.2. Necesidad del acoplamiento	6
1.3. Objetivos	7
2. Método de los Elementos Finitos	9
2.1. Teoría Básica	9
2.1.1. Campo de desplazamientos	9
2.1.2. Campo de deformaciones.....	9
2.1.3. Campo de tensiones	10
2.1.4. Ley de comportamiento	11
2.1.5. Expresión del principio de los trabajos virtuales (P.T.V).....	11
2.2. Aplicación numérica (M.E.F.).....	13
2.2.1. Discretización del dominio	13
2.2.2. Evaluación de las integrales	17
3. Método de los Elementos de Contorno.....	20
3.1. Formulación matemática	20
3.2. Puntos internos	30
3.3. Evaluación de las integrales.....	31
4. Modelo Acoplado	37
4.1. Planteamiento del problema.....	37
4.2. Compatibilidad.....	38

4.3. Equilibrio	39
4.4. Montaje global	41
4.5. Consideraciones de simetría.....	43
5. Descripción del código desarrollado	46
5.1. Introducción	46
5.2. Rutina principal	47
6. Aplicaciones	51
6.1. Ejemplo 1.....	51
6.1.1. Definición del modelo	51
6.1.2. Solución analítica.....	52
6.1.3. Discretización del modelo	55
6.1.4. Resultados	57
6.2. Ejemplo 2.....	62
6.2.1. Definición del modelo	62
6.2.2. Solución analítica.....	63
6.2.3. Discretización del modelo	65
6.2.4. Resultados	65
6.3. Ejemplo 3.....	70
6.3.1. Definición del modelo	70
6.3.2. Solución analítica.....	70
6.3.3. Discretización del modelo	71
6.3.4. Resultados	73
7. Revisión, conclusiones y desarrollos futuros.....	76

7.1. Revisión y conclusiones.....	76
7.2. Desarrollos futuros.....	76
8. Referencias.....	78

1. Introducción

1.1. Definición del problema de acoplamiento

Supóngase un sólido cualquiera con dimensiones y propiedades físicas conocidas, y sometido a unas condiciones de contorno, tanto de tensiones como de desplazamientos, como el que se muestra en la figura 1.1:

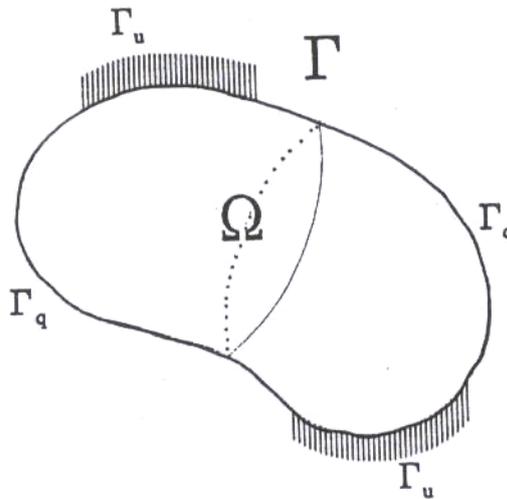


Fig. 1.1

En dicha figura se observa un dominio Ω con un contorno Γ , que tiene como condiciones de contorno en desplazamientos Γ_u , y como tensiones externas aplicadas Γ_q .

Así se define el *problema elástico*, cuya solución es obtener, una vez definidos todos los parámetros mencionados, los desplazamientos y tensiones que tiene el sólido en cualquier punto del dominio.

Para hallar esta solución, se pueden emplear métodos de cálculo por ordenador, como pueden ser el *Método de los Elementos Finitos* (MEF) y/o el *Método de los Elementos de Contorno* (MEC). Los dos métodos discretizan el sólido en subunidades (subregiones) llamadas elementos, siendo la principal diferencia entre ambos, que el primero discretiza el dominio y el segundo el contorno.

Una forma de aprovechar las cualidades que presentan ambos métodos es la de **acoplarlos**, dividiendo el dominio en una o varias regiones, y asignando a cada una la discretización que interese.

1.2. Necesidad del acoplamiento

Para entender correctamente la necesidad de crear un código que acople los dos métodos de cálculo, a saber, MEF (Método de los Elementos Finitos) y MEC (Método de los Elementos de Contorno), es necesario conocer las ventajas e inconvenientes de ambos.

El MEF puede clasificarse como método numérico de “dominio”. El dominio Ω de definición del problema, o dominio de cálculo, se divide en subdominios o elementos. La aproximación numérica a la solución del problema de campo se construye a través de funciones que satisfacen, por su definición, las condiciones de contorno del problema de modo parcial o total.

El MEC, por su parte, utiliza funciones que satisfacen las ecuaciones del problema en el dominio Ω , aunque no cumplan de entrada las condiciones de contorno, para construir la aproximación numérica.

El análisis de problemas estáticos y dinámicos de mecánica del continuo puede llevarse a cabo por medio del MEC de forma elegante y sencilla. Así, una de sus principales ventajas es que el problema se formula en el contorno, por lo que sólo éste debe ser discretizado.

Además, el tratamiento de regiones infinitas o semi-infinitas mediante discretizaciones finitas supone hacer una serie de consideraciones sobre el problema bajo estudio. Así, en estática, bastaría con un contorno artificial de algún tipo ubicado a una cierta distancia. Sin embargo, en dinámica, la reflexión de ondas puede distorsionar la solución cuando se emplea este tipo de frontera artificial. Por su parte, en el MEC se satisfacen de manera automática las condiciones de radiación en el infinito, lo que hace innecesaria la introducción de contornos ficticios de cierre que acaban por contaminar la solución.

Existe, sin embargo, un importante inconveniente que hace que el MEC tenga una aplicación limitada. Es necesario disponer de solución conocida para un problema de referencia (solución fundamental). En el caso de sólidos elásticos e isótropos con comportamiento lineal, esta solución fundamental es explícita. Para leyes de comportamiento diferentes de la isotropía, muchas veces no existe solución o, en el mejor de los casos, existe una solución numérica con tratamiento muy complejo. Para el MEF este inconveniente no existe.

Es en este punto donde aparece la necesidad de acoplar ambos métodos, de forma que se pueda llevar a cabo un análisis conjunto de problemas dinámicos donde coexistan regiones tratadas con el MEC y otras consideradas desde el MEF, realizando el acoplamiento entre ambas de forma rigurosa a través de ecuaciones adicionales de compatibilidad y equilibrio. Con ello, se combinarán las ventajas de ambos métodos. De un lado, la capacidad del MEC para modelar regiones infinitas. De otra parte, las facilidades que ofrece el MEF para modelar medios con leyes de comportamiento más complejas.

Así, los dominios infinitos o semi-infinitos serán considerados desde el MEC como sólidos elásticos, isótropos y con comportamiento lineal, aprovechando las ventajas de esta formulación y, haciendo uso del MEF, podrán tenerse en cuenta regiones con leyes de comportamiento diferentes de la isotropía.

1.3. Objetivos

El objetivo central es la elaboración de un modelo numérico acoplado de Elementos Finitos y Elementos de Contorno para problemas dinámicos tridimensionales en el dominio de la frecuencia. El acoplamiento se conseguirá imponiendo en la interfase las condiciones de equilibrio y compatibilidad que generarán las ecuaciones adicionales necesarias para resolver el problema.

Más detalladamente, los objetivos son:

- 1) Estudio de un software de Elementos de Contorno 3D armónico que ha sido previamente desarrollado por el Departamento de Ingeniería Civil de la ULPGC.
- 2) Desarrollo de un programa de Elementos Finitos 3D en el dominio de la frecuencia.
- 3) Formulación del acoplamiento entre ambos métodos estableciendo condiciones de compatibilidad y equilibrio en la zona común a ambos métodos (interfase).
- 4) Desarrollo de un software que haga uso del programa MEC ya existente, del programa MEF desarrollado y que implemente la rutina de acoplamiento de acuerdo con la formulación anterior.
- 5) Obtención de resultados numéricos para algunos problemas con solución conocida que permitan validar el procedimiento.

2. Método de los Elementos Finitos

2.1. Teoría Básica

2.1.1. Campo de desplazamientos

Sea un sólido tridimensional como el que se muestra en la figura 1.1, el movimiento de un punto en el espacio queda perfectamente definido por las tres componentes del vector de desplazamientos

$$u = [u_x, u_y, u_z] \quad (2.1)$$

donde u_x , u_y , u_z son los desplazamientos del punto según los ejes cartesianos x , y , z , respectivamente.

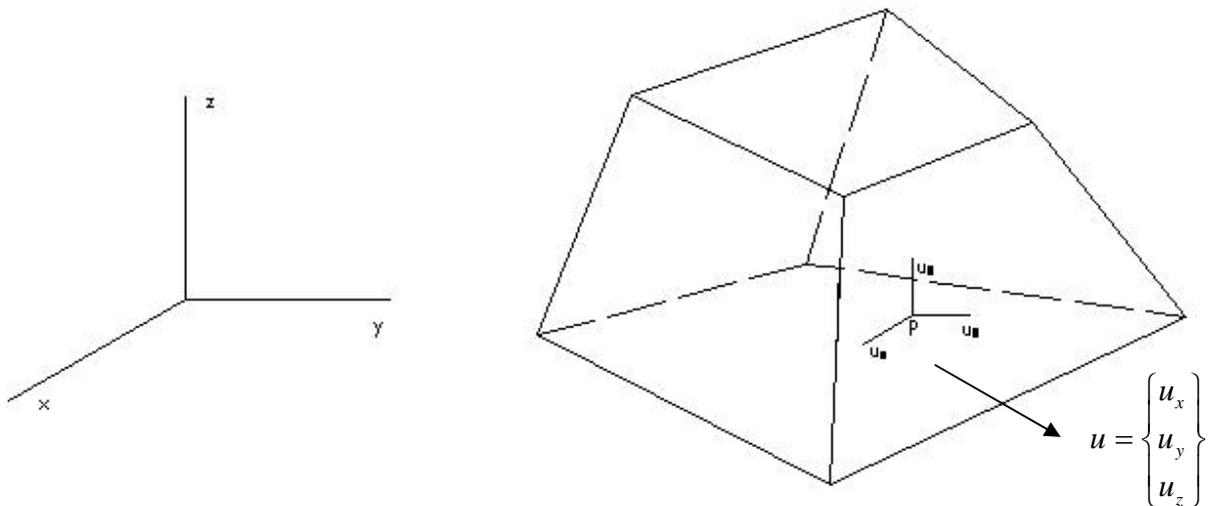


Figura 2.1 Sólido tridimensional. Vector de desplazamientos en un punto.

2.1.2. Campo de deformaciones

El vector de deformación en un punto está definido por seis componentes como

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}] \quad (2.2)$$

con:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & ; & \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} & ; & \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & ; & \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} & ; & \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

donde $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ son las deformaciones normales y $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ las deformaciones tangenciales.

Según lo anterior, se puede expresar

$$\varepsilon = L \cdot u$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}
 \tag{2.4}$$

2.1.3. Campo de tensiones

El vector de tensiones en un punto contiene seis componentes de tensión, así

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]
 \tag{2.5}$$

donde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, son las tensiones normales y $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ son las tensiones tangenciales.

2.1.4. Ley de comportamiento

La relación entre las seis deformaciones y las seis tensiones viene expresada en el caso más general de elasticidad anisótropa por una matriz constitutiva de 6 x 6 simétrica y con 21 coeficientes independientes. En el caso más simple de elasticidad isótropa, los coeficientes independientes se reducen a dos: el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν . En dicho caso la ecuación constitutiva puede escribirse directamente en ejes globales x, y, z , como:

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \quad (2.6)$$

y la matriz constitutiva viene dada por

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.1.5. Expresión del principio de los trabajos virtuales (P.T.V)

Supóngase un dominio Ω con unas condiciones de contorno, tanto en tensiones como en desplazamientos:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \quad x_i \in \Gamma_1 \\ t_i &= \bar{t}_i \quad x_i \in \Gamma_2 \\ \Gamma &\equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Si existe un campo de desplazamientos $u_i = u_i(x, y, z)$ en equilibrio, que cumpla dichas condiciones de contorno, cualquier campo de desplazamientos virtuales que sea compatible en el dominio Ω , cumple:

$$\int_V \varepsilon_{ij}^* \cdot \sigma_{ij} dV = \int_V u_i^* \cdot b_i dV + \int_A u_i^* \cdot t dA \quad (2.9)$$

donde:

- ε_{ij}^* es el tensor de deformaciones debido al campo virtual
- σ_{ij} es el tensor de tensiones del campo real
- u_i^* son los desplazamientos virtuales
- b_i son las fuerzas por unidad de volumen
- t son tracciones reales en el contorno

Este es el principio de los trabajos virtuales, adquiriendo la denominación de “trabajo” por ser una forma de cuantificar que el *trabajo* realizado por las fuerzas externas se transforma en *trabajo* de deformación interna. El interés radica en que si la expresión (2.9) se cumple para cualquier campo de desplazamientos virtuales del sólido, se garantiza que las tensiones del campo $u_i = u_i(x, y, z)$ están en equilibrio.

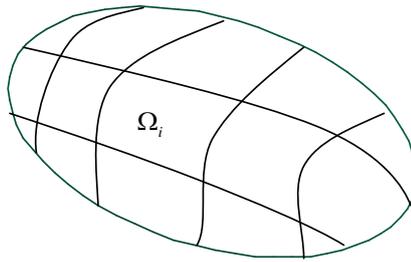
Para el problema elastodinámico: $b_i = b_i' - \rho \cdot \ddot{u}$ y la ecuación (2.9) queda en la forma:

$$\int_V \varepsilon_{ij}^* \cdot \sigma_{ij} dV = \int_V u_i^* \cdot b_i' dV - \int_V u_i^* \cdot \rho \cdot \ddot{u} dV + \int_A u_i^* \cdot t dA \quad (2.10)$$

2.2. Aplicación numérica (M.E.F.)

2.2.1. Discretización del dominio

El tratamiento numérico del problema exige una división del volumen (dominio) en elementos. Así, partiendo del dominio real Ω , éste se dividirá en otros más pequeños Ω_i , con lo que:



$$\Omega = \sum_{i=1}^{n_e} \Omega_i \quad n_e = \text{n}^\circ \text{ de elementos del dominio} \quad (2.11)$$

Estos elementos se compondrán de una serie de nodos cuyo número variará según el tipo de función de aproximación elegida. En nuestro caso particular (tridimensional), estas funciones de forma dependerán de tres variables auxiliares (ξ, η, ζ) normalizadas, con las que se conseguirán aproximar los desplazamientos y la geometría del dominio:

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot (u_x)_i ; u_y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot (u_y)_i ; u_z = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot (u_z)_i \\ x &= \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot x_i ; y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot y_i ; z = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot z_i \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde:

- u_x desplazamiento aproximado en la dirección x en el punto ξ, η, ζ
- x coordenada aproximada en el eje x para el punto ξ, η, ζ
- $(u_x)_i$ desplazamiento en la dirección x del nodo i
- x_i coordenada en el eje x del nodo i
- N_i función de forma con valor unitario en el nodo i
- n número de nodos del elemento

(para las direcciones y,z se interpreta de igual forma).

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (u_x)_1 \\ (u_y)_1 \\ (u_z)_1 \\ (u_x)_2 \\ (u_y)_2 \\ (u_z)_2 \\ \dots \\ (u_x)_n \\ (u_y)_n \\ (u_z)_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (x)_1 \\ (y)_1 \\ (z)_1 \\ (x)_2 \\ (y)_2 \\ (z)_2 \\ \dots \\ (x)_n \\ (y)_n \\ (z)_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [u] &= [N] \cdot [u]^e \\ [x] &= [N] \cdot [x]^e \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde:

- $[N]$ matriz de funciones de forma
- $[u]^e$ vector de desplazamientos nodales
- $[x]^e$ vector de coordenadas nodales

De igual forma, para la aceleración se adopta la misma aproximación:

$$[\ddot{u}] = [N] \cdot [\ddot{u}]^e \tag{2.14}$$

Para el caso tridimensional tratado aquí se han utilizado elementos lagrangianos de 27 nodos (n=27):

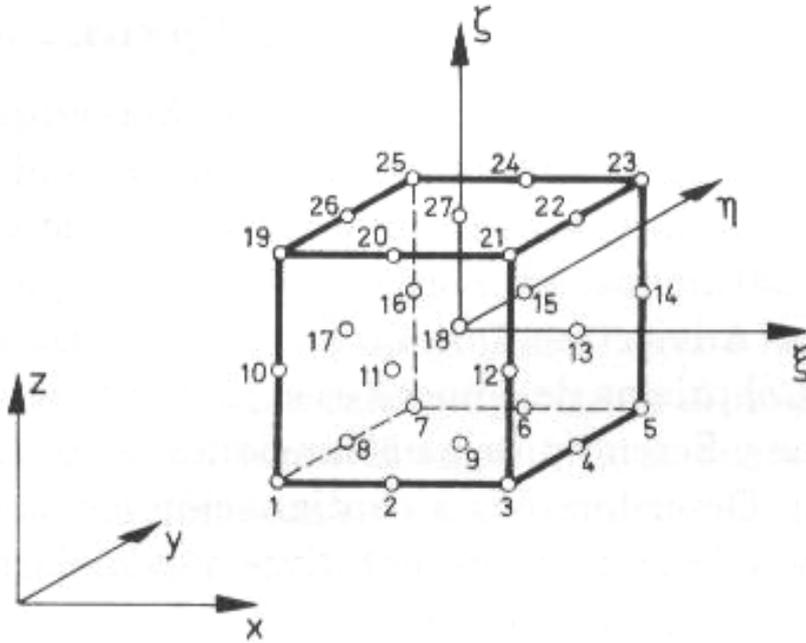


Fig. 2.2 Elemento lagrangiano de 27 nodos

Las funciones de forma de este elemento son:

Nodos esquina ($i = 1, 3, 5, 7, 19, 21, 23, 25$)

$$N_i = \frac{1}{8}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i)(\zeta^2 + \zeta\zeta_i)$$

Nodos laterales ($i = 2, 4, 6, 8, 20, 22, 24, 26, 10, 12, 14, 16$)

$$\begin{aligned} N_i = & \frac{1}{4}\eta_i^2(\eta^2 + \eta\eta_i)\zeta_i^2(\zeta^2 + \zeta\zeta_i)(1 - \xi^2) + \\ & + \frac{1}{4}\xi_i^2(\xi^2 + \xi\xi_i)\zeta_i^2(\zeta^2 + \zeta\zeta_i)(1 - \eta^2) + \\ & + \frac{1}{4}\xi_i^2(\xi^2 + \xi\xi_i)\eta_i^2(\eta^2 + \eta\eta_i)(1 - \zeta^2) \end{aligned}$$

Nodos en el centro de las caras ($i = 9, 11, 13, 15, 17, 27$)

$$\begin{aligned} N_i = & \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(\zeta + \zeta^2\zeta_i) + \\ & + \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)(\xi + \xi^2\xi_i) + \\ & + \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \zeta^2)(\eta + \eta^2\eta_i) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Nodo central

$$N_i = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)$$

A partir de la división en subregiones (Elementos Finitos) que se ha realizado del medio tal como se indica en (2.11), se puede escribir (2.10) como sigue:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V \varepsilon_{ij}^* \cdot \sigma_{ij} dV \right)_e = \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V u_i^* \cdot b_i' dV - \int_V u_i^* \cdot \rho \cdot \ddot{u} dV + \int_A u_i^* \cdot t dA \right)_e \quad (2.16)$$

Combinando las ecuaciones (2.4), (2.6), (2.13) y (2.14) se obtiene:

$$\begin{aligned} u^* &= (N)^t \cdot u_e^* \\ \varepsilon^* &= (L \cdot N)^t \cdot u_e^* = B^t \cdot u_e^* \\ \sigma &= D \cdot L \cdot N \cdot u_e^* = B \cdot u_e^* \end{aligned} \quad (2.17)$$

Introduciendo ahora la ecuación (2.17) en (2.16) se llega a:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V B^t \cdot u_e^* \cdot D \cdot B \cdot u_e^* dV \right)_e = \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V (N)^t \cdot u_e^* \cdot b_i dV - \int_V (N)^t \cdot u_e^* \cdot \rho \cdot N \cdot \ddot{u}_e dV + \int_A (N)^t \cdot u_e^* \cdot t dA \right)_e \quad (2.18)$$

Como vemos, el término u_e^* está en todos los sumandos y se puede eliminar de la expresión. Por tanto, la expresión final queda de la forma

$$\sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V B^t \cdot D \cdot B dV u_e \right)_e = \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V (N)^t \cdot b_i dV \right)_e - \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V (N)^t \cdot \rho \cdot N \cdot \ddot{u}_e dV \right)_e + \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_A (N)^t \cdot t dA \right)_e \quad (2.19)$$

Para el problema armónico:

$$\begin{aligned} t(t) &= T(\omega) \cdot e^{i\omega t} \\ u(t) &= U(\omega) \cdot e^{i\omega t} \\ \ddot{u}(t) &= -\omega^2 \cdot U(\omega) \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Introduciendo (2.20) en (2.19) y simplificando el término $e^{i\omega t}$ se consigue::

$$\sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V B^t \cdot D \cdot B dV U_e(\omega) \right)_e = \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V (N)^t \cdot b_i dV \right)_e + \omega^2 \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V (N)^t \cdot \rho \cdot N dV U_e(\omega) \right)_e + \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_A (N)^t \cdot T(\omega) dA \right)_e \quad (2.21)$$

Reordenando la ecuación anterior se llega a la expresión final, que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} [K - \omega^2 \cdot M] \cdot U(\omega) &= F_V + F_A \\ K \cdot U(\omega) &= f \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V B^t \cdot D \cdot B \, dV \, U_e(\omega) \right)_e \\ M &= \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V (N)^t \cdot \rho \cdot N \, dV \, U_e(\omega) \right)_e \\ F_V &= \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V (N)^t \cdot b_i \, dV \right)_e \\ F_A &= \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_A (N)^t \cdot T(\omega) \, dA \right)_e \end{aligned}$$

2.2.2. Evaluación de las integrales

Para el cálculo de las integrales anteriores habrá que realizar primeramente un cambio de variable y posteriormente una integración numérica.

El cambio de variable se realiza utilizando la matriz *Jacobiana* de dos formas distintas, como determinante en la integral, y como matriz, que invertida, resolverá las derivadas cartesianas de las funciones de forma. Para ello, considerando que la forma que presenta la matriz es:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad \text{donde } \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial \xi} x_i, \text{ etc.} \quad (2.23)$$

se pueden obtener las derivadas cartesianas como:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

con lo que las derivadas cartesianas dependerán sólo de las coordenadas de los nodos del elemento (x,y,z) y de las variables normalizadas (ξ, η, ζ).

Como ejemplo, se muestra a continuación como se procede para resolver la primera integral de la ecuación (2.21), que da lugar a la matriz de rigidez:

$$K = \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_V B^t \cdot D \cdot B \, dV \, U_e(\omega) \right)_e$$

Se resuelve para cada elemento la integral $\int_{\Omega_e} B_e^t \cdot D_e \cdot B_e \, d\Omega_e$, donde

$$B = L \cdot N = (B_1 \quad B_2 \quad \dots)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Utilizando el cambio de variable antes mencionado, podemos obtener la matriz de rigidez local como:

$$K_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_e^t \cdot D \cdot B_e \cdot |J| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_e(\xi\eta\zeta) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (2.26)$$

Para calcular la integral anterior se recurre a la cuadratura de Gauss:

$$K_e = \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_q} \sum_{r=1}^{n_r} T_e(\xi_p, \eta_q, \zeta_r) w_p w_q w_r \quad (2.27)$$

donde:

- w_i son los pesos
- ξ_p, η_q, ζ_r son las coordenadas de los puntos de integración
- n_i es el número de puntos de Gauss

Una vez obtenidas las matrices elementales, la matriz global se obtiene ensamblando correctamente las mismas. El montaje se hace atendiendo a dos criterios, compatibilidad y equilibrio. El primero exige que dos elementos que comparten un nodo tengan mismos desplazamientos en éste y el segundo exige que la suma de fuerzas en esos nodos ha de estar equilibrada.

El resto de integrales se resuelve procediendo de igual forma que se ha hecho para la matriz de rigidez.

3. Método de los Elementos de Contorno

3.1. Formulación matemática

La base teórica del método parte definiendo una región Ω con el contorno Γ , en la que la función escalar u se encuentra gobernada por la ecuación de onda:

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot u = 0 \quad (3.1)$$

siendo c la velocidad de la onda. Las condiciones de contorno serán las siguientes:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \text{ en } \Gamma_1 \\ q &= \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} \text{ en } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde n es la normal al contorno, $\Gamma_1 + \Gamma_2$ y las barras indican valores conocidos.

Consideremos una función u^* , que pertenezca a clase C^1 y que verifique la ecuación de gobierno. Bajo estas condiciones, se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) \cdot u^* \cdot d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) \cdot u^* \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \cdot q^* \cdot d\Gamma \quad (3.3)$$

donde:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$$

Si se integra por partes el miembro de la izquierda de la igualdad, se obtiene:

$$-\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \right\} d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \bar{q} \cdot u^* \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q \cdot u^* \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u \cdot q^* \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \cdot q^* \cdot d\Gamma \quad (3.4)$$

donde se ha aplicado la notación de Einstein. Volviendo a integrar por partes el mismo miembro se consigue la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} u \cdot (\nabla^2 u^*) \cdot d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} \cdot u^* \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q \cdot u^* \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \cdot q^* \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \cdot q^* \cdot d\Gamma \quad (3.5)$$

Como se aprecia, se ha debilitado el problema. Esta es la ecuación de partida del Método de Elementos de Contorno. Para un punto interno o del contorno, podemos utilizar la siguiente representación integral:

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial n} u \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^* \cdot d\Gamma \quad (3.6)$$

donde u^* es la solución fundamental ante el caso de una carga puntual armónica, $c^i = 1$ para puntos internos y $c^i = 1/2$ para puntos del contorno, siendo éste liso. Cuando no cumpla ciertas condiciones de derivabilidad, c^i adopta valores que dependen de la geometría particular del contorno en el punto "i". Como prueba, considérese un problema de potencial, es decir, se pretende determinar el valor de la función potencial u en el dominio Ω , verificando ésta la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 u = 0, \text{ en } \Omega \quad (3.7)$$

Se considera en este momento que una carga concentrada actúa sobre el punto "i". En ese caso:

$$\nabla^2 u^* + \Delta^i = 0 \quad (3.8)$$

siendo Δ^i la función *Delta de Dirac*. Sustituyendo esta expresión en (3.5), esta última se convierte en:

$$- \int_{\Omega} u \cdot \Delta^i \cdot d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} \cdot u^* \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q \cdot u^* \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \cdot q^* \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} \cdot q^* \cdot d\Gamma \quad (3.9)$$

Operando se deduce que, en este caso, para puntos internos del dominio, $c^i = 1$. Para un medio isótropo tridimensional, la solución fundamental de la ecuación de Laplace es:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r}$$

donde r es la distancia comprendida entre el punto de aplicación del potencial unitario y el punto del contorno bajo estudio. La ecuación de Laplace tridimensional en coordenadas polares presenta la forma siguiente, una vez se haya considerado la simetría:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} = \Delta^i \quad (3.10)$$

Sustituyendo la solución fundamental en (3.10), se aprecia que se satisface siempre que $r \neq 0$. Para estudiar el caso en que $r \equiv 0$ se lleva a cabo la integración de la ecuación diferencial sobre una esfera que rodea el punto donde se aplica la carga:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta^i d\Omega = -1$$

Si se sustituye la solución fundamental en el primer miembro, tras simples operaciones de derivación, se comprueba que, efectivamente para cualquier punto interno, es igual a -1. Para un punto del contorno, considérese la semiesfera representada en la siguiente figura:

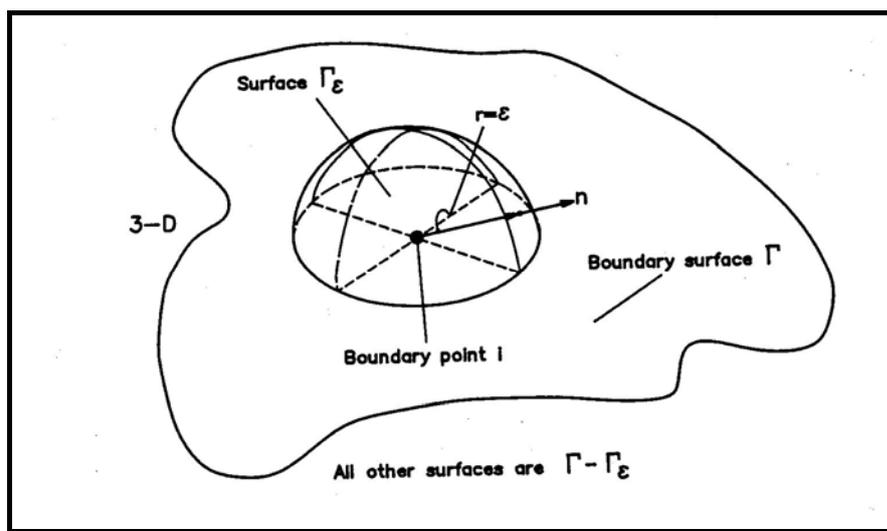


Fig. 3.1 Integración sobre nodo perteneciente al contorno

El punto bajo estudio se ubica en el centro de la esfera, reduciéndose su radio ε a 0, coincidiendo en ese caso el punto de aplicación de la carga y el del contorno a analizar. Se considerará que el contorno en el punto es lo suficientemente suave como para que verifique unas mínimas condiciones de derivabilidad. De este modo:

$$\int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \quad (3.11)$$

Si se sustituye la solución fundamental en la segunda integral del segundo miembro, y tomando límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} u \right\} = -\frac{1}{2} u \quad (3.12)$$

Si se toma $\varepsilon \equiv 0$ en el contorno $\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}$, se obtiene Γ . Para el problema bidimensional, aunque la solución fundamental es distinta, el resultado al que finalmente se llega es idéntico. Por tanto, queda entonces demostrado que para puntos en el contorno, $c^j = \frac{1}{2}$.

Retomando de nuevo la ecuación integral (3.6), ésta será resuelta numéricamente, para lo cual se discretizará la superficie en elementos sobre los cuales el potencial u y el flujo q serán escritos en términos de sus valores en una serie de puntos nodales. Si se expresa dicha ecuación integral en forma discretizada para cada nodo, se obtiene un sistema algebraico de ecuaciones. Una vez las condiciones de contorno han sido aplicadas, el sistema puede ser resuelto y así determinar las incógnitas del contorno.

Las variables u y q sobre cada elemento “j” se definen en términos de sus valores nodales como:

$$\begin{aligned}
 u &= [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \dots \quad \Phi_N] \cdot \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ \dots \\ u^N \end{bmatrix} = \Phi \cdot u^i \\
 q &= [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \dots \quad \Phi_N] \cdot \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \\ \dots \\ q^N \end{bmatrix} = \Phi \cdot q^i
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde N es el número de nodos del elemento, u^i y q^i son vectores conteniendo los potenciales y los flujos en los nodos del elemento respectivamente, y $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$ son funciones de interpolación polinomiales, de dos dimensiones, tales que adoptan el valor unitario en el nodo k y cero en los demás nodos del elemento. Las funciones de interpolación, también llamadas funciones de forma, vienen expresadas en términos de las coordenadas homogéneas, definidas sobre cada familia de elementos.

La geometría de cualquier elemento puede definirse a partir de la posición de los nodos empleando las mismas funciones de interpolación. De este modo, cada coordenada podrá expresarse del siguiente modo:

$$x_m = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \dots \quad \Phi_N] \cdot \begin{bmatrix} x_m^1 \\ x_m^2 \\ x_m^3 \\ \vdots \\ x_m^N \end{bmatrix}; \quad m = 1, 2, 3 \tag{3.14}$$

Para las tres coordenadas cartesianas sería:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & 0 & \dots & \Phi_N & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & \dots & 0 & \Phi_N & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_2 & \dots & 0 & 0 & \Phi_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ \vdots \\ x_1^N \\ x_2^N \\ x_3^N \end{bmatrix} = \Phi \cdot x^j$$

De forma sintetizada sería:

$$x = \Phi \cdot x^j \quad (3.15)$$

En la siguiente tabla se incluyen los tres primeros elementos de los dos tipos más empleados: elemento triangular y cuadrangular. Para este último, se definen dos coordenadas, $-1 \leq \xi_1 \leq 1$ y $-1 \leq \xi_2 \leq 1$, por lo que el elemento tendrá un lado de magnitud 2 en el plano. Para el elemento triangular, las coordenadas se definen por $0 \leq \xi_1 \leq 1$, $0 \leq \xi_2 \leq 1$, incluyéndose además una tercera coordenada simplemente por conveniencia, que depende linealmente de las dos primeras: $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$. Las expresiones de las funciones de interpolación para distintos órdenes se incluyen en la mencionada tabla.

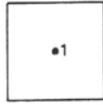
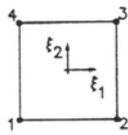
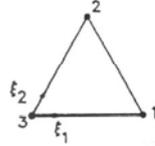
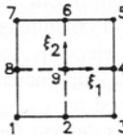
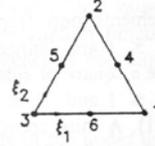
	Quadrilateral	Triangular
Zero Order	Constant  Interpolation Functions $\phi_1 = 1$	Constant  Interpolation Functions $\phi_1 = 1$
First Order	Bilinear  Interpolation Functions $\phi_1 = 1/4 (1 - \xi_1) (1 - \xi_2)$ $\phi_2 = 1/4 (1 + \xi_1) (1 - \xi_2)$ $\phi_3 = 1/4 (1 + \xi_1) (1 + \xi_2)$ $\phi_4 = 1/4 (1 - \xi_1) (1 + \xi_2)$	Linear  Interpolation Functions $\phi_1 = \xi_1 ; \phi_2 = \xi_2$ $\phi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2 = \xi_3$
Second Order	Biquadratic  Interpolation Functions $\phi_1 = 1/4 (\xi_1 - 1) \xi_2 (\xi_2 - 1)$ $\phi_2 = 1/2 (1 - \xi_1^2) \xi_2 (\xi_2 - 1)$ $\phi_3 = 1/4 \xi_1 (1 + \xi_1) \xi_2 (\xi_2 - 1)$ $\phi_4 = 1/2 \xi_1 (1 + \xi_1) (1 - \xi_2^2)$ $\phi_5 = 1/4 \xi_1 (1 + \xi_1) \xi_2 (1 + \xi_2)$ $\phi_6 = 1/2 (1 - \xi_1^2) \xi_2 (1 + \xi_2)$ $\phi_7 = 1/4 (\xi_1 - 1) \xi_2 (1 + \xi_2)$ $\phi_8 = 1/2 \xi_1 (\xi_1 - 1) (1 - \xi_2^2)$ $\phi_9 = (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2)$	Quadratic  Interpolation Functions $\phi_1 = \xi_1 (2\xi_1 - 1)$ $\phi_2 = \xi_2 (2\xi_2 - 1)$ $\phi_3 = \xi_3 (2\xi_3 - 1)$ $\phi_4 = 4\xi_1 \xi_2$ $\phi_5 = 4\xi_2 \xi_3$ $\phi_6 = 4\xi_3 \xi_1$

Tabla 3.1 Elemento triangular y rectangular para problemas tridimensionales

De este modo, se puede definir un elemento triangular que posea cualquier forma mediante las coordenadas cartesianas de tres nodos y las funciones de interpolación:

$$x = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3] \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \Phi_k & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_k & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_k & 0 & 0 \\ 0 & \xi_k & 0 \\ 0 & 0 & \xi_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3$$

$$x^k = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4] \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}$$

En la siguiente figura se representan las formas que adoptarían un elemento cuadrático triangular y otro cuadrangular, obtenidas ambos por medio de las funciones de interpolación cuadráticas, con 6 y 9 nodos, respectivamente:

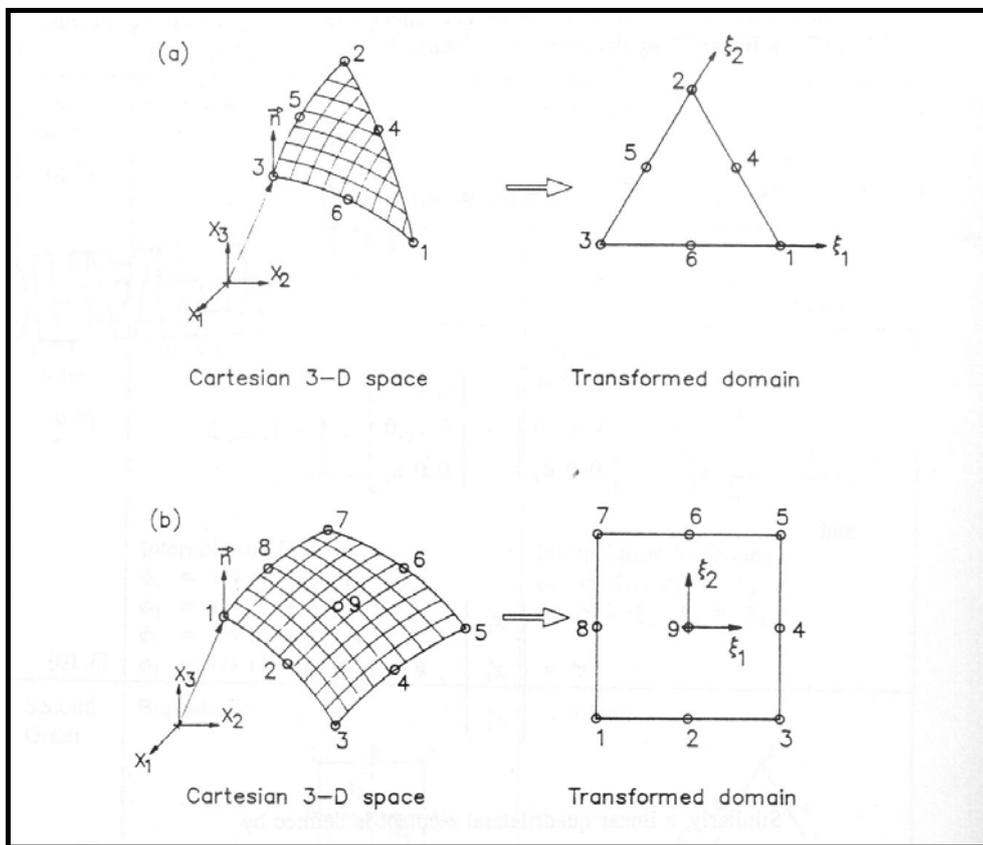


Fig. 3.2 Transformación de un elemento triangular y rectangular para problemas tridimensionales

Como regla general para la mayoría de los Elementos de Contorno, los nodos y las funciones de interpolación Φ_k empleadas en las ecuaciones (3.13) y (3.15) para representar las variables de contorno y la geometría respectivamente,

son los mismos, es decir, los elementos son isoparamétricos. Este es el caso de los elementos lineales y cuadráticos.

Considérese de nuevo el contorno Γ del cuerpo Ω , y que el primero ha sido discretizado en NE elementos, y que para cada elemento, las variables de contorno se expresan como en la identidad (3.13). Así, la ecuación (3.6) podrá escribirse para cualquier nodo "i" de la siguiente forma:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} q^* \Phi d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma \right\} q^j \quad (3.16)$$

donde: $\Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_N]$

Se aprecia que $\sum_{j=1}^{NE}$ indica suma sobre todos los NE elementos de la superficie, siendo Γ_j la superficie del elemento j . Las variables u^j y q^j representan potenciales y flujos nodales en el elemento j respectivamente. Esta última ecuación puede simplificarse introduciendo los coeficientes de influencia:

$$c^i u^i + \sum_{m=1}^N \hat{H}^{im} u^m = \sum_{j=1}^{NE} G^{ij} q^j \quad (3.17)$$

donde N es el número de nodos, u^m el potencial en el nodo m y q^j representa lo mismo que en la ecuación (3.16). En este caso, los dos miembros de la igualdad no poseen la misma estructura. En la parte izquierda, la sumatoria se extiende sobre los nodos, ya que sólo es posible un único valor del potencial para cada nodo. Sin embargo, la parte derecha mantiene la sumatoria sobre los elementos, puesto que, cuando un nodo pertenece a más de un elemento, puede tener distintos valores de flujo, según pertenezca a un elemento o a otros. Los coeficientes de influencia \hat{H}^{im} y G^{ij} son:

$$\hat{H}^{im} = \sum_t \left\{ \int_{\Gamma_t} q^* \Phi_k d\Gamma \right\} \quad (3.18)$$

$$G^{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma$$

donde $\Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_N]$, \sum_t se extiende a todos los elementos a los cuales pertenezca el nodo m y k es el número del nodo m dentro del elemento t . Para elementos constantes, la sumatoria se extiende a un elemento, $t = j$, $\Phi_k = 1$, $N = NE$ y:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{im} &= \int_{\Gamma_{mt}} q^* d\Gamma \\ G^{ij} &= \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para expresar la ecuación (3.17) de forma matricial, se cambia la notación:

$$\begin{aligned} H^{im} &= \hat{H}^{im}, \text{ para } i \neq m \\ H^{im} &= \hat{H}^{im} + c^i, \text{ para } i = m \end{aligned}$$

con lo que la expresión (3.17) queda como:

$$\sum_{m=1}^N H^{im} u^m = \sum_{j=1}^{NE} G^{ij} q^j \quad (3.20)$$

De forma matricial:

$$HU = GQ \quad (3.21)$$

donde H es una matriz $N \times N$, G es una matriz $N \times NNE$, U es un vector $N \times 1$ y Q es un vector $NNE \times 1$, siendo NNE el producto del número de elementos por el número de nodos por elemento.

En esta ecuación, son N las incógnitas presentes, una por nodo: o bien potencial (u) o bien flujo (q).

3.2. Puntos internos

La formulación matemática del método no experimenta ningún cambio. Una vez conocidos los valores de las variables en el contorno, la magnitud del potencial en puntos internos se evalúa empleando la ecuación (3.6), con $c^i = 1$.

$$u^i = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma \quad (3.22)$$

Si se utiliza la misma discretización para las integrales de contorno, se obtiene:

$$u^i = \sum_{j=1}^{NE} G^{ij} q^j - \sum_{m=1}^N \hat{H}^{im} u^m \quad (3.23)$$

la cual permite evaluar u^i en términos de los valores conocidos de potencial y flujo en los nodos del contorno. Para hallar el valor del flujo en puntos internos en las tres direcciones, se deriva la ecuación (3.22):

$$q_k^i = \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^i = \int_{\Gamma} q \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_k} \right)^i d\Gamma - \int_{\Gamma} u \left(\frac{\partial q^*}{\partial x_k} \right)^i d\Gamma \quad ; \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.24)$$

Las integrales sobre el contorno se discretizan sobre integrales sobre los elementos:

$$q_k^i = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} \Phi d\Gamma \right\} q^j - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \frac{\partial q^*}{\partial x_k} \Phi d\Gamma \right\} u^j \quad (3.25)$$

Los integrandos son derivadas de la solución fundamental u^* y su flujo:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} e^{-i\frac{\omega r}{c}} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_k} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} \right) e^{-i\frac{\omega r}{c}} r_{,k} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{3}{r^3} + \frac{3i\omega}{cr^2} - \frac{\omega^2}{c^2 r} \right) \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} - \left(\frac{1}{r^3} + \frac{i\omega}{cr^2} \right) n_k \right] e^{-i\frac{\omega r}{c}} \quad (3.28)$$

Empleando una cuadratura gaussiana estándar es posible evaluar numéricamente la expresión (3.25), una vez introducidas las ecuaciones (3.27) y (3.28) en la misma. Se aprecia que, mientras “i” represente un punto interno, no aparece singularidad en los integrandos.

3.3. Evaluación de las integrales

El cálculo de los coeficientes de las matrices G y H requiere la resolución de integrales del tipo:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} u^* \phi_k d\Gamma \\ \int_{\Gamma_j} q^* \phi_k d\Gamma \end{aligned} \quad (3.29)$$

Si el punto de colocación “i” no se encuentra sobre el elemento de integración “j”, las integrales se evalúan por medio de una cuadratura gaussiana estándar. La integración numérica viene dada en función de las coordenadas homogéneas ξ_1 y ξ_2 . Para transformar el diferencial de superficie en el sistema cartesiano $d\Gamma$ al sistema de coordenadas homogéneas, es necesario un cambio de coordenadas, el cual puede resumirse en el siguiente diferencial de área:

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |G| d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.30)$$

donde G representa el jacobiano de la transformación, y su magnitud $|G|$ se obtiene a partir del módulo normal al punto.

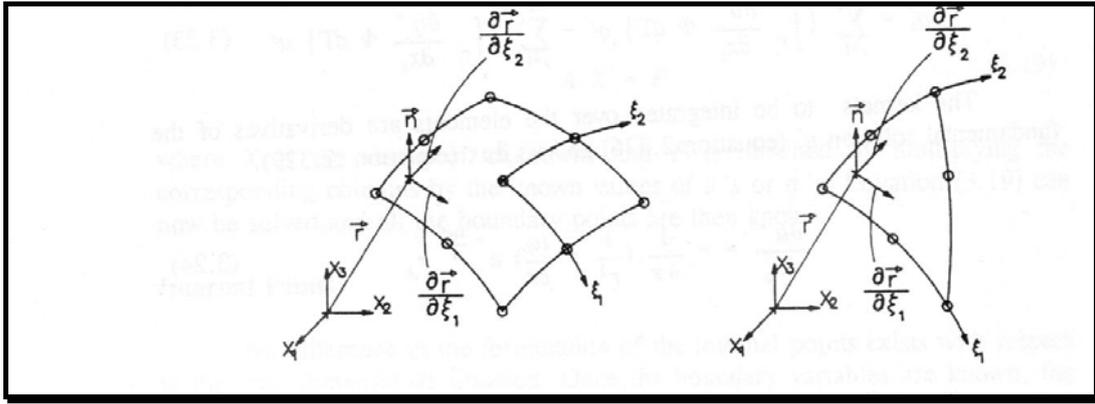


Fig. 3.3 Transformación de coordenadas para la integración numérica

Las coordenadas x_1 , x_2 y x_3 , componentes del vector r , vienen dadas en términos de las coordenadas nodales:

$$x = \Phi \cdot x_j \quad (3.31)$$

En este caso:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_k} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_k} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_k} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_k} \end{Bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} x^j \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

$$|G| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \quad (3.34)$$

Es posible obtener la expresión de G en función de las coordenadas homogéneas, sustituyendo la ecuación (3.31) en (3.33):

$$\frac{\partial x_l}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_k} \cdot x_l^j \quad ; \quad k=1,2; \quad l=1,2,3 \quad (3.35)$$

(1×Q)(Q×1)

El segundo miembro representa el producto de dos vectores, de dimensiones (1xQ) y (Qx1), respectivamente, donde Q es el número de nodos del elemento “j”. Se evalúa a continuación el producto de dos términos de este tipo:

$$\frac{\partial x_l}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial \xi_2} = x_l^{jT} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} \right)^T \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} \right) \cdot x_m^j = x_l^{jT} \cdot DC \cdot x_m^j \quad (3.36)$$

(1×Q)(Q×1)(1×Q)(Q×1)

donde:

$$DC = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} & \dots & \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

y el vector G:

$$G = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} = \begin{Bmatrix} x_2^{jT} \cdot [DC - DC^T] \cdot x_3^j \\ x_3^{jT} \cdot [DC - DC^T] \cdot x_1^j \\ x_1^{jT} \cdot [DC - DC^T] \cdot x_2^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

(3×Q) (Q×Q) (Q×3) (3×3)

Por tanto, las integrales sobre los elementos pueden escribirse como sigue:

$$\int_{\xi_2} \int_{\xi_1} u^* \phi_k |G| d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.39)$$

$$\int_{\xi_2} \int_{\xi_1} q^* \phi_k |G| d\xi_1 d\xi_2$$

las cuales ya pueden ser evaluadas numéricamente. El límite inferior de dichas integrales es -1 para elementos rectangulares, y 0 para triangulares; el superior es 1 para ambos casos.

Cuando el punto de colocación pertenece al elemento de integración, las integrales sobre los elementos requieren de alguna transformación, que será analizada a continuación. Se subdivide el elemento en regiones triangulares dejando el punto de colocación en uno de los vértices. En el caso de un elemento rectangular con el punto de colocación sobre el punto medio de uno de sus lados, la subdivisión se indica en la siguiente figura:

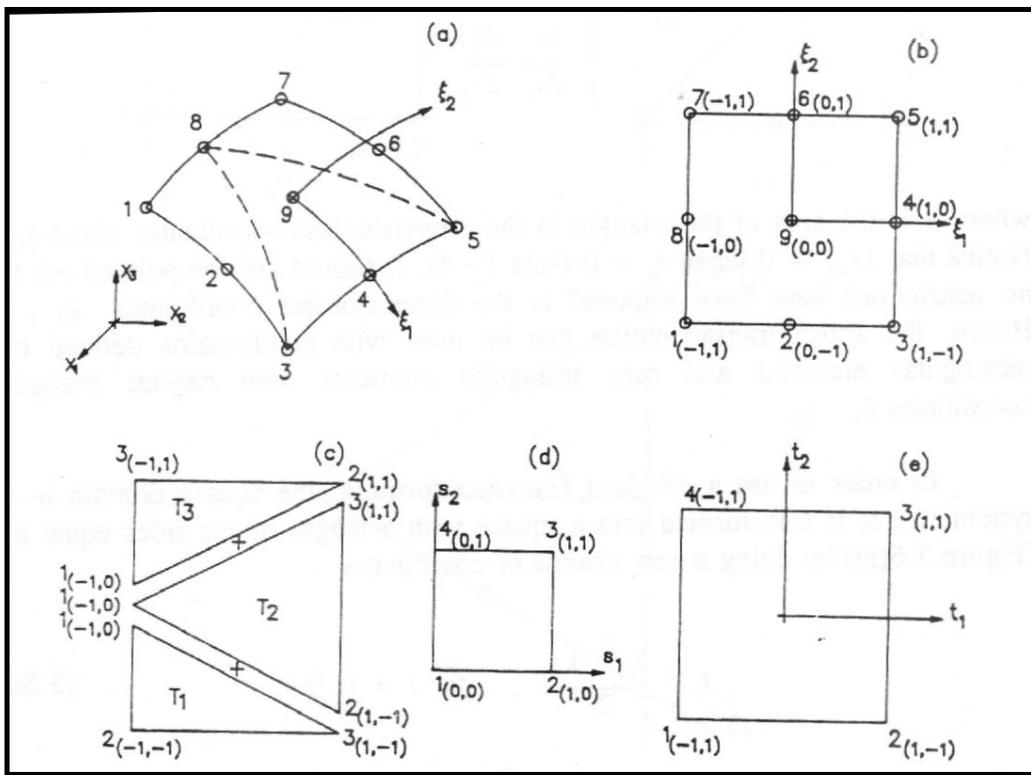


Fig. 3.4 Subdivisión de elemento rectangular para integración local cuando el punto de colocación coincide con el punto medio de un lado

Una vez subdividido el elemento, se define un nuevo sistema de coordenadas s_1, s_2 , verificando que el valor del jacobiano en el punto de colocación es nulo. Los vértices de los triángulos se denotan como 1 (punto de colocación), 2 y 3, y el dominio transformado en el sistema s_1, s_2 , es un cuadrado, como se aprecia en la figura. La relación entre s_1, s_2 , y ξ_1, ξ_2 , es la siguiente:

$$\xi_i = (1 - s_1) \cdot \xi_i^1 + s_1 \cdot (1 - s_2) \cdot \xi_i^2 + s_1 \cdot s_2 \cdot \xi_i^3 \quad \text{para } i = 1, 2 \quad (3.40)$$

El diferencial de superficie se convierte en:

$$dA = d\xi_1 d\xi_2 = |J_2| ds_1 ds_2 \quad (3.41)$$

siendo la magnitud del jacobiano:

$$|J_2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial s_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial s_2} \end{vmatrix} \quad (3.42)$$

donde A es el área del triángulo en las coordenadas planas adimensionales ξ_1, ξ_2 . Se aprecia que $|J_2| = 0$ cuando $s_1 = 0$ (lado 1-4). No se ha impuesto ninguna restricción a las coordenadas ξ_1, ξ_2 , por lo que la transformación utilizada puede ser empleada para subdominios definidos sobre elementos rectangulares o triangulares con coordenadas naturales ξ_1, ξ_2 .

Para aplicar la cuadratura gaussiana, el dominio rectangular en el sistema s_1, s_2 , se transforma en un cuadrado de lado 2 (fig 4.4.e) empleando un nuevo cambio de coordenadas:

$$s_i = \frac{t_i + 1}{2} \quad \text{para } i = 1, 2 \quad (3.43)$$

$$ds_1 ds_2 = |J_3| dt_1 dt_2 = \frac{1}{4} dt_1 dt_2 \quad (3.44)$$

Ya es posible, por tanto, evaluar las integrales (3.39) en el dominio t_1, t_2 , por medio de la cuadratura gaussiana:

$$G = \sum_{N^\circ \text{ triángulos}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u^*(t_1, t_2) \phi_k(t_1, t_2) |G(t_1, t_2)| (t_1 + 1) \frac{A}{4} dt_1 dt_2 \quad (3.45)$$

Por último, destacar que, cuando el punto de colocación se encuentre en el punto medio de un elemento triangular, la subdivisión se lleva a cabo como se indica en la siguiente figura:

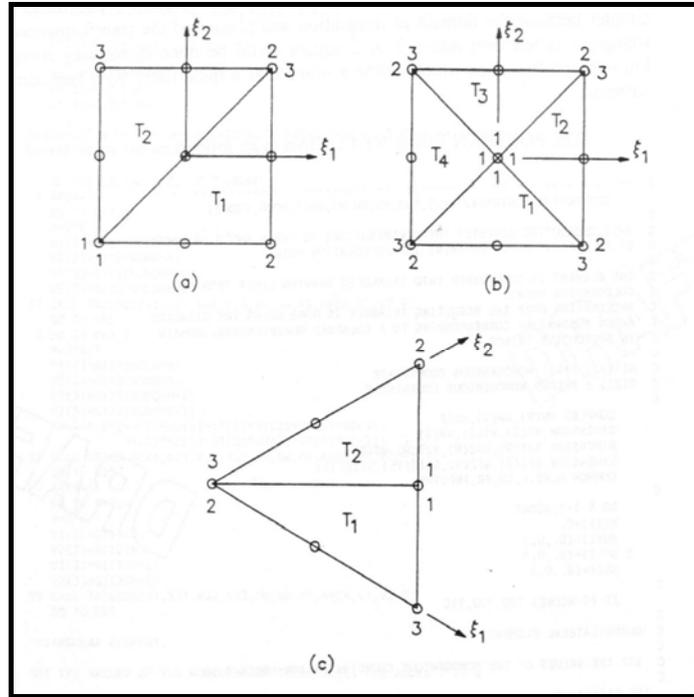


Fig. 3.5 Subdivisión de elemento triangular y rectangular

4. Modelo Acoplado

4.1. Planteamiento del problema

Una vez visto el MEF y el MEC se llega al punto vital de este proyecto, la interconexión de ambos métodos a través de la interfase.

Supóngase un sólido cualquiera (fig. 4.1) con unas condiciones de contorno, tanto en desplazamientos como en tensiones:

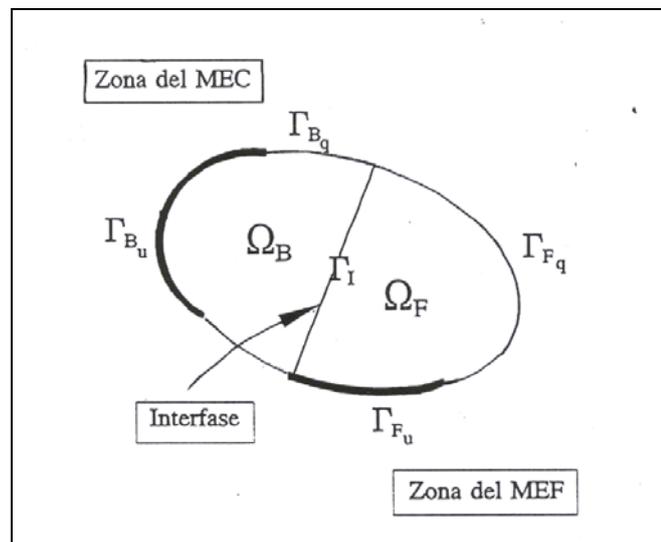


Fig. 4.1

Según se observa en la figura, el sólido se ha dividido en dos regiones, tratándose una de ellas por el Método de los Elementos de Contorno y la otra mediante los Elementos Finitos. Por lo tanto, considérese el problema formado por dos subregiones de forma que el dominio sea:

$$\Omega \equiv \Omega_B \cup \Omega_F \quad (4.1)$$

y el contorno:

$$\Gamma \equiv \Gamma_{B_u} \cup \Gamma_{B_q} \cup \Gamma_{F_u} \cup \Gamma_{F_q} \quad (4.2)$$

con la condición:

$$\Omega_B \cap \Omega_F \equiv \Gamma_I \quad (4.3)$$

donde:

Ω_B es el dominio del MEC

Ω_F es el dominio del MEF

y

Γ_{F_u} contorno de la región del MEF con desplazamientos impuestos

Γ_{F_q} contorno de la región del MEF con fuerzas impuestas

Γ_{B_u} contorno de la región del MEC con desplazamientos impuestos

Γ_{B_q} contorno de la región del MEC con tracciones impuestas

Γ_I es la interfase del problema

Definidos los contornos y los dominios, se está en condiciones de resolver el problema para un sólido con un reparto según el de la fig. 4.1.

4.2. Compatibilidad

La compatibilidad entre el MEF y el MEC se establece directamente a lo largo de la interfase, puesto que, según se indica en (4.3), los únicos puntos comunes a ambas zonas son los de Γ_I . Por ello, se obligará la igualdad de desplazamientos punto a punto a lo largo de la frontera entre los Elementos Finitos y los de Contorno.

Los desplazamientos de los puntos del *Elemento de Contorno* se expresan en función de los nodales interpolando con las funciones de forma, de aquí que:

$$u_B^i = \sum_{j=1}^{j=9} N_j(\xi, \eta) u_{B_j}^i \quad (4.4)$$

Si pensamos ahora en un *Elemento Finito* se tiene:

$$u_F^i = \sum_{j=1}^{j=27} N_j(\xi, \eta, \zeta) u_{F_j}^i \quad (4.5)$$

donde se puede ver que las funciones de forma de los nodos no pertenecientes a la interfase son nulas al particularizarlas en una coordenada natural constante (la que es fija en la cara que está en la interfase).

Puesto que, al particularizar para dicha coordenada natural constante, las funciones de forma de (4.5) serán iguales a las de (4.4), la igualdad punto a punto a lo largo de la interfase se satisface cuando se da la igualdad de desplazamientos nodales:

$$u_{F_j}^i = u_{B_j}^i \quad (4.6)$$

Esta es la *ecuación de compatibilidad en la interfase*. Para utilizarla se impondrá implícitamente en las ecuaciones, suponiéndose a priori igualdad en los desplazamientos nodales.

4.3. Equilibrio

Cuando se realizó el análisis del MEF, en el capítulo 2, se partió del principio de los trabajos virtuales, en el cual se igualaban dos términos, uno debido a la energía por deformación y el otro debido a la aplicación de fuerzas externas (ver ecuación (2.9)). Las fuerzas externas se consideraban de volumen y superficiales. Si suponemos que las tracciones que transmiten los Elementos de Contorno a través de la interfase, son tracciones aplicadas sobre el contorno de Elementos Finitos, podremos considerar un conjunto de ecuaciones de equilibrio igualando éstas a las del término del PTV.

Supongamos que vamos a equilibrar el trozo de interfase ilustrado en la figura 4.2. Las tracciones que existen en el elemento del MEC se transmiten sobre el elemento finito como condiciones de contorno en tensiones, de forma que:

$$Q_{B_i} + Q_{F_i} = 0 \quad (4.7)$$

donde:

Q_{F_I} es el vector de tracciones a nivel puntual del MEF

Q_{B_I} es el vector de tracciones a nivel puntual del MEC

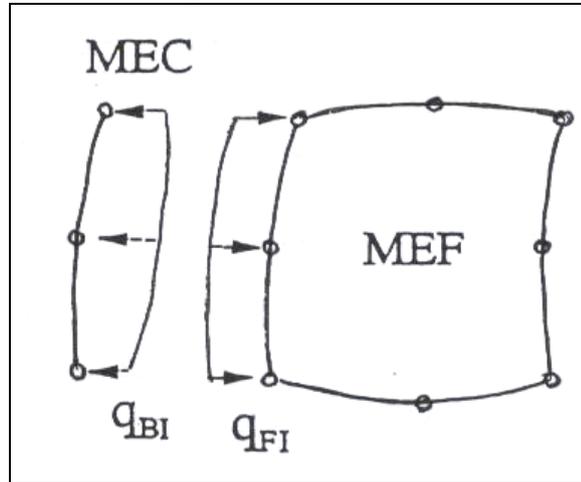


Fig.4.2

Condiciones de contorno en tracciones que se transforman en fuerzas nodales equivalentes a través de la expresión:

$$\int_{\Gamma} N^t Q_{F_I} d\Gamma = f_I \quad (4.8)$$

Resumiendo (4.7) y (4.8) se llega a la ecuación de ligadura:

$$\int_{\Gamma} N^t Q_{B_I} d\Gamma + f_I = 0 \quad (4.9)$$

Expresando las tracciones a nivel puntual en función de las existentes a nivel nodal, y realizando un cambio de variables a coordenadas naturales, nos queda:

$$Q_{B_I} = N q_{B_I} \quad (4.10)$$

$$\left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^t N |G| d\xi d\eta \right] q_{B_I} + f_I = 0$$

donde:

q_{B_i} son las tracciones a nivel nodal del elemento de contorno

Por comodidad a la hora de distribuir todas las ecuaciones en la matriz general, conviene expresar la ecuación (4.10) en función de una matriz A de forma que las ecuaciones de ligadura son:

$$A \cdot q_{B_i} + f_I = 0 \quad (4.11)$$

donde:

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^t N |G| d\xi d\eta \quad (4.12)$$

4.4. Montaje global

En los capítulos 2 y 3 se presentaron el Método de Elementos Finitos y Elementos de Contorno, respectivamente.

Para proceder al montaje del sistema global de ecuaciones hay que ordenar las ecuaciones de ambos métodos.

Para el caso de los Elementos Finitos, recordando la ecuación (2.22) se tiene:

$$K' \cdot u(\omega) = f \quad (4.13)$$

Esta ecuación se puede expresar, teniendo en cuenta la interfase en:

$$\begin{aligned} K'_{II} \cdot u_I + K'_{IF} \cdot u_F &= f_I + f_{F_i}^c \\ K'_{FI} \cdot u_I + K'_{FF} \cdot u_F &= f_F + f_F^c \end{aligned} \quad (4.14)$$

Descomponiendo ahora los desplazamientos en conocidos y desconocidos, y quitando las filas correspondientes a reacciones del contorno Γ_F , el sistema quedará:

$$\begin{aligned}
 -f_I + K'_{II} \cdot u_I + K'_{IF} \cdot u_F &= f_{F_I}^c - K'_{IF}{}^c \cdot u_F^c \\
 K'_{FI} \cdot u_I + K'_{FF} \cdot u_F &= f_F^c - K'_{FF}{}^c \cdot u_F^c
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Por otra parte, para el método de los Elementos de Contorno, como expresa la ecuación (3.21) , se parte de:

$$H \cdot u = G \cdot q \tag{4.16}$$

Esta ecuación, al igual que se hizo para los Elementos Finitos, se puede expresar, teniendo en cuenta la interfase, como:

$$\begin{aligned}
 H_{BB} \cdot u_B + H_{BI} \cdot u_I - G_{BB} \cdot q_B - G_{BI} \cdot q_{BI} &= 0 \\
 H_{IB} \cdot u_B + H_{II} \cdot u_I - G_{IB} \cdot q_B - G_{II} \cdot q_{BI} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno, la ecuación (4.17) se convierte en:

$$\begin{aligned}
 H_{BB} \cdot u_B - G_{BB} \cdot q_B - G_{BI} \cdot q_{BI} + H_{BI} \cdot u_I &= G_{BB}^c \cdot q_B^c - H_{BB}^c \cdot u_B^c \\
 H_{IB} \cdot u_B - G_{IB} \cdot q_B - G_{II} \cdot q_{BI} + H_{II} \cdot u_I &= G_{IB}^c \cdot q_B^c - H_{IB}^c \cdot u_B^c
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Tomando las ecuaciones (4.11), (4.15) y (4.18) y distribuyéndolas en una matriz de forma que no existan ceros en la diagonal y no haya posibles singularidades por movimientos como sólido rígido, se llega finalmente al sistema de ecuaciones. La matriz tendrá, en consecuencia, la siguiente estructura:

	$3 \cdot N - 3 \cdot n_I$	$3 \cdot n_I$	$3 \cdot n_I$	$3 \cdot n_I$	N_F		
$3 \cdot N$	$H_B - G_B$	$-G_I$	0	H_I	0	u_B	=
						q_B	
						q_{BI}	
						f_I	
$3 \cdot n_I$	0	A	I	0	0	u_I	$G_B^c q_B^c - H_B^c u_B^c$
	0	0	$-I$	K_{II}'	K_{IF}'	f_I	0
	0	0	0	K_{FI}'	K_{FF}'	u_I	$f_{FI}^c - K_{IF}^c u_F^c$
N_F	0	0	0	K_{FI}'	K_{FF}'	u_F	$f_F^c - K_{FF}^c u_F^c$

Fig 4.3 Sistema global de ecuaciones

donde:

- u_B, q_B son las incógnitas del MEC fuera de la interfase
- q_{BI} son las incógnitas de tracciones en la interfase
- f_I son fuerzas nodales aplicadas sobre los nodos del MEF en la interfase
- u_I son las incógnitas en desplazamientos de la interfase
- u_F son las incógnitas en desplazamientos del MEF fuera de la interfase
- N número de nodos del MEC
- n_I número de nodos de la interfase
- N_F número de incógnitas en despl. del MEF excepto las de la interfase

4.5. Consideraciones de simetría

Cuando existe un plano de simetría en el problema bajo estudio, sólo es necesario estudiar (discretizar) una de las mitades, calculándose la otra mitad por simetría.

Supongamos que vamos a estudiar la siguiente figura, con el plano xz de simetría, tal y como se muestra:

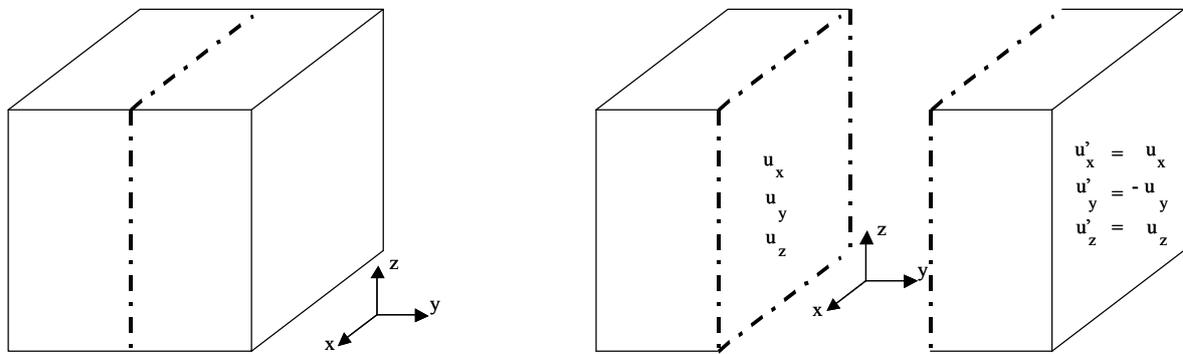


Fig. 4.4 Condiciones de simetría

Para resolver este problema, se aprovechan las condiciones de la simetría mostradas en la figura anterior y se estudia (discretiza) una de las dos mitades. Se discretizará con Elementos Finitos y Elementos de Contorno, según el método de cálculo a aplicar en las distintas regiones. Así, un ejemplo de discretización sería el siguiente:

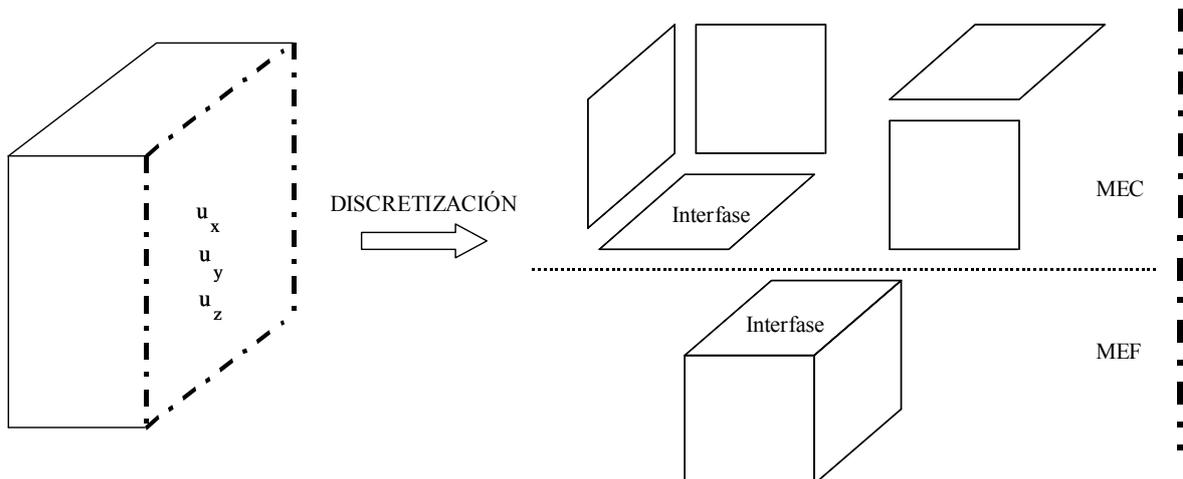


Fig. 4.5. Discretización del modelo

Como se observa, una región ha sido discretizada con Elementos Finitos (MEF) y otra con Elementos de Contorno (MEC). El programa calculará cada zona

por separado, teniendo en cuenta las condiciones de simetría, generando, en cada caso, las ecuaciones (4.15) y (4.18).

Una vez realizado esto, y para completar el sistema global de ecuaciones, se imponen las condiciones de compatibilidad y de equilibrio en la interfase, generando la ecuación de enlace (4.11).

Con todo ello, ya estamos en disposición de resolver el sistema de ecuaciones y calcular las incógnitas correspondientes.

5. Descripción del código desarrollado

5.1. Introducción

En este capítulo se describe la elaboración del código que realiza todas las tareas descritas en el apartado anterior, necesarias para resolver problemas de acoplamiento MEC – MEF.

Lo primero que se hizo fue estudiar el código basado en el Método de los Elementos de Contorno que había sido desarrollado con anterioridad en el Departamento de Ingeniería Civil y que iba a servir de base para los cálculos referentes a esta parte del problema en este proyecto.

A continuación, se desarrolló un código que permitía el estudio de problemas armónicos con Elementos Finitos 3D (figura 2.2). Se comprobó la buena aptitud de este código y se utilizó como base para los cálculos referentes a esta parte del problema.

Seguidamente, se formuló el acoplamiento en base a condiciones de equilibrio y compatibilidad en la interfase, de manera que se generasen las ecuaciones adicionales necesarias.

Por último, se creó un código conjunto que hiciera uso de las rutinas necesarias de los programas MEC y MEF y que, generando las ecuaciones del acoplamiento, pudiera analizar problemas en los que coexistan unas regiones discretizadas con un método y otras con otro.

El diagrama de flujo del programa desarrollado se muestra a continuación:

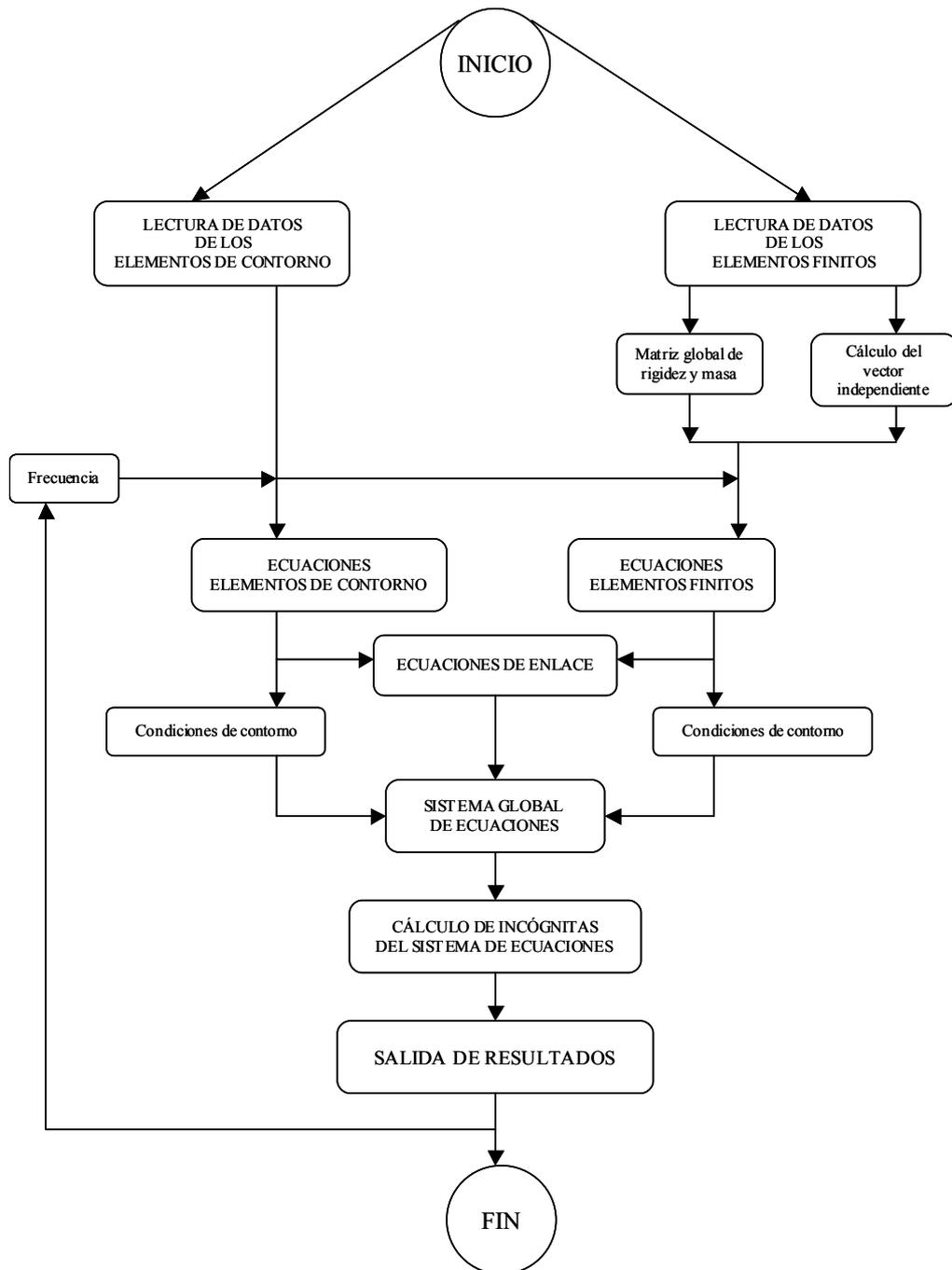


Fig. 4.6 Diagrama de flujo

5.2. Rutina principal

La rutina principal del programa “Acoplamiento” ejecuta el esquema general anterior, para lo cual realiza llamadas a diferentes subrutinas. Éstas se describen a continuación:

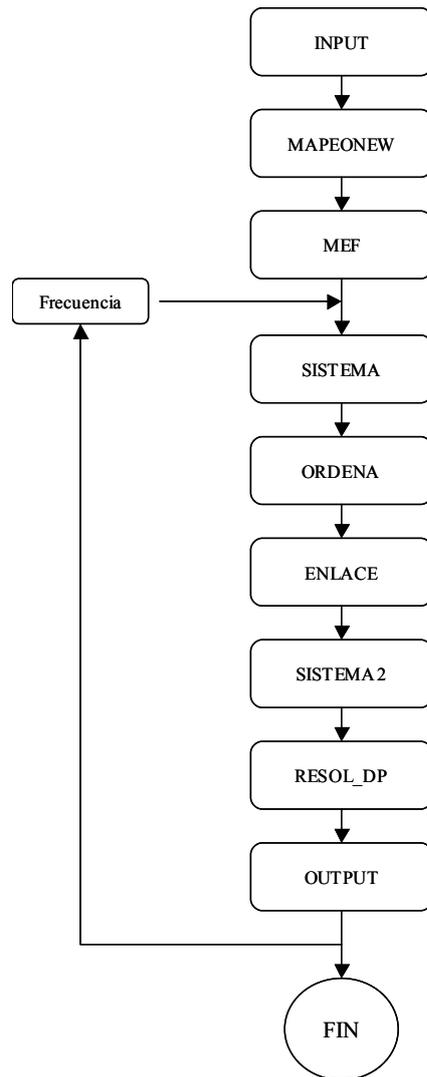


Fig. 4.7. Rutina principal

Subrutina INPUT

En esta subrutina se procede a la lectura de datos de Elementos de Contorno y Elementos Finitos. Éstos se componen de n^0 de elementos, n^0 de nodos, coordenadas, conectividades, condiciones de contorno y frecuencia a analizar principalmente.

Subrutina MAPEONEW

Se determina la posición que ocupan en la matriz global los núcleos correspondientes a cada nodo de la discretización de Elementos de Contorno.

Subrutina MEF

Se calculan las matrices globales de rigidez y masa para la región discretizada con Elementos Finitos, así como el vector independiente. Es decir, se calculan las matrices K y M y el vector f de la ecuación (2.22).

Subrutina SISTEMA

Se calculan los parámetros de la ecuación (4.18), teniendo en cuenta las condiciones de contorno y colocando los términos en la matriz según las posiciones asignadas en la anterior subrutina *MAPEONEW*.

Subrutina ORDENA

Se ordenan los términos generados en la subrutina anterior (SISTEMA), generando el primer bloque del sistema global de ecuaciones, tal y como se muestra:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & 3N - 3n_I & 3n_I & 3n_I & 3n_I & N_F \\
 \hline
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 3N \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 H_B - G_B & -G_I & 0 & H_I & 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 u_B \\
 q_B \\
 \hline
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 G_B^c q_B^c - \\
 H_B^c u_B^c \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 q_{BI} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Es interesante destacar que en esta subrutina se almacenan las posiciones de G_I y de H_I , que serán utilizadas en posteriores subrutinas.

Subrutina ENLACE

Se calculan las ecuaciones de enlace definidas por (4.11) y (4.12), y se colocan en el lugar correspondiente de la matriz global. Para ello se utilizarán las

posiciones de G_I almacenadas en la subrutina anterior. En esta subrutina, el bloque obtenido es:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline 3n_I \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3N-3n_I & 3n_I & 3n_I & 3n_I & N_F \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & A & I & 0 & 0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline f_I \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Subrutina SISTEMA2

A partir de las matrices K y M calculadas en la subrutina MEF y teniendo en cuenta las condiciones de contorno, se obtienen las ecuaciones (4.15). Para colocarlas correctamente en la matriz global se tienen en cuenta las posiciones de H_I almacenadas en la subrutina ORDENA. Se genera el último bloque de la matriz global de ecuaciones.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline 3n_I \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline N_F \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3N-3n_I & 3n_I & 3n_I & 3n_I & N_F \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & -I & K'_{II} & K'_{IF} \\ \hline 0 & 0 & 0 & K'_{FI} & K'_{FF} \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline u_I \\ \hline u_F \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline f^c_{FI} - K'^c_{IF} u^c_F \\ \hline f^c_F - K'^c_{FF} u^c_F \\ \hline \end{array}$$

Subrutina RESOL_DP

Subrutina que resuelve el sistema global de ecuaciones, obteniendo los valores de desplazamiento y tensión de todos los nodos.

Subrutina OUTPUT

Finalmente se escriben los valores que se quieren analizar en un fichero de salida.

6. Aplicaciones

Mientras que la comprobación del correcto funcionamiento de las subrutinas de cálculo mediante el Método de los Elementos Finitos es una tarea relativamente sencilla, la validación del código del acoplamiento entre Elementos Finitos y Elementos de Contorno no resulta tan fácil, pues para éste último problema no existen soluciones analíticas genéricas con las que contrastar los resultados.

Para validar los resultados ofrecidos por el código de Elementos Finitos, se compararon los resultados obtenidos por el mismo para diversos ejemplos. Estos ejemplos no han sido incluidos en el proyecto debido a que se entiende que no tienen el interés necesario.

Por otro lado, teniendo en cuenta que las subrutinas de cálculo relativas al Método de los Elementos de Contorno, desarrolladas previamente en el departamento de Ingeniería Civil, han sido sobradamente contrastadas de antemano, no queda más que tratar de comprobar el correcto funcionamiento de las subrutinas referidas al acoplamiento y, de forma genérica, el buen funcionamiento del sistema en su conjunto.

Con este objetivo se presentan en este capítulo tres ejemplos de cálculo.

6.1. Ejemplo 1

6.1.1. Definición del modelo

La figura 6.1 representa un cubo de altura unidad, sometido a una carga armónica. Las condiciones de contorno se pueden apreciar en dicha figura:

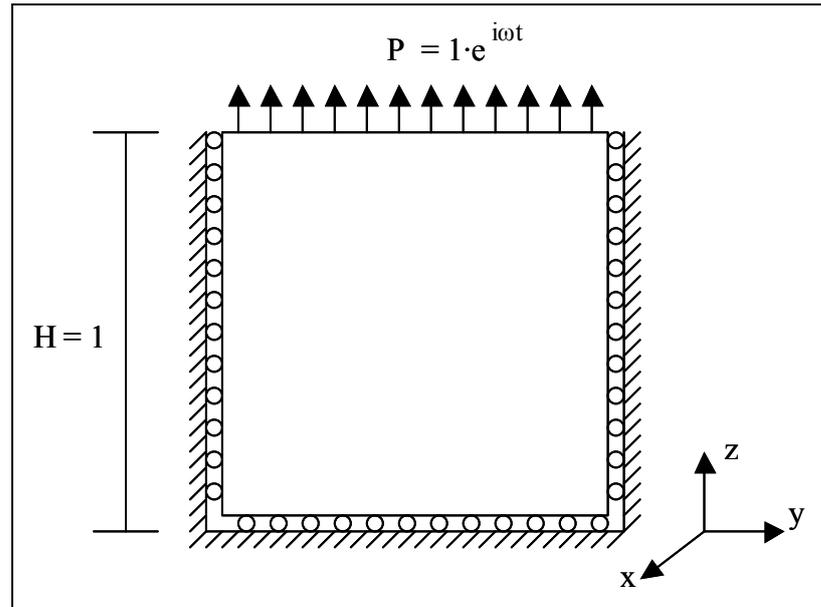


Fig. 6.1 Ejemplo 1

Las propiedades del material que constituye el cubo son:

- Coeficiente de Poisson $\rightarrow \nu = 0,25$
- Módulo de elasticidad (Young) $\rightarrow E = 2,5 \text{ N/m}^2$
- Densidad $\rightarrow \rho = 1 \text{ kg/m}^3$

6.1.2. Solución analítica

En primer lugar obtenemos la solución analítica de este problema, que servirá como base de comprobación de los resultados numéricos del programa.

El cubo anterior ofrece una respuesta compuesta, tal como se indica en la figura 6.2:

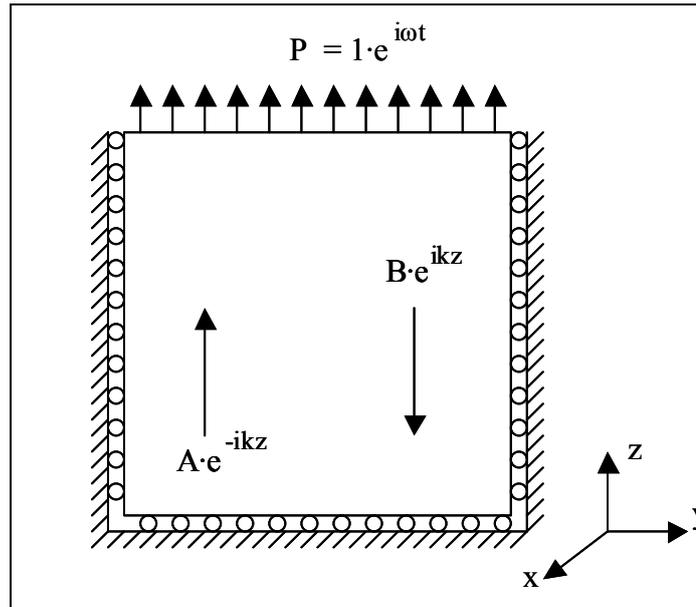


Fig. 6.2 Respuesta ante sollicitación armónica

Por tanto, la ecuación de onda que define la posición de un punto z se define como:

$$u_z = Ae^{-ikz} + Be^{ikz} \quad (6.1)$$

donde $k = \frac{\omega}{C}$ es el número de onda y C es la velocidad de onda.

Según estemos ante ondas P u ondas S , el valor de C es:

$$\text{Ondas S} \rightarrow C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

$$\text{Ondas P} \rightarrow C_p = C_s \cdot \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}}$$

Para hallar los valores de las constantes A y B necesitamos aplicar las condiciones de contorno; en este caso son:

$$(1) \quad z=0 \rightarrow u_z = 0$$

$$(2) \quad z = H \rightarrow \sigma_z = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z = (\lambda + 2\mu) \left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z=H} = P$$

De (1) se obtiene:

$$(3) \quad A + B = 0 \rightarrow B = -A$$

De (2) se obtiene:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -ikA \cdot e^{-ikz} + ikB \cdot e^{ikz}$$

$$(4) \quad P = (\lambda + 2\mu) \cdot (-ikA \cdot e^{-ikH} + ikB \cdot e^{ikH})$$

Introduciendo (3) en (4):

$$(5) \quad A = -\frac{P}{(\lambda + 2\mu) \cdot ik \cdot (e^{-ikH} + e^{ikH})}$$

Combinando las expresiones (6.1), (3) y (5) se llega a la expresión de u_z :

$$u_z = \frac{P}{(\lambda + 2\mu) \cdot ik \cdot (e^{-ikH} + e^{ikH})} \cdot (e^{ikz} - e^{-ikz}) \quad (6.2)$$

Se puede simplificar aún más esta expresión haciendo uso de las relaciones siguientes:

$$(6) \quad e^{ix} = \cos x + i \cdot \text{sen} x$$

$$(7) \quad e^{-ix} = \cos x - i \cdot \text{sen} x$$

Haciendo (6) + (7) y (6) - (7) obtenemos:

$$(8) \quad e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$$

$$(9) \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2 \cdot i \cdot \text{sen} x$$

Introduciendo las relaciones (8) y (9) en la expresión (6.2):

$$u_z = \frac{P \cdot \text{sen}(kz)}{(\lambda + 2\mu) \cdot k \cdot \cos(kH)} \quad (6.3)$$

6.1.3. Discretización del modelo

Para resolver este problema con el programa y comprobar los resultados del acoplamiento, se ha separado el cubo en dos regiones tal y como se muestra:

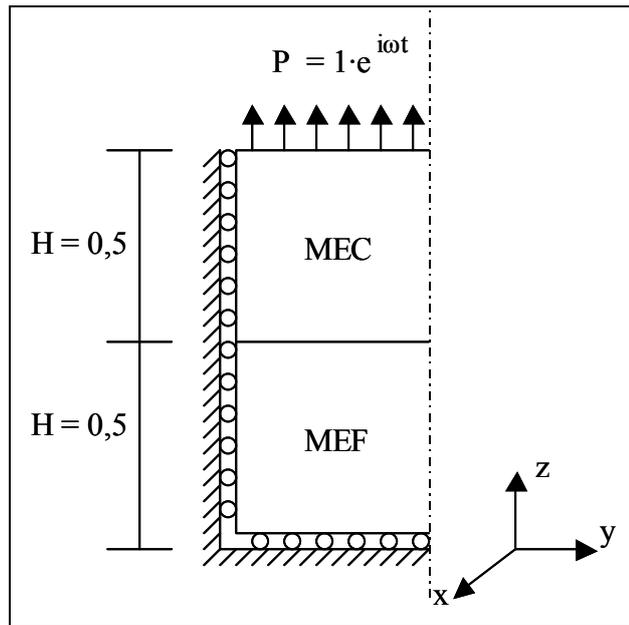


Fig. 6.3 Zonas MEF y MEC del modelo

Como se observa, sólo se discretiza la mitad. La otra mitad se calcula por simetría, tal y como se describió en el capítulo 4.

Los elementos usados para la discretización son:

Zona MEC

La región de Elementos de Contorno se ha discretizado con elementos cuadriláteros de segundo orden, tal y como se pueden ver en la tabla 3.1. En la siguiente figura se puede apreciar la discretización adoptada:

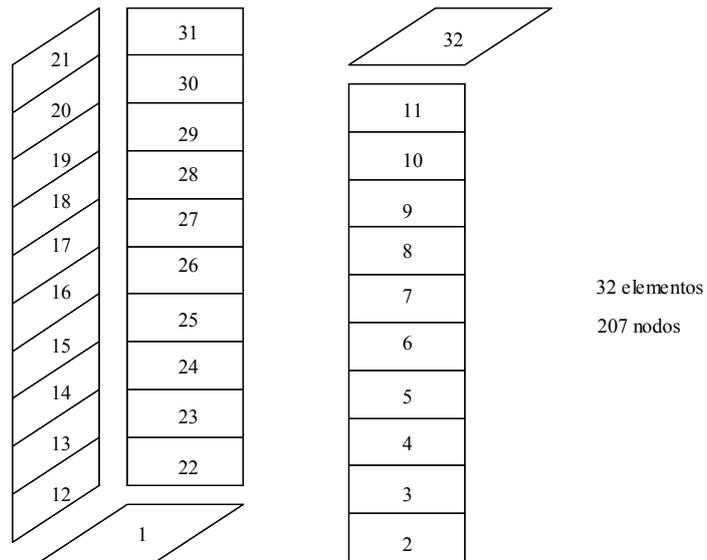


Fig. 6.4 Discretización MEC

Zona MEF

La zona de Elementos Finitos se ha discretizado con elementos lagrangianos de 27 nodos (ver figura 2.2). La región discretizada queda así:

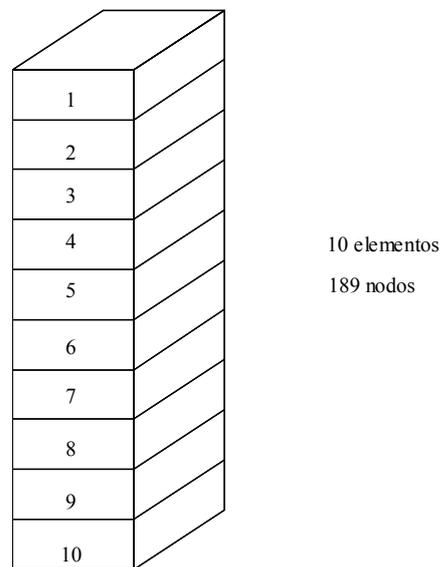


Fig. 6.5 Discretización MEF

En las anteriores discretizaciones se puede ver que las dimensiones x e y se han discretizado con un solo elemento, mientras que la dimensión z, que es la

que está bajo estudio, se ha discretizado con 20 alturas en total, para obtener una respuesta más ajustada a la realidad.

6.1.4. Resultados

En este ejemplo, los resultados que se van a obtener como referencia para validar el código son los siguientes:

- Desplazamiento vertical de la cara superior
- Desplazamiento vertical en la interfase
- Tensiones en la interfase
- Perfil de desplazamientos

6.1.4.1. Desplazamiento vertical de la cara superior

La solución analítica se calcula a partir de la ecuación (6.3), para $z = H = 1$. Se ha utilizado w_1 (primera frecuencia natural) para normalizar las frecuencias, y U_e (desplazamiento cuando $w = 0$) para normalizar los desplazamientos.

El valor de w_1 (primera frecuencia natural) se obtiene sabiendo que ésta se produce cuando $4H = \lambda$, por tanto:

$$4H = \lambda = C_p \cdot T = C_p \cdot \frac{2\pi}{w_1} \quad (6.4)$$

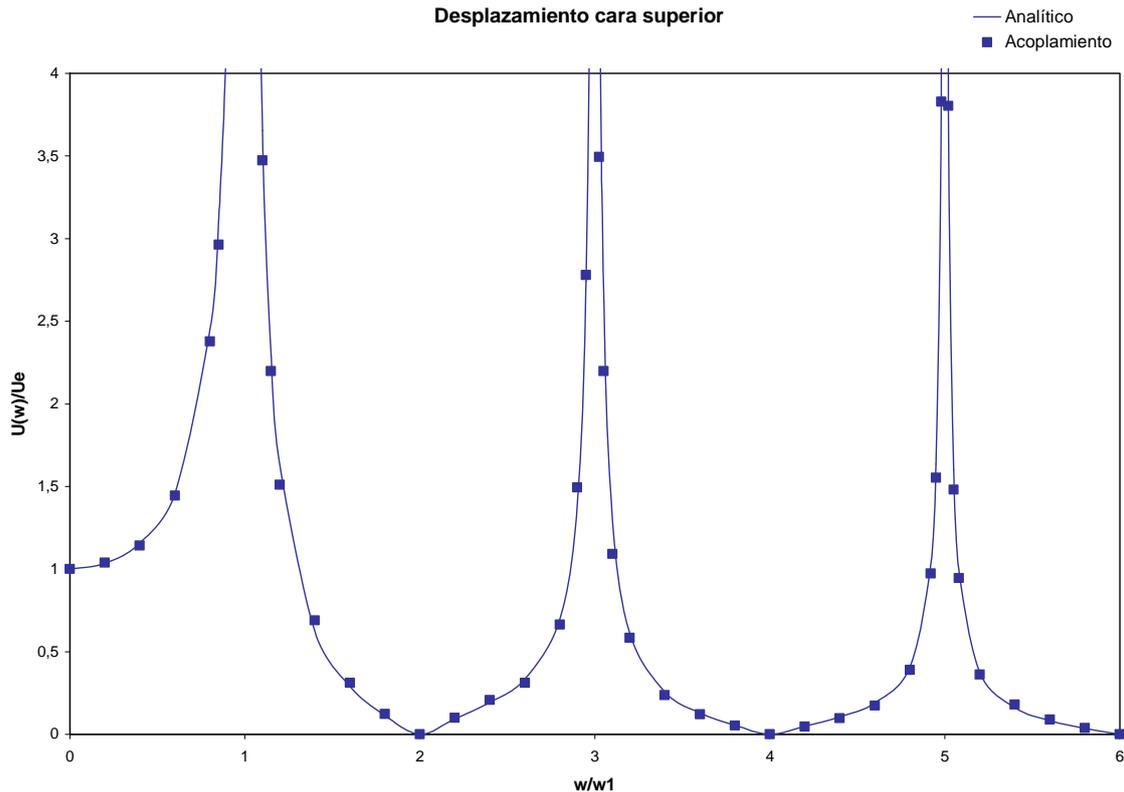
$$w_1 = \frac{C_p \cdot \pi}{2H}$$

En el apartado 6.1.2 se vio que:

$$C_p = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}}$$

Sabiendo que $\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$, ya se está en disposición, a partir de las propiedades del material, de obtener w_1 , cuyo valor es $w_1 = 2,7207 \text{ s}^{-1}$.

Con todo ello, los resultados obtenidos se muestran en la gráfica 6.1:



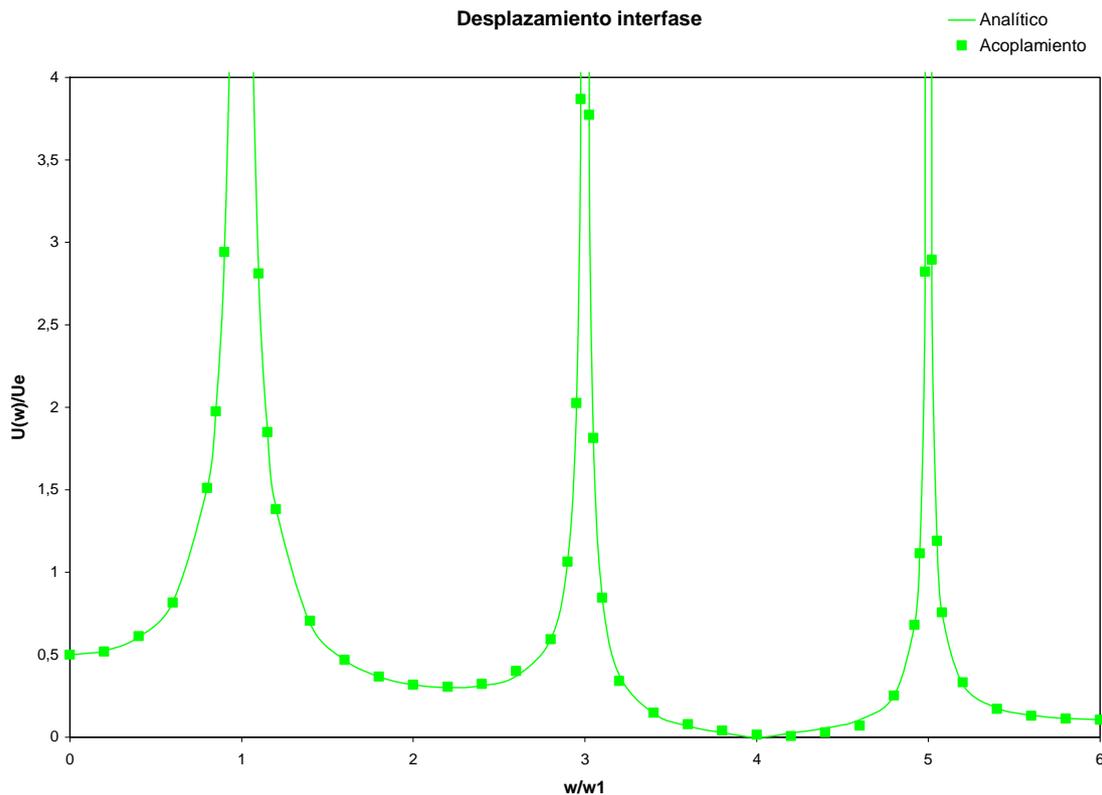
Gráfica 6.1

Se observa como el cubo presenta picos en desplazamiento para valores de $w/w_1 = 1, 3, 5$. Esto se produce tanto para la solución analítica como para la que devuelve el programa, por lo tanto, se puede decir que el acoplamiento de ambos métodos, en principio, funciona.

6.1.4.2. Desplazamiento vertical en la interfase

En este caso la solución analítica se obtiene de igual forma que la anterior, para $z = 0,5$. Se ha utilizado igualmente el valor de w_1 y el valor de U_e para normalizar los valores de frecuencia y desplazamiento, respectivamente.

La solución obtenida se observa en la gráfica 6.2:



Gráfica 6.2

Se puede apreciar como los valores máximos de desplazamiento también se producen para los mismos valores de w que en el caso anterior, como era de esperar.

Por otro lado, en este caso el valor de $U(w)$ para $w = 0$ (estático), es $1/2$. Esto es lógico debido a que la interfase está en $z = 0,5$ y el valor U_e escogido para normalizar es el desplazamiento vertical de la cara superior, lo que indica

que el desplazamiento de la interfase, para el caso estático, es justamente la mitad que el desplazamiento de la cara superior.

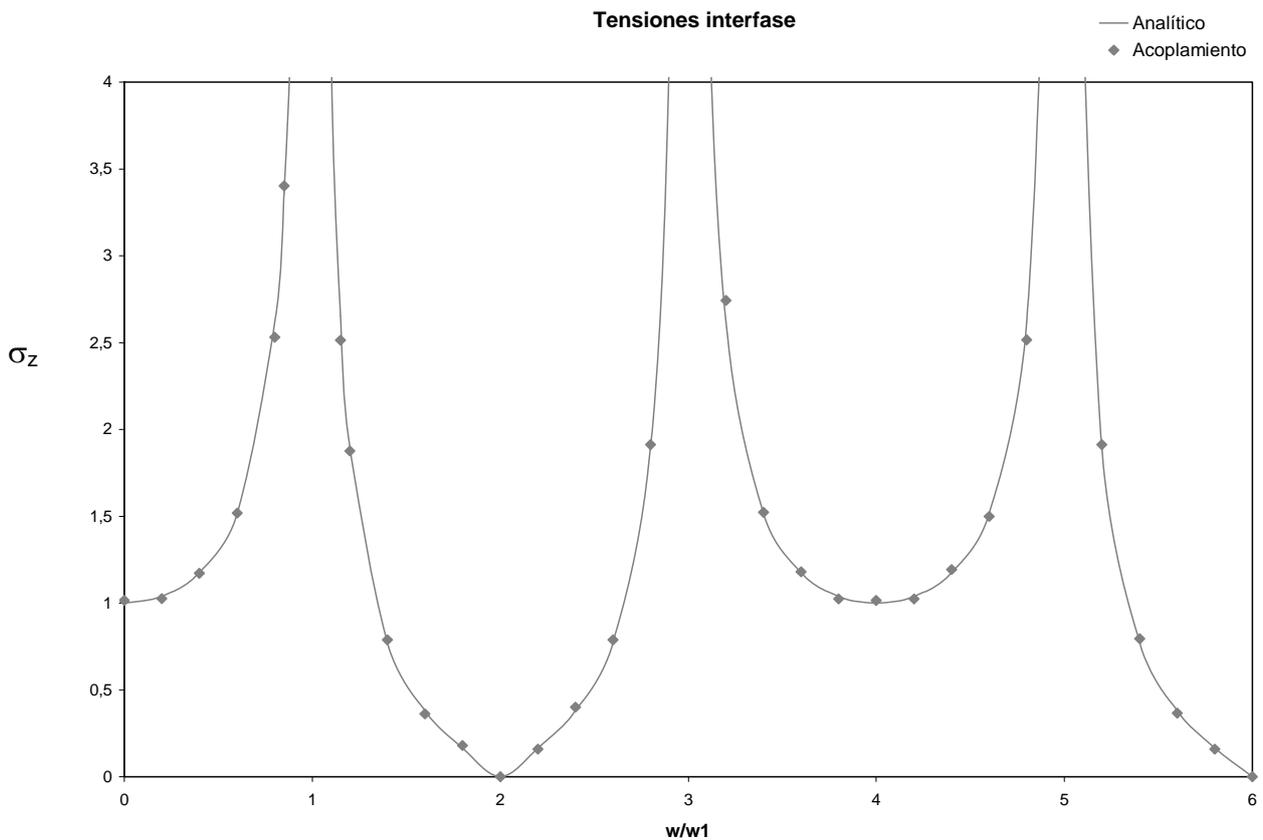
Los valores numéricos se siguen ajustando a la solución analítica.

6.1.4.3. Tensiones en la interfase

Para calcular el valor analítico de las tensiones en la interfase se parte de la ecuación (6.3) y de la ley de comportamiento, de manera que, en este caso,

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

En la gráfica 6.3 se muestran los resultados unas vez más, comprobando el buen funcionamiento del código.

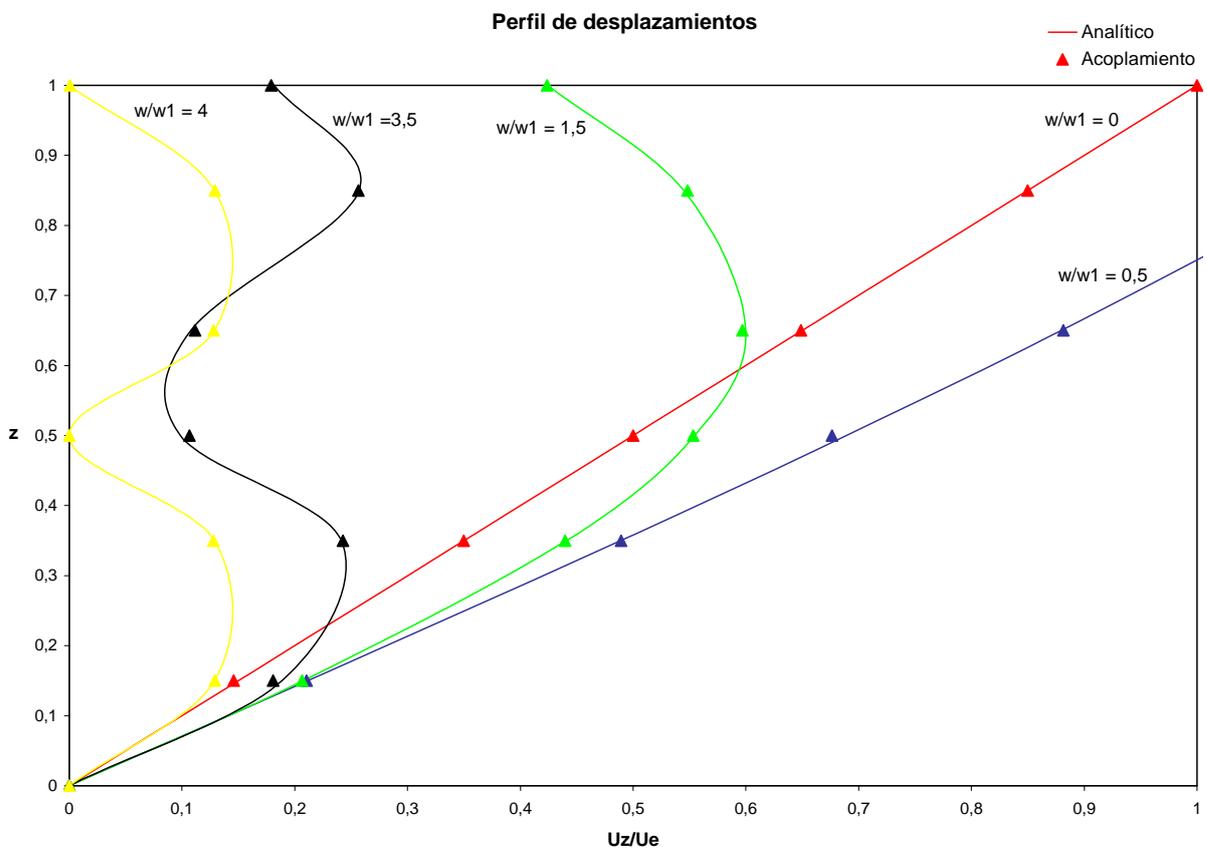


Gráfica 6.3

6.1.4.4. Perfil de desplazamientos

Para terminar con este ejemplo, se obtiene un perfil de desplazamientos del cubo para distintos valores de w . Básicamente, se trata de obtener para una frecuencia determinada, cual es desplazamiento vertical en diferentes alturas del cubo y representarlás, obteniendo así una “imagen” de cómo está evolucionando el cubo en ese instante.

En la gráfica 6.4 se puede ver dicha evolución para varias frecuencias:



Gráfica 6.4

6.2. Ejemplo 2

6.2.1. Definición del modelo

En este caso el modelo elegido es un cubo con las condiciones de contorno que se muestran:

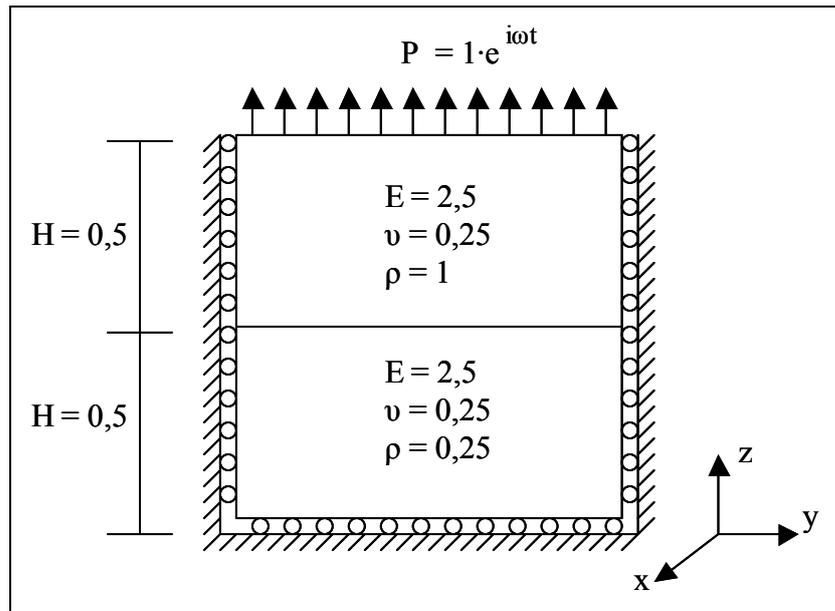


Fig. 6.6 Ejemplo 2

Ahora, la mitad inferior del cubo tiene la densidad 4 veces menor que la densidad de la mitad superior, manteniéndose el resto de propiedades iguales. Con esto se consigue que la velocidad de propagación de la región MEC sea la mitad que la de la región MEF.

Recordando, el valor de la velocidad de onda es $C_p = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}}$.

Entonces:

$$C_{p_{MEC}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_{MEC}}} \cdot \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}}$$

$$C_{p_{MEF}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_{MEF}}} \cdot \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}}$$

Como $\rho_{MEC} = 4\rho_{MEF}$, sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene la relación: $C_{P_{MEC}} = \frac{1}{2}C_{P_{MEF}}$

6.2.2. Solución analítica

Para obtener la solución analítica, se ha de tener en cuenta las dos regiones, debido a que, al variar la densidad, las regiones tienen, como se comentó anteriormente, diferentes velocidades de onda y, con ello, diferentes valores de k (número de onda).

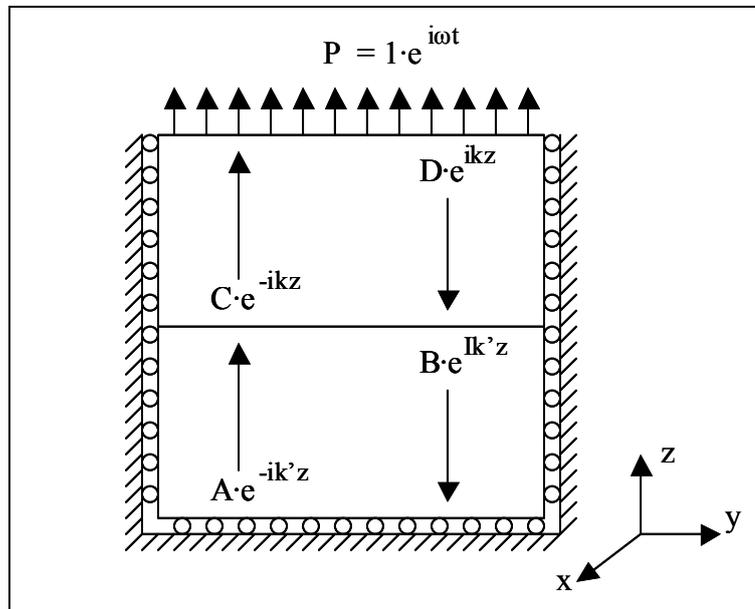


Fig. 6.7 Respuesta ante sollicitación armónica

Las ecuaciones que se obtienen son:

Mitad superior:

$$u_z^1 = C e^{-ikz} + D e^{ikz} \quad (6.5)$$

Mitad inferior:

$$u_z^2 = A e^{-ik'z} + B e^{ik'z} \quad (6.6)$$

Como se observa hay dos ecuaciones con cuatro incógnitas. Para resolver el sistema se aplican las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} z = 0 &\rightarrow u_z^2 = 0 \\ z = H &\rightarrow u_z^1 = P \\ z = H/2 &\rightarrow u_z^1 = u_z^2 \\ z = H/2 &\rightarrow \sigma_z^1 = \sigma_z^2 \end{aligned}$$

Con las anteriores condiciones ya estamos en disposición de obtener las cuatro incógnitas. Operando y sustituyendo, los valores de A, B, C y D que se obtienen son:

$$B = -A \quad (6.7)$$

$$B = \frac{C \cdot e^{-ikH/2} + D \cdot e^{ikH/2}}{2i \cdot \text{sen}(k'H/2)} \quad (6.8)$$

$$C = \frac{p \cdot M \cdot e^{ikH/2}}{(\lambda + 2\mu) \cdot ik \cdot (e^{ikH} - M \cdot e^{-ikH/2})} \quad (6.9)$$

$$D = \frac{p}{(\lambda + 2\mu) \cdot ik \cdot (e^{ikH} - M \cdot e^{-ikH/2})} \quad (6.10)$$

donde:

$$M = \frac{k' \cos(k'H/2) - ik \cdot \text{sen}(k'H/2)}{\left[-k' \cos(k'H/2) - ik \cdot \text{sen}(k'H/2) \right] \cdot e^{-ikH/2}} \quad (6.11)$$

Con las ecuaciones (6.5), (6.9), (6.10) y (6.11) se obtiene la respuesta analítica para el problema en cuestión, teniendo en cuenta que:

$$u(z) = \begin{cases} A \cdot e^{-ik'z} + B \cdot e^{ik'z} & (0 \leq z \leq 0,5) \\ C \cdot e^{-ikz} + D \cdot e^{ikz} & (0,5 \leq z \leq 1) \end{cases} \quad (6.12)$$

6.2.3. Discretización del modelo

La discretización del modelo es la misma que se muestra en el apartado 6.2.3., teniendo en cuenta que, ahora, la zona del MEF tiene distintas propiedades que la zona MEC.

6.2.4. Resultados

Para este ejemplo se estudian los mismos parámetros que para el ejemplo anterior, a saber:

- Desplazamiento vertical de la cara superior
- Desplazamiento vertical en la interfase
- Tensiones en la interfase
- Perfil de desplazamientos

6.2.4.1. Desplazamiento vertical de la cara superior

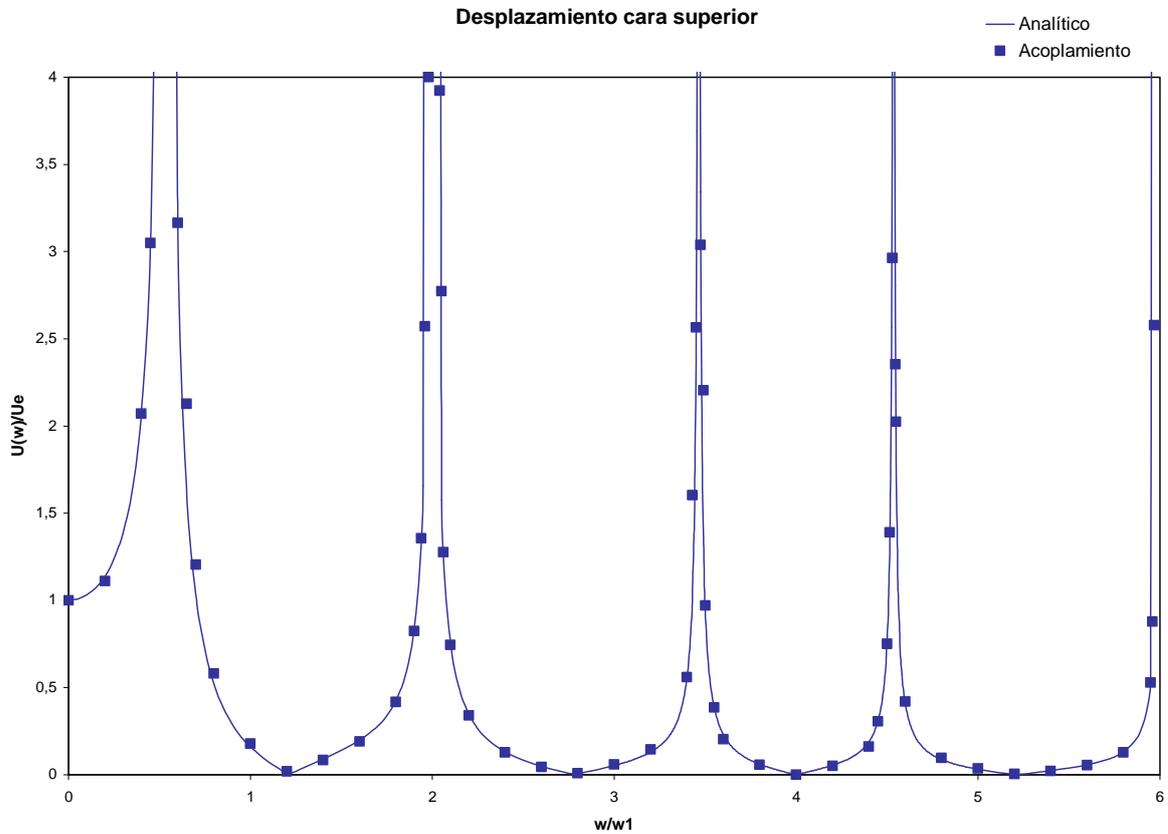
Al igual que se realizó para el ejemplo anterior, la solución analítica se calcula para $z = H = 1$, en la ecuación correspondiente, que, en este caso es la ecuación (6.12).

Para normalizar los desplazamientos se ha escogido U_e (desplazamiento para $w = 0$), y para las frecuencias se ha escogido w_1 (primera frecuencia natural) de la mitad superior del cubo. Como se ha comentado anteriormente, en este caso hay dos regiones y, por lo tanto, dos valores de frecuencia natural que pueden ser elegidos como referencia.

Las propiedades de la mitad superior de este cubo son las mismas que las del ejemplo anterior, así que podemos usar la expresión (6.4) para hallar w_1 , teniendo en cuenta que ahora $H = 0,5$.

Siendo así, se obtiene $w_1 = 5,4414 \text{ s}^{-1}$.

En la gráfica 6.6 se observan los resultados obtenidos:



Gráfica 6.5

Como se observa, la respuesta es una combinación del movimiento de ambas regiones, con velocidad de propagación diferentes.

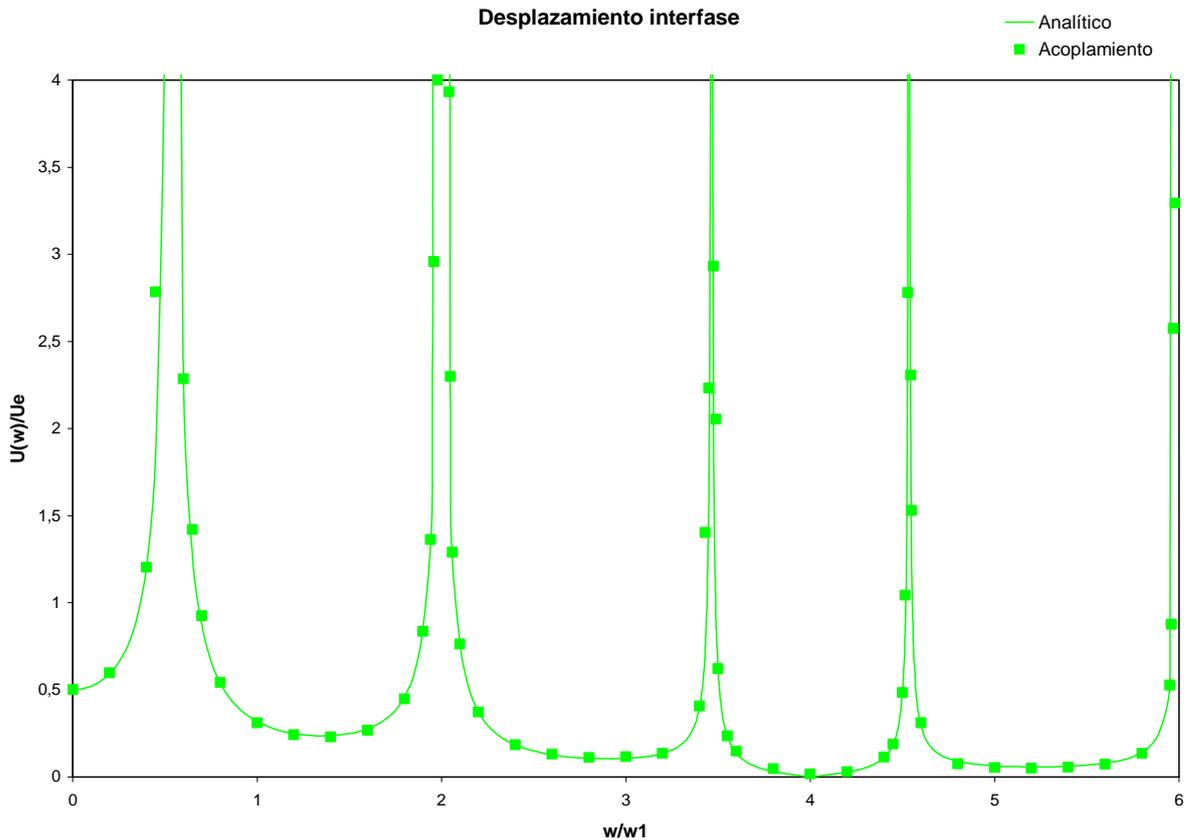
6.2.4.2. Desplazamiento vertical en la interfase

En este caso la solución analítica se obtiene de igual forma que la anterior, particularizando para $z = 0,5$.

Se puede comprobar como el valor de $U(w)$ para $w = 0$ (estático) es exactamente la mitad en la interfase ($z = 0,5$) que en la cara superior ($z = 1$), como era de esperar.

Por otro lado, los picos de desplazamiento en la interfase también se producen para los mismos valores de w en los que se producían los picos de la cara superior.

A continuación se muestra el gráfico:



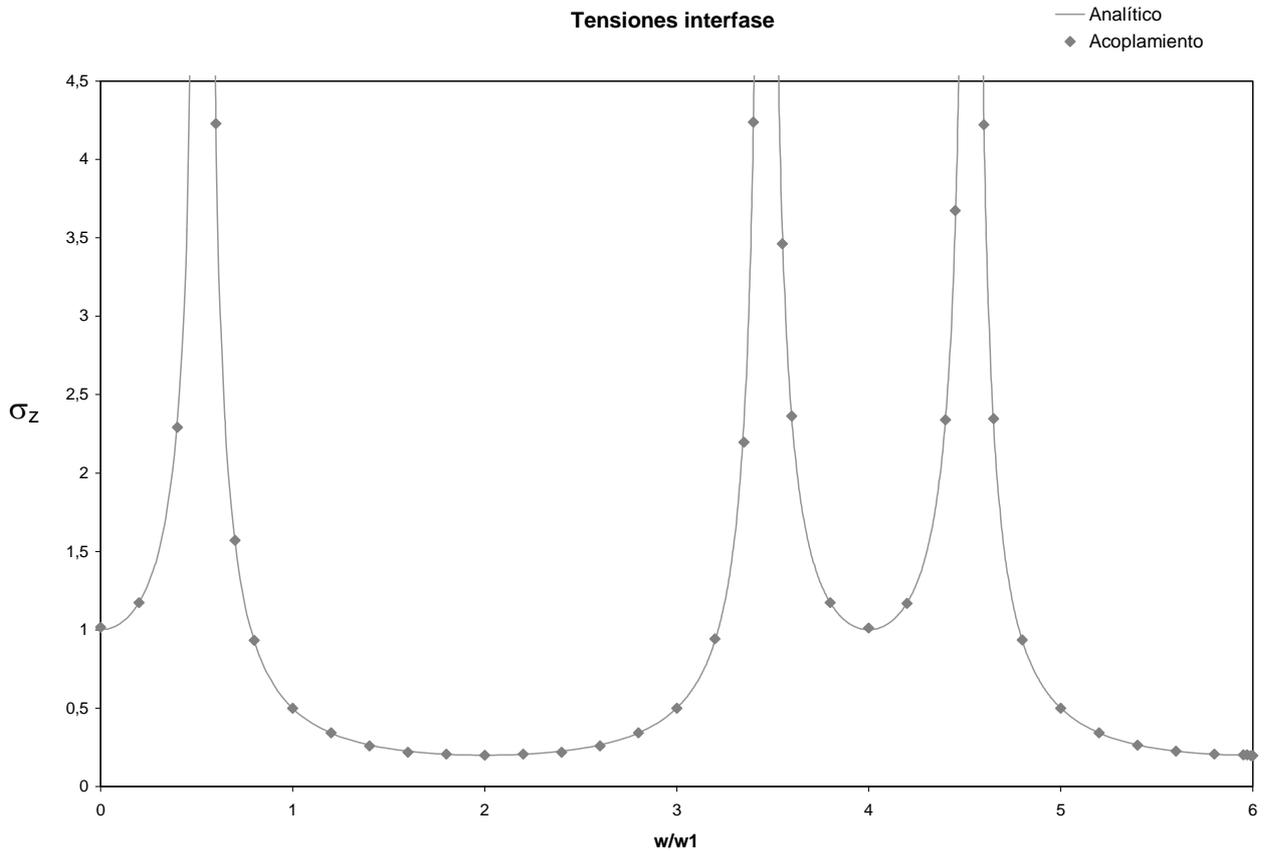
Gráfica 6.6

6.2.4.3. Tensiones en la interfase

Para calcular el valor analítico de las tensiones en la interfase hacemos uso de la ley de comportamiento, tal y como se hizo en el apartado 6.1.4.3, de manera

$$\text{que } \sigma_z = (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} .$$

En este caso, para hallar el valor analítico de σ_z , se hará uso de las expresiones (6.5), (6.9) y (6.10) ó (6.6), (6.7) y (6.8). Ambas darán el mismo resultado.

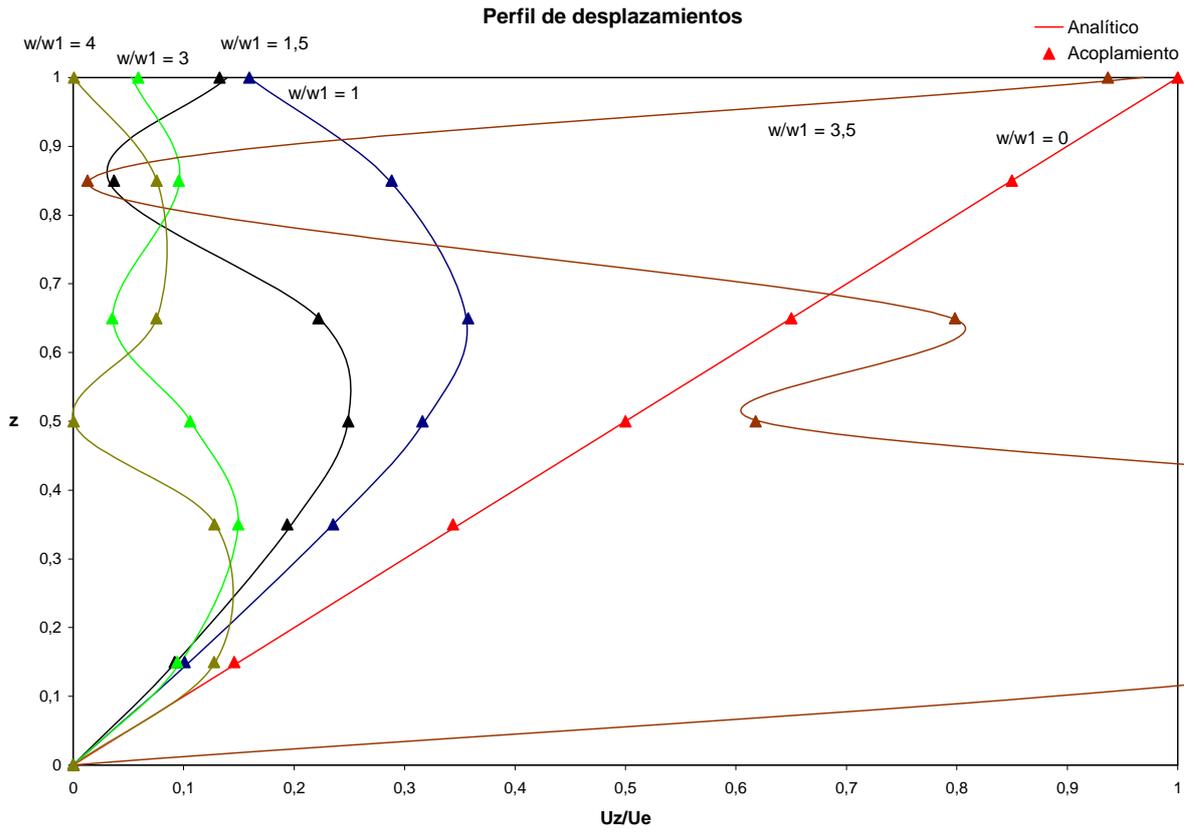


Gráfica 6.7

6.2.4.4. Perfil de desplazamientos

Al igual que se hizo en el ejemplo anterior, y para finalizar con este, se obtiene un perfil de desplazamientos de este ejemplo, con el fin de comprobar los resultados del código.

En la gráfica 6.8 se muestran los valores obtenidos y se comprueba una vez más la buena aptitud del programa desarrollado.



Gráfica 6.8

6.3. Ejemplo 3

6.3.1. Definición del modelo

Para finalizar la validación del código se ha elegido como tercer y último ejemplo, una viga empotrada sometida a carga armónica en su extremo libre, tal y como se muestra en la figura:

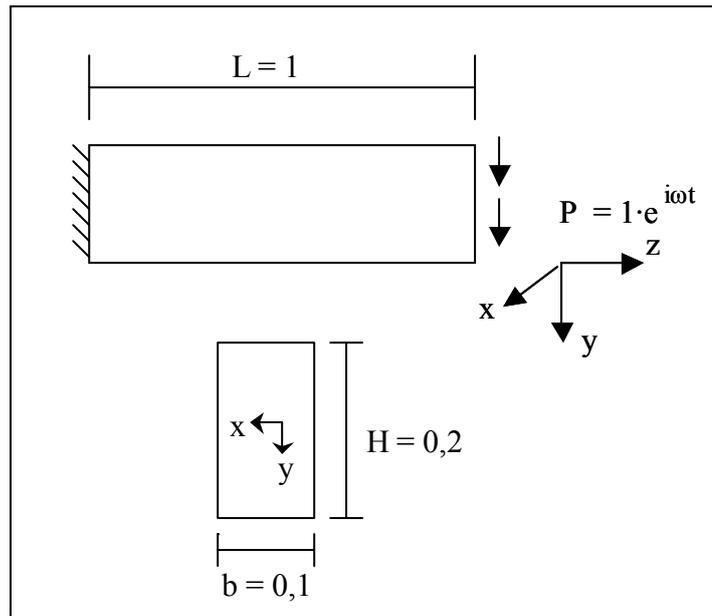


Fig. 6.8 Ejemplo 3

Las propiedades son las mismas que para el ejemplo 1, es decir:

- Coeficiente de Poisson $\rightarrow \nu = 0,25$
- Módulo de elasticidad (Young) $\rightarrow E = 2,5 \text{ N/m}^2$
- Densidad $\rightarrow \rho = 1 \text{ kg/m}^3$

6.3.2. Solución analítica

En este caso no se ha obtenido la solución analítica, sino que se ha optado por comparar los resultados del programa con los ofrecidos por los programas de Elementos Finitos y Elementos de Contorno.

Para normalizar las frecuencias se ha escogido la primera frecuencia natural de la teoría de vigas, que viene dada por la expresión:

$$\omega_1 = (1,875)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} \quad (6.13)$$

donde:

E → Módulo de elasticidad

I → Momento de inercia de área

\bar{m} → densidad lineal

L → Longitud de la viga

Particularizando para nuestro caso, se obtiene:

$$I = \frac{1}{12} bH^3 = \frac{1}{12} \cdot 0,1 \cdot 0,2^3 = 6,66 \cdot 10^{-5}$$

$$\bar{m} = \rho bH = 1 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,02$$

$$\omega_1 = (1,875)^2 \sqrt{\frac{2,5 \cdot 6,66 \cdot 10^{-5}}{0,02 \cdot 1^4}} = 0,3209 \text{ s}^{-1}$$

La segunda y tercera frecuencia natural, según la teoría de vigas, son:

$$\omega_2 = (4,694)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} = 2,0104 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_3 = (7,855)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}} = 5,6297 \text{ s}^{-1}$$

6.3.3. Discretización del modelo

Las regiones que constituyen el modelo se muestran a continuación:

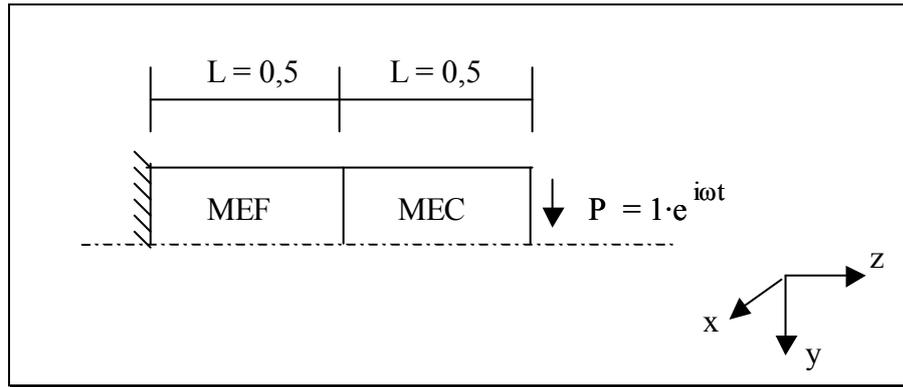


Fig. 6.9 Zonas MEF y MEC

La discretización adoptada es idéntica a la seguida en los ejemplos anteriores, así se tiene:

Zona MEC

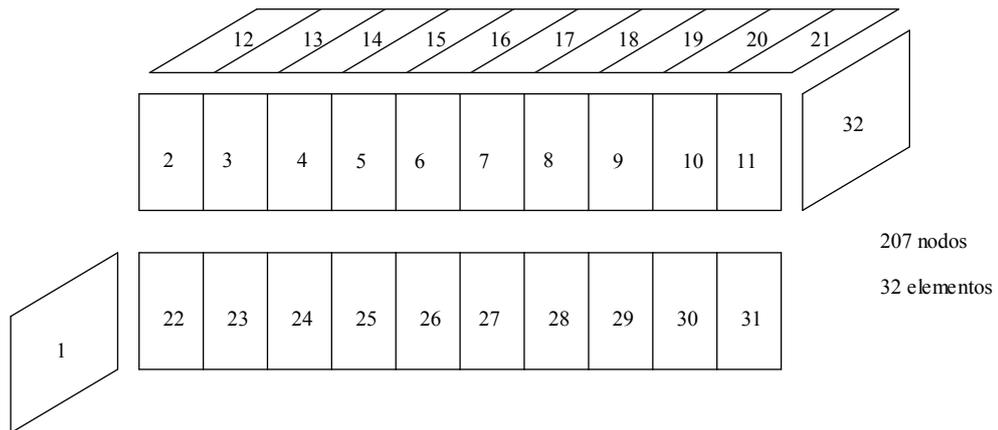


Fig. 6.10 Discretización MEC

Zona MEF

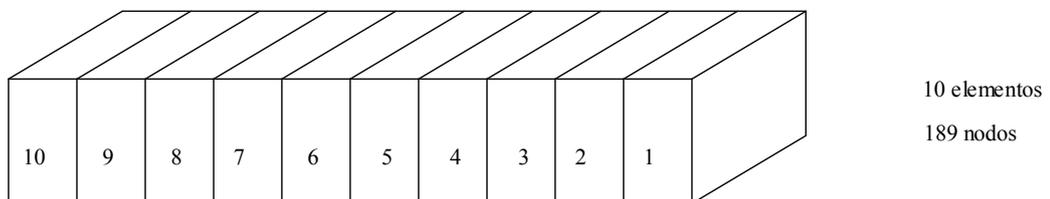


Fig. 6.11 Discretización MEF

6.3.4. Resultados

Como se mencionó anteriormente, en este caso comparamos la solución del programa desarrollado con la que ofrece el programa de Elementos de Contorno, sobradamente contrastado, y con la que ofrece el programa de Elementos Finitos que se elaboró para este proyecto.

Se compararán los resultados para los siguientes casos:

- Desplazamiento vertical del extremo libre
- Perfil de desplazamientos

6.3.4.1. Desplazamiento vertical del extremo libre

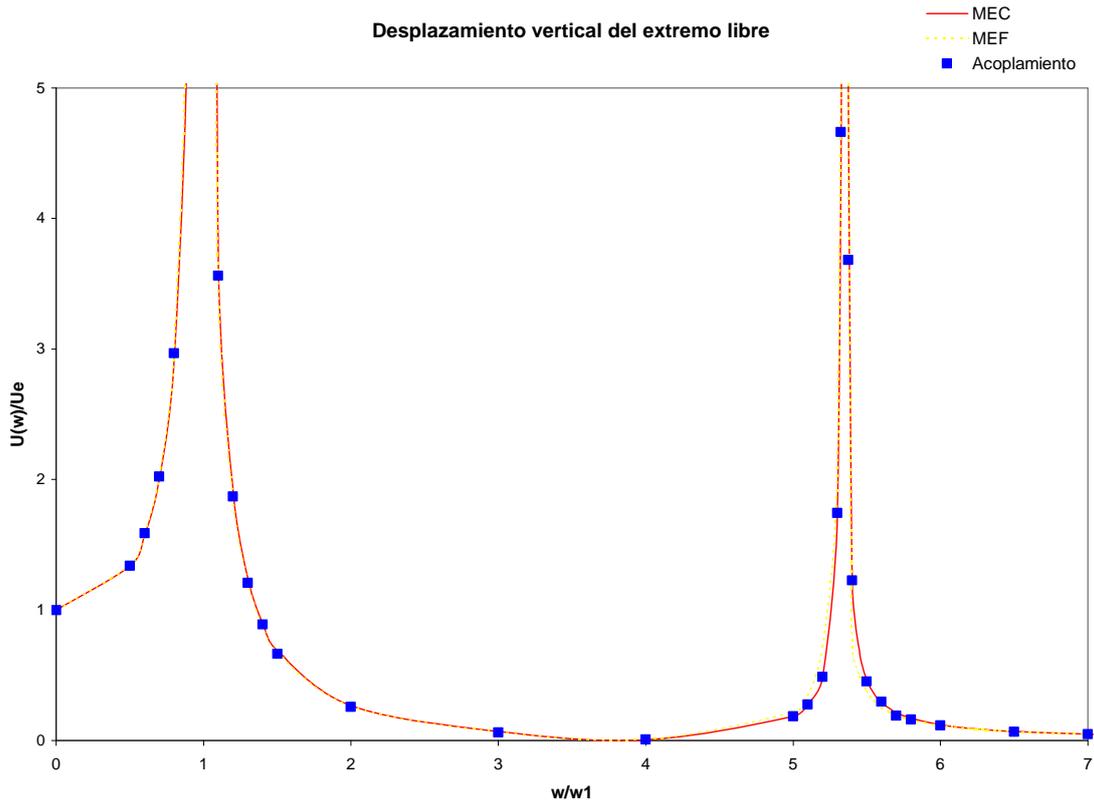
Siguiendo la línea de los anteriores ejemplos, se normalizan los valores de desplazamiento con U_e y los valores de frecuencia con w_1 .

En la gráfica 6.9 se representan los valores obtenidos para los tres programas de cálculo.

Como se observa, se han comparada 3 soluciones numéricas que coinciden plenamente, lo que da fe de su buen funcionamiento.

Es necesario destacar que los picos de desplazamiento no se producen en los valores de w calculados en el apartado 6.3.2. Esto ocurre porque dichos resultados están sacados de la teoría de vigas y nosotros no estamos calculando una viga, sino un sólido tridimensional, cuya solución se aproximará más a la de la viga cuanto más esbelto sea.

Aún así se adoptan como valores de referencia y se observa como el segundo pico se produce cerca de w_2 teórico.

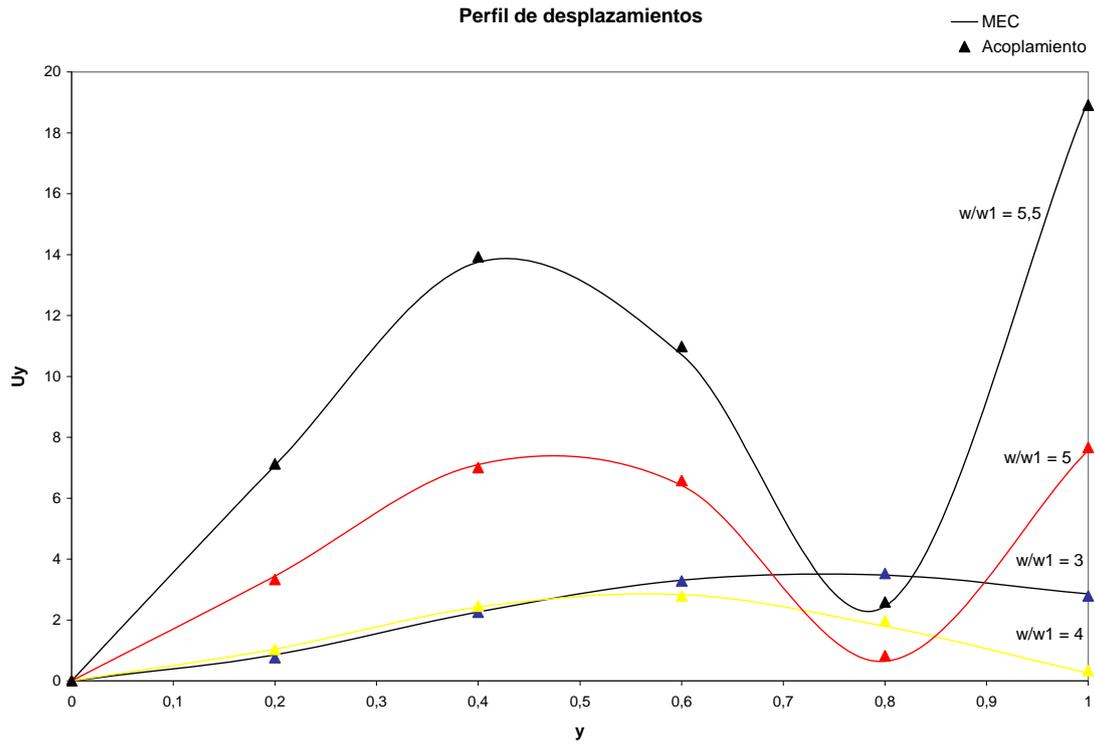


Gráfica 6.9

6.3.4.2. Perfil de desplazamientos

Por último, y para dar por concluido este capítulo y la batería de ejemplos, se ha obtenido el perfil de desplazamientos de la viga para distintos valores de frecuencia, comprobando los buenos resultados del código elaborado.

En la gráfica 6.10 se muestran los resultados obtenidos:



Gráfica 6.10

7. Revisión, conclusiones y desarrollos futuros

7.1. Revisión y conclusiones

Al realizar el planteamiento de este Proyecto Fin de Carrera se marcaron una serie de objetivos, centrados por un lado, en la formulación de un modelo acoplado entre el Método de los Elementos Finitos y el Método de los Elementos de Contorno, en régimen armónico y para el problema tridimensional; y, por otro lado, en su implementación informática para el desarrollo de una herramienta de cálculo.

Una vez concluido el proyecto, puede sintetizarse el estudio realizado en una serie de conclusiones y comentarios que son enumerados a continuación:

- Se ha formulado un modelo de acoplamiento MEC-MEF para problemas armónicos tridimensionales.
- Dicho modelo permite la consideración simultánea en el modelo de regiones discretizadas con el MEF y otras por el MEC.
- El acoplamiento entre ambos métodos se hace de forma rigurosa apelando a ecuaciones de compatibilidad y equilibrio.
- La formulación del equilibrio en la interfase MEC-MEF se analiza integrando tensiones del MEC y convirtiéndolas en fuerzas nodales equivalentes en el MEF.
- Los resultados obtenidos para ejemplos sencillos con solución conocida demuestran la buena aptitud del código desarrollado.

7.2. Desarrollos futuros

A continuación se citan varias ideas que podrían servir como punto de partida a desarrollos futuros en torno al tema que se ha tratado en este proyecto:

- Estudio de nuevos ejemplos de cálculo, con otras propiedades, otras solicitaciones, etc.
- Incorporación al código de leyes de comportamiento diferentes de la isotrópica en la formulación del MEF. Esto no supone dificultad conceptual adicional en las ecuaciones de acoplamiento.
- Ampliación del modelo de acoplamiento de manera que el código sea capaz de trabajar con regiones de diferente naturaleza como pueden ser líquida y/o poroelástica.
- Incorporación a un modelo general donde coexistan leyes elásticas isotrópicas y no isotrópicas con regiones líquidas y poroelásticas. Estudio de problemas de interacción suelo-agua-estructura con este modelo.

8. Referencias

- BARBAT, A.H., CANET, J.M., “Estructuras sometidas a acciones sísmicas. Cálculo por ordenador.”, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), 1988.
- BOZZO, L.M., BARBAT, A.H., “Diseño sismorresistente de Edificios”, Ed. Reverté, 2000.
- BREBBIA, C.A., DOMÍNGUEZ, J., “Boundary Elements. A Introductory Course”, Ed. McGraw-Hill, 1989.
- BREBBIA, C.A., CONNOR, J.J., “Métodos de los Elementos Finitos en la Ingeniería Civil”, Centro de Perfeccionamiento Profesional y Empresarial (CPPE), 1975.
- DOWRICK, D.J., “Diseño de estructuras resistentes a sismos”, Ed. Limusa, 1984.
- DOMÍNGUEZ, J., “Boundary Elements in Dynamics”, 1993.
- GARCÍA M., F., “Lenguaje de programación FORTRAN 90”, Ed. Paraninfo, 1998.
- GARCÍA V., J.G., “Acoplamiento de los Métodos de Elementos de Contorno y los Elementos Finitos en elastostática”, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Sevilla, 1998.
- MORENO, C., “Introducción a la programación FORTRAN”, Universidad Politécnica de Madrid, 1993.
- OÑATE, E., “Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis estático lineal”, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), 1995.
- ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., “El Método de los Elementos Finitos”, 4ª Edición, Vol.1, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE).