

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES



PROYECTO FIN DE CARRERA

MODELO SIMPLE PARA EL CÁLCULO DE LA RESPUESTA
SÍSMICA DE UNA ESTRUCTURA ENTERRADA

AUTOR:
ARIEL SANTANA NARANJO

TUTORES:
DR. D. JUAN JOSÉ AZNÁREZ GONZÁLEZ
DR. D. LUIS ALBERTO PADRÓN HERNÁNDEZ

TITULACIÓN:
INGENIERO INDUSTRIAL

JUNIO DE 2009

A mis padres

Mi eterno y sincero agradecimiento a mis tutores, Juan José Aznárez y Luis Alberto Padrón, por haberme brindado la oportunidad de trabajar a su lado, compartir su tiempo y compañía y contagiarme de la pasión y entrega que muestran en el desarrollo de su labor. No puedo evitar incluir en estas líneas a mis padres, familia, amigos y todas aquellas personas que me han acompañado y apoyado durante este camino, y que de alguna manera han influido en la forma final de este documento.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. El problema de interacción suelo-estructura	2
1.2. Metodología utilizada	3
1.2.1. El método directo	4
1.2.2. El método de subestructuración	5
1.2.3. Modelo simplificado	5
1.3. Objetivos y alcance del proyecto	6
2. Análisis dinámico	9
2.1. Introducción	9
2.2. El método de los tres pasos	9
2.2.1. Interacción cinemática	10
2.2.2. Cálculo de impedancias	11
2.2.3. Interacción inercial	13
3. El método de los elementos de contorno	15
3.1. Ecuaciones básicas de la elastodinámica lineal	15
3.2. Propagación de ondas en medios elásticos	16
3.2.1. Ondas armónicas planas	18
3.3. Ecuaciones en el dominio de la frecuencia	19
3.4. Condiciones de contorno	20
3.5. Formulación integral del problema elastodinámico	20
3.5.1. Teorema de reciprocidad en elastodinámica	20
3.5.2. Solución fundamental	22
3.5.3. Representación integral	23
3.5.4. Representación integral en el contorno	24
3.6. El método de los elementos de contorno	25
3.6.1. Proceso de discretización	26
3.6.2. Sistema de ecuaciones del método de elementos de contorno	28
3.6.3. Tipología de los elementos de contorno	28
3.6.4. Acoplamiento entre subregiones	28
3.7. Aspectos numéricos del MEC	30

4. Modelo simplificado para el cálculo sísmico de una estructura enterrada	33
4.1. Introducción	33
4.2. Teoría de vigas clásica	33
4.3. Deformación por cortante. Viga Timoshenko	35
4.4. Discretización mediante elementos finitos	39
4.5. Principio de los Trabajo Virtuales	44
4.5.1. Matriz de rigidez	48
4.6. Análisis dinámico	49
4.6.1. Matriz de Masa	50
4.6.2. Campo incidente. Ondas SH	52
4.7. Modelo simplificado para el estudio de estructuras enterradas	54
4.7.1. Carga distribuida	56
4.7.2. Momento repartido	60
4.7.3. Fuerza equivalente en la base	64
4.7.4. Ecuación de movimiento para el elemento	64
4.7.5. Montaje del sistema de ecuaciones	65
4.7.6. Valores de impedancia	66
4.8. Validación del código	70
4.8.1. Solución de la ecuación analítica	70
4.8.2. Comparación de resultados	74
5. Resultados	77
5.1. Introducción	77
5.2. Respuesta ante una señal sísmica	78
5.3. Modelos tipo Winkler	78
5.4. La estructura y el terreno	80
5.5. Algunos cálculos previos	85
5.6. Problemas y Resultados	86
5.6.1. Primer problema	86
5.6.2. Segundo problema	95
5.6.3. Tercer problema	98
5.6.4. Cuarto problema	98
5.7. Conclusiones	103
6. Revisión, conclusiones y desarrollos futuros	107
6.1. Revisión	107
6.2. Conclusiones	108
6.3. Desarrollos futuros	108
Bibliografía	109

Capítulo 1

Introducción

La necesidad de diseñar y construir de forma óptima estructuras que van a estar sometidas a acciones dinámicas, como pueden ser el paso de un tren sobre un puente, la acción del viento sobre un edificio o la excitación que produce un terremoto sobre cualquier tipo de construcción, pone de manifiesto la importancia del estudio de la Dinámica de Estructuras.

En toda programación de Teoría de Estructuras existe un bloque temático dedicado específicamente a este ámbito. Dentro de este bloque se estudia el caso de estructuras civiles sometidas a excitaciones sísmicas y se analizan los distintos factores que influyen en su respuesta.

En las últimas décadas la dinámica de estructuras ha experimentado un creciente interés por parte de los ingenieros industriales. Esto ha desatado gran cantidad de estudios e investigaciones en este campo. Los modelos clásicos se han ido sustituyendo por otros que tienen en cuenta más factores determinantes en la respuesta de un sistema.

Dentro del ámbito de la dinámica estructural se engloba el estudio de estructuras sometidas a la acción de terremotos, un campo de especial interés debido a los conocidos efectos devastadores que estos pueden provocar. Se han experimentado sustanciales avances, con destacables aportaciones de la sociedad investigadora a este campo. De esta forma se han conseguido modelos cada vez más cercanos a la realidad del problema.

Convencionalmente, para el estudio de estructuras sometidas a sollicitación sísmica, los problemas se pueden enfocar de manera directa, analizándose la estructura y cimentación conjuntamente como un super-sistema acoplado ante la sollicitación dinámica. El planteamiento directo del problema requiere del uso de métodos numéricos como el Método de los Elementos Finitos (MEF) o el Método de los Elementos de Contorno (MEC), y presenta como ventaja principal acercarse más fielmente a la realidad, con el inconveniente de su complejidad, gran número de grados de libertad y por tanto mayor gasto computacional.

Como alternativa se pueden plantear los problemas con un enfoque indirecto (o por pasos), en el que los efectos de interacción mutua suelo-estructura se contemplan

de forma simplificada en pasos sucesivos (tres pasos en la práctica, de lo cual ha ido derivando el nombre de Método de los tres pasos, con el que habitualmente se conoce este método). Ese método se sustenta en la hipótesis de que la estructura es infinitamente rígida, por lo que su rango de aplicación es limitado. Sin embargo, debido a su simplicidad ha sido muy empleado. De hecho, bien utilizado, ha demostrado su grado de validez en un gran número de problemas concretos.

Son muchos los aspectos del problema, desde la propia definición de la excitación hasta el comportamiento acoplado de la estructura con el suelo de cimentación, que no están comprendidos en la actualidad y son objeto de aportaciones científicas constantes en numerosas revistas dedicadas al tema.

Estos hechos son los que hacen de la respuesta dinámica de estructuras un importante campo de trabajo e investigación, el cual continúa siendo un tema completamente abierto. De esta forma y en este contexto, un estudio sistemático de las diferencias que supone el uso de una u otra metodología aplicada a un análisis concreto es un tema de gran interés y actualidad.

En este trasfondo se enmarca este trabajo en el que se expone un modelo simplificado para obtener la respuesta de estructuras enterradas ante una excitación sísmica en los que la interacción dinámica entre suelo y estructura se tiene en cuenta a través de resortes y amortiguadores (modelo tipo Winkler). La implementación de este modelo en un programa de cálculo matricial supone una herramienta suficientemente sencilla, como para que pueda ser utilizada por un ingeniero en la práctica de la profesión, para calcular la respuesta dinámica de una estructura enterrada. La herramienta ofrece resultados precisos dentro de los rangos aceptables en el cálculo de estructuras civiles, pero al mismo tiempo huye de complejidades excesivas que impidan a un ingeniero industrial su aplicación, como ocurre con los modelos elaborados de elementos finitos o elementos de contorno. Por tanto, se trata también de un trabajo de marcado carácter práctico y utilidad inmediata desde el punto de vista de la práctica de la ingeniería civil.

1.1. El problema de interacción suelo-estructura

El comportamiento de estructuras apoyadas en suelos deformables y sujetas a acciones dinámicas puede depender en gran parte de las propiedades del suelo y de las características de la cimentación. El análisis de este comportamiento requiere un modelo que tenga en cuenta no solamente la estructura, sino también el suelo y las fuerzas de interacción dinámica existentes entre ellos. Los primeros problemas de interacción dinámica suelo-estructura fueron estudiados en los años 30, relacionados a la vibración de grandes máquinas montadas en cimentaciones masivas. El comportamiento dinámico de estas máquinas sólo podía ser entendido teniendo en cuenta la interacción dinámica entre el suelo y la cimentación. Edificios altos, o cualquier otra estructura cimentada, sometidos a cargas de viento, también son ejemplos donde la interacción dinámica suelo-estructura puede tener efectos importantes y donde

la excitación está directamente aplicada a la estructura. El análisis de las estructuras bajo efectos de terremotos lleva a un segundo tipo de problema de interacción dinámica suelo-estructura, donde la excitación es transmitida a través del terreno.

De forma general se puede decir que la influencia de la interacción dinámica suelo-estructura en la respuesta de construcciones frente a sollicitaciones sísmicas es importante para construcciones grandes y masivas. Cuando una estructura grande es excitada por ondas viajando a través del terreno, como ocurre durante un terremoto, se presenta un efecto importante, asociado al tamaño de la cimentación y la estructura y a la relación entre la rigidez de ambas, denominado interacción cinemática. La simple presencia de la estructura produce una interferencia en las ondas incidentes alterando los desplazamientos de la superficie libre del terreno respecto a los desplazamientos de campo libre. Esta alteración está determinada en gran medida por la relación entre la rigidez de la estructura y la del terreno en que se sustenta. El fenómeno puede ser ilustrado por la imagen de dos barcos muy ligeros en la superficie del mar (figura 1.1); uno muy pequeño y otro igualmente ligero pero de gran tamaño. El primero seguirá el movimiento de la superficie libre sin producir ningún cambio en ella; el segundo tendrá su propio movimiento y cambiará el desplazamiento del mar en su cercanía.

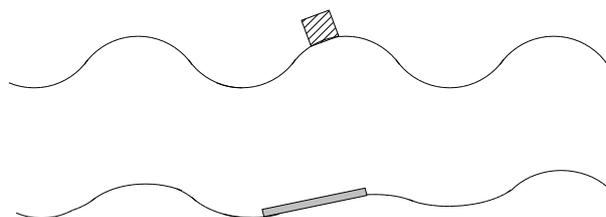


Figura 1.1: Interacción cinemática

1.2. Metodología utilizada

Desde una óptica muy general, puede decirse que la ingeniería tiene planteados un número de problemas muy diversos para los que no se conoce una solución exacta de forma explícita. Con la aparición y generalización del uso de los computadores digitales, surgen una serie de técnicas numéricas que proporcionan soluciones aproximadas, con precisión y costo razonables.

En este estudio, el problema afrontado pertenece al grupo de los que no poseen solución explícita, por lo tanto se aborda de forma numérica. El problema, en general, se refiere a obtener la solución en tensiones y desplazamientos de una estructura sometida a sollicitaciones dinámicas y en particular a los efectos que la interacción entre el suelo y la estructura tienen sobre la respuesta de esta última.

Antes de la aparición de métodos de resolución adecuados, a pesar de que era bien conocida la interdependencia entre suelo y estructura, solía realizarse el análisis

dinámico de la estructura desvinculada del mismo; esta hipótesis, aunque inexacta, suele ser suficiente para aquellas estructuras de no elevada importancia.

En ciertas estructuras, bien por su importancia en sí mismas, p. e. puentes de grandes luces o edificios en altura; bien por sus repercusiones tanto ecológicas como de seguridad, caso de centrales nucleares, resulta evidente que se debe realizar el estudio conjunto de ambas partes: estructura y terreno.

La realidad actual es que el número de estructuras a las que hay que aplicar un análisis dinámico conjunto crece constantemente y esta necesidad ha inducido numerosas investigaciones en este sentido. Los métodos utilizados en este trabajo son tres: el método directo, el método de subestructuración o de los tres pasos y un modelo tipo Winkler.

1.2.1. El método directo

En el método directo se analizan conjuntamente todos los medios implicados en el problema, aplicando un método numérico que hace necesaria la discretización de los diferentes medios empleando para ello tipos de elementos adecuados. Esto conlleva un inconveniente, ya que la discretización puede volverse complicada, tanto más cuanto más medios hay implicados en el problema.

La solución al problema dinámico puede ser hallada en dos dominios diferentes. En el dominio del tiempo, aquel en el que todas las variables tienen dependencia temporal, siguiendo una técnica de resolución de integración paso a paso. En el dominio de la frecuencia, en el que todas las variables son de tipo armónico o bien pueden ser descompuestas en la suma de ellos, la respuesta se consigue a través de la obtención de la función de transferencia del sistema para cada frecuencia, obtenida al resolver el sistema de ecuaciones resultante de aplicar la transformada de Fourier o de Laplace a las ecuaciones de campo en el dominio del tiempo. Se puede obtener la solución en este último dominio al realizar el producto de la función de transferencia del sistema y la función transformada de la excitación, y aplicar a éste la antitransformada correspondiente.

El método de integración paso a paso permite tener en cuenta las posibles no linealidades del conjunto analizado, teniendo como principal inconveniente su fuerte dependencia del intervalo de tiempo escogido para cada uno de los pasos, debido a que éste debe ser pequeño para obtener una solución correcta, aumentando el tiempo de ejecución y por tanto su costo final.

El análisis en el dominio de la frecuencia, pese a su mayor sencillez, tiene dos inconvenientes fundamentales. El primero es que no permite tener en cuenta las no linealidades existentes, y el segundo es que para obtener una respuesta temporal equivalente a la del análisis en el tiempo, es necesario obtener una gama muy amplia de frecuencias.

Para este fin se ha utilizado un código multidominio y tridimensional de elementos de contorno, desarrollado en el seno de la División de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras del Instituto Universitario SIANI, que ha dado

lugar a numerosas publicaciones relacionadas con la dinámica de estructuras: Maeso (1992), Maeso y Domínguez (1993), Domínguez y Maeso (1993), Aznárez (2002), Aznárez et al. (2001), Maeso et al. (2002), Maeso et al. (2004), Aznárez et al. (2006).

1.2.2. El método de subestructuración

En el método subestructuración o de los tres Pasos, se consideran separadamente la super-estructura y el terreno. Su denominación proviene de que han de resolverse en tres pasos sucesivos.

1. Determinación de los desplazamientos de la cimentación, rígida y sin masa, debidos a los movimientos producidos por un tren de ondas elásticas, incidentes a través del suelo.
2. Cálculo de las impedancias dinámicas de la cimentación mediante la aplicación de los movimientos de sólido rígido adecuados y de la evaluación de los esfuerzos producidos.
3. Determinación de la respuesta de la superestructura, suponiéndola soportada, no ya por el terreno sino sobre los resortes y amortiguadores equivalentes, obtenidos en el segundo paso, y sometiendo la base rígida a los movimientos determinados en el primero.

Los inconvenientes de este método se centran en la dificultad de modelizar el comportamiento no lineal del terreno, así como no tener en cuenta la influencia de las propiedades de la estructura sustentada, sobre todo en lo que se refiere a la rigidez real de la misma, al no estar ésta incluida en los modelos utilizados en los pasos primero y segundo.

Se ha utilizado el mismo código de elementos de contorno, utilizado para el método directo, como herramienta para el cálculo de los pasos sucesivos del método de subestructuración.

1.2.3. Modelo simplificado

Se ha realizado la formulación de un modelo simplificado tipo Winkler y éste ha sido implementado en un código FORTRAN que puede ser compilado y ejecutado en un PC de bajas prestaciones. La formulación es suficientemente sencilla como para poder ser implementada sin problemas, en cualquier lenguaje de programación o en programas como MATLAB, por un ingeniero con nociones básicas de cálculo matricial. Requiere de una sencilla discretización de la estructura mediante elementos finitos tipo barra de dos nodos y del cálculo de los valores de las impedancias que sustituirán al terreno en que se encuentra la misma.

La solución del problema resulta del cálculo del sistema de ecuaciones resultante en el dominio de la frecuencia. La respuesta se consigue a través de la obtención de las funciones de transferencia del sistema para cada frecuencia. La solución en

el dominio del tiempo se obtiene de realizar el producto de la función de transferencia del sistema por la función transformada de la excitación, y luego aplicar la antitransformada correspondiente.

Este modelo presenta como principales ventajas, la sencillez de la discretización, así como una disminución enorme en el número de grados de libertad en comparación con el método de los elementos de contorno, lo que conlleva bajo coste en tiempo y recursos de cálculo.

El principal inconveniente de este modelo simplificado estriba en la dificultad para obtener y escoger valores adecuados de las impedancias del terreno, los cuales varían con características propias de cada problema tales como la geometría de la estructura o las características del terreno, por lo que es necesaria una calibración. Existe diversa literatura sobre algunos valores de impedancia para problemas concretos, p. e. Novak et al (1978), Makris y Gazetas (1992) Kavvadas y Gazetas (1993), y Dezi et. al. (2009), sin embargo sigue siendo un tema completamente abierto.

1.3. Objetivos y alcance del proyecto

De acuerdo con la memoria que acompaña a la solicitud de título de PFC, estudiado y aprobado por la comisión de proyectos de fin de carrera en febrero de 2009, se persiguen como objetivos la formulación, implementación y calibración de un modelo tipo Winkler para la determinación de la respuesta sísmica de estructuras total o parcialmente enterradas en un semiespacio estratificado. El modelo se formula en el dominio de la frecuencia.

Para ello se han resuelto varios problemas de estructuras cilíndricas de hormigón armado de diferentes dimensiones enterradas en un semiespacio estratificado. Esta tipología estructural puede ser aplicable a estaciones de bombeo, reactores y silos nucleares, etc. Se admite la hipótesis de comportamiento lineal.

El análisis se centra en la obtención de la respuesta dinámica provocada por un tren de ondas sísmicas incidiendo verticalmente. Se trata de un estudio del problema en el dominio de la frecuencia. Se analiza la respuesta a través del método directo y el de los tres pasos, que se tomarán como referencia para la calibración del modelo tipo Winkler. Se evaluará, en base a las diferencias del modelo Winkler con respecto al método directo y al de los tres pasos, si los valores de las impedancias escogidos para el primero son aceptables. Además se observará la influencia de la rigidez de la estructura en la determinación de la respuesta y si la hipótesis de rigidez es válida, así como la influencia de la estratigrafía y la rigidez del suelo.

Más detalladamente los objetivos a cumplir son:

- Estudio de las bases de la elastodinámica lineal, haciendo hincapié en la comprensión de los fenómenos de propagación de ondas elásticas y su formulación.
- Estudio de los modelos de excitación sísmica vinculados a la propagación de ondas elásticas en el suelo. Comprensión de la naturaleza propagatoria del

sismo, lo que conlleva que puntos separados entre sí estén sometidos en un instante determinado a desplazamientos de diferente valor, e incluso en desfase. Esta cuestión se ha revelado de suma importancia en el caso de estructuras de gran tamaño

- Asimilar las bases de los métodos numéricos utilizados: método de los elementos de contorno, método de los tres pasos y modelos tipo Winkler.
- Entrenamiento en el uso de la batería de programas informáticos, de manera que, bajo tutela de los tutores, se utilicen adecuadamente con el fin de obtener un manejo fluido y eficaz del software y de realizar una interpretación correcta de los resultados.
- Desarrollo del modelo y calibración del mismo mediante el uso de expresiones para la obtención de valores de impedancias expuestas en diversa bibliografía, así como validación del software en el que se ha implementado.
- Obtener una batería de resultados de manera que puedan ser utilizados como material didáctico o incluso como referencia para otros estudios similares.

Capítulo 2

Análisis dinámico

2.1. Introducción

En las estructuras muy rígidas y fuertemente empotradas en el terreno, la rigidez de la estructura impide la libre deformación del terreno y ello implica el cambio del movimiento en la interfase frente al que se produciría en campo libre.

La hipótesis de rigidez permite plantear el análisis dinámico a través de un procedimiento de subestructuración conocido como *Método de los Tres Pasos*. Ha sido utilizado para el estudio dinámico o sísmico de diversos tipos de estructuras y sigue siendo una estrategia muy utilizada por su sencillez y por las ventajas operativas que ofrece. Sin embargo, cuando la hipótesis de rigidez no es aplicable el método de los tres pasos debe ser revisado y el problema debe ser abordado desde el denominado *Método Directo*, en el cual el suelo y la estructura se estudian conjuntamente.

Los métodos de subestructuración no sólo han permitido la condensación de las propiedades dinámicas del suelo a un punto, sino también abordar otras configuraciones estructurales en las que la rigidez y amortiguamiento de la base se introducen a través de matrices de rigidez condensadas a lo largo de la interfase suelo-estructura.

El método de los tres pasos presenta importantes ventajas en cuanto simplifica la formulación del problema al tiempo que permite un estudio paramétrico muy claro de la influencia de los distintos factores del problema en la respuesta final. Por contra su rango de aplicabilidad está restringido y existen casos en los que es ineludible el estudio directo del sistema suelo-estructura.

En este trabajo se muestra el método de subestructuración de los tres pasos para ondas SH con incidencia vertical por lo que sólo se inducen en el sistema desplazamientos horizontales y giros.

2.2. El método de los tres pasos

Es el procedimiento de cálculo indirecto más utilizado para obtener la respuesta dinámica de una estructura frente a una sollicitación sísmica. En él se escalona la

obtención de la respuesta en tres etapas, como se puede ver en la figura 2.1.

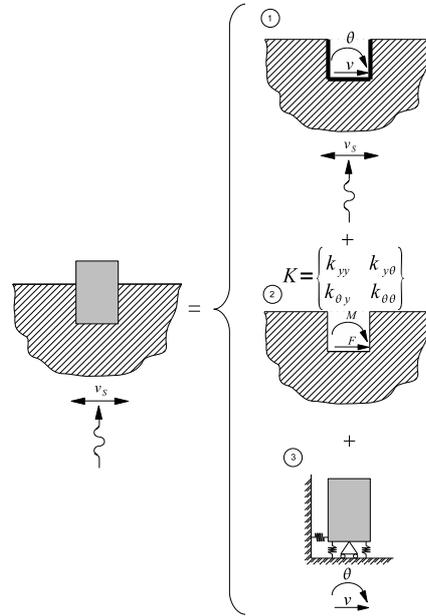


Figura 2.1: Etapas del método de los tres pasos

Paso 1. Interacción cinemática. Se estudia el problema de difracción de ondas en la interfase rígida, que produce un cambio del movimiento en su superficie comparado con el de campo libre, pero también la adición de un movimiento de giro provocado por la rigidez de la estructura.

Paso 2. Cálculo de impedancias. Condensación de las propiedades del semiespacio. Determinación de la impedancia dinámica en el dominio de la frecuencia. Esta matriz de rigidez condensada incluye la influencia de la masa y el amortiguamiento del terreno.

Paso 3. Interacción inercial. Estudio dinámico del sistema haciendo uso de los resultados obtenidos en los dos pasos anteriores.

2.2.1. Interacción cinemática

El primer paso consiste en el cálculo de la respuesta del sistema estructura suelo con la salvedad que la masa de la estructura se reduce a cero. Esto equivale a considerar el hueco dejado por la estructura en el terreno pero considerando infinitamente

rígidas las superficies de contacto entre ambos, ver dibujo 1 en la figura 2.1. De esta manera el sistema se comportará como un sólido rígido. Con esto se pretende determinar el desplazamiento horizontal v y el giro θ referenciados a un punto de control, que en general es el centro de la base de la estructura. En este sistema formado sólo por el terreno y una cimentación rígida sin masa, se formula el problema de incidencia y difracción de ondas en un medio tridimensional que se resuelve mediante el método de elementos de contorno. La respuesta buscada se reduce al punto de control mediante el desplazamiento del mismo y el giro de la estructura, para cada frecuencia, y serán la excitación del sistema dinámico equivalente.

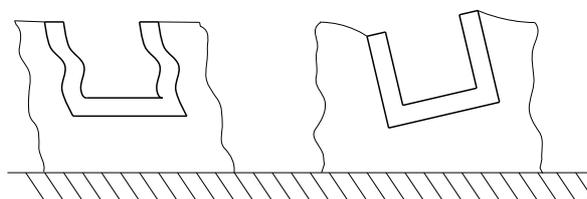


Figura 2.2: Influencia de la rigidez de la estructura

El hecho de que la estructura experimente un giro es consecuencia de la rigidez de la misma. Considerando una estructura con la misma flexibilidad que el terreno, la deformación, ante una onda SH incidiendo verticalmente, tanto del suelo como de la estructura en el contorno de contacto será la misma y por tanto presentarán ambos los mismos desplazamientos a los de campo libre sin que se produzca giro, ver dibujo izquierdo de la figura 2.2. Si ahora consideramos el caso contrario en el que la estructura es infinitamente rígida, los ángulos que forman las paredes y el fondo de la misma permanecerán rectos en todo momento. Ante esta situación el suelo tenderá a deformarse como campo libre, no así la estructura que al ser infinitamente rígida es la causa de una interacción con el suelo, que además de un desplazamiento horizontal distinto al de campo libre sufrirá un giro θ , ver dibujo derecho de la figura 2.2.

2.2.2. Cálculo de impedancias

La segunda etapa del método consiste en la determinación de las impedancias dinámicas del terreno ante posibles movimientos como sólido rígido de la estructura. Se analizan los modos implicados en el problema estudiado horizontal y cabeceo (giro). Para el cálculo de los valores de rigidez y amortiguamiento se hace uso del método de elementos de contorno.

El procedimiento que permite obtener estos valores consiste en dar movimientos armónicos de sólido rígido del tipo $1e^{i\omega t}$ a la interfase entre la estructura y el terre-

no. La integración de las tensiones desarrolladas en la interfase permite obtener las fuerzas. Resolviendo el problema para cada frecuencia y para los casos correspondientes a un movimiento horizontal unidad, figura 2.3(a) y un giro unidad, figura 2.3(b), se obtienen los valores de rigidez. Puesto que una rotación induce tensiones horizontales en las paredes verticales de la estructura enterrada y, recíprocamente, un movimiento horizontal produce un momento en la base, las rigideces horizontal y de giro están acopladas.

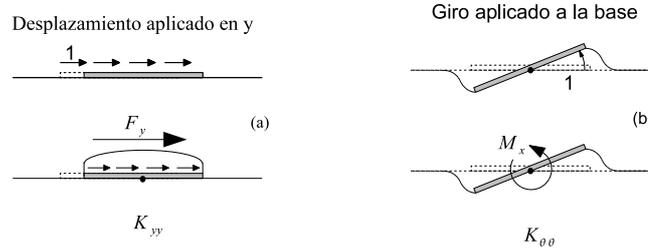


Figura 2.3: Desplazamiento y giro unitarios en interfase estructura-suelo

Para una excitación armónica SH con pulsación ω se define la matriz de rigidez dinámica como la relación del vector de fuerzas y momentos aplicados con el vector de desplazamientos y giros

$$\begin{bmatrix} F_y \\ M_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{y\theta} \\ K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Cada término K_{lm} de la matriz de rigidez es dependiente de la frecuencia ω y representa la fuerza (o momento) resultante según la dirección l cuando sobre la interfase de contacto entre la estructura y el suelo se aplica un desplazamiento (o giro) armónico unitario en la dirección m . Fuerzas y desplazamientos están, en general, desfasados. Estos términos son valores complejos del tipo

$$K_{lm}(\omega) = K_{lm} + i\omega C_{lm} \quad (2.2)$$

La parte real representa la rigidez condensada del terreno y está relacionada con las propiedades de rigidez e inercia del mismo. El valor C_{lm} de la parte imaginaria representa el amortiguamiento del sistema y es responsable del desfase entre las fuerzas y los desplazamientos.

Las impedancias obtenidas serán trasladadas al paso siguiente como las características propias de los resortes del sistema vibratorio.

2.2.3. Interacción inercial

La última fase del método de los tres pasos consiste en establecer un sistema oscilante sencillo que simule el comportamiento del problema original. Para ello el terreno se sustituye por unos resortes y amortiguadores, cuyas características se han calculado en el apartado 2.2.2, que constituyen la unión de la estructura con una superficie infinitamente rígida, ver dibujo 3 de la figura 2.1. Al sistema construido de esta forma se le transmite la excitación obtenida en el paso uno, apartado 2.2.1.

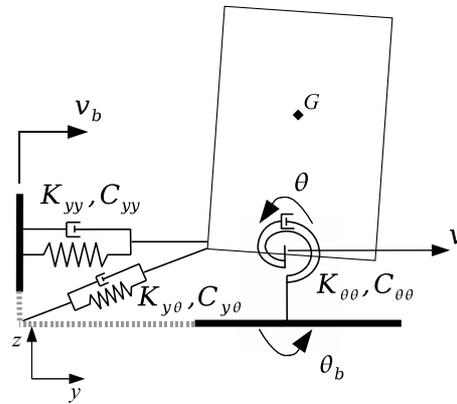


Figura 2.4: Sistema dinámico simplificado. Problema de interacción dinámica

El problema dinámico a resolver se muestra en la figura 2.4. Los valores u_b y θ_b son el desplazamiento y giro obtenidos como se explicó en 2.2.1. Las impedancias son las que se calcularon según se expone en 2.2.2. El valor v_o es el desplazamiento del punto O del centro de la base y el giro θ es el de toda la estructura por ser infinitamente rígida. Usando las ecuaciones de equilibrio dinámico de fuerzas y de momentos en el centro de gravedad G se escribe respectivamente

$$\begin{aligned} K_{yy}(v_o - v_b) + K_{y\theta}(\theta - \theta_b) &= \omega^2 M v_o - \omega^2 M \overline{OG} \theta \\ K_{\theta y}(v_o - v_b) + K_{\theta\theta}(\theta - \theta_b) &= \omega^2 I \theta - K_{yy}(v_o - v_b) \overline{OG} - K_{y\theta}(\theta - \theta_b) \overline{OG} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Si reagrupamos en el primer término de las ecuaciones del sistema 2.3 el desplazamiento v_o y el giro θ , y en el segundo miembro el desplazamiento v_b y el giro θ_b , conocidos, se llega a

$$\begin{aligned} (K_{yy} - \omega^2 M)v_o + (K_{y\theta} + \omega^2 M \overline{OG})\theta &= K_{yy}v_b + K_{y\theta}\theta_b \\ (K_{\theta y} + K_{yy} \overline{OG})v_o + (K_{\theta\theta} - \omega^2 I_G + K_{y\theta} \overline{OG})\theta &= \\ (K_{\theta y} + K_{yy} \overline{OG})v_b + (K_{\theta\theta} + K_{y\theta} \overline{OG})\theta_b \end{aligned} \quad (2.4)$$

Escribiendo el sistema de ecuaciones 2.4 en forma matricial

$$\begin{bmatrix} K_{yy} - \omega^2 M & K_{y\theta} + \omega^2 M \overline{OG} \\ K_{\theta y} + K_{yy} \overline{OG} & K_{\theta\theta} + K_{y\theta} \overline{OG} - \omega^2 I_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_o \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{yy} & k_{y\theta} \\ K_{\theta y} + K_{yy} \overline{OG} & K_{\theta\theta} + K_{y\theta} \overline{OG} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_b \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Este sistema tiene como incógnitas el desplazamiento v_o y el giro θ . El desplazamiento horizontal v_i de cualquier punto de la estructura puede obtenerse luego mediante la siguiente expresión:

$$v_i = v_o - z\theta \quad (2.6)$$

donde z es la distancia vertical entre el punto O y un punto cualquiera i .

Capítulo 3

El método de los elementos de contorno

3.1. Ecuaciones básicas de la elastodinámica lineal

Al igual que en problemas estáticos, las ecuaciones de equilibrio en las tres direcciones y la ley de comportamiento del material constituyen las relaciones básicas que gobiernan el comportamiento de sólidos elásticos en régimen dinámico. En este problema, sin embargo, las variables serán funciones con dependencia temporal además de espacial, y será necesario incluir las fuerzas de inercia y disipación en las ecuaciones de equilibrio del mismo.

Las relaciones cinemáticas básicas se establecen de igual forma que en elastostática. Si \mathbf{x} representa el vector de posición de cualquier punto de un sólido Ω en relación a un sistema de referencia cartesiano fijo y t la variable tiempo, a partir de las componentes del vector desplazamiento $u_i(\mathbf{x}, t)$ en cada punto del sólido Ω se define el tensor de pequeñas deformaciones ε_{ij} como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

Por otro lado, las condiciones de equilibrio para los puntos de un cuerpo elástico pueden ser expresadas las ecuaciones diferenciales de equilibrio que se resumen en la siguiente expresión

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.2)$$

donde σ_{ij} representa el tensor de tensiones, b_i las fuerzas de volumen por unidad de masa que actúan en Ω y ρ la densidad del material. Los puntos indican derivadas temporales y la repetición de subíndice implican una suma.

La relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones se establece a través de la ley de comportamiento, también llamada ecuación constitutiva, que viene dada

por la ley de Hooke. Para materiales homogéneos e isotrópos con comportamiento elástico y lineal tiene la siguiente expresión

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3.3)$$

o bien en forma inversa

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (3.4)$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Para la hipótesis de partida, la relación tensión-deformación puede expresarse en función de sólo dos constantes (ver París, 1998). En la expresión (3.3) el módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν , mientras que en (3.4) el módulo de elasticidad transversal μ y la constante de Lamé λ . Estas dos últimas constantes se relacionan con E y ν de manera que

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad ; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.5)$$

El comportamiento dinámico de un cuerpo elástico, homogéneo, isotrópico y lineal está gobernado por las expresiones (3.1), (3.2) y (3.4), las cuales constituyen un sistema completo de ecuaciones. Sustituyendo (3.1) y (3.4) en (3.2) se obtienen las ecuaciones de equilibrio de Navier

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.6)$$

las cuales representan las ecuaciones de gobierno del movimiento en términos del vector de desplazamiento \mathbf{u} . Ahora \mathbf{b} es el vector de fuerzas de volumen por unidad masa. Como cualquier ecuación diferencial, la solución de (3.6) requiere conocer un conjunto de condiciones de contorno, en este caso en términos de tensiones y/o desplazamientos en el contorno Γ del sólido Ω , así como las condiciones iniciales en el tiempo para las tres componentes del desplazamiento y la velocidad en cada punto del cuerpo.

3.2. Propagación de ondas en medios elásticos

En esta sección se estudia qué características tienen los fenómenos de propagación de ondas en un medio elástico, homogéneo e isotrópico. La integración de las ecuaciones de equilibrio dinámico en desplazamientos (3.6) no es trivial ya que las variables fundamentales del problema (las tres componentes del desplazamiento) están acopladas. Los procedimientos que permiten desacoplar este sistema de ecuaciones arrancan de los trabajos de Poisson, si bien es Stokes (1849) el primero que presenta una formulación en términos de dilatación volumétrica e y el vector de rotación $\boldsymbol{\omega}$ que permiten desacoplar estas ecuaciones de un modo simple

$$\mathbf{e} = \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.7a)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.7b)$$

En términos de la dilatación volumétrica y el vector de rotación, la laplaciana del campo de desplazamientos puede ser expresada como

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \mathbf{e} - \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (3.8)$$

que introducida en (3.6), se puede escribir

$$-\mu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + (\lambda + 2\mu) \nabla \mathbf{e} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.9)$$

en la que se han eliminado las fuerzas de volumen para mayor simplicidad. Aplicando en (3.9) los operadores divergencia y rotacional y teniendo en cuenta que $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = 0$ y $\nabla \times (\nabla \mathbf{e}) = 0$ además de ser nula la divergencia del vector rotación, se puede escribir respectivamente

$$\nabla^2 \mathbf{e} = \frac{1}{c_P^2} \ddot{\mathbf{e}} \quad (3.10)$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{c_S^2} \ddot{\boldsymbol{\omega}} \quad (3.11)$$

siendo

$$c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{y} \quad c_S^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.12)$$

Las ecuaciones (3.10) y (3.11) representan una versión desacoplada de las ecuaciones de Navier (3.6) en términos de la dilatación y las tres componentes del vector de rotación. Tanto (3.10) como (3.11) son ecuaciones de onda, la primera escalar y la segunda vectorial. La componente dilatacional o irrotacional de la perturbación (asociada a cambios de volumen) se propaga con velocidad c_P , mientras que la componente rotacional o equivoluminal (asociada a distorsiones en la forma) viaja con velocidad c_S . En un medio homogéneo e isótropo infinito ambas componentes coexisten y se propagan independientemente siendo $c_P > c_S$, razón por la cual en sismología se denomina a las ondas irrotacionales *ondas primarias* (ondas P) y a las equivoluminales *ondas secundarias* (ondas S), de manera que las primeras alcanzan la estación en menor tiempo desde el epicentro del seísmo.

Utilizando c_P y c_S como constantes características del medio, (3.9) se convierte en

$$-c_S^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} + c_P^2 \nabla \mathbf{e} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.13)$$

3.2.1. Ondas armónicas planas

Si nos centramos en el problema específico de propagación de una onda armónica plana de carácter genérico con velocidad c con dirección definida por el vector unitario \mathbf{s} . El campo de desplazamientos en notación compleja y con amplitud unitaria, puede expresarse

$$\mathbf{u} = A e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (3.14)$$

donde A es la amplitud, independiente de t y \mathbf{x} , $i = \sqrt{-1}$, $k = \omega/c$ el número de onda \mathbf{d} el vector unitario en la dirección de propagación. Sustituyendo (3.14), cada uno de los términos de la ecuación (3.13) son

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -k^2 \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \quad (3.15a)$$

$$\nabla \mathbf{e} = -k^2 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \quad (3.15b)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (3.15c)$$

Teniendo en cuenta que $\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} - \mathbf{d}$, la ecuación (3.13) queda

$$(c_s^2 - c^2) \mathbf{d} + (c_p^2 - c_s^2) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} = 0 \quad (3.16)$$

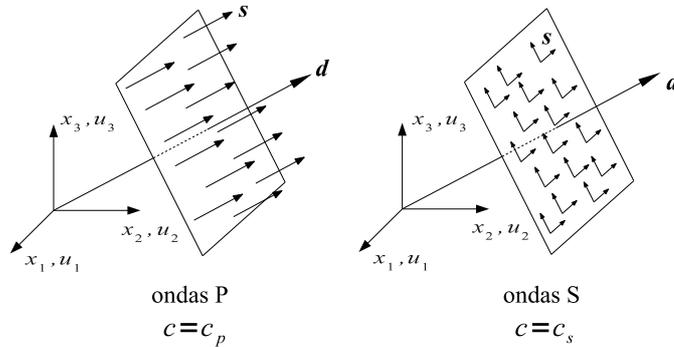


Figura 3.1: Desplazamientos y dirección de propagación. Ondas planas P y S

En consecuencia, si el campo de desplazamientos (3.14) es el del una onda S ($c = c_s$) la relación (3.16) sólo se verifica si $\mathbf{s} \cdot \mathbf{d} = 0$, lo que significa que las direcciones de propagación y de movimiento son perpendiculares. Por contra, si (3.14) es el campo de desplazamientos de una onda P ($c = c_p$), $\mathbf{s} \times \mathbf{d} = 0$, lo que significa que las direcciones de propagación y movimiento coinciden (figura 3.1).

3.3. Ecuaciones de gobierno en el dominio de la frecuencia

Con el fin de resolver problemas con dependencia temporal de tipo armónico, recuérdese las expresiones de las ondas planas que permitieron el estudio de las características de las ondas en sólidos elásticos, en este apartado se obtienen las ecuaciones que rigen el comportamiento en régimen armónico (dominio de la frecuencia).

Este planteamiento en el dominio de la frecuencia conduce a una importante simplificación matemática de las ecuaciones de gobierno, desapareciendo en las ecuaciones reducidas la dependencia temporal de las variables fundamentales. También se simplifican los procedimientos para la obtención de las soluciones armónicas. Teniendo en cuenta que las funciones de tipo armónico constituyen un conjunto completo de funciones independientes, puede plantearse cualquier dependencia temporal de la variable como superposición de armónicos de diferente frecuencia de acuerdo a los planteamientos de Fourier. Este último aspecto, si bien sólo aplicable a problemas elásticos y lineales para la obtención de la respuesta temporal, permite comprender el interés que ha tenido el estudio de la formulación reducida de las ecuaciones de gobierno para muchos autores.

Empezando por el problema elastodinámico armónico, para la frecuencia ω , el vector desplazamiento en un punto \mathbf{x} del medio puede ser expresado en notación compleja

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)e^{i\omega t} \quad (3.17)$$

siendo en general $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ un vector de componentes complejas. El módulo de las variables complejas en el dominio de la frecuencia representa el valor máximo que adopta esa variable en el dominio del tiempo, mientras que la relación entre las partes imaginaria y real, determina el desfase. Considerando las fuerzas de volumen con dependencia armónica, la expresión reducida de las ecuaciones de Navier (3.6) es

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \mathbf{e} + \mathbf{b} = -\rho \omega^2 \mathbf{u} \quad (3.18)$$

A pesar de la coincidencia en la notación con (3.6), se entiende que las variables en (3.18) dependen de la posición y de la frecuencia y se tiene en cuenta el carácter viscoelástico del medio (disipativo) mediante la consideración de un valor complejo para $\mu(\lambda)$

$$\mu = Re[\mu](1 + 2i\xi) \quad (3.19)$$

donde ξ se considera de la misma forma que el factor amortiguamiento para sistemas de un grado de libertad (ver Domínguez (1993)).

3.4. Condiciones de contorno

La completa definición del problema dinámico en el dominio de la frecuencia requiere de la imposición de las condiciones de contorno en términos de las variables primarias o sus derivadas.

En el caso de sólidos viscoelásticos, se define según el lema de Cauchy, el vector tensión (t_i) en un punto \mathbf{x} del contorno Γ con normal exterior \mathbf{n} como

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad \text{en } \Gamma \quad (3.20)$$

siendo n_j las componentes del vector unitario normal al contorno en el punto \mathbf{x} .

En general, en el comportamiento dinámico de cualquier medio existirá una zona del contorno (Γ_1) donde serán conocidas las variables fundamentales (condiciones de contorno naturales) y una zona complementaria (Γ_2) en la que son dato las variables derivadas (condiciones de contorno esenciales). Para sólidos viscoelásticos

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i & \text{en } \Gamma_1 \\ t_i &= \bar{t}_i & \text{en } \Gamma_2 \end{aligned}$$

siendo $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

3.5. Formulación integral del problema elastodinámico

En las secciones previas, el comportamiento dinámico de un cuerpo elástico, homogéneo, isotrópico y lineal ha sido descrito mediante sus ecuaciones de gobierno. La transformación de estas ecuaciones diferenciales en expresiones integrales tiene como objetivo la formulación del problema mediante elementos de contorno.

3.5.1. Teorema de reciprocidad en elastodinámica

El punto de partida es el teorema de reciprocidad entre dos estados elastodinámicos (Wheeler y Sternberg, 1968). Es una extensión del teorema de reciprocidad de Betti de la elastoestática en el dominio del tiempo.

Consideremos una región regular Ω cuyo contorno es Γ , con una densidad ρ y unas velocidades de propagación de onda c_P y c_S . Sobre dicha región se definen dos estados elastodinámicos que satisfacen las ecuaciones de Navier reducidas (3.18)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{b}, \rho, c_P, c_S; \omega, \Omega) &= [\mathbf{u}, \sigma] \\ \mathbf{S}^*(\mathbf{b}^*, \rho, c_P, c_S; \omega, \Omega) &= [\mathbf{u}^*, \sigma^*] \end{aligned}$$

siendo \mathbf{S}^* una solución de referencia conocida, usada para resolver el problema y obtener el estado \mathbf{S} . Considerando nulas las condiciones iniciales, el teorema de reciprocidad es

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{p} * \mathbf{u}^*) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{b} * \mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{p}^* * \mathbf{u}) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{b}^* * \mathbf{u}) d\Omega \quad (3.21)$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{u}^* son los vectores de desplazamientos en cualquier punto del dominio, mientras que \mathbf{p} y \mathbf{p}^* son los vectores de tracción en Γ , en equilibrio con los correspondientes tensores de tensión σ y σ^* , para los estados \mathbf{S} y \mathbf{S}^* , respectivamente. El operador $*$ entre vectores representa la suma del producto de convolución de sus componentes.

Consideraremos que las fuerzas de volumen \mathbf{b} y \mathbf{b}^* y las condiciones de contorno son armónicas en el tiempo con una frecuencia angular ω , es decir, del tipo $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t}$. En este caso, el campo de desplazamientos consiste en un parte transitoria $\mathbf{u}^t(\mathbf{x}, t)$ y un régimen permanente $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$ con variación armónica, de esta forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t} \quad (3.22)$$

Es usual suponer que la parte transitoria desaparece transcurrido un intervalo de tiempo debido a los mecanismos internos de disipación de energía que presentan todos los sistemas físicos.. En estas condiciones siempre será posible formular el problema en un instante de tiempo donde sólo exista la parte permanente de la solución. En general, $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$ será una función compleja con un desfase respecto a la señal de excitación que se calcula de manera que satisfaga las condiciones de contorno bajo unas determinadas fuerzas másicas. Suponiendo las propiedades del medio invariantes con el tiempo, los campos de desplazamientos y tensiones pueden expresarse como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t} \quad (3.23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t} \quad (3.24)$$

Sustituir las ecuaciones (3.23) y (3.24) en las ecuaciones de gobierno permite eliminar el término repetido $e^{i\omega t}$ y reescribir todas las ecuaciones elastodinámicas para un régimen permanente. De esta manera es posible redefinir dos estados elastodinámicos reducidos en el dominio de la frecuencia como

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\omega}(\mathbf{b}, \rho, c_P, c_S; \omega, \Omega) &= [\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}] \\ \mathbf{S}_{\omega}^*(\mathbf{b}^*, \rho, c_P, c_S; \omega, \Omega) &= [\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*] \end{aligned}$$

Bajo estos supuestos, el producto de convolución desaparece de la ecuación (3.21) y obtenemos

$$\int_{\Gamma} \mathbf{p}\mathbf{u}^* d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{b}\mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*\mathbf{u} d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{b}^*\mathbf{u} d\Omega \quad (3.25)$$

Este teorema de reciprocidad, establecido entre el estado elastodinámico que se pretende resolver y otro convenientemente escogido, será el que proporcione la representación integral en la que se basa el *Método de los elementos de contorno* (MEC).

3.5.2. Solución fundamental

La formulación de la ecuación (3.25) requiere de un estado reducido de referencia S_{ω}^* . La solución de este estado es lo que se llama comúnmente solución fundamental. Existen diferentes soluciones fundamentales para diferentes problemas de referencia. La que se usa en este estudio representa la respuesta, en términos de desplazamientos y tensiones, de un dominio lineal, elástico, homogéneo e isotrópico ilimitado ante un carga armónica unitaria concentrada de la forma

$$\rho b_k^* = \delta(\boldsymbol{\nu}) \delta_{lk} e^{i\omega t} \quad (3.26)$$

aplicada en el punto $\boldsymbol{\nu}$ en la dirección l , siendo δ_{lk} la delta de Kronecker y $\delta(\boldsymbol{\nu})$ la delta de Dirac, definida como

$$\int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\nu}) d\Omega = \begin{cases} 1, & \text{if } \boldsymbol{\nu} \in \Omega \\ 0, & \text{if } \boldsymbol{\nu} \notin \Omega \end{cases} \quad (3.27)$$

Este problema fue resuelto por Stokes (1849) en el dominio del tiempo, por Cruse y Rizzo (1968) en el dominio de Laplace y algunos años después por Kupradze (1963) para problemas armónicos. Como se menciona más arriba, esta solución fundamental corresponde al espacio completo, lo que obliga a discretizar la superficie libre cuando se estudia un dominio semi-infinito, como pasa en este estudio. En la práctica, sólo es necesario incluir una pequeña región alrededor del área analizada para obtener resultados precisos.

Definimos $u_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \omega)$ como los desplazamientos en la dirección k en el punto \mathbf{x} debido a la carga aplicada y $p_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \omega)$ como la componente k del vector tensión sobre una superficie cuya normal unitaria exterior es \mathbf{n} en el punto \mathbf{x} . Sus expresiones para $k, l = 1, 2, 3$ son

$$u_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} [\psi\delta_{lk} - \chi r_{,k}r_{,l}] \quad (3.28)$$

$$p_{lk}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\iota}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \left(\delta_{kl} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + r_{,k} n_l \right) - \frac{2}{r} \chi \left(n_k r_{,l} - 2 r_{,k} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} r_{,k} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \left(\frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{2}{r} \chi \right) r_{,l} n_k \right] \quad (3.29)$$

donde $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\iota}|$

$$\psi = - \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 \left(\frac{1}{z_p^2 r^2} - \frac{1}{z_p r} \right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left(\frac{1}{z_s^2 r^2} - \frac{1}{z_s r} + 1 \right) \frac{e^{z_s r}}{r} \\ \chi = - \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 \left(\frac{3}{z_p^2 r^2} - \frac{3}{z_p r} + 1 \right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left(\frac{3}{z_s^2 r^2} - \frac{3}{z_s r} + 1 \right) \frac{e^{z_s r}}{r}$$

siendo

$$z_p = -\frac{i\omega}{c_p} \quad ; \quad z_s = -\frac{i\omega}{c_s}$$

Hay que notar que la solución fundamental presenta una singularidad cuando $r \rightarrow 0$, siendo r la distancia entre el punto de aplicación $\boldsymbol{\iota}$ y el de estudio. Este hecho implica un tratamiento especial de las integrales de las funciones alrededor de punto de aplicación (ver Domínguez (1993)).

3.5.3. Representación integral

La aplicación de la ecuación (3.25) entre el estado desconocido bajo estudio y el de referencia \mathbf{S}_ω^* lleva a la representación integral del problema. De aquí en adelante las ecuaciones serán escritas de manera que representen un conjunto de tres ecuaciones que se obtienen de la colocación de la carga unitaria en las tres direcciones del espacio. De esta forma los vectores \mathbf{u}^* , \mathbf{p}^* y \mathbf{b}^* se convierten en matrices 3×3 . Cuando se considera la solución fundamental y teniendo en cuenta (3.26), el último término de la ecuación (3.25) se convierte en

$$\rho \int_{\Omega} \mathbf{b}^* \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\iota}) \mathbf{u} \, d\Omega = \mathbf{u}^{\boldsymbol{\iota}} \quad (3.30)$$

por lo que la ecuación (3.25) queda

$$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\iota}} + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} \, d\Omega \quad (3.31)$$

que es la representación integral del campo de desplazamientos del problema elastodinámico armónico cuando la carga puntual es aplicada en $\boldsymbol{\iota} \in \Omega$, siendo \mathbf{u} y \mathbf{p} los vectores desplazamiento y tensión, mientras que \mathbf{u}^* y \mathbf{p}^* son los tensores de la solución fundamental

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

3.5.4. Representación integral en el contorno

La ecuación (3.31) permite el cálculo de los desplazamientos en puntos internos de Ω cuando los desplazamientos y las tensiones son conocidos en Γ . Para poder formular así el problema la ecuación integral debe ser escrita en términos sólo de variables en Γ , lo que implica aplicar la carga unitaria en el contorno. El hecho de que el punto de aplicación pertenezca al contorno, esto es $\iota \in \Gamma$, el cual nos lleva a la representación integral del problema en el contorno, requiere especial atención debido a la singularidad de la solución fundamental cuando $r \rightarrow 0$.

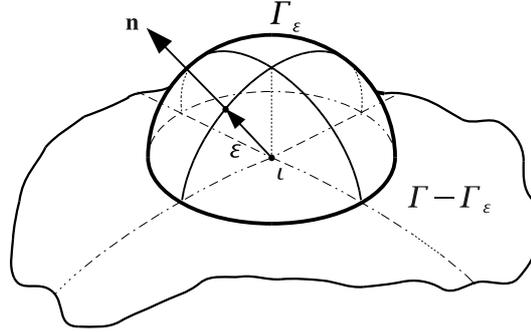


Figura 3.2: Procedimiento para extraer la singularidad. Semiesfera alrededor del punto de colocación para la integración

Para extraer la singularidad se modifica ligeramente Γ con el fin de evitar la situación en que $r = 0$. Se considera un contorno aproximado de manera que se añade una semiesfera de radio $\epsilon \rightarrow 0$ con centro el punto de colocación ι , como se muestra en la figura 3.2. Ahora cada una de las integrales extendidas en el contorno en la ecuación (3.31) se descomponen en otras dos, una extendida en $\Gamma - \Gamma_\epsilon$ y otra en Γ_ϵ . Podemos escribir por tanto

$$\mathbf{u}^\iota + \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \quad (3.34)$$

Las integrales extendidas en $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ no contienen la singularidad y se convierten en integrales extendidas al contorno Γ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (3.35)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma \quad (3.36)$$

Por otro lado, las integrales extendidas sobre Γ_ε se definen en el límite. Teniendo en cuenta que la solución fundamental en desplazamientos es del orden $1/\varepsilon$ y en tensiones del orden $1/\varepsilon^2$ y que la integral en el contorno del orden ε^2 se puede escribir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma = 0 \quad (3.37)$$

$$\mathbf{u}^\iota + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} = \mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota \quad (3.38)$$

donde \mathbf{c}^ι es el término libre. En problemas de tres dimensiones es un tensor 3×3 que depende de la geometría del contorno en el punto ι y del coeficiente de Poisson ν del dominio. Si el contorno es suave en ι , entonces $\mathbf{c}^\iota = 1/2\mathbf{I}$ mientras que $\mathbf{c}^\iota = \mathbf{I}$ en puntos internos, siendo \mathbf{I} la matriz unitaria diagonal 3×3 . Teniendo en cuenta las ecuaciones (3.35) a la (3.38) la ecuación (3.34) se convierte

$$\mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} \, d\Omega \quad (3.39)$$

3.6. El método de los elementos de contorno

Para puntos pertenecientes al contorno $\iota \in \Gamma$, la ecuación (3.39), junto con las condiciones de contorno, constituye una formulación cerrada que debería permitir obtener la solución para el campo de desplazamientos y tensiones en el contorno. Luego, los desplazamiento en cualquier punto del dominio $\iota \in \Omega$ puede obtenerse mediante la ecuación (3.31). No obstante, la solución analítica del problema o es, en general, posible, excepto para algunos casos simples. Por esta razón, se lleva a cabo un proceso de discretización con el fin de conseguir un sistema lineal de ecuaciones algebraicas del cual se puede obtener la solución numérica del problema en un grupo de puntos.

En esta sección las fuerzas de volumen \mathbf{b} se suponen nulas. De esta forma la ecuación (3.39) se transforma en

$$\mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma \quad (3.40)$$

3.6.1. Proceso de discretización

La solución numérica de la ecuación (3.40) requiere que la superficie del contorno sea discretizada en \mathcal{N}_e elementos Γ_j y \mathcal{N}_n nodos, de manera que

$$\Gamma \simeq \bigcup_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \Gamma_j \quad (3.41)$$

donde cada elemento j está definido por \mathcal{N}_n^j . Sobre cada elemento j , el campo de desplazamientos \mathbf{x} y las tensiones \mathbf{p} son aproximados en términos de sus valores nodales haciendo uso de un conjunto de funciones polinómicas de interpolación $\Phi(\boldsymbol{\xi})$. Siendo $\boldsymbol{\xi}$ el vector con las coordenadas naturales para definir un punto en el elemento de referencia. De esta forma, los desplazamientos $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ y las tensiones $\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})$ dentro del elemento son aproximadas por

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \Phi(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}^j \quad ; \quad \mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}) = \Phi(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{p}^j \quad (3.42)$$

donde \mathbf{u}^j y \mathbf{p}^j son vectores de dimensión $3\mathcal{N}_n^j \times 1$ que contienen los desplazamientos y tensiones nodales del elemento, y $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ es una matriz de dimensiones $3 \times 3\mathcal{N}_n^j$ de la forma

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \cdots & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \cdots & 0 & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

que contiene las funciones de forma específicas para el elemento, las cuales serán definidas más adelante. De la misma forma, la geometría puede ser definida como

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \Phi(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}^j \quad (3.44)$$

donde \mathbf{x}^j es un vector de dimensiones $3\mathcal{N}_n^j \times 1$ que contiene las coordenadas de los nodos que definen el elemento j . Esta clase de elemento, donde se usan las mismas funciones para definir la geometría y las incógnitas, recibe el nombre de *elemento isoparamétrico*.

Hay que resaltar que la geometría aproximada por (3.44) no será, en general, completamente coincidente con el contorno original, como expresa la ecuación (3.41). El error que se comete en la aproximación depende de la complejidad de la geometría real, la discretización realizada y las funciones de forma ϕ_i . Sin embargo, esta clase de errores es inherente al concepto de aproximación sobre la cual se basa el *método de elementos de contorno*, y el cual no invalida este tipo de aproximación.

Una vez han sido discretizados todos los contornos y teniendo en cuenta que \mathbf{u}^j y \mathbf{p}^j son constantes en Γ_j , sustituyendo las ecuaciones (3.42) en la ecuación (3.40) se llega a

$$\mathbf{c}^t \mathbf{u}^t + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \quad (3.45)$$

la cual constituye un conjunto de tres ecuaciones algebraicas que dependen de los desplazamientos en el punto de colocación de las carga y de los desplazamientos y tensiones en todos los nodos del contorno correspondiente. Escribiendo la ecuación (3.45) en forma matricial

$$\mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota + \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \hat{\mathbf{H}}^{\iota m} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{G}^{\iota m} \mathbf{p}^m \quad (3.46)$$

donde ahora los sumatorios están extendidos a todos los nodos de la discretización.

Hay que resaltar que solo un valor del desplazamiento es posible en cualquier punto. No ocurre lo mismo con la tensión puede tomar valores diferentes para un mismo punto cuando este pertenece a mas de un elemento con normales no paralelas. Esta situación se resuelve considerando mas de un nodo en el mismo punto. Cuando se conoce como mínimo una de las las tensiones, el desplazamiento de ambos nodos es igual a la solución que resulta del sistema de ecuaciones. Por contra, cuando ambas tensiones son incógnita, la matriz del sistema es singular porque las ecuaciones asociadas a los nodos duplicados son iguales unas a otras. Es lo que se conoce como *problema de esquina*. Para resolverlo es necesario realizar una estrategia de colocación no nodal. Este procedimiento, el cual fue empleado por primera vez por Medina (1987), fue estudiado en profundidad por Aznárez (2002).

Ahora los vectores \mathbf{u}^m y \mathbf{p}^m de dimensiones 3×1 representan las tres componentes del desplazamiento y la tensión en el nodo m . Las matrices $\hat{\mathbf{H}}^{\iota m}$ y $\mathbf{G}^{\iota m}$, de dimensiones 3×3 , representan la respuesta en el nodo m debida a la carga unitaria armónica en el punto de colocación ι , y que se definen como

$$\hat{\mathbf{H}}^{\iota m} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_{e_m}} \mathbf{p}^* \phi_k d\Gamma \quad (3.47)$$

$$\mathbf{G}^{\iota m} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_{e_m}} \mathbf{u}^* \phi_k d\Gamma \quad (3.48)$$

donde los sumatorios están extendidos a todos los elementos e_m al cual el nodo m pertenece, y ϕ_k en la función de forma correspondiente al nodo m dentro del elemento Γ_{e_m} . Normalmente, el punto de colocación ι coincidirá con cierto nodo m de la discretización. En ese caso, llamando

$$\mathbf{H}^{\iota m} = \begin{cases} \hat{\mathbf{H}}^{\iota m} & , \text{ if } \iota \neq m \\ \mathbf{c}^\iota + \hat{\mathbf{H}}^{\iota m} & , \text{ if } \iota = m \end{cases} \quad (3.49)$$

la ecuación (3.46) queda

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{H}^{\iota m} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{G}^{\iota m} \mathbf{p}^m \quad (3.50)$$

la cual expresa la representación discretizada de la ecuación integral en el contorno.

3.6.2. Sistema de ecuaciones del método de elementos de contorno

Finalmente, escribiendo la ecuación (3.50) para cada nodo, se obtiene un sistema de ecuaciones

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{p}} \quad (3.51)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{p}}$ son vectores de dimensiones $3\mathcal{N}_n \times 1$ que contienen los valores nodales del problema, y donde las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} están formadas por submatrices \mathbf{H}^{lm} y \mathbf{G}^{lm} respectivamente. Aplicando las condiciones de contorno y reordenando las columnas de manera que todas las incógnitas (desplazamientos y tensiones) estén agrupadas en un vector $\bar{\mathbf{x}}$, se puede escribir un sistema lineal de ecuaciones algebraicas independientes de la forma

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (3.52)$$

donde $\bar{\mathbf{f}}$ es un vector conocido que sale de la aplicación de las condiciones de contorno y de reordenar las ecuaciones adecuadamente.

3.6.3. Tipología de los elementos de contorno

Aunque la formulación presentada es genérica para cualquier tipo de elementos, se han usado en este estudio elementos cuadráticos de forma triangular y cuadrilátero, con seis y nueve nodos respectivamente. Estos elementos han sido escritos en términos de coordenadas adimensionales ξ_1 y ξ_2 , han sido definidos en el cuadro 3.1 junto con sus funciones de forma. Resaltar que las funciones de aproximación ϕ_i toman valor unidad en el nodo i y cero en los demás nodos del elemento.

3.6.4. Acoplamiento entre subregiones

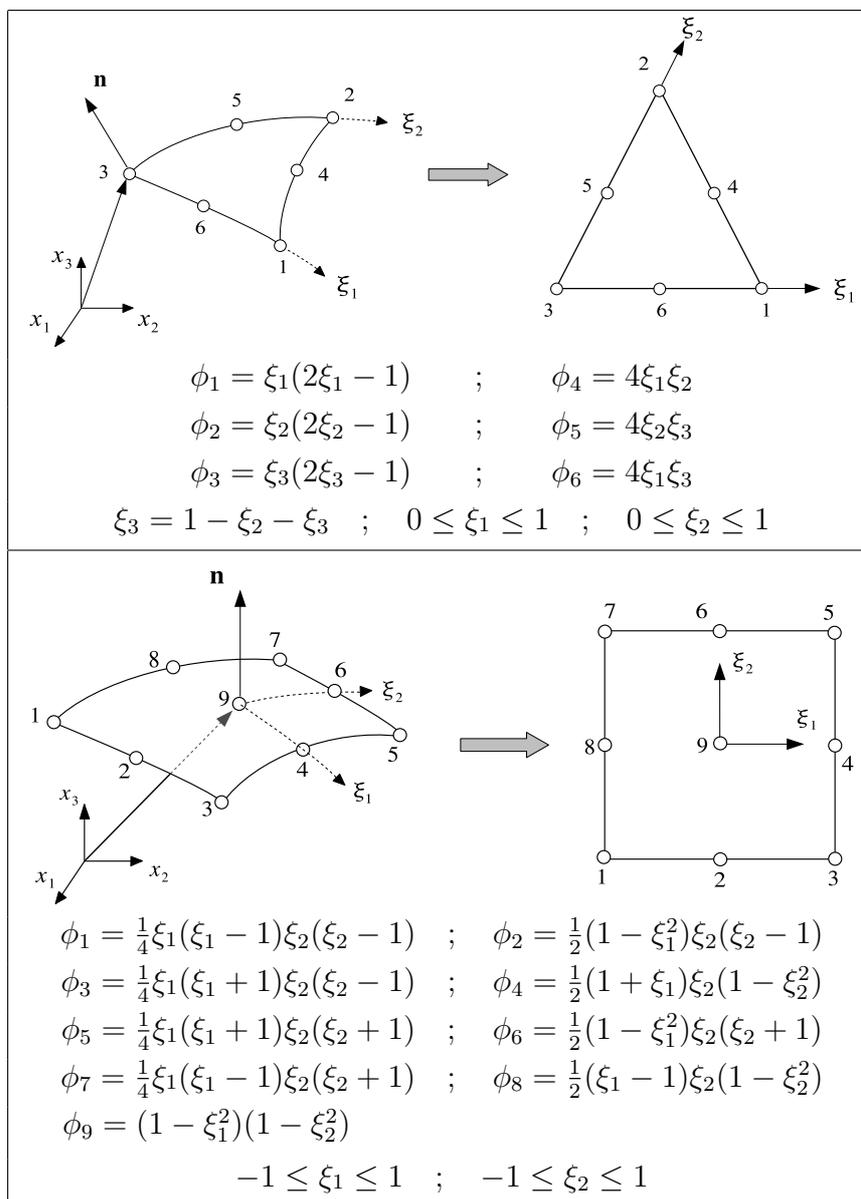
Si el dominio en estudio se define mediante varios subdominios con diferentes propiedades elásticas, la formulación integral es válida para cada uno de los subdominios. Para el ejemplo mostrado en la figura 3.3 se escribirán dos conjuntos independientes de ecuaciones para las regiones 1 y 2. Luego se impondrán las condiciones de equilibrio y compatibilidad en la interfase con el fin de obtener un único sistema de ecuaciones para el problema completo.

Las ecuaciones para cada subregión son

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^1 \bar{\mathbf{u}}_1^1 + \mathbf{H}_2^1 \bar{\mathbf{u}}_2^1 &= \mathbf{G}_1^1 \bar{\mathbf{p}}_1^1 + \mathbf{G}_2^1 \bar{\mathbf{p}}_2^1 \\ \mathbf{H}_2^2 \bar{\mathbf{u}}_2^2 + \mathbf{H}_3^2 \bar{\mathbf{u}}_3^2 &= \mathbf{G}_2^2 \bar{\mathbf{p}}_2^2 + \mathbf{G}_3^2 \bar{\mathbf{p}}_3^2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

que teniendo en cuenta

$$\bar{\mathbf{u}}_2^1 = \bar{\mathbf{u}}_2^2 = \bar{\mathbf{u}}_2 \quad ; \quad \bar{\mathbf{p}}_2^1 = -\bar{\mathbf{p}}_2^2 = \bar{\mathbf{p}}_2 \quad (3.54)$$



Cuadro 3.1: Elementos cuadráticos triangular y cuadrilátero

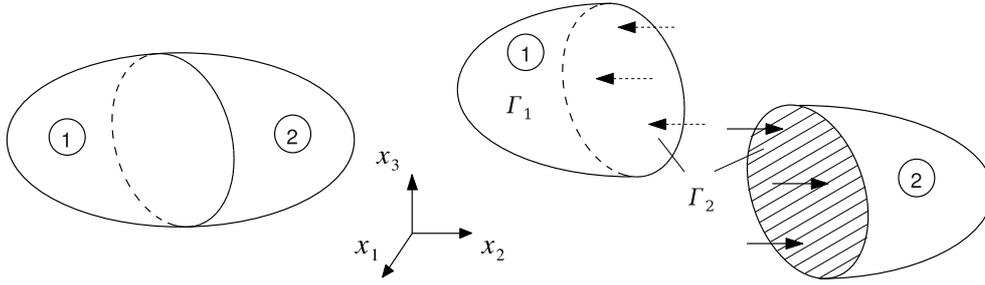


Figura 3.3: Acoplamiento entre dos regiones sólidas

se llega a un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^1 & \mathbf{H}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2^2 & \mathbf{H}_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1^1 \\ \bar{\mathbf{u}}_2^2 \\ \bar{\mathbf{u}}_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^1 & \mathbf{G}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_2^2 & \mathbf{G}_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_1^1 \\ \bar{\mathbf{p}}_2^2 \\ \bar{\mathbf{p}}_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

3.7. Aspectos numéricos del MEC

Como se ha visto hasta ahora, la resolución de un problema mediante el método de elementos de contorno reside en la realización de la discretización; la evaluación numérica de las submatrices \mathbf{H}^{lm} y \mathbf{G}^{lm} ; el montaje de la matriz de ecuaciones \mathbf{A} y el cálculo del vector del lado derecho por aplicación de las condiciones de contorno; y finalmente la resolución del sistema lineal de ecuaciones algebraicas resultante. De esta forma, se obtiene una aproximación numérica de la solución en un conjunto de puntos de los contornos, para luego calcular los desplazamientos en cualquier punto interno $\mathbf{x} \in \Omega$ mediante la ecuación (3.31). Una de las claves del método es la correcta y eficiente evaluación numérica de las integrales.

Cuando el punto de colocación no pertenece al elemento integrado j , los integrandos en las ecuaciones (3.47) y (3.48) son regulares en Γ_j y las integrales pueden ser evaluadas haciendo uso de la cuadratura gaussiana (bibl). Sin embargo, cuando la distancia r del punto de colocación al elemento de integración es relativamente pequeña, las mismas integrales son casi singulares porque los integrandos son inversamente proporcionales a r . Por contra, cuando el punto de colocación pertenece al elemento integrado j , los tensores de la solución fundamental \mathbf{u}^* y \mathbf{p}^* presentan singularidades del orden $O(1/r)$ y $O(1/r^2)$ respectivamente. El primer tipo de singularidad, conocido como *singularidad débil*, es solventada mediante una técnica de subdivisión del elemento (parecida a la presentada por Li et al. (1985) en coordenadas polares) en conjunción con un procedimiento de transformación de coordenadas (similar a los presentados por Telles (1987) o por Cerrolaza y Alarcón (1989)) para hacer el integrando regular. El segundo tipo de términos, también llamados *términos fuertemente singulares*, son evaluados haciendo uso de una técnica propuesta por Chirino et al. (2000) en la línea comenzada en anteriores trabajos

por Cruse et al. (1969) y Li et al. (1985). Estas integrales fuertemente singulares se evalúan identificando los términos de orden $O(1/r^2)$ y dividiéndolos en integrales de superficie regulares y una integral lineal sobre el perímetro del elemento. De esta forma, se consigue cancelar las singularidades con la contribución de los elementos adyacentes.

El análisis profundo de estos detalles numéricos está fuera del objetivo de este trabajo.

Capítulo 4

Modelo simplificado para el cálculo sísmico de una estructura enterrada

4.1. Introducción

El objetivo principal de este capítulo es presentar un modelo simplificado para el análisis dinámico de una estructura enterrada, para la cual se considera un comportamiento de viga a flexión teniendo en cuenta además el efecto de la deformación por cortante.

En este capítulo se expone brevemente la teoría clásica de vigas, para después explicar el efecto de la deformación por cortante y su inclusión en las expresiones que describen el comportamiento de la estructura. El siguiente paso es discretizar las ecuaciones mediante elementos finitos, calculando las cargas equivalentes en los nodos y la matriz de rigidez elemental haciendo uso del Principio de los Trabajos Virtuales.

Finalmente se plantea el análisis dinámico calculando para ello la matriz de masa y explicando brevemente la naturaleza del campo incidente. Es en este punto donde se considera el efecto del suelo como una distribución de impedancias horizontales y a giro repartidas a lo largo del tramo enterrado de la estructura (modelo Winkler).

4.2. Teoría de vigas clásica

El modelo más simplificado para describir el comportamiento de una viga a flexión (tanto cuando la geometría de la sección y el material de la viga son constantes a lo largo de su longitud, como cuando no) es aquel en el que sólo se tienen en cuenta deformaciones por flexión y fuerzas de inercia transversales, y consecuentemente se desprecian las deformaciones por cortante y los efectos de inercia rotacional. Este modelo, en el que se asume también que las secciones planas continúan siéndolo después de la aplicación de las cargas, es comúnmente denominado como el modelo de vigas de Euler-Bernoulli.

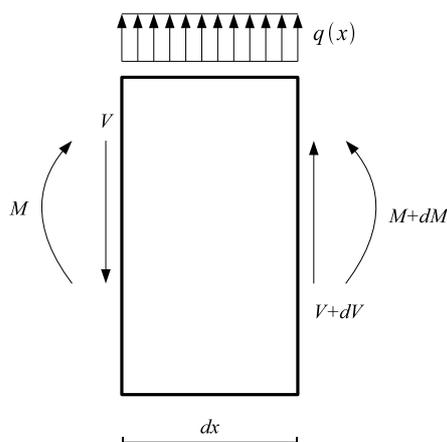


Figura 4.1: Elemento diferencial

Escribiendo la ecuación de equilibrio transversal para una sección de longitud diferencial de la viga (figura 4.1) podemos llegar a la siguiente expresión

$$(V + dV) - V + q(x) dx = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dV}{dx} + q(x) = 0 \quad (4.1)$$

Del equilibrio de momentos se obtiene que el cortante V es

$$V = -EI \frac{d^3 v}{dx^3} \quad (4.2)$$

que sustituyéndolo en (4.1), la ecuación que define el equilibrio de un elemento diferencial es

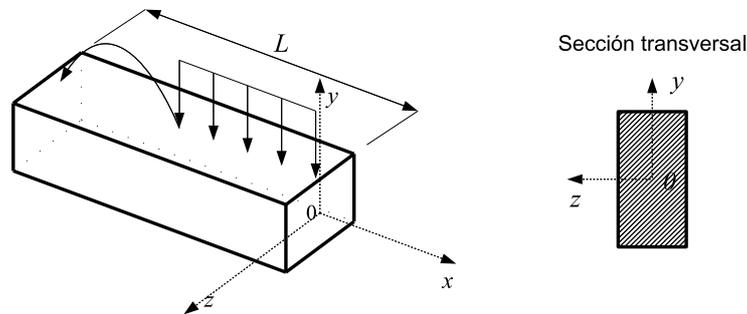
$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) \quad (4.3)$$

donde v es el desplazamiento transversal, E el módulo de elasticidad del material e I la inercia de la sección.

Consideremos una viga como la de la figura 4.2 sobre la que actúan fuerzas externas tales como cargas verticales y momentos contenidos en el plano xy .

La teoría de vigas clásica, o de Euler-Bernoulli, se basa en las tres hipótesis siguientes:

- Los desplazamientos en la dirección del eje y de todos los puntos de una sección transversal son iguales a los del punto de corte entre el eje longitudinal x de la viga y dicha sección.

Figura 4.2: Vista y sección de una viga de longitud L

- El desplazamiento lateral en la dirección z de cualquier punto es nulo.
- Las secciones transversales planas y normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación. (figura 4.3)

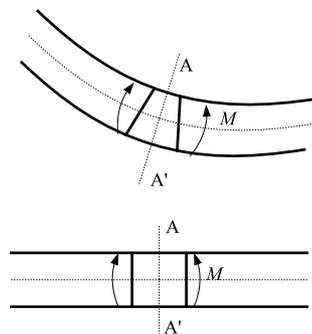


Figura 4.3: Deformación por flexión. Teoría clásica de vigas.

4.3. Deformación por cortante. Viga Timoshenko

Existe un buen número de casos en los que la presencia de vigas de gran canto en relación con su longitud hace necesaria la consideración de las deformaciones provocadas por el esfuerzo cortante, despreciadas en la teoría clásica de vigas. Se

muestra en este apartado la influencia de considerar la deformación producida por el cortante así como las ecuaciones que nos permiten obtener el desplazamiento transversal.

La teoría de vigas de Timoshenko comparte las dos primeras hipótesis de la teoría de vigas clásica. Sin embargo, la tercera hipótesis que se establece no coincide con la de la teoría clásica. La nueva hipótesis es:

- Las secciones transversales planas y normales al eje de la viga antes de la deformación, siguen permaneciendo planas pero no necesariamente normales al eje después de la deformación.

Dicho esto, el desplazamiento transversal $v(x)$ en la dirección del eje y se puede expresar como la suma de dos desplazamientos, uno $v_f(x)$ provocado por el comportamiento de flexión y otro $v_c(x)$ al considerar la deformación por cortante.

$$v(x) = v_f(x) + v_c(x) \quad (4.4)$$

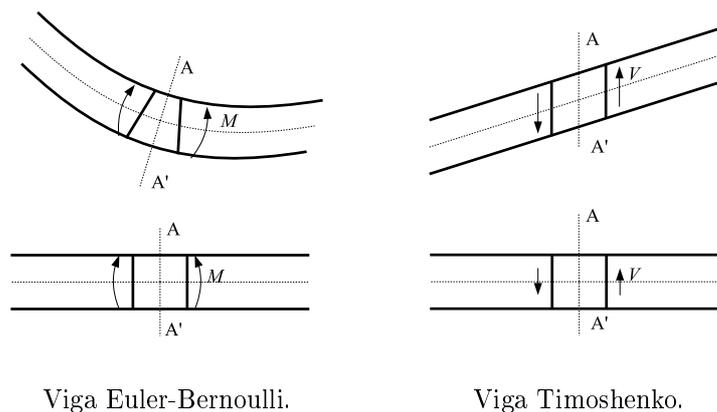


Figura 4.4: Giro de la sección y giro de la normal al plano medio

Hay que aclarar que el giro de la sección no es consecuencia de la deformación por cortante, que por contra sí participa en el giro de la línea media.

Si nos fijamos en la figura 4.4 se observa claramente que

- El giro en la sección es debido únicamente a $v_f(x)$.
- El giro en la línea media y normal a la sección es causado por la deformación total $v(x)$.
- Las condiciones de contorno se imponen casi siempre sobre el giro, por lo que sobre todo interesan los giros derivados de la deformación de flexión usual v_f , sin considerar la influencia del cortante.

Ya se ha dicho que el desplazamiento lateral en la dirección del eje z es nulo. Sin embargo, a parte del desplazamiento transversal $v(x)$, se produce también un desplazamiento $u(x, y)$ en la dirección del eje x perpendicular a la sección como consecuencia del giro de la misma, que se obtiene derivando $v_f(x)$:

$$u(x, y) = -y \frac{dv_f}{dx} \quad (4.5)$$

Las ecuaciones que definen la deformación longitudinal ε_x y la distorsión angular γ_{xy} se obtienen de derivar el campo de desplazamientos, así

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{d^2 v_f}{dx^2} \quad (4.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v_c}{\partial x} \quad (4.7)$$

Según la ley de comportamiento elástico la tensión normal σ_x y la tensión tangencial τ_{xy} que aparecen en la sección transversal son:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -Ey \frac{d^2 v_f}{dx^2} \quad (4.8)$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} = \mu \frac{\partial v_c}{\partial x}$$

siendo E el módulo de elasticidad y μ la rigidez transversal del material.

Se hace necesario a esta altura realizar una aclaración en cuanto a las tensiones en la sección. Mientras que la variación de la tensión normal σ_x a lo largo del canto es lineal, la variación de la tensión tangencial τ_{xy} se supone constante cuando según la teoría de vigas sigue una distribución polinómica. Para solucionar este problema se acepta la hipótesis de tensión tangencial constante, pero modificada por un coeficiente de manera que el trabajo de deformación de la tensión tangencial coincida con el de la teoría de vigas.

$$\tau_{xy} = \alpha\mu \frac{dv_c}{dx} \quad (4.9)$$

llamando a α módulo de cortadura, el cual es constante y depende únicamente de la forma de la sección (ver Abascal (2000)).

El momento M se calcula integrando el producto de las tensiones normales por la distancia y a la línea media, y el esfuerzo cortante V se obtiene integrando las tensiones tangenciales, ambas en el área de la sección.

$$M = - \iint_A y \sigma_{xx} dA \quad \longrightarrow \quad M = EI \frac{d^2 v_f}{dx^2} \quad (4.10)$$

$$V = \iint_A \tau_{xy} dA \quad \longrightarrow \quad V = \alpha\mu A \frac{dv_c}{dx} \quad (4.11)$$

De nuevo las ecuaciones de equilibrio de momentos y en la dirección del eje y de un elemento diferencial como el de la figura 4.1 sobre el que actúa una carga distribuida $q(x)$ son respectivamente

$$(M + dM) - M + V dx = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dM}{dx} + V = 0 \quad (4.12)$$

$$(V + dV) - V + q(x)dx = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dV}{dx} + q(x) = 0 \quad (4.13)$$

Si metemos el valor del momento dado por (4.10) en la ecuación de equilibrio (4.12) se tiene:

$$EI \frac{d^3 v_f}{dx^3} + V = 0 \quad \longrightarrow \quad V = -EI \frac{d^3 v_f}{dx^3} \quad (4.14)$$

Sustituyendo ahora (4.14) en (4.13):

$$-EI \frac{d^4 v_f}{dx^4} + q(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d^4 v_f}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \quad (4.15)$$

Por otro lado, sustituyendo (4.11) en (4.13):

$$\frac{d^2 v_c}{dx^2} = -\frac{q(x)}{\alpha \mu A} \quad (4.16)$$

Si igualamos (4.11) con (4.14) se obtiene:

$$\alpha \mu A \frac{dv_c}{dx} = -EI \frac{d^3 v_f}{dx^3} \quad (4.17)$$

que relaciona v_c y v_f .

La ecuación diferencial del desplazamiento transversal conjunto se obtiene derivando dos veces la ecuación (4.16)

$$\frac{d^4 v_c}{dx^4} = -\frac{1}{\alpha \mu A} \frac{d^2 q(x)}{dx^2} \quad (4.18)$$

y luego sumando (4.15) y (4.18)

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} - \frac{1}{\alpha \mu A} \frac{d^2 q(x)}{dx^2} \quad (4.19)$$

Si la carga distribuida $q(x)$ es nula las ecuaciones (4.15) y (4.16) quedan respectivamente:

$$\frac{d^4 v_f}{dx^4} = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{d^2 v_c}{dx^2} = 0 \quad (4.21)$$

4.4. Discretización mediante elementos finitos

Para resolver las ecuaciones diferenciales (4.20) y (4.21), ambas se discretizan haciendo uso del método de elementos finitos. Para ello se divide una viga en un número determinado de elementos interconectados por un número finito de nodos, (ver figura 4.5). Las variables primarias, $v_f(x)$ y $v_c(x)$ del problema serán aproximadas dentro de cada elemento mediante los valores nodales en los extremos del mismo y unas funciones de aproximación, también llamadas funciones de forma, como

$$v_f(\xi) = H_1(\xi)v_1^f + H_2(\xi)\theta_1 + H_3(\xi)v_2^f + H_4(\xi)\theta_2 \quad (4.22)$$

$$v_c(\xi) = N_1(\xi)v_1^c + N_2(\xi)v_2^c \quad (4.23)$$

donde v_1^f y v_2^f son los desplazamientos nodales en la dirección del eje y producidos por el comportamiento a flexión de la viga, θ_1 y θ_2 los giros nodales y v_1^c y v_2^c son los desplazamientos transversales nodales debidos al cortante.

Las funciones de forma $H_1(\xi)$, $H_2(\xi)$, $H_3(\xi)$, y $H_4(\xi)$ están dadas por un conjunto de polinomios de tercer grado para un elemento lineal ij en cuyos extremos se emplean como variables el valor del desplazamiento v^f y el giro de la sección θ , debidos a la flexión. Los polinomios de aproximación para calcular v_f son

$$H_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (4.24a)$$

$$H_2(\xi) = L_e\xi(1 - 2\xi + \xi^2) \quad (4.24b)$$

$$H_3(\xi) = \xi^2(3 - 2\xi) \quad (4.24c)$$

$$H_4(\xi) = L_e\xi^2(\xi - 1) \quad (4.24d)$$

donde L_e es la longitud del elemento.

En la figura 4.6 se pueden ver las funciones de forma H_i , que representan la deformada del elemento cuando se da valor unitario al grado de libertad correspondiente manteniendo a cero el resto.

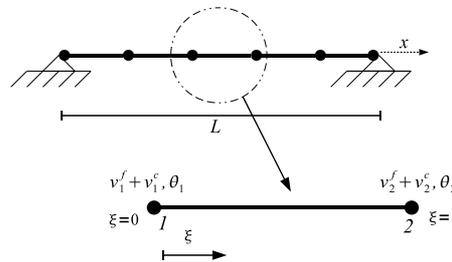


Figura 4.5: Discretización. Elemento finito tipo barra

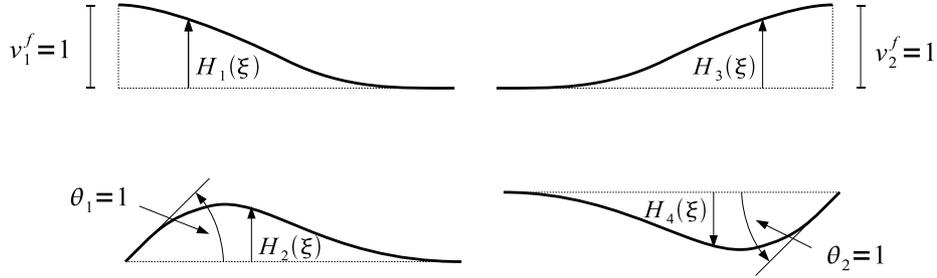


Figura 4.6: Funciones de forma que determinan el comportamiento a flexión.

Las funciones de forma $N_1(\xi)$ y $N_2(\xi)$ son

$$N_1(\xi) = 1 - \xi \quad (4.25a)$$

$$N_2(\xi) = \xi \quad (4.25b)$$

Como en el caso de las funciones de forma $H_i(\xi)$, se representan en la figura 4.7 las funciones de forma $N_i(\xi)$



Figura 4.7: Funciones de forma que determinan el comportamiento a cortante.

La ecuación (4.17) relaciona v_f y v_c pero está escrita en términos de derivadas con respecto a x . Para escribirla en función de ξ , teniendo en cuenta que $\xi = \frac{x}{L_e}$, podemos decir

$$\frac{dv_f}{dx} = \frac{dv_f}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad (4.26)$$

$$\frac{dv_c}{dx} = \frac{dv_c}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad (4.27)$$

siendo $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L_e}$.

Si seguimos derivando (4.26) para obtener la derivada segunda y tercera tenemos:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dv_f}{dx} \right) = \frac{1}{L_e} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dv_f}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 v_f}{dx^2} = \frac{1}{L_e^2} \frac{d^2 v_f}{d\xi^2} \quad (4.28)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 v_f}{dx^2} \right) = \frac{1}{L_e^2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d^2 v_f}{d\xi^2} \right) \frac{d\xi}{dx} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^3 v_f}{dx^3} = \frac{1}{L_e^3} \frac{d^3 v_f}{d\xi^3} \quad (4.29)$$

por lo que finalmente tenemos

$$\frac{d^3 v_f}{dx^3} = \frac{1}{L_e^3} \frac{d^3 v_f}{d\xi^3} \quad (4.30)$$

$$\frac{dv_c}{dx} = \frac{1}{L_e} \frac{dv_c}{d\xi} \quad (4.31)$$

Sustituyendo (4.30) y (4.31) en la ecuación diferencial (4.17)

$$\alpha\mu A \frac{1}{L_e} \frac{dv_c}{d\xi} = -EI \frac{1}{L_e^3} \frac{d^3 v_f}{d\xi^3} \quad (4.32)$$

La derivada tercera de (4.22) y la derivada primera de (4.23) ambas con respecto a ξ son

$$\frac{d^3 v_f}{d\xi^3} = \frac{d^3 H_1}{d\xi^3} v_1^f + \frac{d^3 H_2}{d\xi^3} \theta_1 + \frac{d^3 H_3}{d\xi^3} v_2^f + \frac{d^3 H_4}{d\xi^3} \theta_2 \quad (4.33)$$

$$\frac{dv_c}{d\xi} = \frac{dN_1}{d\xi} v_1^c + \frac{dN_2}{d\xi} v_2^c \quad (4.34)$$

Sustituyendo las derivadas de las correspondientes funciones de forma en (4.33) y (4.34)

$$\frac{d^3 v_f}{d\xi^3} = 12v_1^f + 6L_e\theta_1 - 12L_e v_2^f + 6L_e\theta_2 \quad (4.35)$$

$$\frac{dv_c}{d\xi} = -v_1^c + v_2^c \quad (4.36)$$

Introduciendo (4.35) y (4.36) en (4.32) y reordenando llegamos a

$$v_1^c - v_2^c = \frac{12EI}{L_e^2\mu\alpha A} \left(v_1^f + \frac{L_e}{2}\theta_1 - v_2^f + \frac{L_e}{2}\theta_2 \right) \quad (4.37)$$

Por comodidad diremos que $\phi = \frac{12EI}{L_e^2\mu\alpha A}$.

Recordando la ecuación (4.4) podemos decir que $v_i^f = v_i - v_i^c$, que al sustituirlo en (4.22) y (4.37) y después de operar se llega a

$$v_f(\xi) = H_1(\xi)v_1 + H_2(\xi)\theta_1 + H_3(\xi)v_2 + H_4(\xi)\theta_2 - H_1(\xi)v_1^c - H_3(\xi)v_2^c \quad (4.38)$$

$$v_1^c - v_2^c = \frac{\phi}{1+\phi} \left(v_1 + \frac{L_e}{2}\theta_1 - v_2 + \frac{L_e}{2}\theta_2 \right) \quad (4.39)$$

Si sumamos (4.23) con (4.38), teniendo en cuenta (4.4) se obtiene

$$v(\xi) = H_1(\xi)v_1 + H_2(\xi)\theta_1 + H_3(\xi)v_2 + H_4(\xi)\theta_2 \\ + (N_1(\xi) - H_1(\xi))v_1^c + (N_2(\xi) - H_3(\xi))v_2^c \quad (4.40)$$

además usando las relaciones

$$H_1 = 1 - H_3$$

$$N_1 = 1 - N_2$$

la ecuación (4.40) queda

$$v(\xi) = H_1(\xi)v_1 + H_2(\xi)\theta_1 + H_3(\xi)v_2 \\ + H_4(\xi)\theta_2 + (N_1(\xi) - H_1(\xi))(v_1^c - v_2^c) \quad (4.41)$$

Si ahora introducimos (4.39) en (4.41) se llega a

$$v(\xi) = [H_1(\xi) + \phi N_1(\xi)] \frac{v_1}{1 + \phi} \\ + \left[\frac{1 + \phi}{L_e} H_2(\xi) + \frac{1}{2}(N_1(\xi) - H_1(\xi))\phi \right] \frac{L_e \theta_1}{1 + \phi} \\ + [H_3(\xi) + N_2(\xi)\phi] \frac{v_2}{1 + \phi} \\ + \left[\frac{1 + \phi}{L_e} H_4(\xi) + (\xi) \frac{1}{2}(N_1(\xi) - H_1(\xi))\phi \right] \frac{L_e \theta_2}{1 + \phi} \quad (4.42)$$

Según la ecuación (4.42) podemos escribir el desplazamiento transversal $v(\xi)$ como

$$v(\xi) = \psi_1(\xi)v_1 + \psi_2(\xi)\theta_1 + \psi_3(\xi)v_2 + \psi_4(\xi)\theta_2 \quad (4.43)$$

siendo

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{1 + \phi} [H_1(\xi) + \phi N_1(\xi)] \quad (4.44a)$$

$$\psi_2(\xi) = \frac{L_e}{1 + \phi} \left[\frac{1 + \phi}{L_e} H_2(\xi) + \frac{1}{2}(N_1(\xi) - H_1(\xi))\phi \right] \quad (4.44b)$$

$$\psi_3(\xi) = -\frac{1}{1 + \phi} [H_3(\xi) + N_2(\xi)\phi] \quad (4.44c)$$

$$\psi_4(\xi) = \frac{L_e}{1 + \phi} \left[\frac{1 + \phi}{L_e} H_4(\xi) + \frac{1}{2}(N_1(\xi) - H_1(\xi))\phi \right] \quad (4.44d)$$

Si en las ecuaciones (4.44) sustituimos las funciones de forma por sus expresiones

según (4.24) y (4.25)

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{1+\phi} [2\xi^3 - 3\xi^2 - \phi\xi + 1 + \phi] \quad (4.45a)$$

$$\psi_2(\xi) = \frac{L_e\xi}{1+\phi} \left[\xi^2 - \left(2 + \frac{\phi}{2}\right) \xi + 1 + \frac{\phi}{2} \right] \quad (4.45b)$$

$$\psi_3(\xi) = -\frac{\xi}{1+\phi} [2\xi^2 - 3\xi - \phi] \quad (4.45c)$$

$$\psi_4(\xi) = \frac{L_e\xi}{1+\phi} \left[\xi^2 - \left(1 - \frac{\phi}{2}\right) \xi - \frac{\phi}{2} \right] \quad (4.45d)$$

En la sección 4.3 se dijo que el giro θ es únicamente consecuencia de el desplazamiento transversal debido a la flexión v_f , por lo que se puede escribir

$$\theta(\xi) = \frac{d}{d\xi} v_f(\xi) \quad (4.46)$$

Si usamos la relación $H_1(\xi) = 1 - H_3(\xi)$ en (4.38)

$$\begin{aligned} v_f(\xi) &= H_1(\xi)v_1 + H_2(\xi)\theta_1 + H_3(\xi)v_2 \\ &\quad + H_4(\xi)\theta_2 - v_1^c + H_3(\xi)(v_1^c - v_2^c) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Introduciendo (4.39) en (4.47) y operando

$$\begin{aligned} v_f(\xi) &= \left[H_1(\xi) + \frac{\phi}{1+\phi} H_3(\xi) \right] v_1 + \left[H_2(\xi) + \frac{\phi}{1+\phi} \frac{L_e}{2} H_3(\xi) \right] \theta_1 \\ &\quad + \frac{1}{1+\phi} H_3(\xi)v_2 + \left[H_4(\xi) + \frac{\phi}{1+\phi} \frac{L_e}{2} H_3(\xi) \right] \theta_2 - v_1^c \end{aligned} \quad (4.48)$$

Podemos escribir (4.48) de manera más compacta como

$$v_f(\xi) = \varphi_1(\xi)v_1 + \varphi_2(\xi)\theta_1 + \varphi_3(\xi)v_2 + \varphi_4(\xi)\theta_2 - v_1^c \quad (4.49)$$

siendo

$$\varphi_1(\xi) = 1 - \frac{3}{1+\phi}\xi^2 + \frac{2}{1+\phi}\xi^3 \quad (4.50a)$$

$$\varphi_2(\xi) = \frac{L_e\xi}{2(1+\phi)} [2(1+\phi) - (4+\phi)\xi + 2\xi^2] \quad (4.50b)$$

$$\varphi_3(\xi) = \frac{\xi^2}{1+\phi} (3 - 2\xi) \quad (4.50c)$$

$$\varphi_4(\xi) = \frac{L_e\xi^2}{2(1+\phi)} (2\xi - 2 + \phi) \quad (4.50d)$$

El giro, que se obtiene por medio de la derivada primera de (4.49), puede expresarse como

$$\theta(\xi) = \varphi'_1(\xi)v_1 + \varphi'_2(\xi)\theta_1 + \varphi'_3(\xi)v_2 + \varphi'_4(\xi)\theta_2 \quad (4.51)$$

siendo

$$\varphi'_1(\xi) = \frac{d\varphi_1(\xi)}{d\xi} = \frac{6\xi}{(1+\phi)}(\xi-1) \quad (4.52a)$$

$$\varphi'_2(\xi) = \frac{d\varphi_2(\xi)}{d\xi} = \frac{L_e}{1+\phi} [1+\phi - (4+\phi)\xi + 3\xi^2] \quad (4.52b)$$

$$\varphi'_3(\xi) = \frac{d\varphi_3(\xi)}{d\xi} = \frac{6\xi}{(1+\phi)}(1-\xi) \quad (4.52c)$$

$$\varphi'_4(\xi) = \frac{d\varphi_4(\xi)}{d\xi} = \frac{L_e\xi}{1+\phi}(\xi+\phi-2) \quad (4.52d)$$

Hasta aquí hemos obtenido las expresiones (4.43) y (4.51) que definen, respectivamente, la flecha total y el giro, en cualquier punto de un elemento tipo barra como el de la figura 4.8, a partir del desplazamiento transversal y el giro en cada uno de sus extremos.

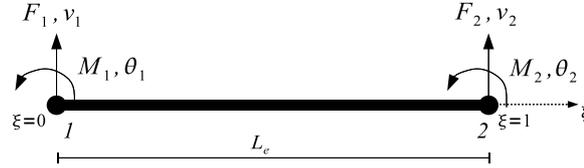


Figura 4.8: Elemento tipo barra

Si escribimos las ecuaciones (4.43) y (4.51) de forma matricial

$$\begin{bmatrix} v(\xi) \\ \theta(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1(\xi) & \psi_2(\xi) & \psi_3(\xi) & \psi_4(\xi) \\ \varphi'_1(\xi) & \varphi'_2(\xi) & \varphi'_3(\xi) & \varphi'_4(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

4.5. Principio de los Trabajo Virtuales

Consideremos un dominio genérico Ω cuyo contorno Γ está sometido a unas cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}}$ y unas restricciones en desplazamientos \bar{u}_i , conocidos, que producen un campo de desplazamientos u_i , unas deformaciones ε_{ij} y unas tensiones σ_{ij} . Sobre

dicho dominio se definen dos estados que satisfacen las ecuaciones de la elastodinámica.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{t}}, \bar{u}_i) &= (u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) \\ \delta\mathbf{S}(\delta\bar{\mathbf{t}}, \delta\bar{u}_i) &= (\delta u_i, \delta\varepsilon_{ij}, \delta\sigma_{ij}) \end{aligned}$$

siendo $\delta\mathbf{S}$ un estado virtual conocido. No se han tenido en cuenta las cargas de volumen.

El *Principio de los trabajos virtuales* dice que el trabajo interno realizado por las tensiones σ_{ij} sobre el campo de deformaciones virtual $\delta\varepsilon_{ij}$ es exactamente igual al trabajo externo de las cargas exteriores $\bar{\mathbf{t}}$ sobre el campo de desplazamientos virtual δu_i , lo cual se puede expresar como

$$\int_{\Omega} \delta\varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \int_{\Gamma} \delta u_i \bar{\mathbf{t}} dA \quad (4.54)$$

Aplicando este teorema a una viga como la de la figura 4.5 sobre la cual actúan una carga transversal $q(x)$ y un momento $m(x)$ repartidos, la expresión del *Principio de los Trabajos Virtuales* (PTV) en donde se incluye el trabajo producido por las tensiones tangenciales sobre la deformación por cortante es

$$\begin{aligned} \iiint_{V_e} (\delta\varepsilon_x \sigma_x + \delta\gamma_{xy} \tau_{xy}) dV = \\ \int_0^L \delta v q(x) dx + \int_0^L \delta\theta m(x) dx + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{T} \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde δv , $\delta\theta$ son la flecha y el giro virtuales a lo largo de la viga; $\delta\varepsilon_x$, $\delta\gamma_{xy}$ las deformaciones virtuales; $\delta\mathbf{u}$ es el vector de movimiento virtual de lo extremos de la viga; y \mathbf{T} es el vector de fuerzas de equilibrio en los apoyos.

Recordando las expresiones (4.6), (4.7), (4.8) y (4.9), y sustituyendo en (4.55)

$$\begin{aligned} \iiint_{V_e} \left[\delta \left(-y \frac{d^2 v_f}{dx^2} \right) E \left(-y \frac{d^2 v_f}{dx^2} \right) + \delta \left(\frac{dv_c}{dx} \right) \alpha \mu \left(\frac{dv_c}{dx} \right) \right] dV \\ = \int_0^L \delta v q(x) dx + \int_0^L \delta\theta m(x) dx + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{T} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Tanto v_f como v_c dependen únicamente de la variable x y teniendo en cuenta que $dV = dx dA$

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[\delta \left(-y \frac{d^2 v_f}{dx^2} \right) E \left(-y \frac{d^2 v_f}{dx^2} \right) + \delta \left(\frac{dv_c}{dx} \right) \alpha \mu \left(\frac{dv_c}{dx} \right) \right] dx dA = \\ - \int_0^L \delta v q(x) dx + \int_0^L \delta\theta m(x) dx + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{T} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Llegados a este punto, sería interesante expresar esta ecuación en función de la misma coordenada natural ξ que fue utilizada en las secciones anteriores a la hora

de definir el elemento finito a utilizar en este trabajo. De este modo, siendo $\xi = \frac{x}{L_e}$, y verificándose que

$$\frac{d^2 v_f}{dx^2} = \frac{1}{L_e^2} \frac{d^2 v_f}{d\xi^2} \quad ; \quad \frac{dv_c}{dx} = \frac{1}{L_e} \frac{dv_c}{d\xi} \quad ; \quad dx = L_e d\xi \quad (4.58)$$

la ecuación (4.57) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_e} \left[\delta \left(-y \frac{1}{L_e^2} \frac{d^2 v_f}{d\xi^2} \right) E \left(-y \frac{1}{L_e^2} \frac{d^2 v_f}{d\xi^2} \right) + \delta \left(\frac{1}{L_e} \frac{dv_c}{d\xi} \right) \alpha \mu \left(\frac{1}{L_e} \frac{dv_c}{d\xi} \right) \right] L_e d\xi dA = \\ & - \int_0^1 \delta v q(\xi) L_e d\xi + \int_0^1 \delta \theta m(\xi) L_e d\xi + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{T}_e \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde $\delta \mathbf{u}_e$ es el vector de movimiento virtual de los nodos del elemento, $\delta \mathbf{u}_e^T = [\delta v_1 \quad \delta \theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta \theta_2]$; y \mathbf{T}_e es el vector de fuerzas de equilibrio en los nodos, $\mathbf{T}_e = [F_1 \quad M_1 \quad F_2 \quad M_2]^T$.

Los desplazamientos v_f y v_c dependen únicamente de la variable longitudinal ξ , por lo que al integrar en el área transversal del elemento, la ecuación(4.59) se convierte en

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[\delta \left(\frac{d^2 v_f}{d\xi^2} \right) \frac{EI}{L_e^3} \left(\frac{d^2 v_f}{d\xi^2} \right) + \delta \left(\frac{dv_c}{d\xi} \right) \frac{\alpha \mu A}{L_e} (dv_c d\xi) \right] d\xi = \\ & - \int_0^1 \delta v q(\xi) d\xi + \int_0^1 \delta \theta m(\xi) d\xi + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{T}_e \end{aligned} \quad (4.60)$$

Ya hemos visto que el giro es $\theta = \frac{dv_f}{d\xi}$ y por tanto $\theta' = \frac{d^2 v_f}{d\xi^2}$. Escribiendo (4.60) de manera más compacta

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\delta \theta' \frac{EI}{L_e^3} \theta' + \delta v'_c \frac{\alpha \mu A}{L_e} v'_c \right) d\xi = \\ & - \int_0^1 \delta v q(\xi) L_e d\xi + \int_0^1 \delta \theta m(\xi) L_e d\xi + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{T}_e \end{aligned} \quad (4.61)$$

donde $v'_c = \frac{dv_c}{dx}$.

La expresión (4.51) determina el giro a lo largo del elemento. Si calculamos su derivada primera con respecto a ξ tenemos

$$\theta' = \varphi_1'' v_1 + \varphi_2'' \theta_1 + \varphi_3'' v_3 + \varphi_4'' \theta_2 \quad (4.62)$$

por lo que se puede escribir

$$\theta' = \mathbf{B}_f \mathbf{u}_e \quad ; \quad \delta \theta' = \mathbf{B}_f \delta \mathbf{u}_e \quad (4.63)$$

donde \mathbf{B}_f es una matriz fila y \mathbf{u}_e un vector con los desplazamientos y giros nodales

$$\mathbf{B}_f = [\varphi_1'' \quad \varphi_2'' \quad \varphi_3'' \quad \varphi_4''] \quad ; \quad \mathbf{u}_e = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]^T$$

De la misma forma las expresiones (4.43) y (4.51) se pueden escribir como

$$v = \boldsymbol{\psi} \mathbf{u}_e \quad ; \quad \delta v = \boldsymbol{\psi} \delta \mathbf{u}_e \quad (4.64)$$

$$\theta = \boldsymbol{\varphi}' \mathbf{u}_e \quad ; \quad \delta \theta = \boldsymbol{\varphi}' \delta \mathbf{u}_e \quad (4.65)$$

siendo $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4]$; $\boldsymbol{\varphi}' = [\varphi_1' \quad \varphi_2' \quad \varphi_3' \quad \varphi_4']$.

Para obtener una expresión de este tipo para v'_c recordemos, debido a la expresión (4.4), que $v_c = v - v_f$ y por tanto $v'_c = v' - \theta$, por lo que restando (4.43) menos (4.51) se llega a

$$v'_c = (\psi_1 - \varphi_1')v_1 + (\psi_2 - \varphi_2')\theta_1 + (\psi_3 - \varphi_3')v_2 + (\psi_4 - \varphi_4')\theta_2 \quad (4.66)$$

Ahora podemos escribir (4.66) como

$$v'_c = \mathbf{B}_c \mathbf{u}_e \quad ; \quad \delta v'_c = \mathbf{B}_c \delta \mathbf{u}_e \quad (4.67)$$

siendo $\mathbf{B}_c = [\psi_1 - \varphi_1' \quad \psi_2 - \varphi_2' \quad \psi_3 - \varphi_3' \quad \psi_4 - \varphi_4']$.

Sustituyendo las expresiones (4.63), (4.64), (4.65) y (4.67) en (4.61) y teniendo en cuenta las propiedades del producto de matrices, podemos escribir la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}_f^T \frac{EI}{L_e^3} \mathbf{B}_f \mathbf{u}_e + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{B}_c^T \frac{\alpha \mu A}{L_e} \mathbf{B}_c \mathbf{u}_e \right] d\xi = \\ \int_0^1 \delta \mathbf{u}_e^T \boldsymbol{\psi}^T q(\xi) L_e d\xi + \int_0^1 \delta \mathbf{u}_e^T \boldsymbol{\varphi}'^T m(\xi) d\xi + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{T}_e \end{aligned} \quad (4.68)$$

que debe verificarse para cualquier valor de $\delta \mathbf{u}_e$, lo que lleva a escribir la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \left[\int_0^1 \mathbf{B}_f^T \frac{EI}{L_e^3} \mathbf{B}_f d\xi + \int_0^1 \mathbf{B}_c^T \frac{\alpha \mu A}{L_e} \mathbf{B}_c d\xi \right] \mathbf{u}_e = \\ \int_0^1 \boldsymbol{\psi}^T q(\xi) L_e d\xi + \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}'^T m(\xi) d\xi + \mathbf{T}_e \end{aligned} \quad (4.69)$$

donde las dos integrales del segundo miembro determinan, respectivamente, el vector de fuerzas nodales equivalentes \mathbf{F}_q debido a una carga repartida $q(\xi)$ y el vector de fuerzas nodales equivalentes \mathbf{F}_m debido a un momento repartido $m(\xi)$. Las expresiones que permiten su cálculo son

$$\mathbf{F}_q = \int_0^1 \boldsymbol{\psi}^T q(\xi) L_e d\xi \quad (4.70)$$

$$\mathbf{F}_m = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}'^T m(\xi) d\xi \quad (4.71)$$

siendo

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_q &= [F_1^q \quad M_1^q \quad F_2^q \quad M_2^q]^T \\ \mathbf{F}_m &= [F_1^m \quad M_1^m \quad F_2^m \quad M_2^m]^T\end{aligned}\quad (4.72)$$

Las integrales del primer miembro definen la matriz de rigidez. La primera determina la matriz de rigidez a flexión \mathbf{K}_f y la segunda la matriz de rigidez a cortante \mathbf{K}_c . La suma de ambas nos da la matriz de rigidez del elemento. De esta forma se obtiene la ecuación matricial

$$(\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_c) \mathbf{u} = \mathbf{F}_q + \mathbf{F}_m + \mathbf{T}_e \quad (4.73)$$

4.5.1. Matriz de rigidez

El siguiente paso es obtener la matriz de rigidez del elemento como suma de la matriz de rigidez a flexión \mathbf{K}_f y la matriz de rigidez a cortante \mathbf{K}_c . Ya se vio en la sección 4.5 sobre el PTV que estas dos matrices están definidas por las integrales del primer miembro en la ecuación (4.69). Los elementos de cada una de estas matrices se escriben en notación de índices como

$$K_{ij}^f = \int_0^1 B_i^f \frac{EI}{L_e^3} B_j^f d\xi \quad (4.74)$$

$$K_{ij}^c = \int_0^1 B_i^c \frac{\alpha\mu A}{L_e} B_j^c d\xi \quad (4.75)$$

siendo cada elemento de la matriz de rigidez elemental $K_{ij} = K_{ij}^f + K_{ij}^c$.

Realizando las integrales según (4.74) y (4.75) y sumando se obtiene la matriz de rigidez de un elemento tipo barra de dos nodos como el de la figura 4.8 incluyendo la deformación por cortante (ver R.Abascal).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{(1+\phi)L}{6EI} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{(1+\phi)L}{6EI} \\ -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{(1+\phi)L}{6EI} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{(1+\phi)L}{6EI} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Nótese la similitud entre esta matriz de rigidez que incluye la deformación por cortante y la matriz de rigidez de una viga Euler-Bernoulli, coincidiendo ambas para el caso en el que no se considera la deformación por cortante, $\phi = 0$.

La matriz (4.76) expresa la relación que existe entre los desplazamientos y giros nodales y las fuerzas externas aplicadas en los extremos, según

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (4.77)$$

siendo $\mathbf{F} = [F_1 \quad M_1 \quad F_2 \quad M_2]^T$ un vector que representa el segundo miembro de la ecuación (4.73) y es la suma de todos los vectores de fuerzas nodales, esto es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_q + \mathbf{F}_m + \mathbf{T} \quad (4.78)$$

4.6. Análisis dinámico

Hasta ahora se ha supuesto el comportamiento del elemento como estático. Si queremos realizar un estudio sobre el comportamiento dinámico ante un movimiento armónico, provocado por un campo incidente de ondas, es necesario considerar las fuerzas inerciales que la masa y las aceleraciones provocan. La ecuación matricial que determina el comportamiento dinámico de un elemento, considerando amortiguamiento de tipo histerético tal y como se explica más adelante, es:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.79)$$

siendo $\ddot{\mathbf{u}}$ el campo de aceleraciones y \mathbf{M} la matriz de masa. Los elementos de la matriz \mathbf{K} son números complejos de la forma $K_{ij} = \text{Re}[K_{ij}](1 + i2\xi_{ij})$ en los que la parte imaginaria representa amortiguamiento de tipo histerético. El vector \mathbf{F} contiene las fuerzas nodales equivalentes como resultado de la suma de los diferentes efectos que las producen, como pueden ser cargas y momentos repartidos y las fuerzas nodales de equilibrio.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_q + \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_e \quad (4.80)$$

Las fuerzas y las condiciones de contorno variando armónicamente con el tiempo son del tipo $\mathbf{f}(\omega; t) = \mathbf{f}e^{i\omega t}$. En este caso el campo de desplazamientos está compuesto por un régimen transitorio \mathbf{u}^t y un régimen permanente $\mathbf{u}(\omega)$, por tanto

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{u}^t + \mathbf{u}e^{i\omega t} \quad (4.81)$$

Sin embargo, todos los sistemas físicos contienen algún tipo de mecanismo de disipación de energía, de esta forma, cuando $t \rightarrow \infty$ la parte transitoria desaparece. Por tanto el campo de desplazamientos ante un movimiento armónico en el estado estacionario puede expresarse como

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{u}e^{i\omega t} \quad (4.82)$$

donde \mathbf{u} es la amplitud del campo de desplazamientos y ω la frecuencia del movimiento.

En el dominio de la frecuencia, la aceleración puede obtenerse como la derivada segunda del campo de desplazamientos \mathbf{u} , de esta forma

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{u}e^{i\omega t} \quad (4.83)$$

El vector \mathbf{F} puede expresarse como

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}e^{i\omega t} \quad (4.84)$$

siendo $\mathbf{F} = [F_1 \quad M_1 \quad F_2 \quad M_2]^T$ el vector de las amplitudes de las fuerzas nodales equivalentes.

Las expresiones para calcular \mathbf{F}_q y \mathbf{F}_m son exactamente las mismas que (4.70) y (4.71), con la diferencia de que ahora tanto la carga como el momento distribuidos son de tipo armónico. Escribiéndolas en notación de índices se tiene

$$F_i^q = \int_0^1 \psi_i q(\xi; \omega) L_e d\xi \quad (4.85)$$

$$F_i^m = \int_0^1 \varphi_i' m(\xi; \omega) d\xi \quad (4.86)$$

En estas dos últimas expresiones se muestra el carácter armónico de la carga $q(\xi; \omega)$ como del momento $m(\xi; \omega)$ ya que ambos varían con la frecuencia del movimiento.

Sustituir las expresiones (4.83) y (4.84) en la ecuación (4.79) lleva a que

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (4.87)$$

donde el término $e^{i\omega t}$ se cancela por aparecer en ambos miembros de la ecuación.

La formulación para la matriz de rigidez es idéntica a (4.76) para el comportamiento estático y dinámico, pero asumiendo para los parámetros de los materiales en el caso dinámico valores complejos de la forma

$$E(\omega) = \text{Re}[E](1 + i2\beta_E(\omega)) \quad (4.88)$$

$$\mu(\omega) = \text{Re}[\mu](1 + i2\beta_\mu(\omega)) \quad (4.89)$$

En adelante se expondrá cómo obtener la matriz de masa para un elemento genérico como el de la figura 4.8 y cuál es la expresión que determina el campo de desplazamientos provocado por el campo de ondas SH incidente verticalmente.

4.6.1. Matriz de Masa

Las fuerzas inerciales que aparecen en el elemento son las asociadas tanto al desplazamiento como al giro del mismo, por lo que la matriz de masa puede ponerse como suma de la matriz de masa traslacional y la matriz de masa rotacional.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_r \quad (4.90)$$

Es posible evaluar los coeficientes de influencia de la masa por un procedimiento similar al usado para obtener los coeficientes de la matriz rigidez, visto en 4.5.1, por lo que se usará para ello las funciones de forma (4.45) y (4.52). Considerando en el PTV las cargas equivalentes de las fuerzas de inercia, tanto traslacional como rotacional, obtenemos las expresiones

$$\mathbf{M}_t = \int_0^L \boldsymbol{\psi}^T \rho A \boldsymbol{\psi} dx \quad (4.91)$$

$$\mathbf{M}_r = \int_0^L \boldsymbol{\varphi}^T \rho I \boldsymbol{\varphi}' dx \quad (4.92)$$

siendo ρ la densidad del material; I la inercia y A el área de la sección.

Haciendo el cambio de variable para poner las integrales en función de la variable ξ del elemento, tenemos

$$\mathbf{M}_t = \int_0^1 \boldsymbol{\psi}^T \rho A \boldsymbol{\psi} L_e d\xi \quad (4.93)$$

$$\mathbf{M}_r = \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}'^T \frac{\rho I}{L_e} \boldsymbol{\varphi}'^T d\xi \quad (4.94)$$

Los términos de cada una de las matrices de masa están dados por las siguientes expresiones

$$m_{ij}^t = \int_0^1 \psi_i L_e \rho A \psi_j d\xi \quad (4.95)$$

$$m_{ij}^r = \int_0^1 \varphi_i' \frac{\rho I}{L_e} \varphi_j' d\xi \quad (4.96)$$

Dando valores a los subíndices ij en (4.95) y (4.96) y calculando cada una de las integrales, los elementos de la matriz de masa traslacional m_{ij}^t y los de la matriz de masa rotacional m_{ij}^r son

$$m_{ij}^t \rightarrow \begin{cases} m_{11}^t = \frac{\rho AL_e}{210(1+\phi)^2} (78 + 147\phi + 70\phi^2) \\ m_{12}^t = m_{21}^t = \frac{\rho AL_e^2}{840(1+\phi)^2} (44 + 77\phi + 35\phi^2) \\ m_{13}^t = m_{31}^t = \frac{\rho AL_e}{210(1+\phi)^2} (27 + 63\phi + 35\phi^2) \\ m_{14}^t = m_{41}^t = -\frac{\rho AL_e^2}{840(1+\phi)^2} (26 + 63\phi + 35\phi^2) \\ m_{22}^t = \frac{\rho AL_e^3}{840(1+\phi)^2} (8 + 14\phi + 7\phi^2) \\ m_{23}^t = m_{32}^t = \frac{\rho AL_e^2}{840(1+\phi)^2} (26 + 63\phi + 35\phi^2) \\ m_{24}^t = m_{42}^t = -\frac{\rho AL_e^3}{840(1+\phi)^2} (6 + 14\phi + 7\phi^2) \\ m_{33}^t = \frac{\rho AL_e}{210(1+\phi)^2} (78 + 147\phi + 70\phi^2) \\ m_{34}^t = m_{43}^t = -\frac{\rho AL_e^2}{840(1+\phi)^2} (44 + 77\phi + 35\phi^2) \\ m_{44}^t = \frac{\rho AL_e^3}{840(1+\phi)^2} (8 + 14\phi + 7\phi^2) \end{cases} \quad (4.97)$$

$$m_{ij}^r \rightarrow \begin{cases} m_{11}^r = \frac{\rho I 6}{5(1+\phi)^2 L_e} \\ m_{12}^r = m_{21}^r = -\frac{\rho I}{10(1+\phi)^2} (-1 + 5\phi) \\ m_{13}^r = m_{31}^r = -\frac{\rho I 6}{5(1+\phi)^2 L_e} \\ m_{14}^r = m_{41}^r = -\frac{\rho I}{10(1+\phi)^2} (-1 + 5\phi) \\ m_{22}^r = \frac{\rho I L_e}{30(1+\phi)^2} (4 + 5\phi + 10\phi^2) \\ m_{23}^r = m_{32}^r = \frac{\rho I}{10(1+\phi)^2} (-1 + 5\phi) \\ m_{24}^r = m_{42}^r = \frac{\rho I L_e}{30(1+\phi)^2} (-1 - 5\phi + 5\phi^2) \\ m_{33}^r = \frac{\rho I 6}{5(1+\phi)^2 L_e} \\ m_{34}^r = m_{43}^r = \frac{\rho I}{10(1+\phi)^2} (-1 + 5\phi) \\ m_{44}^r = \frac{\rho I L_e}{30(1+\phi)^2} (4 + 5\phi + 10\phi^2) \end{cases} \quad (4.98)$$

4.6.2. Campo incidente. Ondas SH

Imaginemos un terreno con n estratos como el de la figura 4.9. El campo de desplazamientos en un estrato cualquiera j , provocado por un campo de ondas SH incidente verticalmente, es del tipo

$$v^j(z) = A_j e^{-ik_j z} + B_j e^{ik_j z} \quad (4.99)$$

donde A_j y B_j son constantes propias del estrato y k_j es el número de onda de cada estrato, que se define como $k_j = \omega/c_s^j$, siendo c_s^j la velocidad de onda de corte en el estrato j .

Las tensiones tangenciales se obtienen mediante la siguiente expresión

$$\tau_{yz}(z) = \mu \frac{dv}{dz} \quad (4.100)$$

por lo que para el estrato j

$$\tau_{yz}^j(z) = \mu_j i k_j [-A_j e^{-ik_j z} + B_j e^{ik_j z}] \quad (4.101)$$

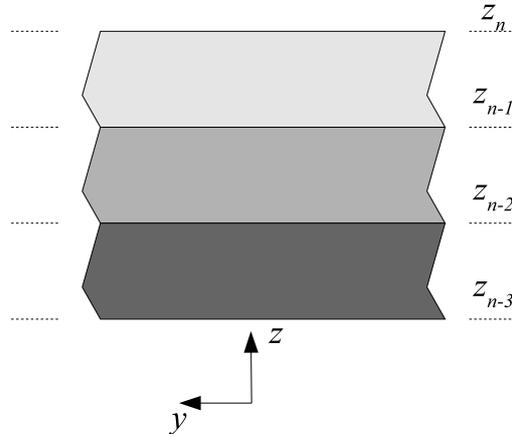


Figura 4.9: Diagrama de un terreno estratificado

En el estrato superior n , que tomaremos como referencia, las condiciones de contorno en la superficie libre son tensiones tangenciales nulas y desplazamiento unitario.

$$\begin{aligned} 0 &= -A_n e^{-ik_n z_n} + B_n e^{ik_n z_n} \\ 1 &= A_n e^{-ik_n z_n} + B_n e^{ik_n z_n} \end{aligned} \quad (4.102)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (4.102) se obtienen A_n y B_n de manera que

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2} e^{-ik_n z_n} \\ B_n &= \frac{1}{2} e^{ik_n z_n} \end{aligned} \quad (4.103)$$

En en la interfase entre los estratos n y $n - 1$ debe cumplirse la continuidad en desplazamientos y tensiones, esto es en $z = z_{n-1}$

$$\begin{aligned} v^n(z_{n-1}) &= v^{n-1}(z_{n-1}) \\ \tau_{yz}^n(z_{n-1}) &= \tau_{yz}^{n-1}(z_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.104)$$

Haciendo uso de (4.99) y (4.101)

$$\begin{aligned} A_n e^{-ik_n z_{n-1}} + B_n e^{ik_n z_{n-1}} &= A_{n-1} e^{-ik_{n-1} z_{n-1}} + B_{n-1} e^{ik_{n-1} z_{n-1}} \\ \mu_n i k_n [-A_n e^{-ik_n z_{n-1}} + B_n e^{ik_n z_{n-1}}] &= \mu_{n-1} i k_{n-1} [-A_{n-1} e^{-ik_{n-1} z_{n-1}} + B_{n-1} e^{ik_{n-1} z_{n-1}}] \end{aligned} \quad (4.105)$$

Si llamamos

$$R_{n-1}^n = \frac{\mu_n k_n}{\mu_{n-1} k_{n-1}}$$

y resolvemos el sistema de ecuaciones (4.105) se obtienen A_{n-1} y B_{n-1}

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= \frac{1}{2} e^{ik_{n-1}z_{n-1}} [(1 + R_{n-1}^n) A_n e^{-ik_n z_{n-1}} + (1 - R_{n-1}^n) B_n e^{ik_n z_{n-1}}] \\ B_{n-1} &= \frac{1}{2} e^{-ik_{n-1}z_{n-1}} [(1 - R_{n-1}^n) A_n e^{-ik_n z_{n-1}} + (1 + R_{n-1}^n) B_n e^{ik_n z_{n-1}}] \end{aligned} \quad (4.106)$$

Seguindo este procedimiento se pueden obtener las constantes A_j y B_j de la ecuación (4.99), que determina el campo de desplazamientos en cualquier estrato de un terreno como el de la figura 4.9, de manera que

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{1}{2} e^{ik_j z_j} [(1 + R_j^{j+1}) A_{j+1} e^{-ik_{j+1} z_j} + (1 - R_j^{j+1}) B_{j+1} e^{ik_{j+1} z_j}] \\ B_j &= \frac{1}{2} e^{-ik_j z_j} [(1 - R_j^{j+1}) A_{j+1} e^{-ik_{j+1} z_j} + (1 + R_j^{j+1}) B_{j+1} e^{ik_{j+1} z_j}] \end{aligned} \quad (4.107)$$

siendo

$$R_j^{j+1} = \frac{\mu_{j+1} k_{j+1}}{\mu_j k_j}$$

4.7. Modelo simplificado para el estudio de estructuras enterradas

En este trabajo se estudia la respuesta dinámica de estructuras enterradas en el terreno. Se propone para el cálculo de dicha respuesta un modelo simplificado basado en la aproximación tipo Winkler para vigas enterradas (BDWF - Beam on Dynamics Winkler Foundation), en el cual el terreno está representado por resortes y amortiguadores distribuidos continuamente a lo largo de la estructura (ver figura 4.10). Esta aproximación se ha usado ampliamente para estimar las impedancias dinámicas de pilotes relacionados con estudios de interacción dinámica, por ejemplo para una excitación dinámica aplicada en la cabeza de un pilote (e.g. Novak (1974), Berger y Pyke (1977), Novak y Aboul-Ella (1978), Bea (1980), Sánchez-Salineró (1982), Dezi et al. (2009)). Modelos tipo Winkler han sido utilizados también, por ejemplo, para determinar los factores de interacción cinemática de cimentaciones pilotadas (Gazetas et al. (1992), Kavvadas y Gazetas (1993) y Dezi (2009), y también para estimar los momentos flectores máximos sufridos en pilotes sometidos a excitación sísmica (Dezi (2009), Mylonakis (2001) y Nikolaou et al. (2001)).

El problema del comportamiento dinámico de estructuras enterradas poco esbeltas ha recibido menos atención, en parte debido a la mayor complejidad del problema. Dos trabajos dignos de mención son los de Gerolymos y Gazetas (2006) sobre estructuras muy rígidas y el de Mylonakis (2001) sobre estructuras enterradas flexibles apoyadas sobre una base rocosa.

En este trabajo se intenta extender estos modelos a estructuras de gran canto enterradas en suelos homogéneos o suelos estratificados en las que hay que tener en cuenta la deformación por cortante. Por tanto, se considera la estructura como una

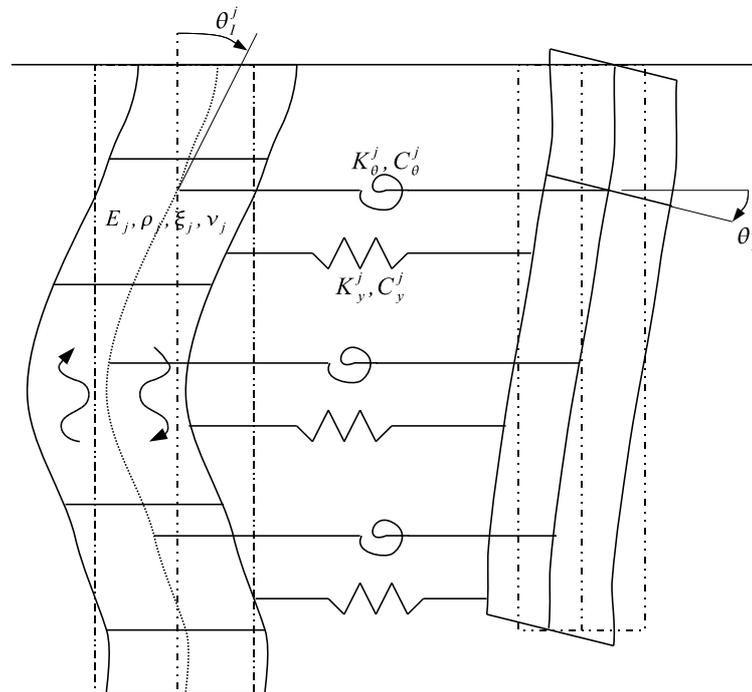


Figura 4.10: Esquema del modelo Winkler para un terreno estratificado

viga con deformación por cortante, la cual se discretiza mediante elementos finitos como el de la figura 4.8, para el cual se han obtenido expresiones de la matriz de rigidez y masa, además del cálculo de las fuerzas nodales equivalentes debidas a una carga y un momento repartidos.

El principal inconveniente que presenta este modelo es el cálculo de los valores de la rigidez y amortiguamiento del terreno que contiene a la estructura y que pueden variar por numerosos factores como son las características del terreno y su estratigrafía. Se muestran más adelante algunos valores que se han tomado, obtenidos a partir de fórmulas desarrolladas por diversos autores.

Explicaremos a continuación el proceso de discretización de una estructura mediante elementos finitos así como la inclusión en el modelo del efecto del terreno mediante muelles y amortiguadores. En la parte izquierda de la figura 4.11 se puede ver una estructura enterrada la cual se ha discretizado mediante elementos finitos tipo barra de dos nodos como se muestra en la parte derecha de la misma figura.

Si tomamos uno de los elementos que se ha utilizado en la discretización y que se encuentra contenido totalmente en un estrato j cualquiera (ver figura 4.12), sobre el que actúa un campo de ondas SH incidente de manera que este provoca desplazamientos $v_I(z)$ y giros $\theta_I(z)$.

El terreno que rodea al elemento se sustituye por una serie de muelles y amor-

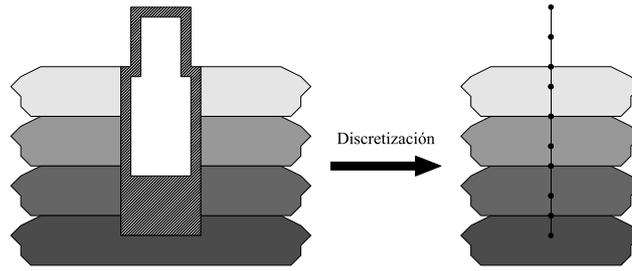


Figura 4.11: Discretización de una estructura mediante elementos finitos de dos nodos

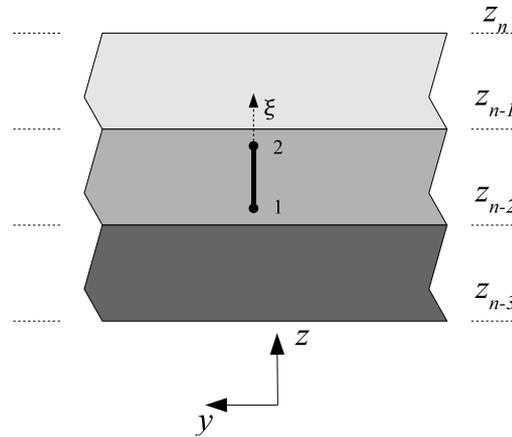


Figura 4.12: Elemento completamente contenido por un estrato

tiguadores repartidos a lo largo del mismo, que se tratarán como impedancias que se oponen al desplazamiento horizontal y al giro y que se traducen en una carga $q(\xi)$ y un momento $m(\xi)$ repartidos a lo largo del elemento (ver figura 4.13). Con el fin de generalizar el modelo se considera además el elemento ligado en el nodo 1 a una base móvil, la cual sufre un desplazamiento horizontal v_I^b y un giro θ_I^b provocados por el campo incidente. La unión en el nodo 1 se realiza también mediante muelles y amortiguadores a modo de impedancia.

4.7.1. Carga distribuida

Si tenemos en cuenta sólo los desplazamientos $v_I(z)$ del campo incidente, el efecto que producen junto con las impedancias horizontales es el de una carga distribuida

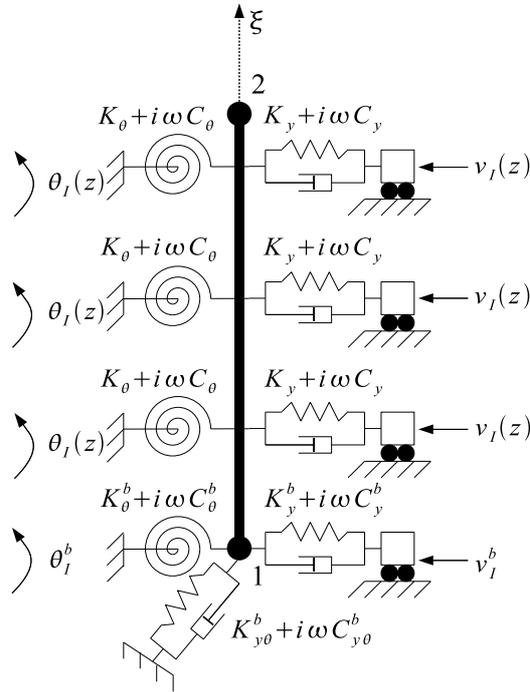


Figura 4.13: Modelado de un elemento inmerso en un estrato

$q(z)$ que se puede escribir como

$$q(z) = (K_y + i\omega C_y)(v_I^j - v) \quad (4.108)$$

El vector de fuerzas equivalentes que se aparecen como consecuencia de la carga distribuida dada por la expresión (4.108) se calcula como

$$\mathbf{F}_q = \begin{bmatrix} F_1^q \\ M_1^q \\ F_2^q \\ M_2^q \end{bmatrix} = \int_{z_1}^{z_2} \boldsymbol{\psi}^T (K_y + i\omega C_y)(v_I^j - v) dz \quad (4.109)$$

Si separamos (4.109) como suma de dos integrales y sacamos factor común la impedancia

$$\mathbf{F}_q = (K_y + i\omega C_y) \left[\int_{z_1}^{z_2} \boldsymbol{\psi}^T v_I^j dz - \int_{z_1}^{z_2} \boldsymbol{\psi}^T v dz \right] \quad (4.110)$$

Vamos a calcular por separado cada una de las integrales de la expresión (4.110). Si nos centramos en la primera integral e introducimos como campo incidente la

expresión (4.99), para cada grado de libertad m , podemos escribir

$$\int_{z_1}^{z_2} v_I^j \psi_m(z) dz = A_j \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} e^{-ik_j z} \psi_m dz}_{e_{-im}^j} + B_j \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} e^{ik_j z} \psi_m dz}_{e_{im}^j} \quad (4.111)$$

donde el índice j indica el estrato.

Hay que resaltar que en las integrales e_{-im}^j y e_{im}^j están en función de la variable z , las funciones de forma ψ_m dependen de una variable local ξ a lo largo del elemento que toma valores entre 0 y 1. Por tanto hay que hacer un cambio de variable de integración

$$\xi = \frac{z - z_1}{L_e} \quad ; \quad z = \xi L_e + z_1 \quad ; \quad dz = L_e d\xi \quad (4.112)$$

que sustituidos en las integrales de (4.111), éstas quedan como

$$A_j \underbrace{\int_0^1 e^{-ik_j(\xi L_e + z_1)} \psi_m L_e d\xi}_{e_{-im}^j} + B_j \underbrace{\int_0^1 e^{ik_j(\xi L_e + z_1)} \psi_m L_e d\xi}_{e_{im}^j} \quad (4.113)$$

Por tanto podemos decir que

$$e_{-im}^j = L_e e^{-ik_j z_1} \int_0^1 e^{-ik_j L_e \xi} \psi_m d\xi$$

$$e_{im}^j = L_e e^{ik_j z_1} \int_0^1 e^{ik_j L_e \xi} \psi_m d\xi$$

Las integrales a resolver en éstas dos últimas expresiones son del mismo tipo, la única diferencia es el signo del exponente. Podemos escribir genéricamente ambas integrales

$$I_m = \int_0^1 e^{a\xi} \psi_m d\xi \quad (4.114)$$

siendo $a = ik_j L_e$ ó $a = -ik_j L_e$ según el caso.

Para cada grado de libertad m , resolviendo la integral en (4.114) se tiene que

$$I_1 = -\frac{1}{a^4(1+\phi)} [a^3(1+\phi)e^a + a^2\phi(1-e^a) - 6a(1+e^a) + 12(e^a-1)]$$

$$I_2 = \frac{L_e}{2a^4(1+\phi)} [a^2(2+\phi+\phi e^a) + 2a(4+\phi+2e^a-\phi e^a) - 12(e^a-1)]$$

$$I_3 = \frac{1}{a^4(1+\phi)} [a^3(1+\phi)e^a + a^2\phi(1-e^a) - 6a(1+e^a) + 12(e^a-1)]$$

$$I_4 = -\frac{L_e}{2a^4(1+\phi)} [a^2(\phi+\phi e^a+2e^a) + 2a(\phi-2-4e^a-\phi e^a) + 12(e^a-1)] \quad (4.115)$$

Volviendo a la expresión (4.110) resolveremos ahora la segunda integral

$$\int_{z_1}^{z_2} \boldsymbol{\psi}^T v dz \quad (4.116)$$

Recordemos que el desplazamiento v a lo largo del elemento finito está definido por $v = \boldsymbol{\psi} \mathbf{u}_e$ siendo \mathbf{u}_e un vector con los desplazamientos y giros en los nodos, $\mathbf{u}_e = [v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2]^T$. Sustituyendo en (4.116) y haciendo el cambio de la variable z por ξ se tiene

$$\int_0^1 \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} \mathbf{u}_e L_e d\xi \quad (4.117)$$

El producto $\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi}$ nos da una matriz de dimensiones 4×4 , por lo que podemos escribir

$$\mathbf{q} = L_e \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ q_{41} & \dots & \dots & q_{44} \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

siendo \mathbf{q} una matriz simétrica. Los elementos de esta matriz se pueden poner en notación de índices como

$$q_{ml} = L_e \int_0^1 \psi_m \psi_l d\xi \quad (4.119)$$

Resolviendo cada una de las integrales que salen de dar valores a los subíndices

ml en (4.119) se obtienen los elementos de la matriz \mathbf{q}

$$\begin{aligned}
q_{11} &= \frac{L_e}{210(1+\phi)^2}(78 + 147\phi + 70\phi^2) \\
q_{12} = q_{21} &= \frac{L_e^2}{840(1+\phi)^2}(44 + 77\phi + 35\phi^2) \\
q_{13} = q_{31} &= \frac{L_e}{210(1+\phi)^2}(27 + 63\phi + 35\phi^2) \\
q_{14} = q_{41} &= -\frac{L_e^2}{840(1+\phi)^2}(26 + 63\phi + 35\phi^2) \\
q_{22} &= \frac{L_e^3}{840(1+\phi)^2}(8 + 14\phi + 7\phi^2) \\
q_{23} = q_{32} &= \frac{L_e^2}{840(1+\phi)^2}(26 + 63\phi + 35\phi^2) \\
q_{24} = q_{42} &= -\frac{L_e^3}{840(1+\phi)^2}(6 + 14\phi + 7\phi^2) \\
q_{33} &= \frac{L_e}{210(1+\phi)^2}(78 + 147\phi + 70\phi^2) \\
q_{34} = q_{43} &= -\frac{L_e^2}{840(1+\phi)^2}(44 + 77\phi + 35\phi^2) \\
q_{44} &= \frac{L_e^3}{840(1+\phi)^2}(8 + 14\phi + 7\phi^2)
\end{aligned} \tag{4.120}$$

Finalmente la expresión (4.110) se puede escribir de la siguiente forma

$$\mathbf{F}_q = \underbrace{(K_y + i\omega C_y)}_{\mathbf{e}} \begin{bmatrix} e_{-i1} & e_{i1} \\ e_{-i2} & e_{i2} \\ e_{-i3} & e_{i3} \\ e_{-i4} & e_{i4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} - (K_y + i\omega C_y)\mathbf{q}\mathbf{u}_e \tag{4.121}$$

4.7.2. Momento repartido

El momento repartido es consecuencia del giro que provoca el campo incidente en la estructura. Imaginemos un pilote enterrado en un terreno cualquiera en el cual actúa un campo incidente de ondas SH. Como consecuencia de la interacción cinemática las secciones del pilote sufren un giro que inducen en la cara en contacto con el terreno tensiones tangenciales. Si tomamos un elemento diferencial del pilote el cual sufre un giro α aparecen en su cara lateral tensiones tangenciales (ver figura 4.14). La resultante de dichas tensiones es nula, no así el momento que producen con respecto al eje AA' . Si extendemos este efecto a lo largo de todo el pilote aparece un momento repartido.

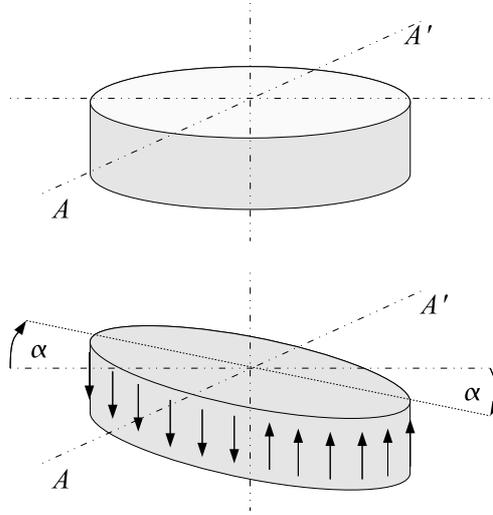


Figura 4.14: Elemento diferencial

Siguiendo un proceso análogo al de la carga repartida del punto anterior, ahora consideraremos sólo el giro $\theta_I(z)$ del campo incidente y las impedancias de giro, según la figura 4.13. El momento repartido $m(z)$ está definido por

$$m(z) = (K_\theta + i\omega C_\theta)(\theta_I^j - \theta) \quad (4.122)$$

El vector de fuerzas equivalentes como consecuencia del momento repartido dado por la expresión (4.122) se calcula como

$$\mathbf{F}_m = \begin{bmatrix} F_1^m \\ M_1^m \\ F_2^m \\ M_2^m \end{bmatrix} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{L_e} \boldsymbol{\varphi}'^T (K_\theta + i\omega C_\theta)(\theta_I^j - \theta) dz \quad (4.123)$$

Si separamos esta última expresión en suma de dos integrales y sacamos factor común la impedancia de giro

$$\mathbf{F}_m = (K_\theta + i\omega C_\theta) \left[\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{L_e} \boldsymbol{\varphi}'^T \theta_I^j dz - \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{L_e} \boldsymbol{\varphi}'^T \theta dz \right] \quad (4.124)$$

Se tratarán las integrales de la expresión (4.124) por separado.

En el epígrafe 4.155 la expresión (4.99) nos da el valor del desplazamiento según el campo incidente. Calculando su derivada primera tenemos el valor del giro provocado por el campo incidente para cada estrato j .

$$\theta_I^j = \frac{dv_I^j}{dz} = -ik_j [A_j e^{-ik_j z} - B_j e^{ik_j z}] \quad (4.125)$$

Sustituyendo (4.125) en la primera integral del segundo miembro de (4.124) y separando en una suma de integrales, para cada grado de libertad m se puede escribir

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{L_e} \theta_I^j \varphi'_m dz = \frac{-ik_j}{L_e} \left[\underbrace{A_j \int_{z_1}^{z_2} e^{-ik_j z} \varphi'_m dz}_{\varepsilon_{-im}^j} - \underbrace{B_j \int_{z_1}^{z_2} e^{ik_j z} \varphi'_m dz}_{\varepsilon_{im}^j} \right] \quad (4.126)$$

Realizando el mismo cambio de variable que se vio en el epígrafe 4.7.1 para la carga distribuida según las expresiones (4.112) tenemos

$$-ik_j \left[\underbrace{A_j \int_0^1 e^{-ik_j(L_e \xi + z_1)} \varphi'_m d\xi}_{\varepsilon_{-im}^j} - \underbrace{B_j \int_0^1 e^{ik_j(L_e \xi + z_1)} \varphi'_m d\xi}_{\varepsilon_{im}^j} \right] \quad (4.127)$$

Por tanto

$$\varepsilon_{-im}^j = e^{-ik_j z_1} \int_0^1 e^{-ik_j L_e \xi} \varphi'_m d\xi$$

$$\varepsilon_{im}^j = e^{ik_j z_1} \int_0^1 e^{ik_j L_e \xi} \varphi'_m d\xi$$

Como antes, ahora podemos escribir

$$J_m = \int_0^1 e^{a\xi} \varphi'_m d\xi \quad (4.128)$$

siendo $a = ik_j L_e$ ó $a = -ik_j L_e$ según el caso.

Resolviendo para cada grado de libertad m la integral en (4.128)

$$J_1 = -\frac{6}{a^3(1+\phi)L_e} [a(1+e^a) + 2(1-e^a)]$$

$$J_2 = \frac{1}{a^3(1+\phi)} [-a^2(1+\phi) + a(\phi e^a - 4 - \phi - 2e^a) - 6(1-e^a)]$$

$$J_3 = -J_1 = \frac{6}{a^3(1+\phi)L_e} [a(1+e^a) + 2(1-e^a)]$$

$$J_4 = \frac{1}{a^3(1+\phi)} [a^2 e^a(1+\phi) + a(\phi - 2 - \phi e^a - 4e^a) - 6(1-e^a)]$$
(4.129)

Nos centraremos ahora en resolver la segunda integral de (4.124)

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{L_e} \varphi'^T \theta dz \quad (4.130)$$

Ya sabemos que el giro θ se puede obtener como $\theta = \boldsymbol{\varphi}' \mathbf{u}_e$. Sustituyendo en la expresión (4.130) y cambiando la variable z por ξ

$$\int_0^1 \frac{1}{L_e} \boldsymbol{\varphi}'^T \frac{1}{L_e} \boldsymbol{\varphi}' \mathbf{u}_e L_e d\xi \quad (4.131)$$

El producto $\boldsymbol{\varphi}'^T \boldsymbol{\varphi}'$ da como resultado una matriz de dimensión 4×4 , por lo que podemos escribir

$$\mathbf{h} = \frac{1}{L_e} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{41} & \dots & \dots & h_{44} \end{bmatrix} \quad (4.132)$$

siendo \mathbf{h} una matriz simétrica cuyos elementos se obtienen mediante la expresión en notación de índices

$$h_{ml} = \frac{1}{L_e} \int_0^1 \varphi'_m \varphi'_l d\xi \quad (4.133)$$

Resolviendo la integral (4.133) para cada valor de los subíndices ml , se tienen los elementos de la matriz \mathbf{h}

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{6}{5(1+\phi)^2 L_e} \\ h_{12} = h_{21} &= -\frac{(-1+5\phi)}{10(1+\phi)^2} \\ h_{13} = h_{31} &= -\frac{6}{5(1+\phi)^2 L_e} \\ h_{14} = h_{41} &= -\frac{(-1+5\phi)}{10(1+\phi)^2} \\ h_{22} &= \frac{L_e}{30(1+\phi)^2} (4+5\phi+10\phi^2) \\ h_{23} = h_{32} &= \frac{(-1+5\phi)}{10(1+\phi)^2} \\ h_{24} = h_{42} &= \frac{L_e}{30(1+\phi)^2} (-1-5\phi+5\phi^2) \\ h_{33} &= \frac{6}{5(1+\phi)^2 L_e} \\ h_{34} = h_{43} &= \frac{(-1+5\phi)}{10(1+\phi)^2} \\ h_{44} &= \frac{L_e}{30(1+\phi)^2} (4+5\phi+10\phi^2) \end{aligned} \quad (4.134)$$

Finalmente la expresión (4.124) se puede escribir como

$$\mathbf{F}_m = (K_\theta + i\omega C_\theta)(-ik_j) \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{-i1} & \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{-i2} & \varepsilon_{i2} \\ \varepsilon_{-i3} & \varepsilon_{i3} \\ \varepsilon_{-i4} & \varepsilon_{i4} \end{bmatrix}}_{\varepsilon} \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} - (K_\theta + i\omega C_\theta)\mathbf{h} \mathbf{u}_e \quad (4.135)$$

4.7.3. Fuerza equivalente en la base

La base móvil que se ha considerado unida al elemento en el nodo 1 sufre un desplazamiento v_I^b y un giro θ_I^b conocidos y producidos por el campo incidente, (figura 4.13). La unión con dicha base se ha modelado mediante impedancias, una $(K_y^b + i\omega C_y^b)$ que se opone al movimiento horizontal, una $(K_\theta^b + i\omega C_\theta^b)$ que se opone al giro y la impedancia cruzada $(K_{y\theta}^b + i\omega C_{y\theta}^b)$. El efecto del movimiento en el nodo de unión junto con las impedancias produce en el mismo la aparición de una fuerza y un momento

$$F_1 = (K_y^b + i\omega C_y^b)(v_I^b - v_1) + (K_{y\theta}^b + i\omega C_{y\theta}^b)(\theta_I^b - \theta_1) \quad (4.136)$$

$$M_1 = (K_{y\theta}^b + i\omega C_{y\theta}^b)(v_I^b - v_1) + (K_\theta^b + i\omega C_\theta^b)(\theta_I^b - \theta_1) \quad (4.137)$$

Escribiéndolo de forma matricial

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (K_x^b + i\omega C_x^b) & (K_{x\theta}^b + i\omega C_{x\theta}^b) & 0 & 0 \\ (K_{\theta x}^b + i\omega C_{\theta x}^b) & (K_\theta^b + i\omega C_\theta^b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^b} \begin{bmatrix} v_I^b - v_1 \\ \theta_I^b - \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

4.7.4. Ecuación de movimiento para el elemento

Recordemos que la ecuación matricial que define el comportamiento dinámico de un elemento es, en el dominio de la frecuencia

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u}_e = \mathbf{F} \quad (4.139)$$

El vector \mathbf{F} de fuerzas nodales equivalentes producidas tanto por cargas y momento repartidos, considerando también el elemento unido en el nodo 1 con una base móvil se obtiene mediante la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} &= (K_y + i\omega C_y) \underbrace{\begin{bmatrix} e_{-i1} & e_{i1} \\ e_{-i2} & e_{i2} \\ e_{-i3} & e_{i3} \\ e_{-i3} & e_{i3} \end{bmatrix}}_{[e]} \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} - (K_y + i\omega C_y) \mathbf{q} \mathbf{u}_e + \\
 & (K_\theta + i\omega C_\theta) (-ik_j) \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{-i1} & \varepsilon_{i1} \\ \varepsilon_{-i2} & \varepsilon_{i2} \\ \varepsilon_{-i3} & \varepsilon_{i3} \\ \varepsilon_{-i4} & \varepsilon_{i4} \end{bmatrix}}_{[\varepsilon]} \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} - (K_\theta + i\omega C_\theta) \mathbf{h} \mathbf{u}_e + \\
 & \underbrace{\begin{bmatrix} (K_y^b + i\omega C_y^b) & (K_{y\theta}^b + i\omega C_{y\theta}^b) & 0 & 0 \\ (K_{\theta y}^b + i\omega C_{\theta y}^b) & (K_\theta^b + i\omega C_\theta^b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^b} \begin{bmatrix} v_I^b - v_1 \\ \theta_I^b - \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.140)
 \end{aligned}$$

Si pasamos al primer miembro de (4.139) los términos de \mathbf{F} que están multiplicados por el vector \mathbf{u}_e incógnita, la ecuación que determina el comportamiento dinámico queda

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}_e = \mathbf{F} \quad (4.141)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} + (K_y + i\omega C_y) \mathbf{q} + (K_\theta + i\omega C_\theta) \mathbf{h} + \mathbf{K}^b \\
 \mathbf{F} &= \left[(K_y + i\omega C_y) \mathbf{e} - ik_j (K_\theta + i\omega C_\theta) \boldsymbol{\varepsilon} \right] \begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} + \mathbf{K}^b \mathbf{u}_I^b \quad (4.142)
 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{u}_I^b = [v_I^b \ \theta_I^b \ 0 \ 0]^T$

4.7.5. Montaje del sistema de ecuaciones

El modelo mostrado es extrapolable a una discretización con n elementos. La matriz de masa y rigidez globales de una estructura discretizada con un número n de elementos saldrá del montaje de las n matrices elementales, las cuales se pueden considerar como submatrices de la matriz global, que se superponen en los grados de libertad de los nodos que son comunes a varios elementos. Se muestra gráficamente la manera de montar las matrices globales del sistema de ecuaciones en la figura 4.15. Cada submatriz está representada por un cuadrado donde los puntos son sus elementos y la letra j indica el número del elemento.

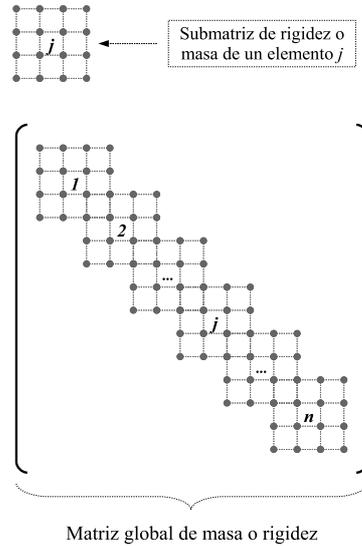


Figura 4.15: Esquema para montar las matrices globales del sistema

4.7.6. Valores de impedancia

Como es obvio, la utilización del modelo simplificado presentado en esta sección exige el conocimiento previo de los valores más adecuados para los resortes y amortiguadores que representan la presencia del suelo. A este respecto existen en la bibliografía diversas propuestas que vamos a resumir agrupándolas en dos grupos.

Existe un primer grupo de trabajos centrados en la respuesta dinámica de estructuras esbeltas, tales como pilotes, en los que se expresa la impedancia como

$$S = K + i\omega C \quad (4.143)$$

Como primera aproximación, la rigidez del muelle puede considerarse independiente de la frecuencia y se puede expresar en función de módulo de elasticidad E_s del suelo como

$$K = \delta E_s \quad (4.144)$$

donde δ es un coeficiente independiente de la frecuencia. Su valor adecuado depende de las dimensiones geométricas y los parámetros de los materiales del problema. Según Kavvadas y Gazetas (1993), para un semiespacio homogéneo y una estructura de sección transversal circular se obtiene según la expresión

$$\delta = \frac{3}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{E_s}{E_p} \right)^{\frac{1}{8}} \left(\frac{L}{d} \right)^{\frac{1}{8}} \quad (4.145)$$

siendo ν_s el coeficiente de Poisson del terreno.

El parámetro C en la expresión (4.143) representa tanto el amortiguamiento de radiación como de disipación histerética. La siguiente expresión, basada en los trabajos de Roesset y Angelides (1980), Krishnan et al. (1983) y Gazetas y Dobry (1984a, 1984b), determina el valor del amortiguamiento como

$$C \approx (C)_{\text{radiación}} + (C)_{\text{histeresis}} \quad (4.146)$$

o

$$C \approx \Psi d \rho_s C_s \left[1 + \left(\frac{C_c}{C_s} \right)^q \right] a_0'^{-\frac{1}{4}} + 2K \frac{\beta}{\omega} \quad (4.147)$$

donde $a_0' = \frac{\omega d}{C_s}$ es la frecuencia adimensional, ρ_s la densidad del terreno, β el coeficiente de amortiguamiento histerético y C_c la velocidad de onda aparente cuya expresión es

$$C_c \approx \frac{3.4C_s}{\pi(1-\nu)} \quad (4.148)$$

Los valores de rigidez y amortiguamiento que resultan del uso de estas expresiones depende de propias cualidades propias de cada problema como son la geometría y las características del terreno. Distintos autores recomiendan en el uso de distintos valores para los parámetros q , Ψ y δ . Por ejemplo, Kavvadas y Gazetas (1993) recomiendan como valores $q = 5/4$, $\Psi = 2$ y δ obtenido según la expresión 4.145. Según Dezi et al (2009) $\delta = 1.2$; $q = 1$ y $\Psi = 2$. Según Makris y Gazetas (1992) $\delta = 1.2$; $q = 0$ y $\Psi = 6$.

Las aproximaciones anteriores están pensadas para un modelo Winkler para pilotes en los que la longitud es mucho mayor que el diámetro, por ello el momento que producen las tensiones tangenciales como consecuencia del giro se supone despreciable y no se tiene en cuenta la impedancia de giro.

Sin embargo, en estructuras enterradas de gran sección, el momento que producen las mismas tensiones tangenciales no se puede despreciar y es necesario tener en consideración la impedancia de cabeceo. Novak et al. (1978) propone una expresión del tipo

$$S = \mu [K(a_0, D_s) + iC(a_0, D_s)] \quad (4.149)$$

siendo D_s el cociente de la parte imaginaria y real de la rigidez transversal; $D_s = \frac{\mu'}{\mu}$.

Para el desplazamiento horizontal la impedancia es

$$S_x = \pi \mu a_0^2 T \quad (4.150)$$

donde es la frecuencia adimensional y T es un factor adimensional cuya expresión es

$$T = -\frac{4K_1(b_0^*)K_1(a_0^*) + a_0K_1(b_0^*)K_0(a_0^*) + b_0^*K_0(b_0^*)K_1(a_0^*)}{b_0^*K_0(b_0^*)K_1(a_0^*) + a_0K_1(b_0^*)K_0(a_0^*) + b_0^*a_0^*K_0(b_0^*)K_0(b_0^*)} \quad (4.151)$$

siendo K_0 y K_1 funciones modificadas de Bessel de segundo tipo de argumento complejo, de orden cero y uno respectivamente, y

$$\begin{aligned} a_0^* &= \frac{a_0}{\sqrt{1+iD_s}} & ; & & b_0^* &= \frac{a_0 i}{\eta \sqrt{1+iD_l}} \\ \eta &= \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} & ; & & D_l &= \frac{\lambda' + 2\mu'}{\lambda + 2\mu} \end{aligned} \quad (4.152)$$

La impedancia de cabeceo tiene la expresión

$$S_\theta = \pi \mu r_0^2 (1 + iD_s) \left[a_0^* \frac{K_0(a_0^*)}{K_1(a_0^*)} + 1 \right] \quad (4.153)$$

donde r_0 es el radio de la estructura.

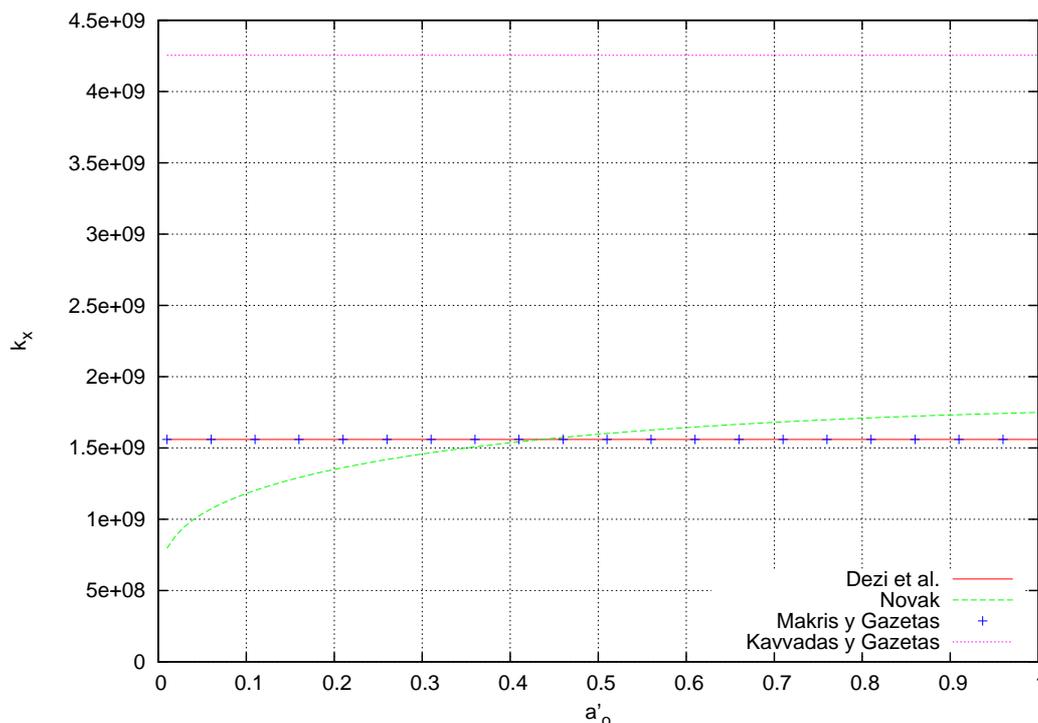


Figura 4.16: Comparativa de la parte real de la impedancia

En la figura 4.16 se muestra la comparativa de la parte real de la impedancia horizontal para los diferentes métodos expuestos en este epígrafe. Como era de esperar, las recomendaciones de Dezi et al (2009), Kavvadas y Gazetas (1993) y Makris y Gazetas (1992) dan valores de rigidez constantes con la frecuencia, dando el de Kavvadas y Gazetas valores mayores debido al valor de δ . Por el contrario, la expresión propuesta por Novak da valores de rigidez bajos a frecuencias bajas

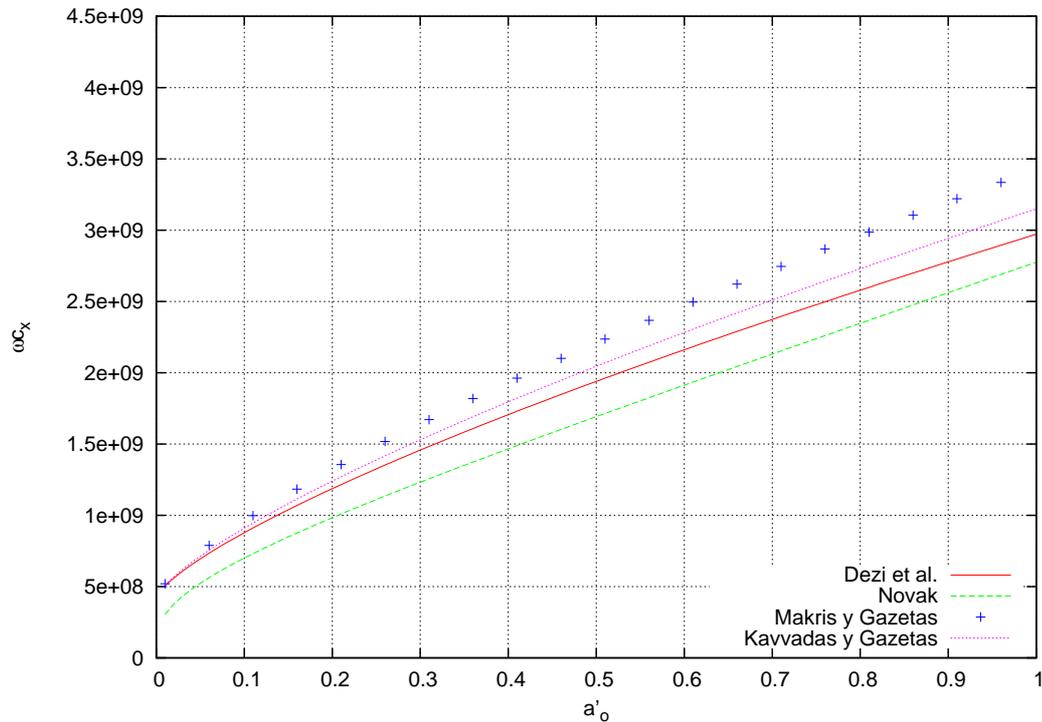


Figura 4.17: Comparativa de la parte imaginaria de la impedancia

y valores de rigidez del mismo orden que Dezi y Makris y Gazetas a medida que aumenta a'_0 .

En la figura 4.17 se muestran los valores de amortiguamiento. Se observa que crece con la frecuencia de forma similar para los cuatro casos, siendo los valores de Novak algo inferiores. Para los desarrollos del primer grupo, siguen la relación dada por la expresión (4.147). Toman el mismo valor cuando la frecuencia adimensional es nula y crecen en mayor o menor medida dependiendo de los valores de Ψ y del exponente q . Nótese que en el eje vertical se expresa el producto ωC , sin embargo para el caso de Novak se representa la parte imaginaria directamente.

Hay que destacar la diferencia principal entre los desarrollos del primer grupo, adecuado para estructuras esbeltas en los cuales no se considera la impedancia al giro, frente al desarrollo de Novak.

El primer grupo considera que el momento producido por las tensiones tangenciales aparecidas en la superficie de contacto estructura-suelo es despreciable para estructuras esbeltas o de pequeño diámetro, debido a que el brazo del momento es pequeño en comparación con la longitud de la estructura.

El desarrollo propuesto por Novak sí considera la impedancia de giro del terreno. En estructuras de gran canto el efecto de las tensiones tangenciales no es despreciable y se traduce en un momento repartido a lo largo de la estructura. Este hecho lo hace

más adecuado para este trabajo y por ello es el que se ha escogido para el cálculo mediante el modelo expuesto.

4.8. Validación del código

El modelo numérico expuesto ha sido implementado en un software de cálculo matricial escrito en FORTRAN. Con el fin de dar validez a dicho software se resuelve un problema sencillo para el cual se obtiene la solución analítica y se compara con la solución numérica que se obtiene haciendo uso del software, considerando las mismas hipótesis de partida.

Se supone una estructura esbelta embebida en un semiespacio, la cual se considera como una viga Euler-Bernoulli (ver figura 4.18). Esta última consideración no influye en la validación ya que la matriz de rigidez es la misma pero siendo el valor de ϕ nulo.

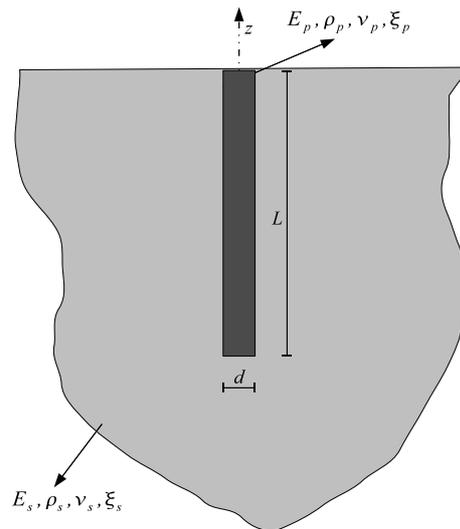


Figura 4.18: Estructura esbelta embebida en un semiespacio

4.8.1. Solución de la ecuación analítica de una viga Euler-Bernoulli sometida a ondas SH de incidencia vertical y con un modelo Winkler para el suelo

Considerando las fuerzas de inercia, así como las fuerzas producidas por la existencia de un campo de ondas incidentes v_I actuando sobre los resortes y amor-

tiadores \mathcal{K} , como fuerzas externas actuando sobre la sección, y escribiendo la ecuación de equilibrio dinámico para una porción diferencial de viga, obtenemos

$$E_p I_p \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \rho A \omega^2 v = \mathcal{K}(v_I - v) \quad (4.154)$$

donde $\mathcal{K} = k_x + i\omega c_x$, $v = v(\omega, z)$ y el campo incidente para ondas incidentes tipo SH de incidencia vertical en un semiespacio tiene la siguiente expresión:

$$v_I = \frac{1}{2} (e^{-ik(z-z_t)} + e^{ik(z-z_t)}) \quad (4.155)$$

donde k es el número de onda y z_t es la cota de la superficie libre. Reordenando de modo que el término del lado derecho sea conocido

$$E_p I_p \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + (\mathcal{K} - \rho A \omega^2)v = \mathcal{K}v_I \quad (4.156)$$

La solución de esta ecuación será del tipo $v = v_h + v_p$, donde v_h representa la solución de la ecuación homogénea, y v_p es cualquier solución particular que verifique la ecuación.

Obtención de la solución homogénea

La solución homogénea es aquella que verifica la siguiente ecuación:

$$E_p I_p \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + (\mathcal{K} - \rho A \omega^2)v = 0 \quad (4.157)$$

que puede ser escrita como

$$\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \lambda^4 v = 0 \quad (4.158)$$

donde

$$\lambda^4 = \frac{\mathcal{K} - \rho A \omega^2}{E_p I_p} \quad (4.159)$$

cuya solución es del tipo $e^{\alpha z}$, de tal modo que, ensayando dicha solución, podemos escribir la siguiente ecuación característica:

$$\alpha^4 + \lambda^4 = 0 \quad (4.160)$$

de donde

$$\alpha^4 = -\frac{\mathcal{K} - \rho A \omega^2}{E_p I_p} \quad (4.161)$$

que tiene cuatro soluciones complejas que pueden escribirse como

$$\alpha_j = \sqrt[4]{M} e^{i(\theta/4 + (j-1)\pi/2)} \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.162)$$

donde M y θ son el módulo y la fase del número complejo α^4 . De este modo, podemos escribir:

$$u_h = D_1 e^{\alpha_1 z} + D_2 e^{\alpha_2 z} + D_3 e^{\alpha_3 z} + D_4 e^{\alpha_4 z} \quad (4.163)$$

Obtención de la solución particular

Sustituyendo (4.155) en (4.156) obtenemos

$$E_p I_p \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + (\mathcal{K} - \rho A \omega^2) v = \mathcal{K} \frac{1}{2} (e^{-ik(z-z_t)} + e^{ik(z-z_t)}) \quad (4.164)$$

de donde podemos escribir

$$E_p I_p \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + (\mathcal{K} - \rho A \omega^2) v = A_I e^{-ikz} + B_I e^{ikz} \quad (4.165)$$

siendo $A_I = 0.5\mathcal{K}e^{ikz_t}$ y $B_I = 0.5\mathcal{K}e^{-ikz_t}$. La solución particular de esta ecuación es del tipo

$$u_p = D_5 e^{-ikz} + D_6 e^{ikz} \quad (4.166)$$

Sustituyendo en (4.165) y reordenando

$$(k^4 E_p I_p + \mathcal{K} - \rho A \omega^2) (D_5 e^{-ikz} + D_6 e^{ikz}) = A_I e^{-ikz} + B_I e^{ikz} \quad (4.167)$$

de donde

$$D_5 = \frac{A_I}{k^4 E_p I_p + \mathcal{K} - \rho A \omega^2} \quad ; \quad D_6 = \frac{B_I}{k^4 E_p I_p + \mathcal{K} - \rho A \omega^2} \quad (4.168)$$

Condiciones de contorno y obtención de la solución

Como se dijo anteriormente, la solución de la ecuación (4.156) es del tipo $v = v_h + v_p$. De este modo, ya podemos escribir

$$v = D_1 e^{\alpha_1 z} + D_2 e^{\alpha_2 z} + D_3 e^{\alpha_3 z} + D_4 e^{\alpha_4 z} + D_5 e^{-ikz} + D_6 e^{ikz} \quad (4.169)$$

de donde D_1 a D_4 son incógnitas. Para obtener el valor de estas incógnitas debemos establecer las condiciones de contorno del problema. Para este ejemplo, consideraremos que los extremos de la estructura están libres, de tal modo que podemos asumir cortante y momento nulos en ambos. Lo cual implica

$$\text{Momento nulo} \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{y} \quad z = z_t \quad (4.170)$$

$$\text{Cortante nulo} \Rightarrow \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{y} \quad z = z_t \quad (4.171)$$

Con el fin de ser capaces de imponer estas condiciones de contorno, debemos obtener primero las expresiones de las derivadas segunda y tercera de la deflexión como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} &= \alpha_1 D_1 e^{\alpha_1 z} + \alpha_2 D_2 e^{\alpha_2 z} + \alpha_3 D_3 e^{\alpha_3 z} + \alpha_4 D_4 e^{\alpha_4 z} + ik (-D_5 e^{-ikz} + D_6 e^{ikz}) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \alpha_1^2 D_1 e^{\alpha_1 z} + \alpha_2^2 D_2 e^{\alpha_2 z} + \alpha_3^2 D_3 e^{\alpha_3 z} + \alpha_4^2 D_4 e^{\alpha_4 z} - k^2 (D_5 e^{-ikz} + D_6 e^{ikz}) \\ \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} &= \alpha_1^3 D_1 e^{\alpha_1 z} + \alpha_2^3 D_2 e^{\alpha_2 z} + \alpha_3^3 D_3 e^{\alpha_3 z} + \alpha_4^3 D_4 e^{\alpha_4 z} + ik^3 (D_5 e^{-ikz} - D_6 e^{ikz}) \end{aligned}$$

Aplicando condiciones de contorno obtenemos las siguientes ecuaciones:

- $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z = 0) = 0$:

$$D_1 \alpha_1^2 + D_2 \alpha_2^2 + D_3 \alpha_3^2 + D_4 \alpha_4^2 = k^2 (D_5 + D_6) \quad (4.172a)$$

- $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z = z_t) = 0$:

$$\alpha_1^2 D_1 e^{\alpha_1 z_t} + \alpha_2^2 D_2 e^{\alpha_2 z_t} + \alpha_3^2 D_3 e^{\alpha_3 z_t} + \alpha_4^2 D_4 e^{\alpha_4 z_t} = k^2 (D_5 e^{-ikz_t} + D_6 e^{ikz_t}) \quad (4.172b)$$

- $\frac{\partial^3 v}{\partial z^3}(z = 0) = 0$:

$$D_1 \alpha_1^3 + D_2 \alpha_2^3 + D_3 \alpha_3^3 + D_4 \alpha_4^3 = ik^3 (-D_5 + D_6) \quad (4.172c)$$

- $\frac{\partial^3 v}{\partial z^3}(z = z_t) = 0$:

$$\alpha_1^3 D_1 e^{\alpha_1 z_t} + \alpha_2^3 D_2 e^{\alpha_2 z_t} + \alpha_3^3 D_3 e^{\alpha_3 z_t} + \alpha_4^3 D_4 e^{\alpha_4 z_t} = ik^3 (-D_5 e^{-ikz_t} + D_6 e^{ikz_t}) \quad (4.172d)$$

que constituyen un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (D_1 a D_4) que puede ser escrito como

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 \\ \alpha_1^2 e^{\alpha_1 z t} & \alpha_2^2 e^{\alpha_2 z t} & \alpha_3^2 e^{\alpha_3 z t} & \alpha_4^2 e^{\alpha_4 z t} \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 \\ \alpha_1^3 e^{\alpha_1 z t} & \alpha_2^3 e^{\alpha_2 z t} & \alpha_3^3 e^{\alpha_3 z t} & \alpha_4^3 e^{\alpha_4 z t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} &= \\
&= \begin{bmatrix} k^2(D_5 + D_6) \\ k^2(D_5 e^{-ikz t} + D_6 e^{ikz t}) \\ ik^3(-D_5 + D_6) \\ ik^3(-D_5 e^{-ikz t} + D_6 e^{ikz t}) \end{bmatrix} \quad (4.173)
\end{aligned}$$

4.8.2. Comparación de resultados

En la figura 4.19 se presenta, en términos de las funciones de transferencia, la comparación de las soluciones analítica y numérica, a diferentes profundidades de la estructura. Las funciones de transferencia I_u relacionan el desplazamiento horizontal de los puntos de estudio con el desplazamiento horizontal de campo libre en la superficie libre.

Se observa claramente como ambas soluciones coinciden para las cotas escogidas, prueba más que suficiente para afirmar que el software es válido.

Los datos del problema que se resuelve cumplen las siguientes características: $E_p/E_s = 1000$; $L/d = 20$; $\rho_p/\rho_s = 1.35$; $\nu_s = 0.3$; $\nu_p = 0.2$; $\xi_s = 0.05$ y $\xi_p = 0.05$, siendo E_p y E_s los módulos de elasticidad, ν_p y ν_s los coeficientes de Poisson, ρ_p y ρ_s las densidades y ξ_p y ξ_s los coeficientes de amortiguamiento.

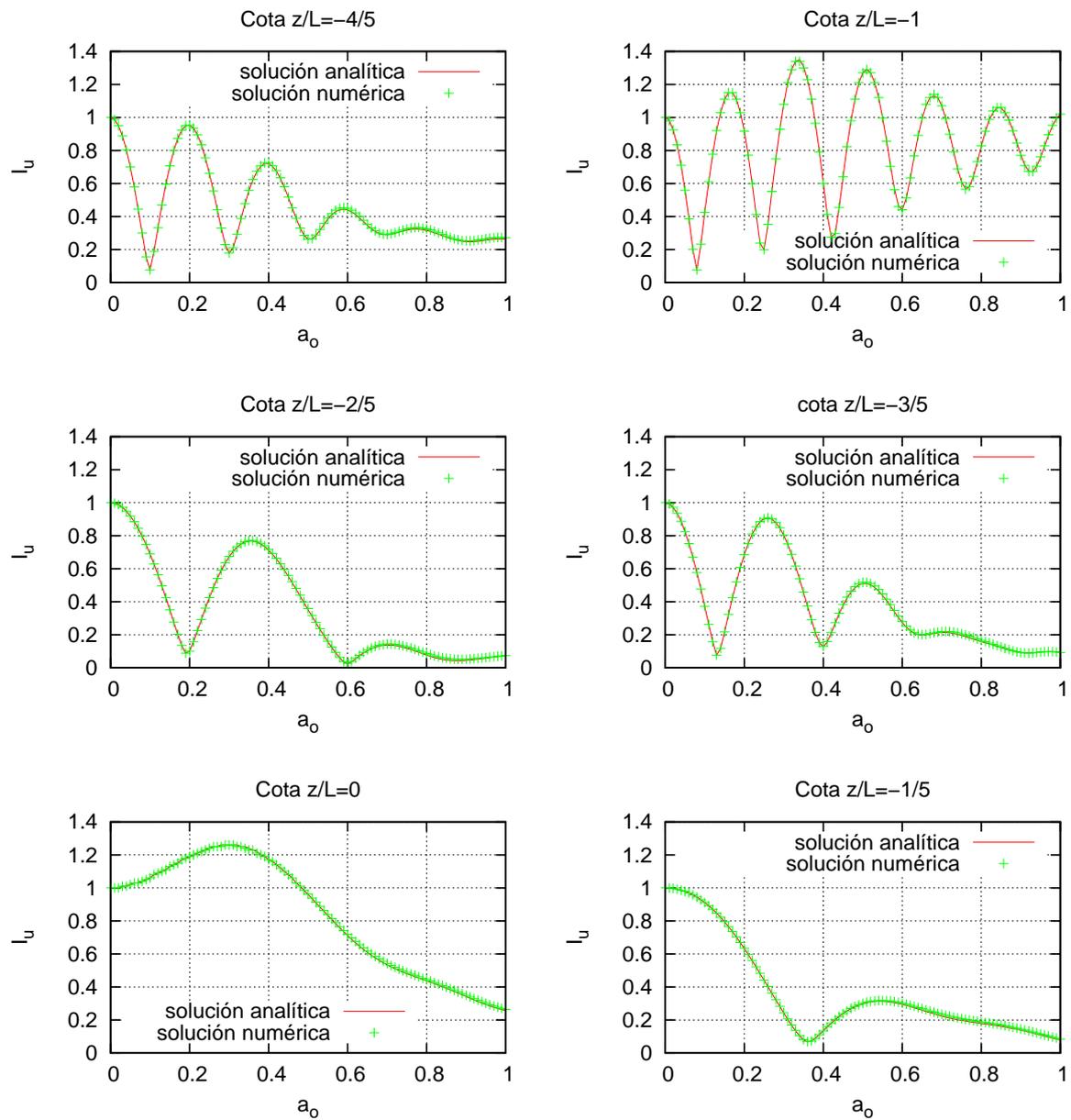


Figura 4.19: Comparación de la solución analítica y la solución numérica

Capítulo 5

Resultados

5.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados de los problemas resueltos con el fin de comprobar la validez del modelo simplificado propuesto y comenzar su calibración, así como obtener conclusiones acerca de la respuesta dinámica de estructuras enterradas ante ondas sísmicas. Las estructuras que se han sometido a cálculo son todas de simetría cilíndrica enterradas en un semiespacio, con y sin estratos, sometidas un campo de ondas SH incidente vertical que induce en la estructura tanto desplazamientos horizontales como giros. Los resultados serán mostrados en términos de funciones de transferencia a diferentes alturas (relacionando los desplazamientos horizontales experimentados por la estructura a una cota determinada con los desplazamientos horizontales en la superficie libre producidos por el sismo) y en términos también de espectros de respuesta máxima a diferentes profundidades. Recuérdese que un espectro de respuesta máxima representa la respuesta máxima de un sistema de un grado de libertad, variando el periodo natural del mismo, colocado a cada una de las profundidades y sometido a una señal sísmica.

Por no ser el objetivo de este trabajo, no se mostrará el mallado usado para el cálculo de la respuesta mediante el método de los elementos de contorno, así como en el cálculo de los dos primeros pasos del método de subestructuración. En este trabajo los resultados obtenidos mediante estos dos métodos se usan como comparación con la metodología propuesta y como herramienta para sacar conclusiones sobre la validez, el rango de aplicación y el margen de error del modelo propuesto. Recordamos que los valores de las impedancias para el suelo que se han usado en el modelo simplificado son los dados por las expresiones desarrolladas por Novak (ver Novak et al. (1978)), expuestas en el capítulo 4.

Las funciones de transferencia que se han usado para caracterizar la respuesta dinámica y obtener los espectros de respuesta máxima de cada sistema, relacionan los desplazamientos horizontales de cada punto con los desplazamientos horizontales

en la superficie libre producidos por el sismo. Por tanto se definen como

$$I_u = \left| \frac{u_y}{u_{ff}} \right| \quad (5.1)$$

siendo u_y el desplazamiento horizontal de los puntos en estudio y u_{ff} los desplazamientos horizontales de campo libre (free field). El rango de frecuencias ha sido elegido en base al contenido en frecuencias más significativo de la señal sísmica.

Los espectros de respuesta máxima sirven para estudiar el comportamiento de subestructuras (p. e. puentes grúa) o de la maquinaria albergada en la estructura enterrada y tratar de favorecer, desde el diseño, la integridad de estos elementos ante un evento sísmico.

Para cada problema resuelto se han dibujado las funciones de transferencia I_u obtenidas, mediante los tres métodos comentados, para puntos desde nivel de la superficie libre ($z = 0$) hasta la profundidad máxima de la estructura ($z = -L$), con un paso igual a $-L/5$. De esta manera se representan para cada problema las funciones de transferencia a seis alturas diferentes. A partir de las funciones de transferencia y una señal sísmica generada artificialmente se presentan los espectros de respuesta máxima para cada una de las cotas elegidas.

5.2. Respuesta ante una señal sísmica

Se utilizó el programa SIMQKE para generar un acelerograma compatible con el espectro de respuesta normalizado que aparece en el capítulo 5.7 de la AFPS-90 (ver figura 5.1). La duración total de la señal sintética es de 18 s, y su aceleración pico toma un valor de $0.17 g$. Midiendo sobre el espectro de respuesta máxima obtenido con un 5 % de amortiguamiento, la aceleración pico del espectro objetivo normalizado es de $0.425 g$, mientras que la correspondiente a la señal sintética es de $0.463 g$ (ver de nuevo figura 5.1). Por otro lado, la razón por la que se ha utilizado un acelerograma sintético en lugar del registro de un terremoto real es por la mayor suavidad del espectro de respuesta máxima del primero, lo que permite analizar los efectos de los fenómenos de interacción con mayor claridad.

5.3. Modelos tipo Winkler

La literatura actual que trata modelos tipo Winkler está básicamente centrada en la obtención de estructuras que se pueden considerar esbeltas (p. e. pilotes) y teniendo los problemas resueltos un claro carácter bidimensional. Por esto se muestra una comparación de la respuesta, en términos de las funciones de transferencia, del modelo propuesto con un modelo tipo Winkler de Gazetas (ver, Gazetas et al. (1992)) y un método acoplado de elementos de contorno y elementos finitos MEC-MEF (ver, Padrón (2009), Padrón et al. (2007), Padrón et al. (2008)).

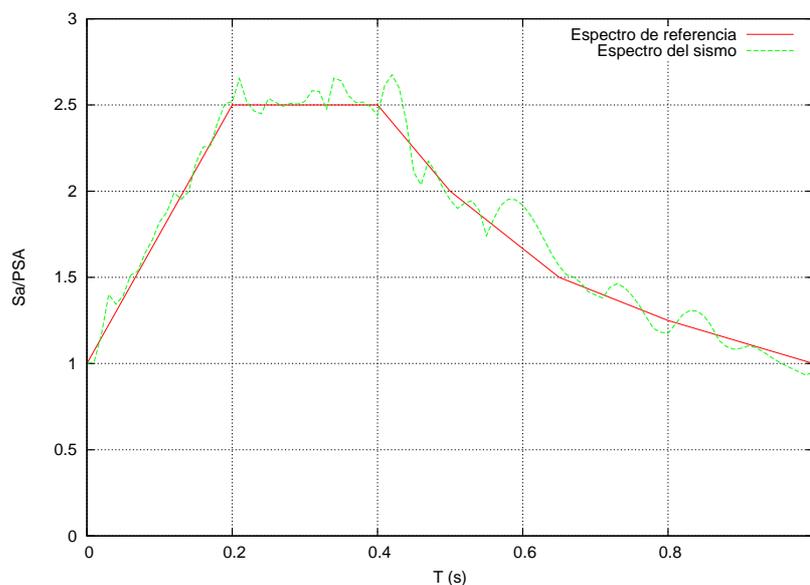


Figura 5.1: Espectro de campo libre. Comparación con el espectro de AFPS90

El problema resuelto mediante estos tres métodos es el de un pilar de diámetro d , embebido en un terreno con un estrato superior blando de profundidad $h_l = 5d$, siendo la relación de velocidades de propagación de ambos estratos $c_s/c_s^l = 3$. La punta del pilote se encuentra apoyada en una base rígida y el giro está impedido en la cabeza del mismo (ver figura 5.2).

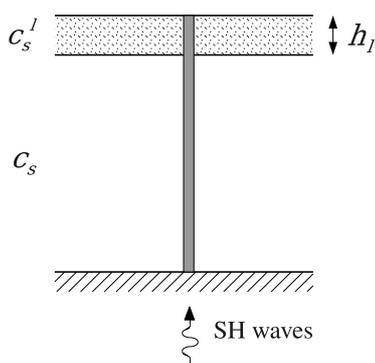


Figura 5.2: Perfil del terreno y pilar apoyado en base rígida

La esbeltez del pilote es $L/d = 20$, la relación entre los módulos de elasticidad del pilote y el suelo es $E_p/E_s = 10^3$, la relación entre densidades $\rho_p/\rho_s = 1.4$, el coeficiente de Poisson del terreno es $\nu_s = 0.4$ y el coeficiente de amortiguamiento interno del terreno es $\beta = 0.05$.

En la figura 5.3 se muestran las funciones de transferencia obtenidas en la cabeza

del pilote. Se observa que la respuesta de los tres métodos es muy parecida. Las diferencias que se observan entre los dos modelos tipo Winkler pueden deberse a los valores de las impedancias, ya que en nuestro modelo se usan las expresiones de Novak para obtenerlas.

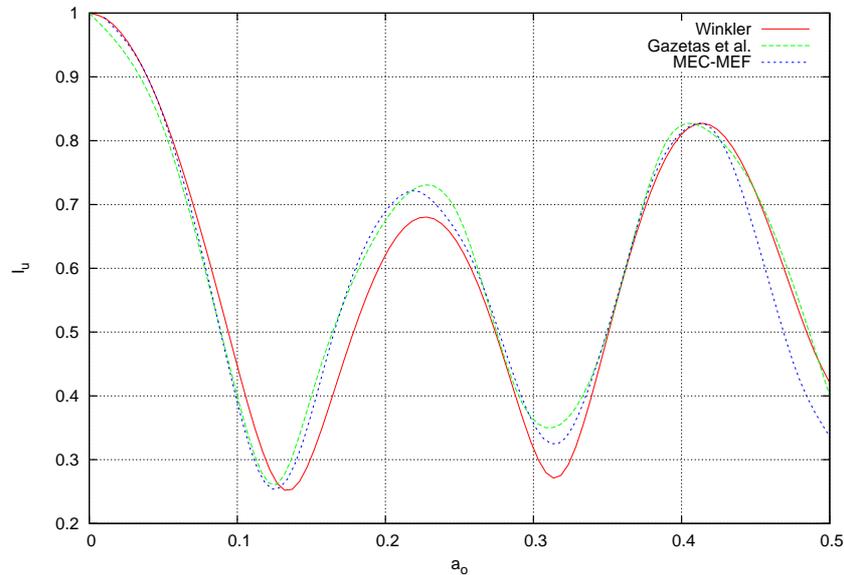


Figura 5.3: Funciones de transferencia

Este tipo de problemas son los más estudiados y están bastante bien resueltos en la bibliografía. Al estar acotados en la profundidad por una base rocosa horizontal y al tener el giro restringido en la parte superior, tienen un comportamiento cercano al de un problema bidimensional. Es por esto que este tipo de problemas son los más aptos para ser tratados con las metodologías tipo Winkler, y como se puede ver, el modelo que se presenta también es capaz de resolverlos adecuadamente. En base a esto, como contribución se pretende, no sólo incorporar la deformación por cortante al modelo, sino también buscar una metodología que sea capaz de modelar problemas con características más tridimensionales, para lo cual este trabajo es un primer paso. De ahí la tipología de problemas que se van a estudiar a partir de ahora.

5.4. La estructura y el terreno

Los problemas que van a ser estudiados en este capítulo están todos relacionados con una estructura como la mostrada en la figura 5.4

Esta estructura consiste en un cilindro hueco en su mayor parte de 14 metros de radio exterior y 80 metros de altura, de los cuales, los 50 metros inferiores están enterrados en un terreno estratificado. Los muros, de hormigón armado, tienen un

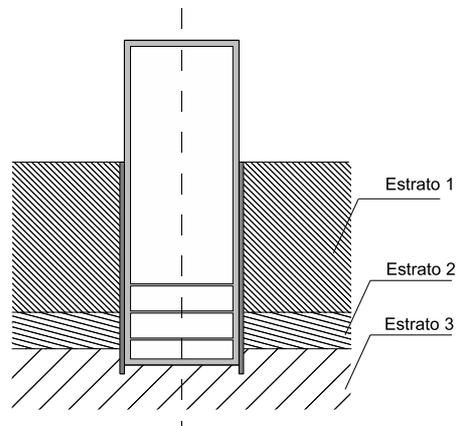


Figura 5.4: Alzado del problema

espesor de 1.5 metros, y se cuenta en la parte enterrada con una pantalla de 1 metro de espesor nominal, por lo que la perforación en el terreno es de 15 metros de radio. El interior de la estructura en sus 20 metros inferiores se encuentra rigidizada por diferentes forjados que sirven como base a maquinaria, cuartos de máquinas y control, talleres varios y demás recintos que pudieran ser necesarios. Esta estructura ofrece numeroso huecos y esquinas que aumentan notablemente la complejidad del modelo. Con el fin de procesarlo de manera más efectiva, se ha optado por varias simplificaciones.

- Simplificación de la base del cilindro, dotándolo de un fondo totalmente plano (figura 5.5)

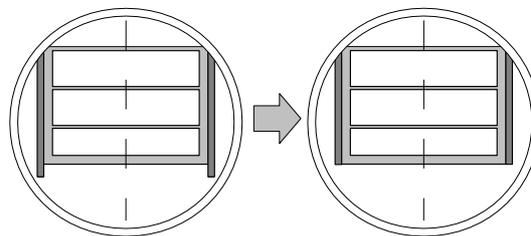


Figura 5.5: Detalle de la simplificación en la configuración estructural

- Incorporación de la pantalla al cuerpo del cilindro, considerando ambos como estructuras de hormigón armado actuando de manera solidaria.

- Supresión de espacios entre forjados en la parte baja del cilindro. Dada la alta rigidez estructural de este conjunto se considera como si fuera una parte maciza.
- Con la intención de mantener ciertas propiedades dinámicas de la estructura original, como la altura del centro de gravedad, se divide el macizo en dos dominios y se calculan las densidades que debe tener cada uno para cumplir con esta premisa.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, la estructura de hormigón armado queda simplificada como se muestra en la figura 5.6.

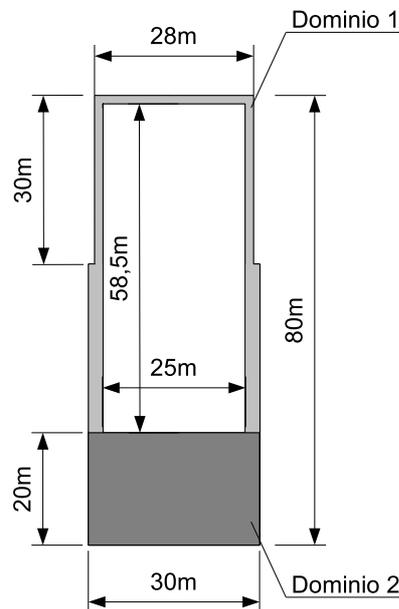


Figura 5.6: Dimensiones y dominios de la estructura

Las propiedades de cada uno de los dominios se muestran en el cuadro 5.1, donde ν es el coeficiente de Poisson; ρ la densidad; ξ el factor de amortiguamiento histerético y μ es el coeficiente de rigidez transversal.

	Dominio 1	Dominio 2
ν	0.2	0.2
ρ	2685.85 kg/m^3	2253.42 kg/m^3
ξ	0.05	0.05
μ	$1.15 \cdot 10^8 N/m^2$	$1.15 \cdot 10^8 N/m^2$

Cuadro 5.1: Propiedades de los dominios en los que se divide la estructura

La caracterización del terreno está basada en materiales y una configuración bastante común en geología. La roca sedimentaria forma suelos bien consolidados conteniendo normalmente un 50 % de materiales arcillosos y otro 50 % de minerales de cuarzo. Se dispondrá desde el punto de vista geotécnico de tres estratos:

- Una capa superior de 37 metros de profundidad, compuesta en su mayoría por arcilla roja considerándose de dura a muy dura.
- Una segunda capa, hasta los 46 metros de profundidad, formada principalmente de marga (conglomerado de caliza y arcilla)
- La estructura se apoyará en un último estrato de rocas arcillosas sedimentarias

La sección del terreno se muestra en la figura 5.7

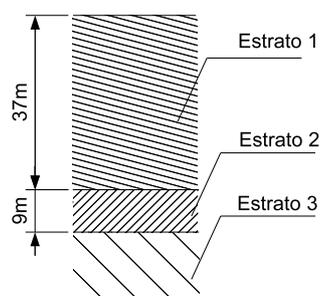


Figura 5.7: Estratigrafía

Las propiedades del terreno quedan definidas en el cuadro 5.2, donde c_s es la velocidad de propagación de las ondas tipo S a través del material.

	Estrato1	Estrato2	Estrato3
ν	0.3	0.3	0.3
ρ	2000 kg/m^3	2100 kg/m^3	2200 kg/m^3
ξ	0.05	0.05	0.05
μ	$5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$	$1.029 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$	$2.2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
c_s	500 m/s	700 m/s	1000 m/s

Cuadro 5.2: Propiedades de cada uno de los estratos

El planteamiento de los problemas se ha realizado de manera que la complejidad de los mismos va en aumento. Esto permite observar qué limitaciones puede presentar el modelo simplificado propuesto, frente al método de los elementos de contorno y al método de los tres pasos, en relación a variaciones las características de la estructura

y la estratigrafía del terreno. De esta manera se han formulado siete problemas diferentes.

Como primer paso se ha planteado obtener la respuesta de cuatro estructuras macizas de sección cilíndrica, con igual rigidez pero diferente longitud y diámetro, enterradas en un semiespacio y tratadas cada una como un problema independiente (figura 5.8). Esto permite determinar en qué medida se ve afectado el modelo por la esbeltez de la estructura.

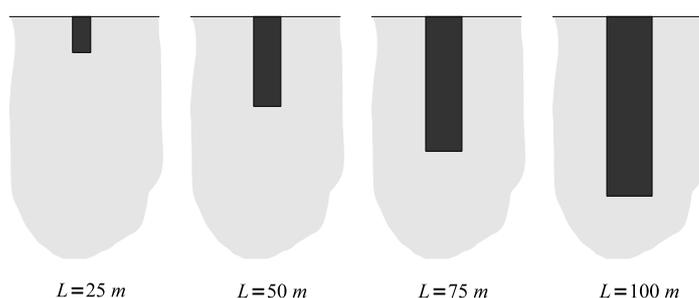


Figura 5.8: Estructuras cilíndricas de igual rigidez y distintas dimensiones, embebidas en un semiespacio

El siguiente problema que se planteó fue el de una estructura cilíndrica maciza con las dimensiones de la parte enterrada de la estructura real, es decir, longitud 50 y diámetro 30 metros. En este caso la esbeltez de la estructura es bastante menor y la rigidez total aumenta. Se obtuvo su respuesta estando la estructura enterrada en un semiespacio como el de los cuatro problemas anteriores y estando enterrada en un terreno estratificado (figura 5.9).

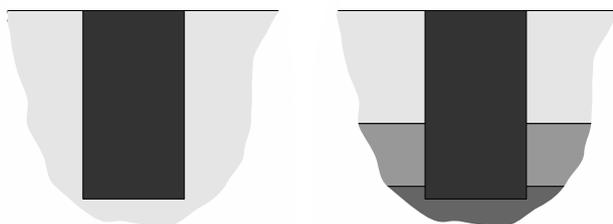


Figura 5.9: Estructura cilíndrica maciza embebida en dos terrenos distintos

Como último problema resuelto se plantea obtener la respuesta de la estructura real, con las simplificaciones que se han explicado al inicio de este capítulo, enterrada en un terreno estratificado (figura 5.10).

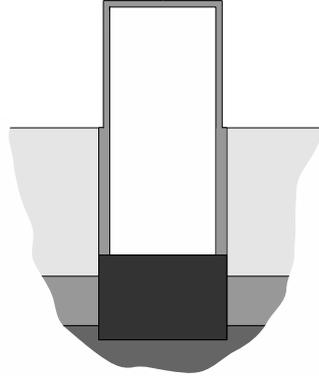


Figura 5.10: Estructura real simplificada

5.5. Algunos cálculos previos

El valor de la rigidez de las cuatro estructuras cilíndricas se ha obtenido partiendo del valor del área de la sección hueca de la parte enterrada de la estructura real.

$$A = \frac{\pi}{4}(30^2 - 25^2) \quad ; \quad A \approx 216 \text{ m}^2 \quad (5.2)$$

El diámetro D de una sección circular llena de igual área es

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 216}{\pi}} \quad ; \quad D \approx 16 \text{ m} \quad (5.3)$$

El sistema matricial de una viga en voladizo, considerando la deformación por cortante, con una carga transversal F en la punta es (ver Abascal (2000))

$$\begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{(1+\phi)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \theta \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

siendo ϕ el factor que determina la influencia al cortante cuya expresión es $\phi = \frac{12EI}{\alpha L^2 \mu A}$. El valor de α depende únicamente de la geometría de la sección (ver R. Abascal).

Si el momento M en la punta es nulo, la relación entre el desplazamiento transversal v y el giro θ en la punta, que sale de la ecuación de momentos del sistema (5.4) es

$$\theta = \frac{6}{L(4+\phi)}v \quad (5.5)$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación del sistema (5.4) que relaciona la fuerza F con el desplazamiento y el giro en la punta, se obtiene una expresión para el valor de F como

$$F = \frac{12EI}{L^3(4+\phi)}v \quad (5.6)$$

Por tanto podemos decir que la rigidez de la viga en voladizo frente a una carga transversal F en la punta es

$$K = \frac{12EI}{L^3(4 + \phi)} \quad (5.7)$$

Teniendo en cuenta la relación entre la rigidez transversal μ y el módulo de elasticidad E , y las expresiones de inercia y área de una sección circular llena podemos escribir ϕ en función del diámetro D y la longitud L como

$$\phi = \frac{3(1 + \nu)}{2\alpha} \left(\frac{D}{L} \right)^2 \quad (5.8)$$

Se toma como valor de rigidez de referencia para las 4 estructuras cilíndricas, el de una viga de sección circular llena ($\alpha = 0.9$) de diámetro el obtenido según (5.3) y de longitud 50 metros, el cual es

$$K = 2.027 \cdot 10^9 \text{ (N/m)} \quad (5.9)$$

que sale de sustituir en la expresión (5.7).

Manteniendo fija la rigidez K y variando las longitudes se obtienen los correspondientes valores del diámetro para cada una. Los datos obtenidos se resumen en el cuadro 5.3

L (m)	D (m)	D/L	Área (m²)	Inercia (m⁴)	ϕ	K (N/m)
25	9.6	0.38	71.82	410.52	0.29	$2.027 \cdot 10^9$
50	16.0	0.32	201.06	3216.99	0.21	$2.027 \cdot 10^9$
75	21.6	0.29	367.69	10758.33	0.17	$2.027 \cdot 10^9$
100	26.8	0.27	564.55	25362.33	0.14	$2.027 \cdot 10^9$

Cuadro 5.3: Características de las estructuras enterradas

5.6. Problemas y Resultados

5.6.1. Primer problema

Este primer problema se puede dividir en cuatro subproblemas, en cada uno de ellos se obtiene la respuesta de una estructura cilíndrica, de longitudes 25, 50, 75 y 100 metros respectivamente, enterrada en un semiespacio con las características del estrato 1 (ver cuadro 5.2). Las propiedades del material de las vigas son las mostradas para el dominio 1 en el cuadro 5.1, y las características geométricas las mostradas en el cuadro 5.3.

Viga de longitud 25 y diámetro 9.6 metros

En la figura 5.11, página 88, se muestran las funciones de transferencia para la viga de longitud 25 metros, obtenidas mediante los tres modelos, a las diferentes profundidades, desde la cota de la superficie libre ($z = 0$) hasta la profundidad máxima ($z = -L$). Como era de esperar el método directo y el método de los tres pasos dan valores muy parecidos para todo el rango de frecuencias. Las funciones de transferencia dadas por el modelo tipo Winkler presentan diferencias en puntos a la cota de la superficie libre ($z = 0$) y de máxima profundidad ($z = -L$). En concreto, en los puntos de profundidad máxima, las funciones de transferencia de los distintos modelos son coincidentes hasta frecuencias de 6 Hz, donde se alcanza un mínimo. En $z = -L$, para frecuencias entre 8 y 15 Hz, cercanas a la frecuencia natural del primer modo de vibración, se observa que tanto el método directo como el de los tres pasos dan un pico de aproximadamente 0.9 frente al 1.4 del modelo Winkler. Lo mismo ocurre para frecuencias entre 20 y 25 Hz, cercanas a la natural del segundo modo de vibración, donde se aprecian picos de aproximadamente 0.6 frente a 0.9. En general, las mayores diferencias entre las funciones de transferencias se dan en los extremos de la viga, mientras que para puntos intermedios se obtienen resultados bastante parecidos con los tres modelos. No obstante, al ser mayores los del modelo Winkler, están del lado de la seguridad.

En la figura 5.12, página 89, se muestran los espectros de respuesta para la misma estructura ante un terremoto como el que se muestra en el epígrafe 5.2. Se observa que la respuesta de los tres modelos es bastante similar, dando siempre valores de aceleración un poco mayores el modelo Winkler, sobre todo entre los instantes 0 y 0.2 s. Para este intervalo de tiempo, en cotas a partir de $-3L/5$ hasta $-L$ son más apreciables las diferencias del modelo propuesto con el método directo y el de los tres pasos.

Viga de longitud 50 y diámetro 16 metros

De la misma forma que para la viga de longitud 25 metros, en la figura 5.13, página 91, se muestran las funciones de transferencia para la viga de longitud 50 metros. Nuevamente, las mayores diferencias entre las funciones de transferencia del modelo Winkler con respecto a los otros dos se reproducen en los puntos de cota $z = 0$ y cota $z = -L$. Para puntos de cotas intermedias, las diferencias entre las funciones de forma son pequeñas, aunque en torno a las frecuencias naturales de cada modo de vibración, es decir, en los máximos relativos, se observa claramente que el modelo Winkler da valores mayores. Si nos fijamos en las funciones de transferencia para la cota $z = -4L/5$ se observa que los valores siguen el mismo patrón para los tres modelos, desmarcándose algo más la línea azul de Winkler en frecuencias en torno a 6 y 10 Hz. Para la gráfica en $z = -L$ se observa que el mínimo que aparece en torno 8 Hz y el máximo en torno a 12 Hz para el método directo, están mejor reproducidos por el modelo Winkler que por el método de los tres pasos, muy probablemente debido a que éste último no contempla la flexibilidad de la estructura.

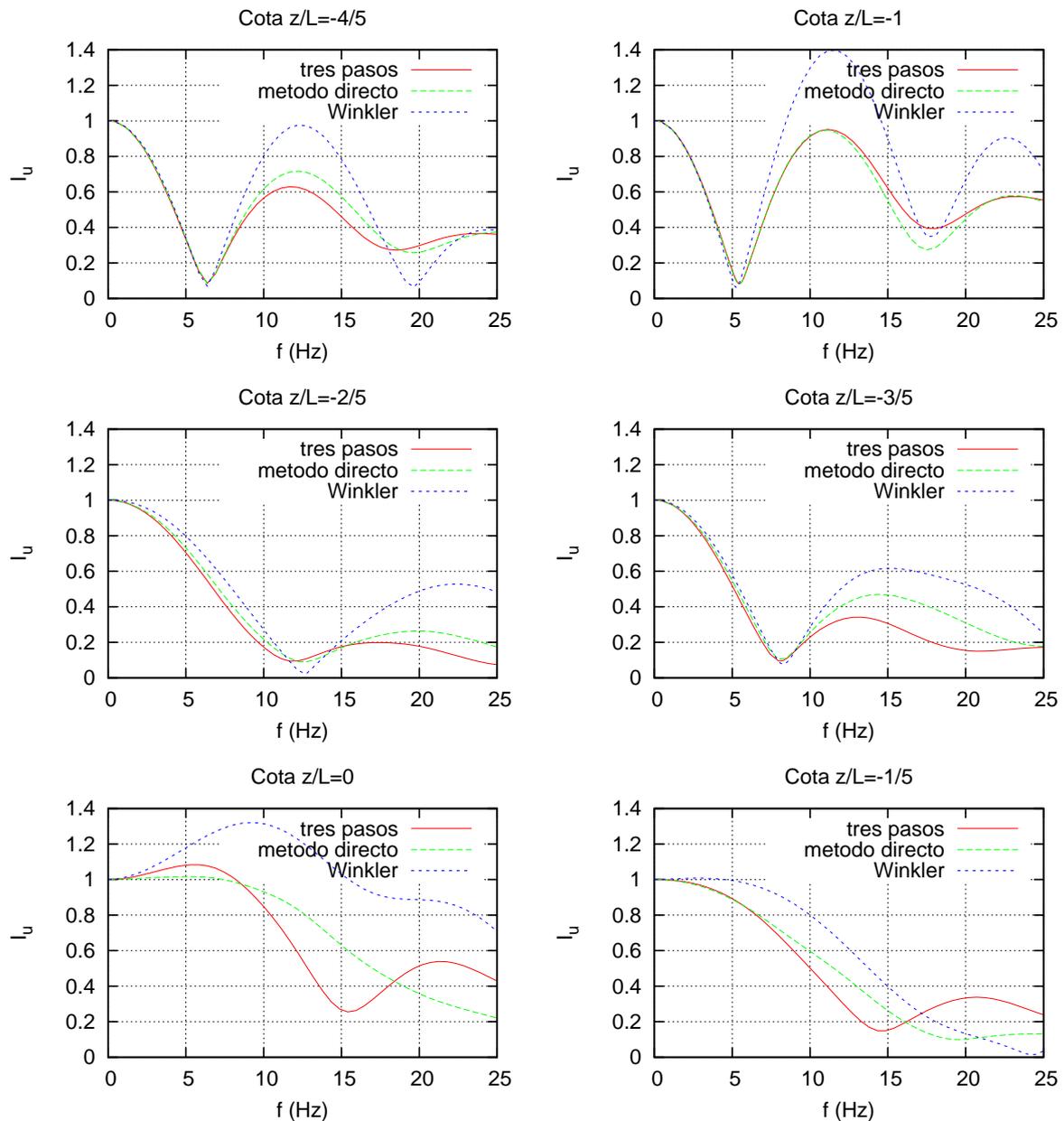


Figura 5.11: Funciones de transferencia, a diferentes profundidades, para estructura cilíndrica de longitud 25 y diámetro 9.6 metros, enterrada en un semiespacio con las características del estrato 1

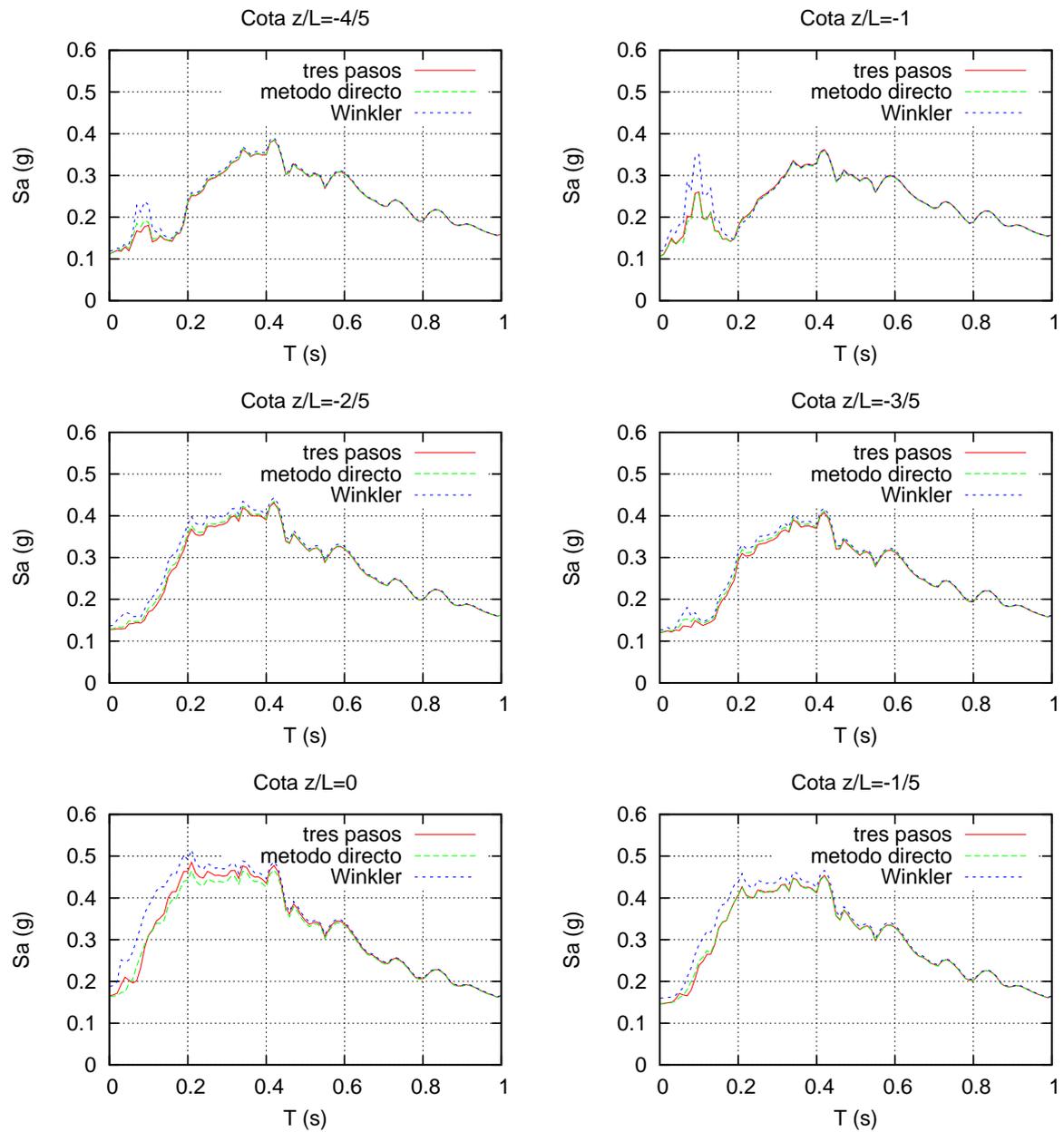


Figura 5.12: Espectros de respuesta máxima, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica de longitud 25 y diámetro 9.6 metros, enterrada en un semiespacio con las características del estrato 1

Este mismo hecho se puede observar en menor medida en las gráficas para las cotas $z = -2L/5$ y $z = -3L/5$, en las frecuencias en torno a 10 y 7 Hz respectivamente..

En la figura 5.14, página 92, se muestran los espectros de respuesta máxima de la estructura correspondientes al terremoto de diseño utilizado. Vemos nuevamente que la respuesta en aceleraciones sigue la misma forma para los tres modelos, siendo algo mayor para el modelo Winkler. Si observamos los espectro para las cotas $z = -2L/5$ y $z = -3L/5$ en el intervalos entre 0 y 0.2 s se ve que los picos de aceleraciones que aparecen están mejor definidos por la línea azul del modelo simplificado que por la línea roja que representa el modelo de los tres pasos. En este sentido, la hipótesis de rigidez infinita adoptada pierde validez frente a la consideración de estructura flexible del método directo y el modelo simplificado propuesto.

Viga de longitud 75 y diámetro 21.6 metros

En la figura 5.15, página 93, se representan las funciones de transferencia para la viga de longitud 75 metros. Una vez más en los puntos de la superficie y de profundidad máxima se observan las mayores desviaciones del modelo Winkler con respecto a los otros dos. Sin embargo, para este problema, en general se aprecia que la respuesta del modelo Winkler, para los puntos intermedios, acompaña bien la respuesta del método directo, incluso mejor que la del método de los tres pasos. En las cotas $z = -2L/5$ y $z = -3L/5$ el máximo que presenta el método directo en el intervalo de frecuencias entre 5 y 10 Hz está mejor definido por el modelo Winkler que por el método de los tres pasos. El método de los tres pasos, además, no sigue el patrón de la línea verde del método directo tan bien como la línea azul del modelo flexible propuesto. En la gráfica para los puntos de cota $z = -4L/5$ y $z = -L$, el mínimo que aparece en torno a la frecuencia de 6 Hz para el método directo no está del todo reproducido por el método de los 3 pasos y el modelo Winkler lo define mejor.

Los espectros de respuesta máxima son los representados en la figura 5.16, página 94. En ella se observa como el modelo Winkler reproduce de manera aceptable la respuesta que resulta del método directo. Si nos fijamos en la gráfica para la cota $z = -2L/5$, el pico de aceleración que da el método directo entre 0 y 0.2 *seg* no es reproducido por el método de los tres pasos, mientras que el modelo Winkler si lo presenta. Ocurre, de manera menos acusada, en el pico que se forma en torno a 0.2 s en la gráfica para la cota $z = -3L/5$, que es mejor representado por el modelo Winkler que por el de los tres pasos. Incluso en la cota $z = -L$, la línea azul del modelo Winkler es más parecida, en su forma, a la verde del método directo, que la línea del método de los tres pasos.

Viga de longitud 100 y diámetro 26.8 metros

Finalmente se muestran las funciones de transferencia de la vida de longitud 100 metros (ver figura 5.17, página 96). Las mayores diferencias entre el modelo Winkler y los otros dos se da en los puntos de la superficie y los de profundidad máxima.

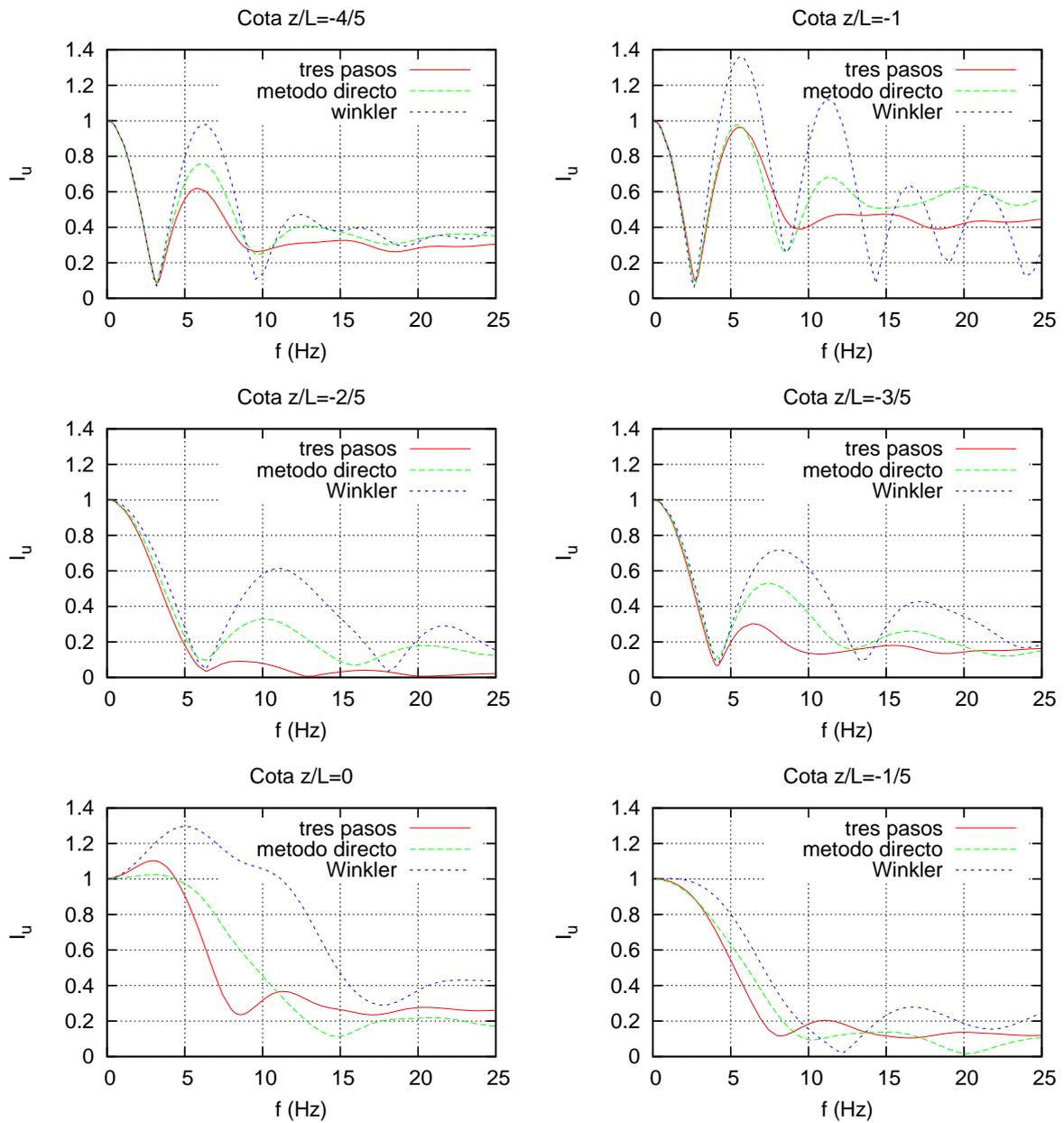


Figura 5.13: Funciones de transferencia, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica de longitud 50 y diámetro 16 metros, enterrada en un semiespacio con las características del estrato 1

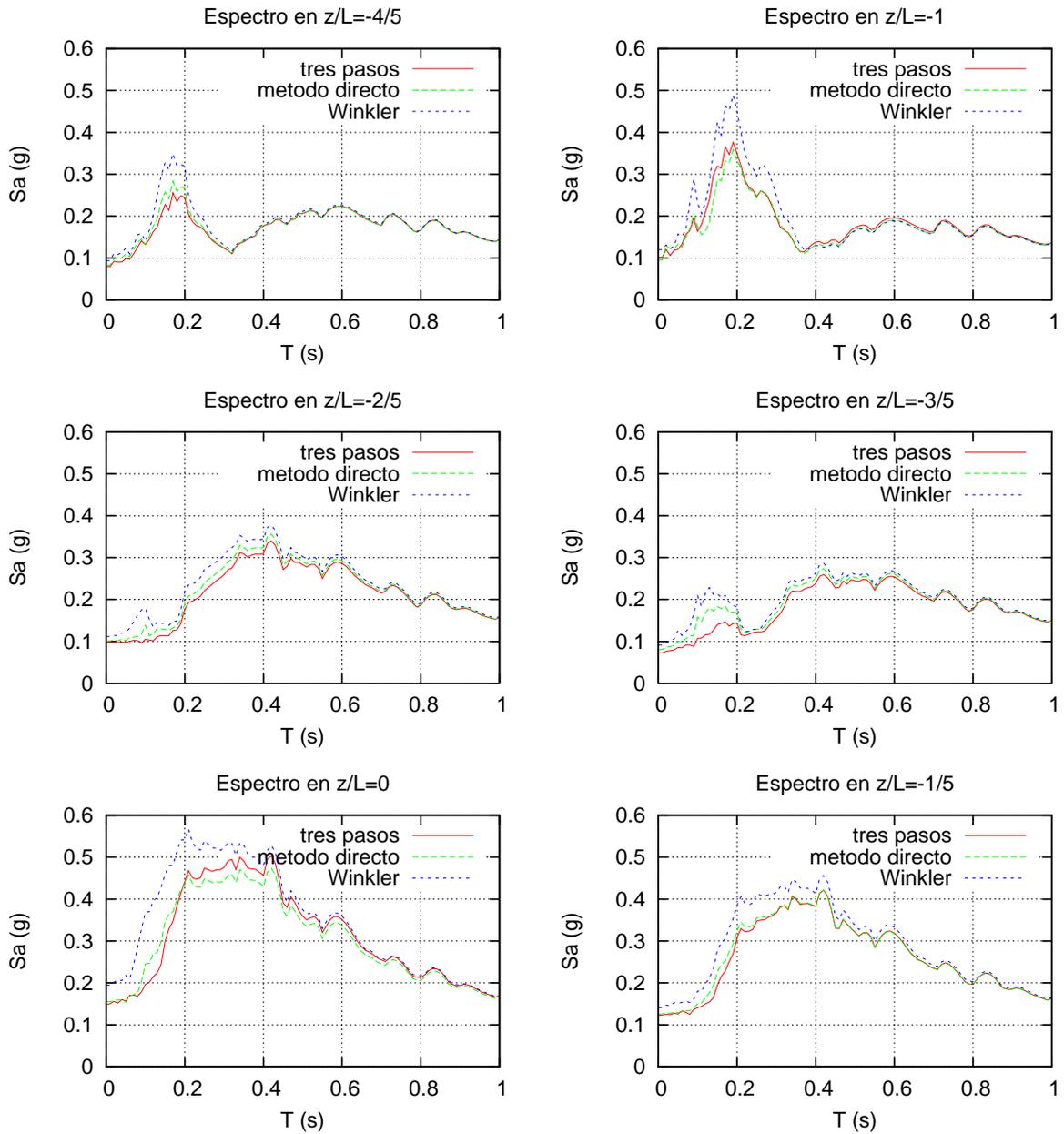


Figura 5.14: Espectros de respuesta máxima, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica de longitud 50 y diámetro 16 metros, enterrada en un semiespacio con las características del estrato 1

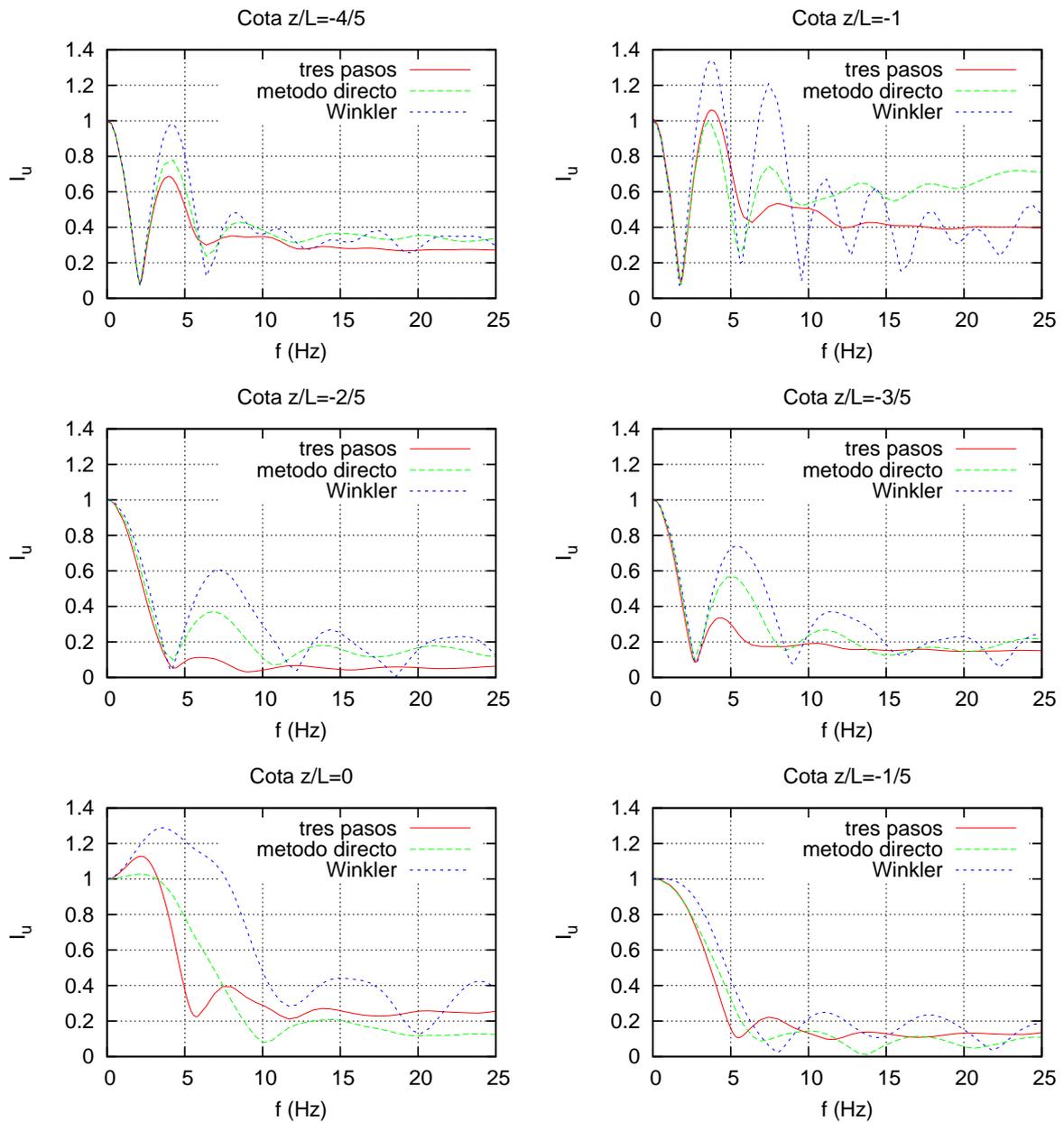


Figura 5.15: Funciones de transferencia, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica de longitud 75 y diámetro 21.6 metros, enterrada en un semiespacio con las características del estrato 1

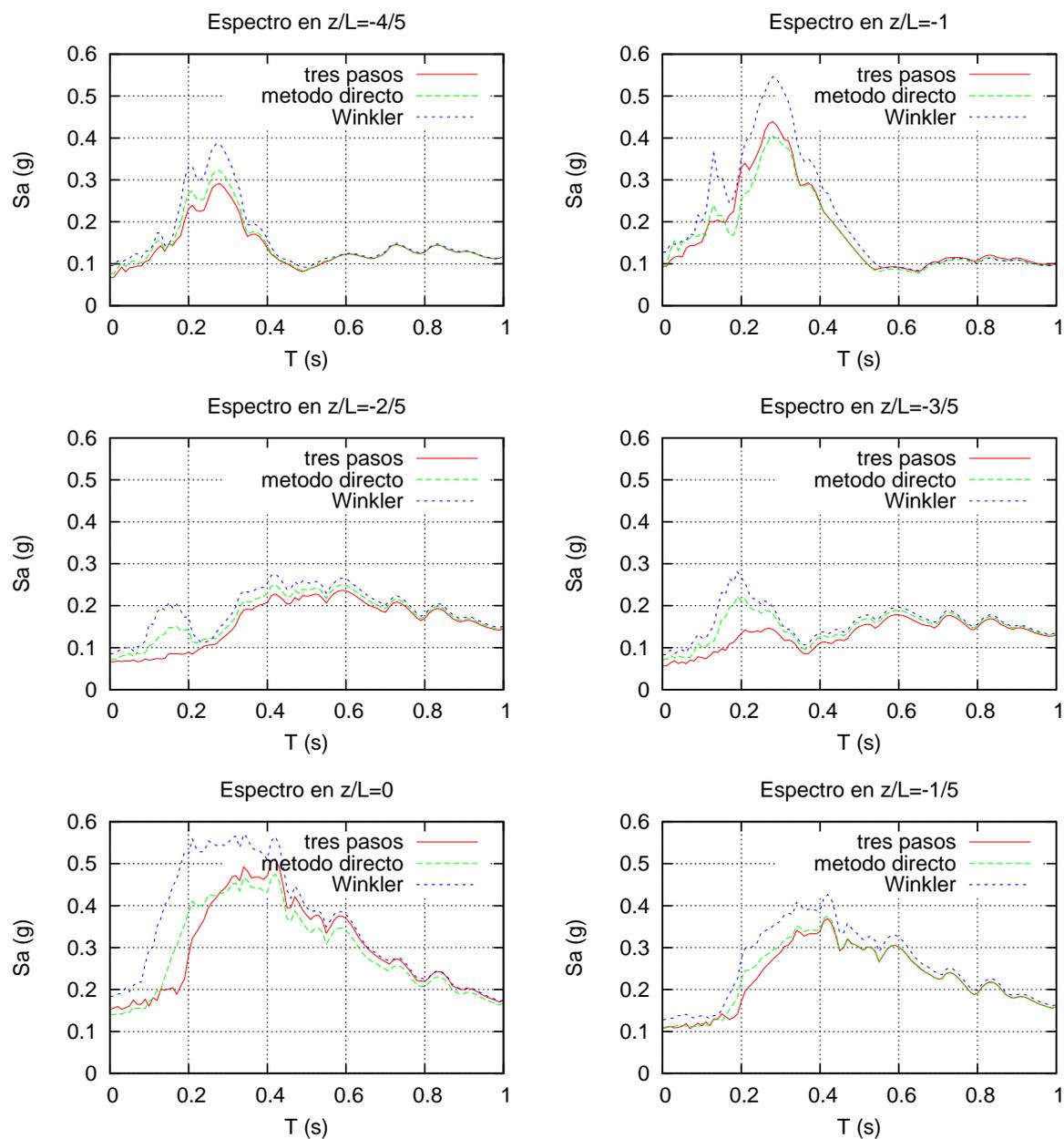


Figura 5.16: Espectros de respuesta máxima, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica de longitud 75 y diámetro 21.6 metros, enterrada en un semiespacio con las características del estrato 1

En puntos intermedios de la estructura, la respuesta obtenida mediante el modelo Winkler sigue dando valores mayores, sin embargo vuelve a mostrar una tendencia más parecida a la respuesta del método directo que la que ofrece el método de los tres pasos. Esto se puede observar viendo los picos que se producen en torno a 5 Hz para la cota $z = -2L/5$ y en torno a 4 Hz para la cota $z = -3L/5$.

Los espectros de respuesta máxima se representan en la figura 5.18, página 97. Se observa una vez más que el modelo Winkler presenta una tendencia bastante similar a la del método directo, aunque los valores de aceleración que desprende siguen siendo mayores. Vemos que en algunas situaciones el método de los tres pasos no representa picos de aceleración que si son mostrados por el modelo Winkler, por ejemplo, para la cota $z = -2L/5$ en torno a 0.2 s o para la cota $z = -3L/5$ a los 0.3 s. Incluso en la cota $z = -L$, aunque la diferencia entre las aceleraciones sea relativamente grande, se ve una mejor tendencia, respecto a la forma de la línea del método directo, de la línea del modelo Winkler que la que presenta la línea del método de los tres pasos.

Llegados a este punto en el que se ha calculado la respuesta de cuatro estructuras enterradas de igual rigidez pero distinta esbeltez L/D , se observa que la respuesta que se obtiene con el modelo Winkler, con respecto a lo otros dos métodos, es mayor, pero con la ventaja de estar del lado de la seguridad. También se observa que a medida que aumenta la esbeltez de la estructura, la hipótesis de rigidez infinita considerada para el método de los tres pasos pierde validez, sin embargo, el modelo Winkler se comporta mejor, lo cual era de esperar. Otro dato a destacar, para profundidades intermedias, es que la respuesta obtenida mediante los tres métodos es coincidente en el rango de frecuencias desde 0 Hz hasta el primer mínimo de las funciones de transferencia. En cualquier caso, se produce un hecho común en todas, y es que el modelo propuesto sobrevalora la respuesta.

5.6.2. Segundo problema

El siguiente problema que se plantea se acerca un poco más a las dimensiones de la estructura real. Se considera en este caso una estructura cilíndrica maciza de longitud 50 y diámetro 30 metros. Se ha calculado su respuesta estando enterrada en un semiespacio con las características del estrato 1. El material del que está formado esta estructura tiene las características del dominio 1 según el cuadro 5.1. Tal y como está planteado el problema, esta estructura es del orden de 10 veces más rígida que las cuatro estructuras anteriores y una esbeltez menor. Este hecho provoca que la respuesta obtenida mediante el método directo y el método de los tres pasos sean tan parecidas.

Las funciones de transferencia de este problema se muestran en la figura 5.19, página 99. El modelo Winkler vuelve a mostrar diferencias apreciables a lo largo de toda la longitud, siendo más acusadas en los puntos de la superficie y de máxima profundidad. Para los puntos de cotas intermedias tomadas, las diferencias con los otros dos modelos son menores. Exceptuando el caso de cota $z = 0$, a frecuencias

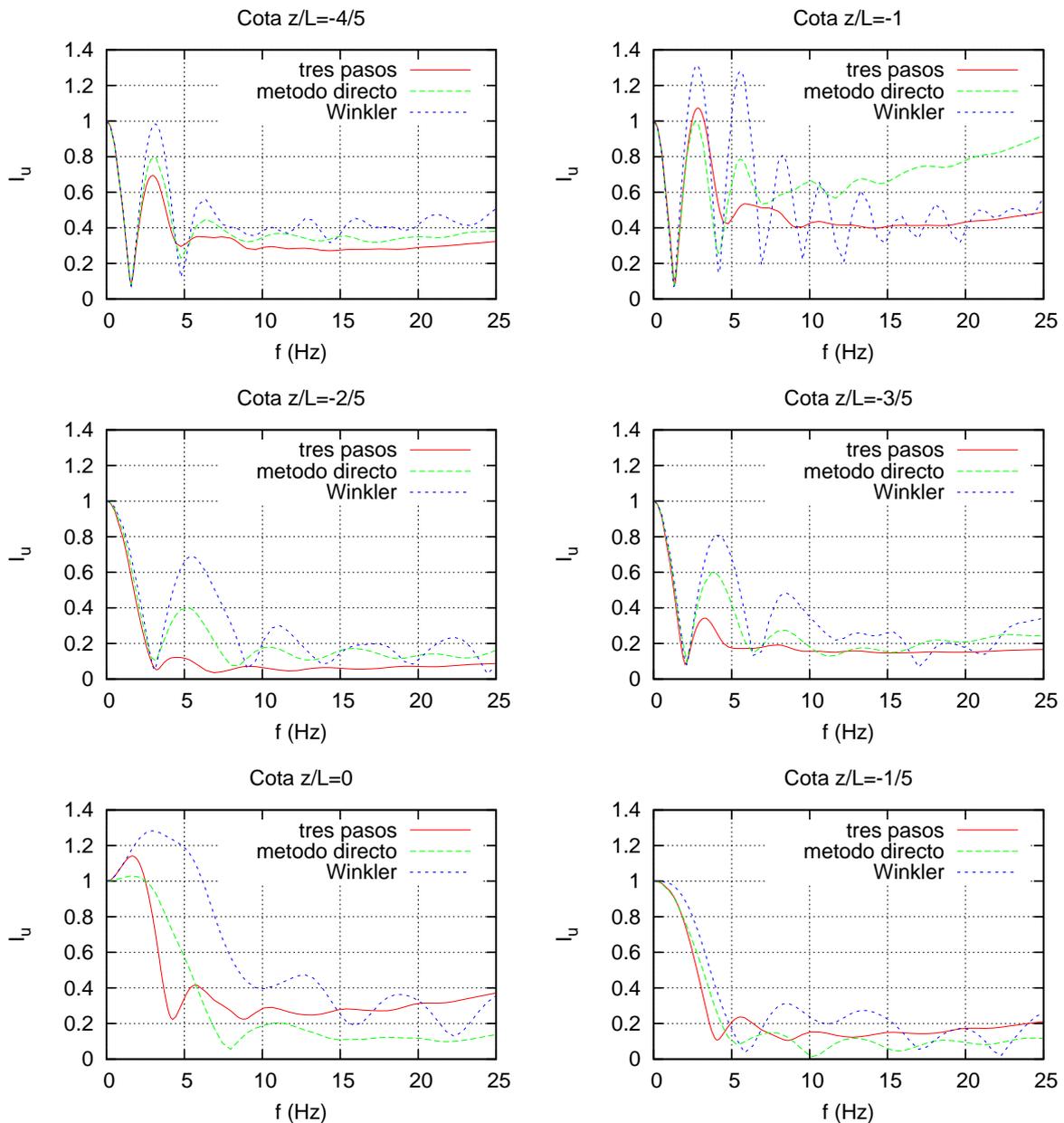


Figura 5.17: Funciones de transferencia, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica de longitud 100 y diámetro 26.8 metros, enterrada en un semiespacio con las características del estrato 1

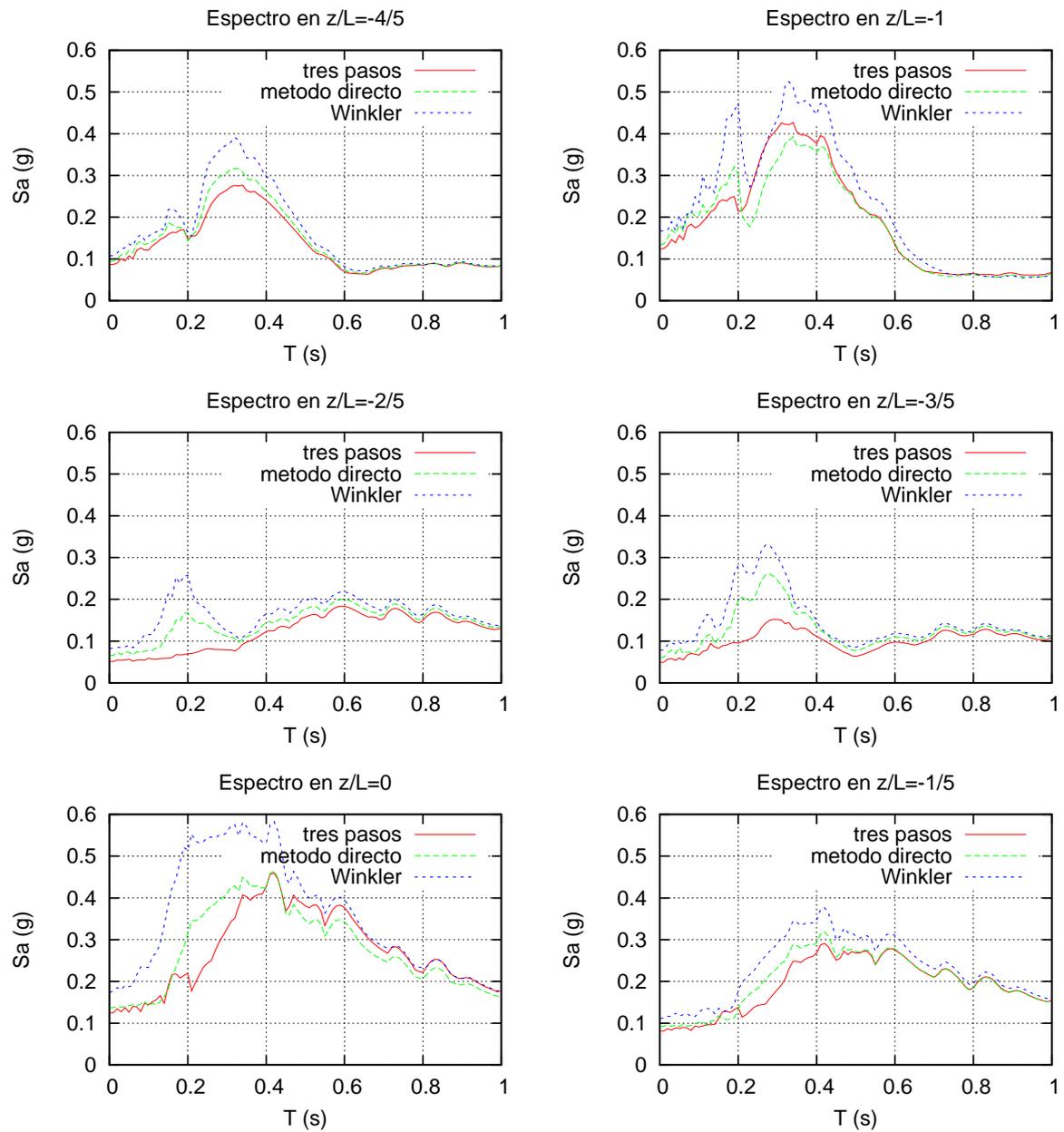


Figura 5.18: Espectros de respuesta, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica de longitud 100 y diámetro 26.8 metros, enterrada en un semiespacio con las características del estrato 1

bajas las funciones de transferencia del modelo Winkler son bastante coincidentes con las del método directo y el de los tres pasos, y también algo parecidas a medida que aumenta la frecuencia. Las mayores diferencias se producen a cotas profundas para frecuencias entre 5 y 10 Hz.

Los espectros de respuesta para este problema se muestran en la figura 5.20, página 100. Se puede ver en estos gráficos, para las distintas profundidades, que el modelo Winkler responde de manera similar a los otros dos métodos, con el factor de que sigue dando picos de aceleraciones algo más altos. Vemos que en este caso, al haberse aumentado la rigidez de la estructura, los espectros que resultan del método directo y del método de los tres pasos son prácticamente iguales para todas las profundidades. Vemos que el modelo Winkler presenta resultados bastante acordes con los otros dos métodos pero sobrevalora la respuesta.

5.6.3. Tercer problema

En este caso la estructura considerada tiene las mismas dimensiones y propiedades que el problema anterior, pero se encuentra enterrada en un terreno estratificado como el de la figura 5.7. Las características de cada uno de los estratos están mostradas en el cuadro 5.2.

Las funciones de transferencia para este caso se muestran en la figura 5.21, página 101. Nuevamente en puntos de cota $z = 0$ el modelo Winkler presenta diferencias apreciables con respecto a los otros dos métodos. Para puntos intermedios, cotas de $z = -1L/5$ hasta $z = -3L/5$, el modelo Winkler se comporta de manera aceptable para todo el rango de frecuencias. Para profundidades de $z = -4L/5$ y $z = -L$ la línea azul del modelo simplificado es coincidente con las otras dos para frecuencias entre 0 y 4 Hz, para frecuencias en el intervalo de 5 a 10 Hz se observan las mayores diferencias, volviendo a igualarse para frecuencias algo mayores.

Los espectros de respuesta se muestran en la figura 5.22, página 102. Vuelve a darse el hecho de que los espectros del modelo Winkler siguen la forma de los espectros para el método directo y el de los tres pasos, pero dando valores de aceleraciones mayores. Vuelve a ocurrir que para puntos intermedios las diferencias son menores que para los puntos extremos de la superficie y máxima profundidad.

Comparando las gráficas de las funciones de transferencia y los espectros de respuesta máxima de este problema tercer problema con las del segundo, se puede decir que el modelo Winkler no se ve excesivamente afectado por el hecho de que el terreno sea estratificado y su comportamiento sigue siendo parecido al del método directo y el de los tres pasos.

5.6.4. Cuarto problema

Como problema final se ha propuesto obtener la respuesta dinámica de la estructura real con las simplificaciones explicadas anteriormente (ver figura 5.6) enterrada en un terreno estratificado como el de la figura 5.7. Las propiedades de los dominios

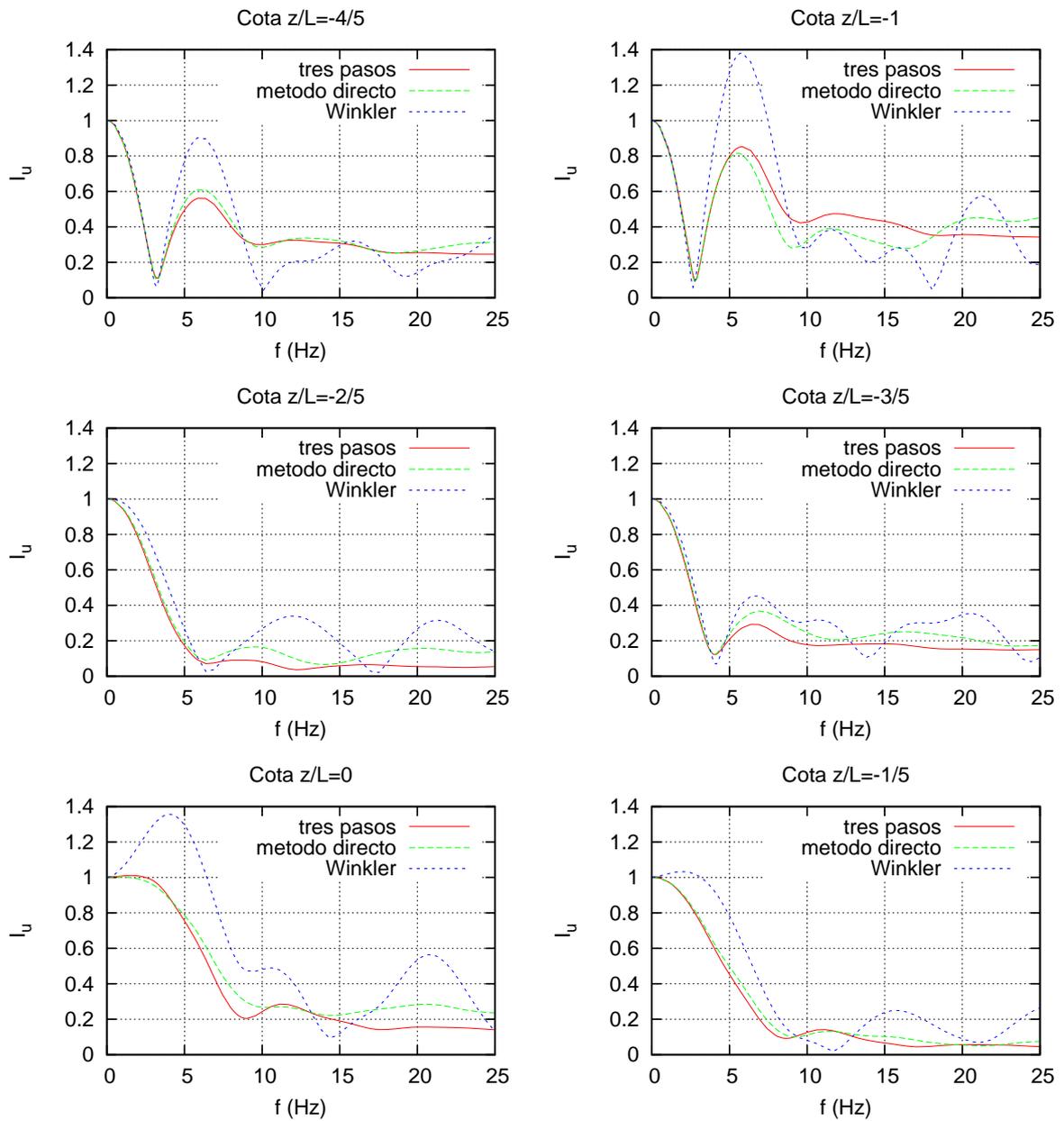


Figura 5.19: Funciones de transferencia, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica de longitud 50 y diámetro 30 metros, enterrada en un semiespacio con las características del estrato 1

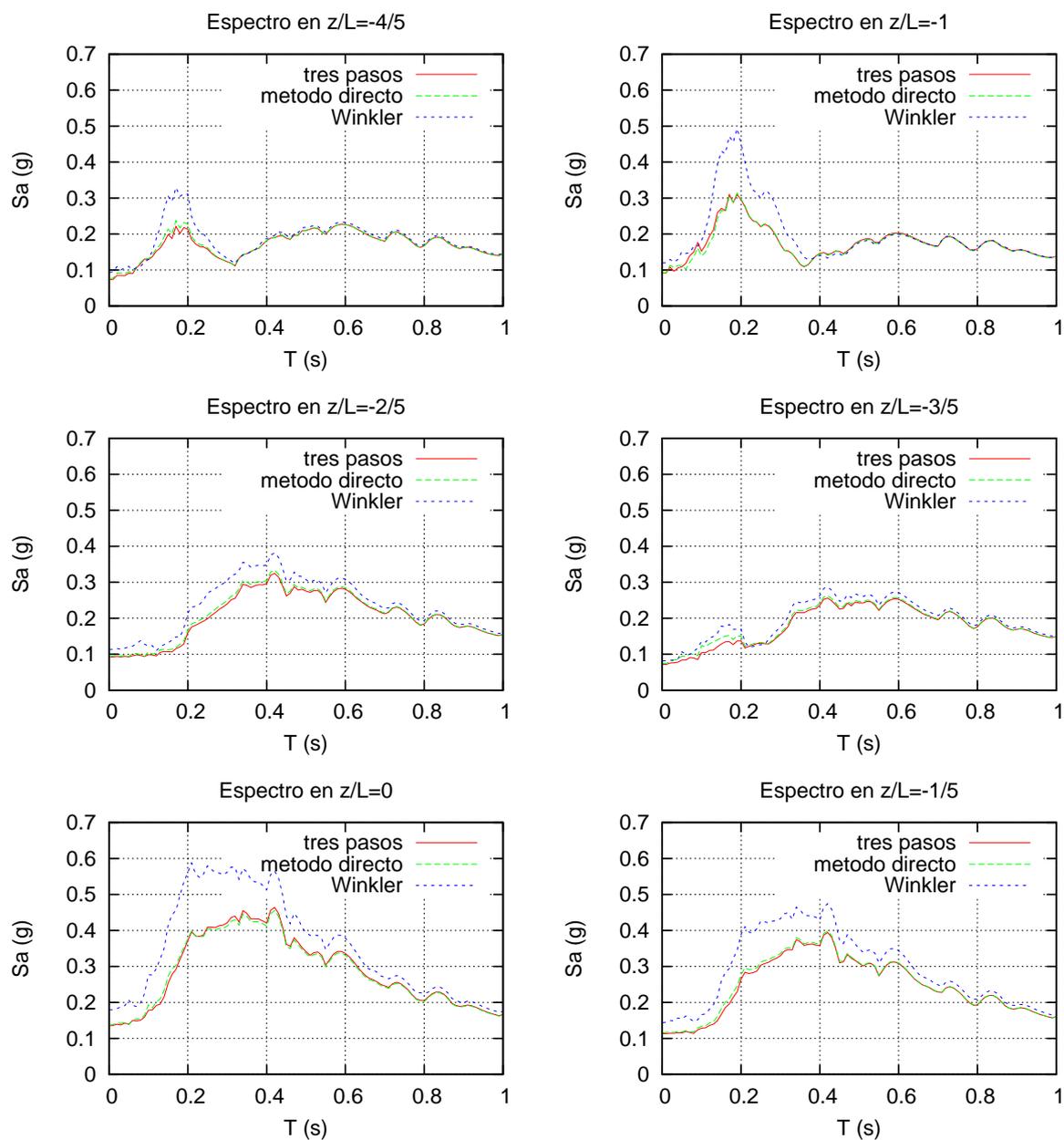


Figura 5.20: Espectros de respuesta máxima, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica de longitud 50 y diámetro 30 metros, enterrada en un semiespacio con las características del estrato 1

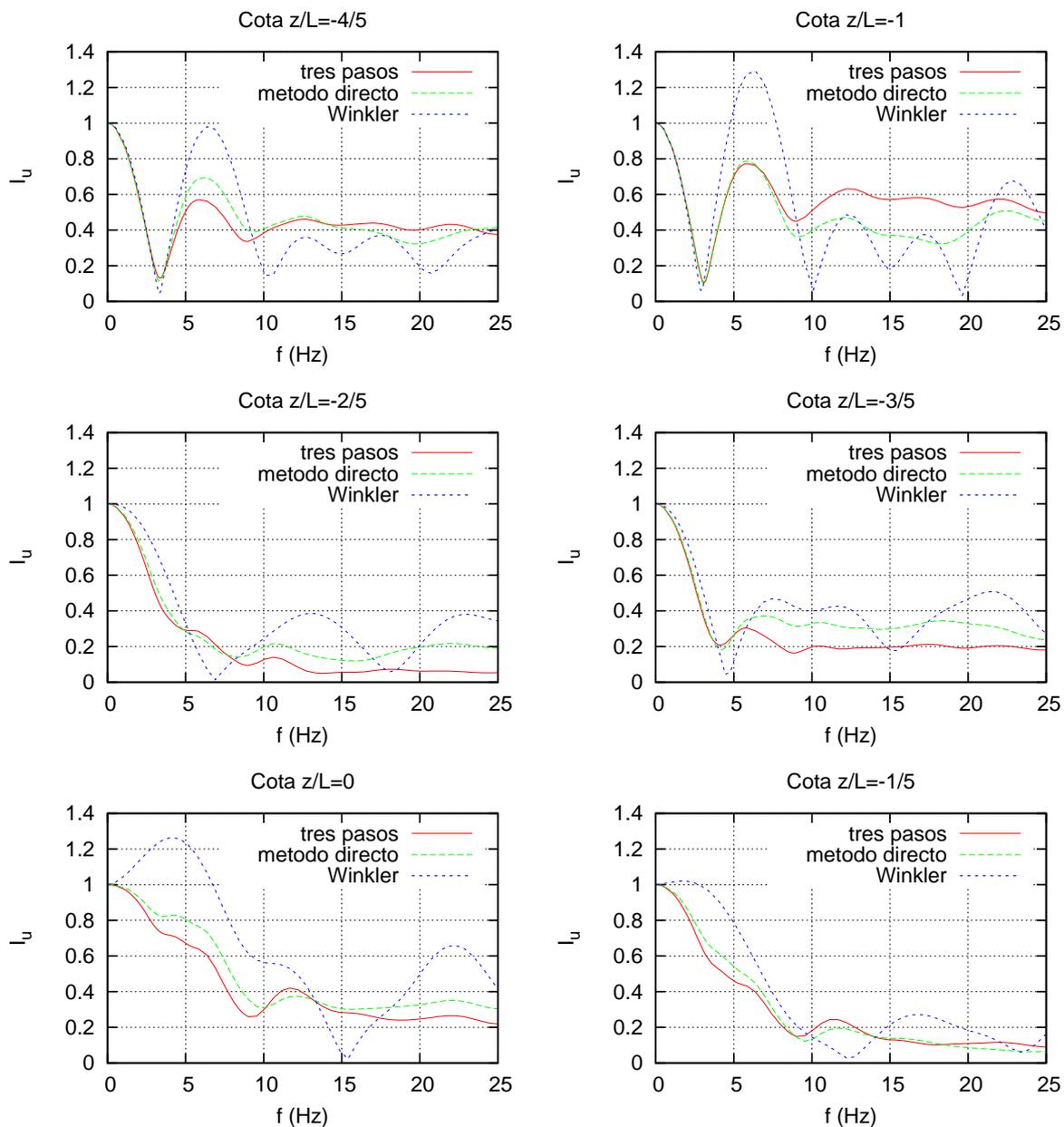


Figura 5.21: Funciones de transferencia, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica de longitud 50 y diámetro 30 metros, enterrada en un terreno con tres estratos

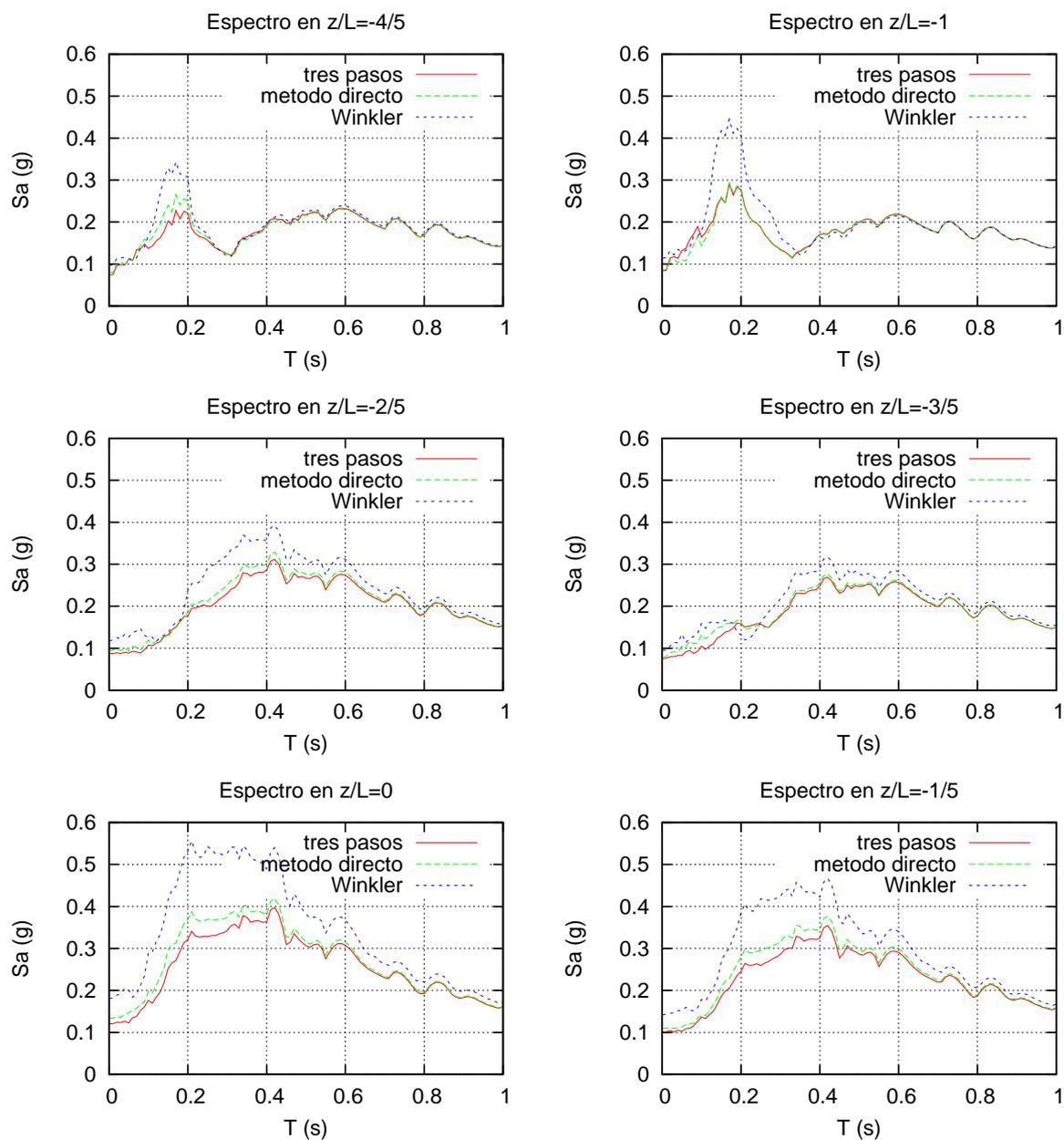


Figura 5.22: Espectros de respuesta máxima, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica de longitud 50 y diámetro 30 metros, enterrada en un terreno con tres estratos

en que se divide la estructura están en el cuadro 5.1, y las características de los estratos que forman el terreno en el cuadro 5.2. En este caso la rigidez de la estructura es menor a la de todas las anteriores.

Las funciones de transferencia se muestran en la figura 5.23, página 104. Vemos que en el punto de cota $z = 0$ el modelo Winkler representa de manera buena la respuesta dada por el método directo para frecuencias entre 0 y 6 Hz, aunque los valores del primero son algo mayores. El mínimo que se produce en torno a 5 y 6 Hz y la pequeña subida de la curva para las cotas $z = 0$, $z = -15$ y $z = -22.5$ están bien representados por el modelo Winkler, no así por el método de los tres pasos, que presenta mayores diferencias. Muy probablemente, este hecho está relacionado con la hipótesis de rigidez infinita para el método de los tres pasos, sin embargo, tanto el método directo como el modelo Winkler consideran la flexibilidad de la estructura. Para cotas más profundas el modelo Winkler sigue presentando una respuesta parecida a la del método directo.

Los espectros de respuesta máxima se muestran en la figura 5.24. Se puede observar que los espectros en puntos de cota intermedia $z = -22.5$ y $z = -33.5$, el modelo simplificado representa bien los picos de aceleración dados por el método directo para periodos entre 0 y 0.2 s. En este caso, al ser la rigidez de la estructura menor, el modelo Winkler y el método directo se comportan de manera similar frente a las diferencias que muestra el método de los tres pasos.

5.7. Conclusiones

A la vista de los resultados obtenidos, tanto de las funciones de transferencia como los espectros de respuesta máxima, se puede decir que el modelo Winkler responde de manera adecuada en relación con el método directo y el de los tres pasos. El hecho que más se da en todos los problemas resueltos es que el modelo simplificado sobrevalora la respuesta. Como era de esperar, las características de esbeltez y flexibilidad de la estructura son factores influyentes en el comportamiento del modelo.

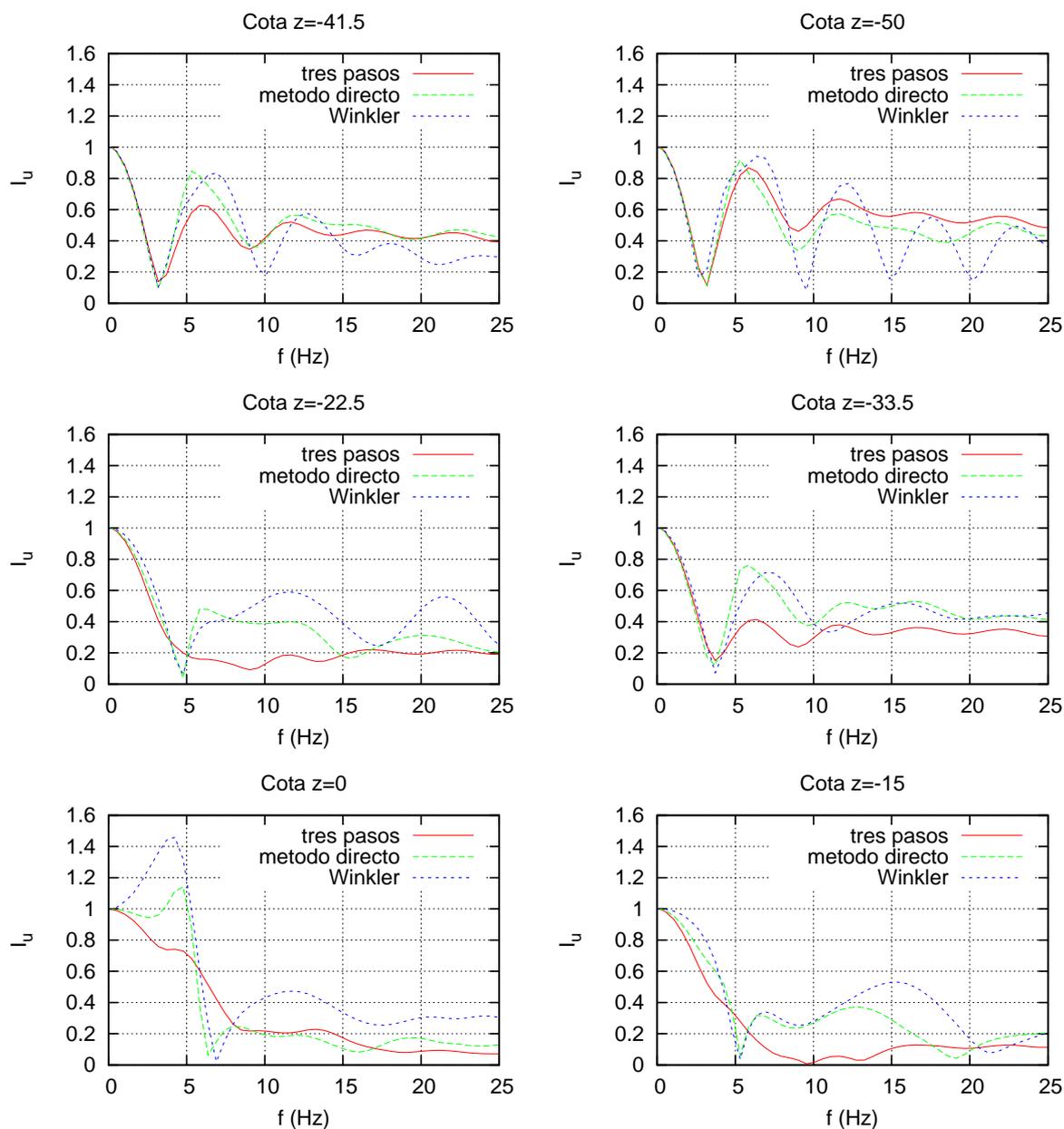


Figura 5.23: Funciones de transferencia, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica hueca como la de la figura 5.4, enterrada en un terreno con tres estratos

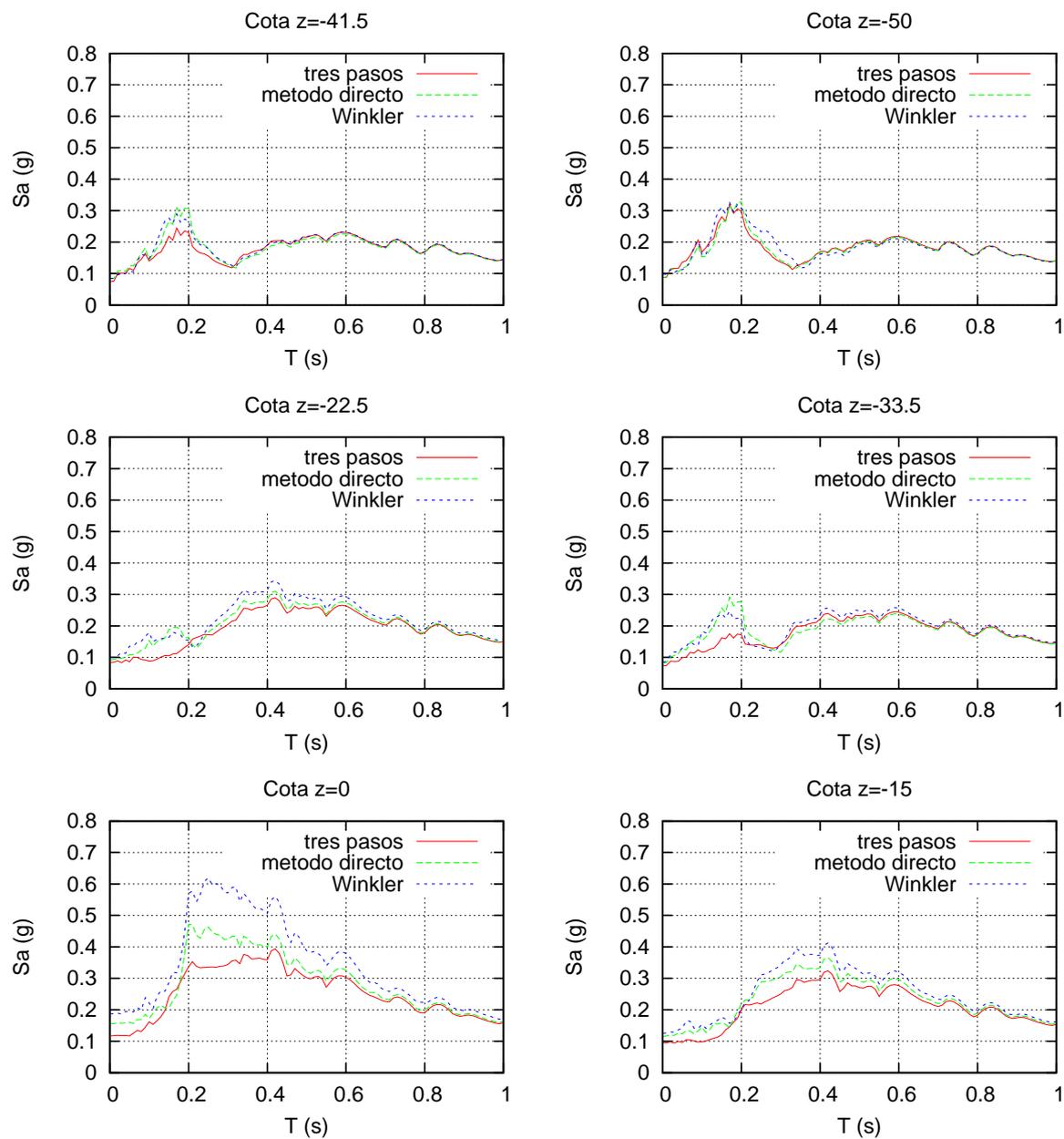


Figura 5.24: Espectros de respuesta, a diferentes profundidades, para una estructura cilíndrica hueca como la de la figura 5.4, enterrada en un terreno con tres estratos

Capítulo 6

Revisión, conclusiones y desarrollos futuros

6.1. Revisión

Este proyecto fin de carrera está enmarcado en el ámbito de la dinámica de estructuras, en concreto, en el estudio de la respuesta dinámica de estructuras enterradas sometidas a la acción de terremotos.

Se ha presentado un modelo simplificado para el estudio de estructuras enterradas que tiene como principal ventaja su simplicidad frente a otros más elaborados, que necesitan de más tiempo y recursos informáticos. De esta manera puede ser implementado con facilidad en cualquier lenguaje de programación, dando la posibilidad de ser ejecutado en un PC convencional de bajas prestaciones.

El modelo pretende representar el comportamiento real de la estructura huyendo, a diferencia de otros modelos ingenieriles, de las simplificaciones desde el punto de vista de la rigidez de la estructura.

Se presenta la formulación matricial del problema de forma detallada de tal manera que puede ser reproducida de manera sencilla por un lector familiarizado con el cálculo matricial de estructuras. La formulación permite contemplar la verdadera flexibilidad de la estructura, los fenómenos de interacción suelo-estructura y el carácter espacial de la excitación.

En esta primera fase, para determinar los parámetros del sistema, entendiéndose la impedancia del mismo fundamentalmente, se ha recurrido a la bibliografía existente para problemas similares.

Se han utilizado resultados obtenidos con un método directo más riguroso para testear los resultados arrojados por el modelo simplificado propuesto.

Con el fin de validar el código FORTRAN en el que se ha implementado el modelo propuesto, se han comparado resultados obtenidos a través del método numérico y a partir de la solución analítica del mismo modelo Winkler (sin necesidad de acudir a un proceso de discretización de la estructura enterrada por elementos finitos u otras metodologías similares, pero sí considerando la interacción con el terreno a través de

una serie de resortes y amortiguadores). El problema elegido corresponde a un pilote enterrado en un suelo homogéneo, verificándose las hipótesis de partida de la teoría clásica de vigas o de Euler-Bernoulli. Los resultados muestran la validez del código con el que se han obtenido el resto de los resultados mostrados en este trabajo.

6.2. Conclusiones

Se ha estudiado la respuesta de estructuras enterradas, con diferente esbeltez, que pueden ser tratadas como vigas en las que la deformación por cortante no es despreciable.

Los resultados presentados a través de una formulación rigurosa directa, demuestran que la flexibilidad de la estructura es un parámetro que no puede ser obviado, teniendo una influencia determinante en los espectros de respuesta que se obtienen a diferentes alturas.

A la luz de los resultados, el modelo que se presenta recoge perfectamente la flexibilidad de la estructura como factor a tener en cuenta, si bien se demuestra que los parámetros fundamentales del mismo, como son las impedancias del terreno, recogidos de la bibliografía, requieren de un calibrado adaptado a las propiedades específicas del problema que queremos modelar.

Se han presentado las funciones de transferencia y los espectros de respuesta máxima para un sismo de diseño dado. En casi todos los casos, la respuesta del sistema obtenida mediante el modelo tipo Winkler sobrevalora la obtenida con un método directo más riguroso, utilizado como referencia.

6.3. Desarrollos futuros

El aspecto principal a desarrollar, a partir del trabajo realizado en este proyecto, está relacionado con los parámetros fundamentales del sistema, en concreto con las impedancias del terreno, centrándose en el proceso de calibrado de los mismos. Este proceso implicaría el análisis de problemas, con diferentes geometrías, esbelteces y propiedades, a través de métodos directos y con el modelo tipo Winkler, con el objetivo de establecer un protocolo que permita determinar curvas, dependientes de la frecuencia, que definan las impedancias (rigidez y amortiguamientos) que constituyen el suelo, teniendo en cuenta además la posibilidad de que el terreno sea estratificado. De esta manera se pretende que dichas curvas sean aplicables de forma práctica y sencilla a cualquier situación.

Ello permitiría poner en uso una herramienta sencilla, cerrada e independiente que pueda ser utilizada por el diseñador de manera relativamente rápida y sin necesidad de grandes recursos informáticos.

Bibliografía

Abascal, R. A. (2000) *Cálculo matricial de estructuras*. Escuela Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla, España.

Aznárez, J. J., Maeso, O. & Domínguez, J. (2001) *A 3-D boundary element model for the dynamic analysis of arch dams with porous sediments*. *Advan. Earthquake Eng.*, 9, 712-722.

Aznárez, J. J. (2002) *Efectos de los fenómenos de interacción incluyendo los factores espaciales y sedimentos de fondo en la respuesta sísmica de presas bóveda*, Tesis Doctoral. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de G.C., España.

Aznárez, J. J., Maeso, O. & Domínguez, J. (2006) *BE analysis of bottom sediments in dynamic fluid-structure interaction problems*. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 30, 124-136.

Bea, R. G. (1980) *Dynamic response of piles in offshore platforms. Dynamic response of pile foundations: Analytical Aspects* (eds O'Neil and Dobry), STP. New York: American Society of Civil Engineers.

Berger, E. & Pyke, R. (1977) *Simplified method for evaluating soil-pile-structure interaction effects*: Proc. 9th Offshore Technol. Conf., Houston, TX, 589-598.

Brebbia, C. A. & Domínguez, J. (1992) *Boundary Elements. An introductory course*, Second edition, Comput. Mech. Publ. and McGraw-Hill Book Comp., Southampton and New York.

Cerrolaza, M. & Alarcón, E. (1989) *A bicubic transformation for the numerical*

evaluation of the Cauchy principal value integrals in boundary elements, Int. J. Numer. Meth. Eng., 28, 987-999.

Chirino, F., Maeso, O. y Anárez, J. J. (2000) *Una técnica simple para el cálculo de las integrales en el sentido del valor principal del Cauchy en el MEC 3D*, Rev. Int. Met. Num. para Cálculo y Diseño en Ing., 16, 77-95.

Clough R. W. & Penzien J. (1993) *Dynamics of structures*, Second Edition, McGraw-Hill International Editions.

Cruse, T. A. (1969) *Numerical solutions in three dimensional elastostatic*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 5, 1259-1274.

Cruse, T. A. & Rizzo, F. J. (1968) *A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem*. J. Math. Anal. Appl., 22, 244-159.

Dezi, F., Carbonari, S. & Leoni, G. (2009) *A model for the 3D kinematic interaction analysis of pile groups in layered soils*, Earthquake Eng. and Structural Dyn.

Domínguez, J. (1993) *Boundary elements in dynamics*, Southampton, New York, Computational Mechanics Publications & Elsevier Applied Science.

Domínguez, J. & Maeso, O. (1993) *Earthquake analysis of arch dams. II: dam-foundation interaction*. J. Eng. Mech. ASCE, 119, 513-530.

Gazetas, G., Fan, K., Tazoh, T., Shimizu, K., Kavvadas, M. & Makris, N. (1992) *Seismic pile-group-structure interaction*. Geotech. Specc. Publ., ASCE, 34, 56-93.

Gerolymos, N. & Gazetas, G. (2006) *Winkler model or lateral response of rigid caisson foundations in linear soil*, Soil Dyn. and Earthquake Eng., 26, 347-361.

Kavvadas, M. & Gazetas, G. (1993) *Kinematic seismic response and bending of free-head piles in layered soil*, Géotechnique 43, No. 2, 207-222.

Kupradze, V. D. (1963) *Dynamical problems in elasticity*. Progress in solid mechanics, North-Holland, Amsterdam.

Li H. B., Han, G. M. & Mang, H. A. (1985) *A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the Direct Boundary Element Method*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 21, 2071-2098.

Maeso, O. (1992) *Modelo para el análisis sísmico de presas bóveda incluyendo los efectos de interacción suelo-agua-estructura*, Tesis Doctoral. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de G.C., España.

Maeso, O. & Domínguez, J. (1993) *Earthquake analysis of arch dams. I: dam-foundation interaction*. J. ENg. Mech. ASCE, 119, 496-512.

Maeso, O., Aznárez, J. J. & Domínguez, J. (2002) *Effects of space distribution of excitation on seismic response of arch dams*. J. Eng. Mech., 128, 759-768.

Maeso, O., Aznárez, J. J. & Domínguez, J. (2004) *Three-dimensional models of reservoir sediment and effects on the seismic response of arch dams*. Earthquake Eng. Struct. Dyn., 33, 1103-1123.

Makris, N. & Gazetas, G. (1992) *Dynamic Pile-Soil-Pile Interaction. Part II: Lateral and Seismic Response* Earthquake Eng. and Structural Dyn., 21, 145-162.

Medina, F. (1987) *Análisis de la respuesta sísmica de presas incluyendo efectos de interacción suelo-fluido-estructura*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla, España.

Mylonakis, G. (2001) *Elastodynamic Model for Larger-Diameter End-Bearing Shafts*, Soil and Foundations, 42, No.3, 31-44.

Nikolau, S., Mylonakis, G., Gazetas, G. & Tazoh, T. (2001) *Kinematic pile bending during earthquakes: analysis and field measurements*. Géotechnique, 51, 425-440.

Novak, M. (1974) *Dynamic stiffness and damping of piles*. Can. Geotech. J. 11, 574-591.

Novak, M. & Aboul-Ella, F. (1978) *Stiffness and damping of piles in layered media*, Proceedings of conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics, pp. 704-719. Specialty Conference. New York: American Society of Civil Engineers.

Novak, M., M., Nogami, T. & Aboul-Ella, F. (1978) *Dynamic Soil Reactions for Plane Strain Case*, Journal of the Eng. Mechanics Division, Vol. 104, No. EM4, 953-959.

Oñate, E. (1992) *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Análisis elástico lineal*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona. España.

Padrón, L. A., Aznárez, J. J. & Maeso, O. (2007) *BEM-FEM coupling model for dynamic analysis of piles and pile groups*. Eng. Anal. Bound. Elem., 31, 473-484.

Padrón, L. A., Aznárez, J. J. & Maeso, O. (2008) *Dynamic analysis of piled foundations in stratified soils by a BEM-FEM model*. Soil Dyn. Earthquake Eng., 28, 333-346

Padrón, L. A. (2008) *Numerical Model for the Dynamic Analysis of Pile Foundations*, Tesis Doctoral. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

París, F. (1998) *Teoría de la Elasticidad*, E.T.S.I.I. de Sevilla. España.

Pérez, J. J. (2006) *Estudio Comparativo de la Metodología a emplear en Problemas de Interacción Dinámica Suelo-Estructura. Una aplicación Práctica*, Proyecto fin de carrera. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de G.C., España.

Shanchez-Salineró, I. (1982) *Static and dynamic stiffness of single piles*. Geotechni-

cal Engineering Report GR82-31. Austin: University of Texas.

Stokes, G. G. (1849) *On the dynamical theory of diffraction*, Trans. Cambridge Philos. Soc., Vol. 9, 1-62.

Telles, J. C. (1987) *A self-adaptative coordinate transformation for efficient evaluation of general Boundary Elements integrals*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 24, 937-959.

Zienkiewicz O. C. & Taylor R. L. (2004) *El método de los elementos finitos*, 5^a Edición, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona. España.