UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES





PROYECTO FIN DE CARRERA

Aplicación del Método de los Elementos de Contorno a la Obtención de la Respuesta Temporal de una Estructura ante Solicitación Sísmica

AUTOR: ALEJANDRO GONZÁLEZ CALVO

TUTORES: JUAN JOSÉ AZNÁREZ GONZÁLEZ Orlando Maeso Fortuny

JUNIO, 2002

ÍNDICE

CAPÍI	CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN1			
1	. Presentación del Problema			
2	2. Objetivos y Metodología	7		
3.	8. Reseña Histórica. Estudios Previos	8		
САРІ́Т	FULO 2. ECUACIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS	15		
1	. Ecuaciones que rigen la propagación de ondas en Problemas Escala	RES,		
	ELÁSTICOS Y POROELÁSTICOS	17		
	1.1 Introducción	17		
	1.2 Ecuaciones Básicas de la Elastodinámica Lineal	17		
	1.3 El Problema Antiplano	20		
	1.4 Propagación de ondas en Medios Elásticos	22		
	1.5 Reflexión y Refracción de Ondas Armónicas Planas	25		
	1.5.1 Ondas SH	26		
	1.5.2 Ondas P y SV	29		
	1.5.3 Ondas Superficiales			
	1.6 Ondas de Presión en Fluidos			
	1.7 El Medio Poroelástico			
	1.8 Caracterización del Medio Poroelástico	41		
	1.9 Ecuaciones de Gobierno en el Dominio de la Frecuencia	43		
	1.10 Condiciones de Contorno			
2	2. Acciones Sísmicas	55		
	2.1 Zonas Sísmicas de la Tierra	55		
	2.2 Mecanismos de los Terremotos Tectónicos	58		
	2.3 Teoría de Reid	59		
	2.4 Ondas Sísmicas	60		
	2.5 Acelerogramas	63		

ÍTULO 3. HERRAMIENTAS NUMÉRICAS	
1. MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO	
1.1 Introducción	
1.2 Formulación Matemática	
1.3 Puntos Internos	
1.4 Evaluación de las Integrales	
1.5 Aplicación a Presas Bóveda	
2. TRANSFORMADA DE FOURIER	
2.1 La integral de Fourier	
2.2 La Transformada Inversa de Fourier	
2.3 Existencia de la Integral de Fourier	
2.4 Propiedades de la Transformada de Fourier	
2.5 Convolución y Correlación	
2.6 Series de Fourier	
2.7 Transformada Discreta de Fourier	
2.8 Transformada Discreta Inversa de Fourier	
2.9 Propiedades de la Transformada Discreta de Fourier	
2.10 Convolución y Correlación Discreta	
3. TRANSFORMA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)	
3.1 Introducción	
3.2 Formulación Matricial	
3.3 Diagrama de Flujo	
3.4 Nodos Duales	
3.5 Cálculo de W ^p	
3.6 Reordenamiento del vector original	
3.7 Diagrama de bloques del algoritmo FFT	
2.9 Decemento teórico del elecuitmo en hece 2	

CAPÍTULO 4. CÁLCULO DE LA RESPUESTA	113
1. Respuesta Temporal de Sistemas Lineales de un grado de libertad.	
APLICACIÓN A SISTEMAS DE UNO Y DOS GRADOS DE LIBERTAD	115
1.1 Introducción	115
1.2 Función de Transferencia de un Sistema Dinámico	116
1.3 Historia en el Tiempo de la Respuesta Sísmica	118
1.3.1 Respuesta a un impulso unidad	118
1.3.2 Respuesta a una excitación cualquiera	119
1.3.3 Condiciones Iniciales	122
1.4 Cálculo Numérico de la Respuesta en el Campo Complejo de la Frecuencia	
1.5 Posibles Errores de la Solución propuesta por la DFT	126
1.6 Aplicaciones del algoritmo FFT a Sistema de uno y dos grados de libertad	129
1.6.1 Introducción	129
1.6.2 Sistema de un grado de libertad	130
1.6.2.1 Excitación: impulso rectangular	
1.6.2.2 Excitación: Terremoto de El Centro (1940)	133
1.6.3 Sistema de dos grados de libertad	
1.6.3.1 Excitación: impulso triangular	141
1.6.3.2 Excitación: Terremoto de El Centro (1940)	143

CAPÍTULO 5. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS......147

1.	Análisis del Campo de Desplazamientos de Cañones de diversa geometría ante				
	Soliticación	CIÓN SÍSMICA. EFECTO LOCAL		149	
	1.1 Introduce	ción		149	
	1.2 Cañón se	emicircul	ar		
	1.3 Cañón re	ecto			
	1.3.1	Cañón r	ecto de sección constante		
		1.3.1.1	Incidencia vertical		
		1.3.1.2	Influencia del carácter espacial de la excitación		
	1.3.2	Cañón r	ecto con ensanchamiento		
		1.3.2.1	Evaluación del movimiento anteroposterior		
		1.3.2.2	Evaluación del movimiento transversal		
		1.3.2.3	Evaluación del movimiento vertical		
	1.4 Cañón se	emielíptio	co con inclusión		
	1.5 Influenc	ia del Efe	cto Local sobre acelerogramas		

	1.5.1	Introduc	cción	
		1.5.1.1	Influencia del efecto viajero	
	1.5.2	Influenc	ia de las características del terreno	
		1.5.2.1	Cañón Granítico	
		1.5.2.2	Cañón arcilloso	
2.	Análisis del (Sísmica	CAMPO D	E DESPLAZAMIENTOS DE PRESAS BÓVEI	DA ANTE SOLICITACIÓN 217
	2.1 Introducción			
	2.2 Análisis Espectral			
	2.3 Movimiento anteroposterior			
	2.3.1	Incidenci	a vertical	
		2.3.1.1	nfluencia del terreno	
		2.3.1.2	nfluencia del agua	
		2.3.1.3	Influencia del sedimento	
	2.3.2	Influencia	a del carácter espacial de la excitación	
	2.4 Movimie	ento vertic	al	

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES	37
--------------------------	----

Mi más sincero agradecimiento a los Tutores de este Proyecto, por su dedicación y paciencia.

CAPÍTULO 1.

INTRODUCCIÓN

1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Cada año, unas veces producto de la acción humana y otras por los propios desastres naturales, se suceden catástrofes de gran magnitud y de alcance general, suponiendo el desembolso de importantes cantidades de dinero para paliar los daños provocados por los mismos, y, sin duda lo peor, la pérdida de vidas humanas. Tal es el caso de los movimientos sísmicos, cuyas graves consecuencias y efectos colaterales se traducen en números: víctimas mortales, damnificados, pérdidas millonarias en infraestructuras, etc. En definitiva, supone para la región afectada un retroceso en el tiempo de varias décadas, y un sobreesfuerzo por parte de todos los miembros de la comunidad para reflotar de nuevo el lugar.

A lo largo de la historia han sido varios los sismos que han devastados regiones enteras de nuestro Planeta. La Sismología, o ciencia encargada del estudio de los movimientos sísmicos, es relativamente reciente. Hasta el siglo XVIII, los registros objetivos de terremotos son escasos, y no se comprendía con exactitud el fenómeno. De las explicaciones relacionadas con castigos divinos o respuestas de la Tierra al mal comportamiento humano se pasó a explicaciones pseudocientíficas como, por ejemplo, pensar que estaban originados por liberación de aire desde cavernas presentes en las profundidades del planeta. Hoy día, gracias a la Teoría de Reid, se comprende mejor el origen del fenómeno sísmico, así como la formación de cordilleras, volcanes, fosas marinas y demás accidentes geológicos.

No siempre los terremotos de mayor magnitud son los que causan mayor número de desgracias. Son varios los factores que influyen en la devastación provocada por un movimiento sísmico. Sin duda, el factor más influyente es la energía liberada en el movimiento de las placas tectónicas. Otro es la densidad de población en las regiones cercanas al lugar de ocurrencia del terremoto. Por ejemplo, el enorme terremoto que sacudió Alaska en 1964 causó un centenar de víctimas, aproximadamente, mientras que el ocurrido en Anatolia en 1939, de magnitud relativamente baja, se cobró miles de víctimas. Otra causa es la profundidad del foco; así, los sismos ocurridos en Centroamérica, que afectan a países como Nicaragua, Costa Rica y El Salvador, suelen presentar hipocentros superficiales, lo que incrementa notablemente su peligrosidad. También citar la calidad y el tipo de construcción en la zona afectada. En los países subdesarrollados o en vías de desarrollo, al no disponer de recursos suficientes, un pequeño sismo puede bastar para destruir ciudades completas, como ocurrió en Turquía en 1999. Por último, destacar la influencia de las características geológicas y morfológicas del suelo. Por un lado, la existencia de capas viscosas en el sustrato, bolsas de petróleo, cámaras de aire o gas, o cualquier medio que suponga una discontinuidad de las capas sólidas, reduce de manera ostensible la energía transportada por la ondas sísmicas. Por otro, se ha constatado que la presencia de accidentes geográficos en la superficie terrestre, tales como valles aluviales, barrancos o cañones, amplifica o reduce el movimiento de la superficie, en los alrededores de la alteración topográfica.

El problema fundamental que se abordan en este Proyecto es el análisis del comportamiento dinámico de una estructura dada o del propio suelo cuando se solicita con un terremoto o movimiento sísmico, en el dominio temporal. La dinámica estructural y, en concreto, el comportamiento sísmico de estructuras, es uno de los campos que ha contado con mayor número de investigadores dentro de la ingeniería civil. Por su complejidad sin embargo, cuenta en la actualidad con numerosos frentes abiertos y para los cuales se sigue destinando una gran cantidad de recursos humanos y económicos. Cabe citar, por ejemplo, las dificultades existentes en modelar el problema real, o incluso el desconocimiento exacto del fenómeno sísmico.

El primer obstáculo que se le presenta al investigador puede ser la elección de un registro sísmico. Si bien es verdad que, en la actualidad, se encuentra a disposición de cualquier lector una extensa base de datos de la que es posible extraer la información necesaria del terremoto requerido, es probable que surjan otro tipo de inconvenientes relacionados con el tratamiento de datos. Así, puede darse el caso que, un mismo movimiento sísmico medido en una estación determinada se presente de forma distinta, dependiendo de los métodos numéricos que haya empleado el Instituto, Universidad, Revista u Organización a la hora de tratar los datos proporcionados por el sismógrafo. Por ello, es preciso referenciar de forma correcta y precisa el origen de la información.

Otra adversidad surge de la naturaleza puntual que supone un acelerograma o registro sísmico, no proporcionando la evolución espacial del terremoto. Éste es, al fin y al cabo, un mecanismo de propagación de ondas elásticas a través del suelo, y cuyas características dependen de los algunos de los factores enumerados anteriormente, como son el mecanismo de falla que origina el sismo, la profundidad a la que se produce, las propiedades geológicas, topográficas y elásticas del terreno, entre otros. De hecho, puntos en la superficie separados por distancias del orden de las longitudes de onda con mayor peso en el espectro del movimiento sísmico serán excitados de forma muy distinta, pudiendo incluso estar desfasados. El caso de obra civil de grandes dimensiones, esto es, puentes, túneles o presas, entre otros, podrá verificar el requisito dimensional al que se ha hecho mención. En particular, las presas bóveda, objeto de numerosos estudios, presentan un campo de desplazamientos no uniforme a lo largo de la interfase presa-base cuando sobre ellas actúa un movimiento sísmico. Las consecuencias serán de distinta naturaleza, según sean las dimensiones de la presa, las longitudes de onda de los armónicos más representativos del terremoto, la interacción dinámica y la dirección de propagación de la onda.

El análisis de las características elásticas de la base introduce otra línea de investigación cuyo objetivo no es otro que el de crear modelos numéricos los más parecidos a la estructura real. Cuando se considera el efecto de acoplamiento suelo-estructura se demuestra la interacción existente entre el comportamiento dinámico de la misma y la flexibilidad de su base, modificando de manera notoria los resultados obtenidos cuando se supone una base infinitamente rígida.

En el campo de la mecánica de suelos, han sido varios los métodos analíticos empleados en el cálculo de la solución exacta del desplazamiento superficial. Sin embargo, sólo problemas con geometrías relativamente sencillas han podido resolverse. Afortunadamente, numerosas técnicas de análisis numérico han sido desarrolladas en las últimas décadas fruto del incipiente avance tecnológico que ha sufrido la computación. Gracias a ellas ha sido posible el estudio de problemas de enorme complejidad y cuya solución analítica todavía hoy día no ha sido obtenida. Sin embargo, en campos tales como la dinámica estructural, son tantas las variables que participan en la realidad que, conformar un modelo numérico cuya solución sea aceptable supone un trabajo arduo y enormemente complejo. Por ello, como en cualquier rama científica, es necesario simplificar el problema y comenzar por el más sencillo, para posteriormente avanzar hacia modelos más realistas.

De entre las técnicas numéricas más aplicadas en el ámbito de la ingeniería civil destacan el Método de Elementos Finitos (MEF) y el Método de Elementos de Contorno (MEC). La dificultad del primero en abordar problemas que presentan dominios infinitos o de campo libre hacen del MEC uno de los modelos numéricos con mayores perspectivas en la actualidad. Su exactitud, contrastada en numerosos campos de la física e ingeniería, su rapidez y, por qué no decirlo, elegancia, lo convierten en una herramienta de enorme poder, con sus limitaciones, claro está, pero que sin duda en los próximos tiempos servirá para solventar problemas de difícil resolución por otro tipo de técnicas.

La transformada de Fourier, herramienta matemática fundamental para la resolución de ecuaciones diferenciales, y, especialmente el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) han sido utilizados desde su implementación para la resolución de problemas dinámicos. En el campo de la dinámica de estructuras, para conocer la evolución temporal del movimiento de un punto, cuando éste se solicita con un evento sísmico, no queda otra alternativa que trabajar en el campo de la frecuencia. En este caso, se demuestra que la línea recta, si bien puede ser la distancia más corta entre dos puntos, ni mucho menos resulta ser la que menos esfuerzo requiere.

Por desgracia, el tratamiento numérico en general incorpora una fuente de errores que podría desvirtuar no sólo la solución, sino incluso el propio modelo numérico. Es por ello por lo que es necesario acotarlo, comparando sus resultados con los de otros autores o, si la hubiese, con la solución analítica. En particular, ante la aparición de errores en problemas dinámicos, el hecho de estar obligados a pasar por el dominio de la frecuencia introduce una cierta incertidumbre que desemboca, en algunos casos, en la pérdida de la fuente de error.

En definitiva, tanto la mecánica de suelos como la dinámica estructural siguen siendo hoy día dos de los campos más abiertos dentro de la ingeniería, no sólo por la dificultad que engloba el tratamiento del problema real, sino también por el amplio rango de aplicaciones que comporta la solución.

2. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

Son varios los objetivos que conforman este Proyecto, aunque podrían agruparse en uno exclusivamente. Se pretende estudiar por medio del MEC la respuesta temporal, ya sea de una estructura dada o del terreno, ante solicitación sísmica. Ello conlleva la familiarización por parte del autor del Proyecto de dicho Método numérico, analizando en particular la formulación dinámica del mismo en medios elásticos, poroelásticos y escalares, en el dominio de la frecuencia. Se pretende evaluar, entre otros, los siguientes objetivos:

· Influencia del contenido armónico de la señal, ángulo de incidencia y tipo de ondas sísmicas presentes en el terremoto.

· Introducción y adaptación del algoritmo FFT al cálculo de la evolución temporal del campo de desplazamientos ante excitación sísmica.

• Estudio dinámico del desplazamiento que sufriría una estructura dada ante solicitación sísmica, y comparación del valor máximo con el propuesto por la Norma.

 Estudio del efecto local o influencia de la topografía local de la superficie sobre los desplazamientos de campo libre, además del carácter espacial de la excitación.
 Cuantificación del fenómeno.

• Análisis del campo de desplazamientos de presas bóveda ante solicitación sísmica y distintas incidencias cuando se tiene en cuenta la flexibilidad del terreno, la presencia o no de agua en el embalse, la saturación o no del sedimento, etc.

La interacción dinámica suelo-estructura requiere, en primer lugar, la correcta caracterización de los elementos involucrados en el problema, esto es, agua, terreno-estructura y sedimentos. El primero de ellos se modela como fluido compresible, con comportamiento lineal y elástico, con viscosidad despreciable y sometido a teoría de pequeñas perturbaciones. Tanto terreno como estructura serán tratados como medios viscoelásticos, con comportamiento lineal, y los sedimentos, si se considerasen, serán medio poroelástico. A través de las propiedades físicas, geométricas y las correspondientes ecuaciones de comportamiento se definirá el problema. Por último, de la excitación se requerirá identificar su incidencia, su composición espectral, su amplitud y todas aquellas magnitudes inmersas en la propagación de ondas. Cuando se trate de acelerogramas ya definidos será necesaria la participación de la Transformada

de Fourier, por medio del algoritmo FFT, para definir su espectro y poder utilizarlo así como solicitación.

La metodología presentada en este Proyecto fundamenta su base en la formulación dinámica del MEC. Se trata de un método numérico implementado en este caso en lenguaje de programación FORTRAN, capaz de determinar el campo de desplazamientos y tensiones del problema en cuestión. Para ello, es preciso especificar con claridad las propiedades del modelo, sus características geométricas mediante nodos y elementos, las condiciones de contorno, las condiciones iniciales y demás parámetros necesarios.

El algoritmo FFT se incluye en otro programa FORTRAN y su aplicación se centra en el cálculo de la Transformada directa e inversa de Fourier de las funciones o señales involucradas en el problema.

3. RESEÑA HISTÓRICA. ESTUDIOS PREVIOS

En el ámbito histórico de la sismología, el primer terremoto del que se tiene referencia ocurrió en China en el año 1177 a.C. Se cita en un Catálogo Chino de Terremotos, en el que se mencionan además otros doce sucedidos en los siglos siguientes. Ya en Europa, el primer terremoto del que existe registro bibliográfico parece que ocurrió en el año 580 a.C., pero el primero claramente descrito data de mediados del siglo XVI. En América, una de las zonas más castigadas por este tipo de fenómenos, la documentación existente sobre movimientos sísmicos llega hasta el siglo XIV, pudiéndose citar los terremotos de México, Chile en 1570, Quito en 1587, Chile en mayo de 1647, etc., aunque de ninguno se tiene una clara descripción de las consecuencias de los mismos.

Es a partir del siglo XX cuando las investigaciones tanto en el estudio del fenómeno en sí como en el diseño de los aparatos registradores experimentan un serio avance. Gracias a ellos se dispone de una abundante bibliografía sobre eventos sísmicos, que ha permitido la elaboración de zonas de alta actividad sísmica, además de establecer un clasificación de los terremotos más devastadores de nuestra historia reciente. Por liberación de energía, el primer puesto lo ocupa el terremoto ocurrido en Chile en 1960, seguido del de Alaska (1964).

El registro sísmico que se utilizará a lo largo del proyecto es el sucedido en El Centro, California, en 1940 (Chopra, 1999). Su elección se justifica por ser uno los movimientos sísmicos más estudiados y empleados a lo largo de historia de la ingeniería sísmica. Autores como Chopra lo citan asiduamente en sus libros.

En cuanto al MEC, éste se basa en la formulación integral de las teorías de potencial y elasticidad, aparecidas al final del siglo XIX y principios del XX, esto es, medio siglo después de haberse elaborado la formulación diferencial de dichos problemas. El primer trabajo riguroso acerca de las ecuaciones integrales fue publicado por Fredholm (1905). Previamente, Somigliana (1889) (c.f. Love, 1944) había establecido una representación integral para la elastostática. Alrededor de 60 años más tarde, con la aparición de las computadoras digitales, se retomó el problema, elaborándose métodos numéricos fundamentados en aquellas formulaciones clásicas.

Los primeros apuntes destinados a la creación de la formulación directa del MEC fueron redactados por Jaswon (1963), Symm (1963) y Jaswon y Ponter (1963), para el problema estático de potencial, y, posteriormente por Rizzo (1967) para elastostática. En estos documentos fue donde, por primera vez, se llevó a cabo la discretización del contorno y la solución numérica de la ecuación integral mediante transformación de la misma en un sistema de ecuaciones algebraicas. Los trabajos de Lachat (1975), y Lachat y Watson (1976) supusieron el siguiente paso para el desarrollo del MEC como herramienta numérica. En ellos se incorpora al MEC las funciones de forma como método de representación de las variables del contorno. El término Método de los Elementos de Contorno fue utilizado por primera vez en 1977, en tres publicaciones: Tesis Doctoral de Domínguez (1977), artículo de Banerjee y Batterfield (1977), y artículo de Brebbia y Domínguez (1977). Para una mayor información sobre problemas de potencial o elastostática se recomienda la lectura de los siguientes libros: Banerjee y Butterfield (1981), Brebbia et al (1984), Beskos (1987a, 1988), Brebbia y Domínguez (1989) y Hartman (1989).

Los primeros pasos del MEC en dinámica los dieron Jaswon, Ponter, Symm y Rizzo, bajo la formulación directa del método. Friedman y Shaw (1962) y Banaugh y Goldsmith (1963a, b) aportaron la primera solución numérica en problemas de acústica y elastodinámica, empleando una formulación de la ecuación integral. Fue en 1968 cuando Cruse y Rizzo (1968), y Cruse (1968) dedujeron la forma directa del MEC, junto con la Transformada de Laplace, para resolver problemas transitorios en elastodinámica. Ese mismo año, Wheeler y Sternberg (1968) pusieron las bases teóricas del MEC en elastodinámica, en particular en aquellos aspectos relacionados con dominios infinitos. Años más tarde, Manoiis y Beskos (1981) mejoraron el método de Cruse y Rizzo para la resolución de problemas transitorios elastodinámicos, en combinación con la Transformada de Laplace.

La solución de problemas dinámicos mediante la transformada de Fourier y la formulación del MEC en el dominio de la frecuencia fue obtenida por Niwz et al. (1975, 1976). Domínguez (1978a, b) fue quien, por primera vez, analizó problemas de interacción dinámica entre suelo y estructura, utilizando para ello la formulación en el dominio de la frecuencia.

La primera formulación del MEC en el dominio temporal para elastodinámica se presentó en 1978, a cargo de Cole et al., aunque sólo se trató el problema antiplano. Mansur (1983) y Mansur y Brebbia (1982 a, b, 1983, 1985) presentaron la formulación general en el dominio temporal y estudiaron la implementación de problemas escalares bidimensionales y la propagación de ondas elásticas en detalle. Antes (1985) completó el trabajo de Mansur incluyendo condiciones iniciales no nulas. Spyrakos (1984) y Spyrakos y Beskos (1986) elaboraron una formulación distinta en el dominio del tiempo para problemas bidimensionales. Niwa et al. (1980) utilizaron una formulación tridimensional del MEC en el dominio temporal para analizar problemas de tensión plana. También Manolis (1983), en un estudio similar, comparó el dominio temporal, el de la frecuencia y la Transformada de Laplace en la solución de problemas planos. La formulación en el dominio temporal y la implementación para elastodinámica tridimensional corrió a cargo de Karabalis y Beskos (1984), Karabalis et al. (1984) y Karabalis y Beskos (1985), presentándose en ellos aplicaciones a problemas de interacción dinámica entre suelo y estructura.

En otros muchos campos de la dinámica del medio continuo, el MEC ha experimentado un fuerte desarrollo, producto de su idoneidad para ciertos problemas, como son la interacción dinámica suelo-estructura y dinámica de la fractura.

Por último, destacar la abundante bibliografía existente en problemas dinámicos, de entre la que se puede citar: Domínguez y Alarcón (1981), Geers (1983), Kobayashi (1987), Banerjee et al (1987), Karabalis y Beskos (1987), Domínguez y Abascal (1987), Dravinsky (1988) y Tassoulas (1988). Especial mención merece Beskos (1987b) y el libro de Manolis y Beskos (1988).

Como aplicación particular del MEC en el ámbito de la interacción dinámica suelo-estructura destaca el estudio de la respuesta sísmica de presas bóveda. Como han demostrado autores como Hall y Chopra (1983) y Hall (1986), para caracterizar la respuesta sísmica de este tipo de presas se requiere un modelo tridimensional, debido a numerosas razones como el proceso de construcción, el efecto arco y la amplificación que el cañón produce en el sismo (efecto local). Por el contrario, las llamadas presas de gravedad, localizadas normalmente en valles muy anchos, presentan geometría uniforme a lo largo de la dirección transversal. En ellas, bajo ciertas hipótesis, es posible considerar comportamiento de tensión plana, con lo que modelos bidimensionales resultan los más apropiados para resolver semejante problema, tal y como afirman en sus artículos Chopra y Chakrabarti (1981), Fenves y Chopra (1985), y Lotfi et al. (1987).

El primer modelo tridimensional que tuvo en cuenta la interacción presa-baseagua fue el elaborado por Fok y Chopra (1986, 1987). Se trataba de un modelo en Elementos Finitos, en el que se consideraba al agua como fluido compresible, el arco como una cáscara delgada, y la base como un dominio elástico sin masa, origen de una de sus principales limitaciones. La interacción suelo-presa se tradujo en un coeficiente de absorción. Recientemente, Zhang y Chopra (1991b) y Tan y Chopra (1995a, b) mejoraron dicho modelo, representando la base rocosa a través de una formulación bidemensional de elementos de contorno combinada con otros elementos numéricos a lo largo del eje del cañón.

En cuanto a la excitación no uniforme, han sido escasos los artículos publicados (Chen y Hou, 1987; Zhan y Zhao, 1988; Nowak y Hall, 1990; Cámara, 2000). En concreto, Nowak y Hall (1990) analizaron los efectos de una solicitación no uniforme en la respuesta sísmica de presas bóveda, empleando elementos finitos, y en la que no se incluía la masa de la base. Para analizar el movimiento en superficie libre, consideraron un modelo bidimensional de elementos de contorno.

Sin embargo, la formulación tridimensional del MEC constituye un enfoque mucho más realista que el aportado por aquellos métodos que unen elementos finitos sin masa y modelos bidimensionales. Maeso y Domínguez (1993) y Domínguez y Maeso (1993) presentaron un modelo tridimensional con elementos de contorno para analizar la interacción base-presa-agua. Las tres regiones se discretizan por medio de elementos de contorno y los efectos de la interacción se tienen en cuenta a través de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en las interfases. El agua se considera un fluido compresible, y la base rocosa como un medio viscoelástico. Para tener en cuenta los efectos de posibles anomalías en la geometría del cañón y la topografía local, es preciso depurar la discretización en dichas zonas. Maeso et al. (1999) refinaron aún mas este modelo, para ahora incluir los sedimentos como una nueva región de propiedades poroelásticas. Se comprobó con ello la absorción por parte de los sedimentos de gran parte de energía hidrodinámica.

Por otro lado, el carácter espacial de la excitación y su influencia en la respuesta de presas bóveda han sido tratados por Maeso et al. en una publicación de 2000, por medio del modelo tridimensional basado en el MEC. Los efectos del movimiento del terreno y la geometría del cañón sobre la respuesta dinámica de presas bóveda durante un movimiento sísmico se analizan en una publicación de Maeso, Aznárez y Domínguez (2002). En ella, la excitación compuesta por ondas P, S y Rayleigh atacan al cañón y la presa desde diferentes ángulos. El estudio se realiza en el dominio de la frecuencia, analizándose, entre otros factores, la influencia de la profundidad del cañón, la geometría del mismo y el ángulo de incidencia de varios tipos de ondas.

En cuanto a los sedimentos, destacar dos artículos: el primero de ellos, elaborado por Aznárez, Maeso y Domínguez (2001), se comprueba la influencia del grado de saturación de los sedimentos en el análisis dinámico de presas bóveda ante solicitación sísmica, tanto en presas sobre base rígida como sobre base flexible. En él, tanto la presa como la base rocosa se consideran dominios viscoelásticos con comportamiento lineal; el agua se asume como fluido compresible, y el sedimento se trata como un material poroelástico, compuesto por dos fases y de acuerdo con la Teoría de Biot. En el segundo de los artículos, redactado por Maeso, Aznárez y Domínguez (2002) se analiza el efecto de los sedimentos exclusivamente en presas sobre base flexible.

En lo que se refiere al estudio del efecto local, o, lo que es lo mismo, la influencia de cañones y valles aluviales sobre el movimiento de la superficie durante movimientos sísmicos, han sido numerosos los artículos presentados en las últimas décadas. La mayoría de los trabajos han empleado modelos bidimensionales para resolver el problema. A Trifunac (1973) se debe la solución analítica para el caso de ondas SH incidiendo sobre un cañón semicilíndrico. Dravinsky (1982) también presentó la solución analítica para el caso de ondas SH incidiendo sobre un valle semielíptico relleno de otro material menos denso, a modo de inclusión. Otros autores relacionados con este campo han sido Wong (1982), Sánchez-Sesma et al. (1985), y Nowak y Hall

(1990), los cuales publicaron sus resultados basándose en formulaciones de la ecuación integral cuando se consideraba la incidencia de distintos tipos de ondas. Estudios tridimensionales también han sido realizados por Sánchez-Sesma (1983), Zhang y Chopra (1991a), aunque presentan ciertas limitaciones relacionadas con las características geométricas del modelo.

CAPÍTULO 2.

ECUACIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS

1. ECUACIONES BÁSICAS Y PROPAGACIÓN DE ONDAS EN PROBLEMAS ESCALARES, ELÁSTICOS Y POROELÁSTICOS.

1.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo teórico se desarrollan las ecuaciones básicas que gobiernan el comportamiento dinámico de los tres tipos de medios implicados en el modelo acoplado que se presenta, a saber: regiones fluidas, sólidos elásticos y medios poroelásticos. Se comienza con las ecuaciones básicas de la elastodinámica lineal, para luego plantear las ideas fundamentales relacionadas con la propagación de ondas en sólidos elásticos. También la propagación de ondas en fluidos no viscosos o propagación escalar será objeto de estudio, presentándose como un caso particular del problema elástico en el que el tensor de tensiones se reduce a su componente esférica. Se describirá el sólido poroelástico como un medio donde coexisten una fase sólida y otra fluida con viscosidad no nula, superpuestas y acopladas, así como las variables macroscópicas que caracterizan este medio y las ecuaciones de gobierno del mismo, de acuerdo a la teoría de Biot. Posteriormente, se reformulan las ecuaciones de gobierno para los tres tipos de medios en el dominio de la frecuencia. Por último, se discuten las condiciones de contorno en las interfases del modelo acoplado.

1.2 ECUACIONES BÁSICAS DE LA ELASTODINÁMICA LINEAL

Al igual que en problemas estáticos, las ecuaciones de equilibrio en las tres direcciones y la ley de comportamiento del material constituyen las relaciones básicas que gobiernan el comportamiento de sólidos elásticos en régimen dinámico. En este problema, sin embargo, las variables del problema serán funciones con dependencia temporal además de espacial y será necesario incluir las fuerzas de inercia y disipación en las ecuaciones de equilibrio del mismo.

Con todo ello, las relaciones cinemáticas básicas se establecen de igual forma que en elastostática. Así, si **x** representa el vector posición de cualquier punto del sólido Ω en relación al sistema de referencia cartesiano fijo y t la variable tiempo, a partir de las componentes del vector desplazamiento u_i(**x**, t) en cada punto del sólido Ω , se define el tensor de pequeñas deformaciones ε_{ij} como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.1}$$

obviamente simétrico ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$). Por otro lado, las ecuaciones de equilibrio a nivel diferencial responden a la ecuación:

$$\sigma_{ii,i} + X_i = \rho u_i \tag{1.2}$$

donde σ_{ij} representa el tensor de tensiones (simétrico, si se establece el equilibrio de momentos $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), X_i las componentes de las fuerzas de volumen y ρ la densidad del material.

Por último, la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones se establece a través de la ley de comportamiento. Esta relación, también llamada ecuación constitutiva, viene dada por la ley de Hooke, que para materiales homogéneos, isótropos con comportamiento elástico y lineal tiene la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1-\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$
(1.3)

o bien, en forma inversa:

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} , \qquad (1.4)$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker. Así, para la hipótesis de partida, la relación tensióndeformación puede expresarse en función de sólo dos constantes (ver p.e. París, 1998). En (1.3) el módulo de elasticidad (E) y el coeficiente de Poisson (v), mientras en (1.4) el módulo de elasticidad tranversal ($\mu = E/(2(1-v))$) y la constante de Lamé ($\lambda = 2\mu v/(1-2v)$). En esta última, e = ε_{kk} representa la dilatación volumétrica del medio.

En algunos casos puede resultar interesante la utilización del módulo de rigidez volumétrica o módulo de compresibilidad (K) como una de las constantes características del medio. Esta constante representa la rigidez de un sólido al cambio de volumen de la misma forma que μ representa la rigidez al cambio de forma.

Ambas pueden adoptarse como constantes del medio, la primera relacionada con la componente esférica y la segunda con la desviadora de la ley de comportamiento. Haciendo uso de (1.4) en un problema hidrostático, *K* será la relación entre la presión y el cambio unitario de volumen provocado por ésta:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$
(1.5)

En problemas tridimensionales, el conjunto de ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.4) constituyen un sistema completo de 15 ecuaciones (6 relaciones cinemáticas deformación-desplazamiento, 3 ecuaciones de equilibrio dinámico y 6 ecuaciones constitutivas) con 15 incógnitas (6 componentes del tensor de tensiones, 6 componentes del tensor de deformaciones y las 3 componentes del vector desplazamiento) todas ellas con dependencia espacial y temporal. Esta dependencia espacio-temporal a la que se ha hecho referencia en varias ocasiones desde el comienzo del apartado, representa físicamente el carácter ondulatorio de la solución del problema. Así, ante una solicitación genérica variable en el tiempo, la respuesta del sistema en desplazamientos, tensión o deformación serán ondas que se propagan en el interior del dominio en estudio.

Con todo, este sistema de ecuaciones planteado puede ser condensado y formular el comportamiento del medio en término de las tres componentes del vector desplazamiento. Así, sustituyendo (1.1) en (1.4) y el resultado en (1.2), podemos expresar las ecuaciones de equilibrio de forma vectorial como sigue (ecuación de Navier):

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{X} = \rho \boldsymbol{u}$$
(1.6)

expresión que ha de satisfacerse en todos los puntos del dominio en estudio para cada instante de tiempo. La integración de (1.5) y la obtención del campo de desplazamientos en el dominio Ω , requiere la imposición de las restricciones en el contorno Γ de Ω en forma de tensiones y desplazamientos conocidos además de establecer condiciones iniciales en t=0 para las tres componentes del desplazamiento y la velocidad en cada punto del medio. Conocido ya el campo de desplazamientos, el tensor de deformaciones $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$ puede obtenerse de (1.1) de forma sencilla, y con él el tensor de tensiones $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ a partir de la ley de comportamiento (1.4).

1.3 EL PROBLEMA ANTIPLANO

Se trata de la situación elastodinámica más sencilla desde el punto de vista del tratamiento matemático. Considérese un problema elastodinámico en el que las fuerzas sobre el sistema bajo estudio, la geometría y las condiciones de contorno sean independientes de una coordenada, por ejemplo, x_3 . La ecuación de equilibrio para la misma se encuentra desacoplada, no apareciendo ni x_1 ni x_2 . Así:

$$\sigma_{3\alpha,\alpha} + \rho b_3 = \rho i l_3 , \qquad (1.7)$$

donde el subíndice α adopta los valores 1 y 2. Teniendo en cuenta que todas las variables son independientes de x₃, y sustituyendo la expresión

$$\sigma_{3\alpha} = \mu u_{3,\alpha}$$

queda:

$$c_2^{\ 2}u_{3,\alpha\alpha} + b_3 = u_3 \tag{1.8}$$

donde $c_2^2 = \mu/\rho$. Esta última expresión representa la ecuación de onda, con velocidad de propagación igual a c₂. Así, para variación temporal armónica, la expresión (1.8) se convierte en:

$$\nabla^2 u_3 + \frac{\omega^2}{c_2^2} u_3 + \frac{b_3}{c_2^2} = 0, \qquad (1.9)$$

siendo: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$

La solución fundamental se obtiene aplicando una carga puntual unitaria variable en el tiempo en el punto 'i', cuyo vector de coordenadas es ξ:

$$\rho b_3^* = \delta(x - \xi)$$

donde la variación temporal dada por $e^{i\omega t}$ se ha omitido. La expresión (1.9) adopta entonces la siguiente forma:

$$\nabla^2 u_3 * + \frac{\omega^2}{c_2^2} u_3 * + \frac{1}{\mu} \delta(x - \xi) = 0$$
(1.10)

La solución de (1.10) consiste en ondas que divergen de ξ :

$$u_3^* = \frac{1}{2\pi\mu} K_0(i\frac{\omega r}{c_2}), \tag{1.11}$$

donde $K_0(z)$ representa a la función modificada de Bessel de segundo tipo y orden 0, y r=|x-\xi|.

Para $r \equiv 0$, se necesita integrar la ecuación (1.10) en un círculo Ω_{ϵ} de radio ϵ , y llevando ϵ a cero. Utilizando el Teorema de la Divergencia, la primera integral se lleva a la circunferencia ϵ de radio ϵ :

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} \nabla^2 u_3 * d\Omega = \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\partial u_3}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{du_3}{dr} d\Gamma$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{du_3}{dr} d\Gamma = \frac{1}{2\pi\mu} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} -\frac{i\omega}{c_2} K_1(\frac{i\omega r}{c_2}) d\Gamma,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} K_0(z) = -\ln(z)$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} K_1(z) = \frac{1}{z}$$

entonces:

у,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{du_{3}^{*}}{dr} d\Gamma = \frac{1}{2\pi\mu} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} -\frac{1}{r} d\Gamma = -\frac{1}{\mu}$$

El otro término integral de la ecuación sería:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\omega^2}{c_2^2} \int_{\Omega_\varepsilon} u_3 * d\Omega = \frac{\omega^2}{c_2^2} \frac{1}{2\pi\mu} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} K_0(\frac{i\omega r}{c_2}) d\Omega =$$
$$= \frac{\omega^2}{c_2^2} \frac{1}{2\pi\mu} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} -\ln(\frac{i\omega r}{c_2}) d\Omega = \frac{\omega^2}{c_2^2} \frac{1}{\mu} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon} -r\ln(\frac{i\omega r}{c_2}) dr = 0$$

Por tanto, la función dada en el ecuación (1.11) satisface la ecuación (1.10), incluso para r=0, denominándose solución fundamental.

1.4 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS ELÁSTICOS

Como ya se hizo mención en el apartado anterior, la respuesta del sistema en desplazamientos, tensión o deformación posee carácter ondulatorio, propagándose en el interior del dominio estudiado. Las características de este fenómeno será objeto de estudio en este apartado, centrándose en la propagación de ondas en medios elásticos, homogéneos e isótropos. Se parte, para ello, de las ecuaciones de equilibrio dinámico en desplazamientos (1.6) y del problema que representa su integración teniendo en cuenta que las variables fundamentales (las tres componentes del desplazamiento) se presentan acopladas. En este sentido, los procedimientos que permiten desacoplar este sistema de ecuaciones arrancan de los trabajos de Poisson, si bien es Stockes (Stockes, 1849) el primero que presenta una formulación en términos de la dilatación volumétrica e y el vector rotación $\boldsymbol{\omega}$ que permiten desacoplar estas ecuaciones de modo simple.

$$e = \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$$
(1.12.a y b)

En término de estas variables, la laplaciana del campo de desplazamientos puede ser expresada como sigue:

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} = \nabla \boldsymbol{e} - \nabla \times \boldsymbol{\omega} \tag{1.13}$$

que introducida en el sistema de ecuaciones (1.6), permite expresarlo en los siguientes términos:

$$-\mu\nabla\times\boldsymbol{\omega} + (\lambda+2\mu)\nabla\boldsymbol{e} = \rho\boldsymbol{u} \tag{1.14}$$

Aplicando ahora los operadores divergencia y rotacional sobre esta ecuación, en la que para mayor simplicidad se han eliminado las cargas de volumen, y teniendo en cuenta que $\nabla \cdot (\nabla \times \omega)=0$ y $\nabla \times (\nabla e)=0$ además de ser nula la divergencia del vector rotación, podemos escribir respectivamente:

$$\nabla^2 e = \frac{1}{c_p^2} \ddot{e}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{c_s^2} \boldsymbol{\omega}$$
(1.15.a y b)

donde:
$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad y \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$
 (1.16)

Las ecuaciones (1.15.a) y (1.15.b) representan una versión desacoplada de las ecuaciones de Navier (1.6) en términos de la dilatación y las tres componentes del vector rotación. Se trata de ecuaciones de onda, la primera escalar y la segunda vectorial (c_p y c_s tienen dimensiones de velocidad). Así, la componente dilatacional o irrotacional de la perturbación (asociada a cambios de volumen) se propaga con velocidad c_p mientras que la componente rotacional o equivoluminal (asociada a distorsiones en la forma) viaja con velocidad c_s . En un medio homogéneo e isótropo infinito ambas componentes coexisten y se propagan independientemente siendo $c_p>c_s$, razón por la cual en sismología se denomina a las ondas irrotacionales *ondas primarias* (ondas P) y a las equivoluminales *ondas secundarias* (ondas S), ya que las primeras alcanzan la estación en menor tiempo desde el epicentro del sismo. Esto último justifica la notación utilizada desde el comienzo para ambas.

Utilizando c_p y c_s como constantes características del medio, podemos escribir la ecuación de gobierno del problema (1.14) como sigue:

$$-c_{s}^{2}\nabla\times\boldsymbol{\omega}+c_{p}^{2}\nabla\boldsymbol{e}=\boldsymbol{u}$$
(1.17)

Expresión algo más conveniente para estudiar las características del movimiento de los puntos del sólido bajo el efecto de estas ondas. Para ello, se supone un problema de propagación plana armónica de carácter genérico con velocidad c y dirección determinada por el vector unitario **s** (ver p.e. Domínguez,1993). El campo de desplazamientos, en notación compleja y con amplitud unitaria, puede expresarse como sigue:

$$\boldsymbol{u} = e^{i(\omega t - k s \cdot \boldsymbol{x})} \boldsymbol{d} \tag{1.18}$$

donde k es el número de onda (ω /c), ω la frecuencia angular, x el vector posición de cualquier punto del medio, i la unidad imaginaria y d un vector unitario en la dirección del movimiento. Así, sustituyendo (1.18), cada uno de los términos de (1.17) serán:

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -k^2 \boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{d}) e^{i(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{t} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{x})}$$

$$\nabla \boldsymbol{e} = -k^2 (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{d}) \boldsymbol{s} e^{i(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{t} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{x})}$$

$$\boldsymbol{u} = -\omega^2 e^{i(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{t} - \boldsymbol{k}\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{x})} \boldsymbol{d}$$
(1.19.a, b, y c)

Por tanto, y teniendo en cuenta que $s \times (s \times d) = (s \cdot d)s \cdot d$, la ecuación (1.17), en este caso, puede expresarse como sigue:

$$(c_{s}^{2} - c^{2})\boldsymbol{d} + (c_{s}^{2} - c_{s}^{2})(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{s} = 0$$
(1.20)



Fig. 1.1. Desplazamientos y dirección de propagación. Ondas planas P y S

Con ello, si (1.18) es una onda S ($c=c_s$), esta relación sólo se verifica si $s \cdot d=0$ y, por tanto, si las direcciones de propagación y desplazamiento son perpendiculares (figura 1.2). Se trata de una onda transversal y el vector desplazamiento está contenido en el plano de propagación. Por otra parte, si (1.18) es una onda P ($c=c_p$), el cumplimiento de (1.20) requiere que $s = \pm d$ y la dirección de propagación y desplazamiento coinciden. Así, la onda P es una perturbación de carácter longitudinal y el desplazamiento de los puntos del sólido se produce en la dirección de propagación (Figura 1.1). Este planteamiento realizado para ondas armónicas puede generalizarse sin excesiva dificultad a cualquier tipo de perturbación plana.

La onda S se descompone en SH y SV. La primera genera un campo de desplazamientos simétrico (denominado habitualmente anteroposterior), mientras que la segunda antimétrico. Éste último puede a su vez dividirse en dos: movimiento transversal y movimiento vertical (figura 1.2):



Fig. 1.2. Onda S descompuesta en SH y SV.

Un tratamiento en profundidad de la teoría de la elastodinámica puede estudiarse en Achenbach (1973) o Eringen y Suhubi (1975).

1.5 REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS ARMÓNICAS PLANAS

Para simplificar el tratamiento matemático, se analizará el problema plano en el que tanto las propiedades del material como las condiciones de contorno dependen exclusivamente de una de las coordenadas cartesianas, por ejemplo, x_2 .

1.5.1 Ondas SH

Este tipo de ondas se encuentran asociadas al movimiento antiplano. Considérese un semiplano elástico uniforme ($x_2 \le 0$), cuyas propiedades físicas son ρ_1 , μ_1 , λ_1 , sometido a un tren de ondas planas SH, armónicas, llegando desde el infinito y propagándose con dirección $q_1=(l_1,m_1)$. En una primera fase, se supondrá que el semiplano $x_2 \ge 0$ no contiene material, y, en una segunda, se estudiará lo que ocurre cuando éste se trata de otra región elástica con propiedades ρ_2 , μ_2 , λ_2 . En ambos casos, cuando las ondas incidentes se topan con el contorno $x_2=0$, aparece el fenómeno de reflexión en la región $x_2 \le 0$, como se muestra en la figura 1.3:



Fig. 1.3.Onda SH en un plano incidiendo sobre interfase infinita (eje x_1)

El desplazamiento en la región 1 será de la forma:

$$u_{3} = A_{SH1}e^{i\frac{\omega}{c_{s1}}(c_{s1}t - l_{1}x_{1} - m_{1}x_{2})} + A'_{SH1}e^{i\frac{\omega}{c_{s1}}(c_{s1}t - l'_{1}x_{1} - m'_{1}x_{2})}$$

donde se ha adoptado el signo positivo para m₁', ya que las ondas reflejadas viajan siguiendo la dirección negativa del eje x₂. A_{SH1} y A'_{SH1} son las amplitudes de las ondas incidente y reflejada, respectivamente, y $c_{s1}=(\mu_1/\rho_1)^{1/2}$ la velocidad de propagación de la onda.

Cuando los puntos del contorno son excitados por ondas incidentes provocando su desplazamiento en la dirección x_1 , las ondas reflejadas poseen la misma variación en tal dirección. Si no fuese así, no se cumpliría ninguna condición de contorno uniforme a lo largo del eje x_1 , puesto que se trata de ondas armónicas. Por todo ello, se cumple que:

$$l'_{1} = l_{1}$$

 $m'_{1} = \sqrt{1 - l'_{1}^{2}} = m_{1}$

El desplazamiento u₃ podrá ser escrito como sigue:

$$u_{3} = (A_{SH1}e^{-i\frac{\omega}{c_{s1}}m_{1}x_{2}} + A'_{SH1}e^{i\frac{\omega}{c_{s1}}m_{1}x_{2}})f(x_{1},t),$$

donde $f(x,t) = e^{i\frac{\omega}{c_{s1}}(c_{s1}t - l_1x_1)}$

El ángulo respecto a la normal al contorno que forma tanto la onda incidente como la reflejada es el mismo para ambas.

La tensión se deduce del siguiente modo:

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} = \mu u_{3,2} = \mu i \frac{\omega}{c_{s1}} m_1 (-A_{SH1} e^{-i\frac{\omega}{c_{s1}}m_1 x_2} + A'_{SH1} e^{i\frac{\omega}{c_{s1}}m_1 x_2}) f(x_1, t)$$

El campo de desplazamientos y tensiones a lo largo del contorno $x_2=0$ en términos de las amplitudes de onda puede ser escrito en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ \sigma_{32} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\frac{\omega}{c_{s1}}m_1\mu_1 & i\frac{\omega}{c_{s1}}m_1\mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{SH1} \\ A'_{SH1} \end{bmatrix}$$
(1.21)

donde se ha omitido el término f(x₁,t). La amplitud de la onda reflejada A'_{SH1} para un contorno libre puede obtenerse haciendo en esta última expresión σ_{32} =0. En ese caso, el resultado sería A'_{SH1} = A_{SH1}. Si, por el contrario, se arriostra el contorno impidiéndose su movimiento, la condición sobre el contorno sería u₃=0, con lo que A'_{SH1}=-A_{SH1}

Cuando la región $x_2 \ge 0$ es otro sólido elástico con propiedades ρ_2 , μ_2 , λ_2 y $c_{s2} = (\mu_2/\rho_2)^{1/2}$, además de las ondas incidentes y reflejadas, aparecen ondas refractadas en este último medio, originando un desplazamiento dado por:

$$u_{3} = A_{SH2}e^{i\frac{\omega}{c_{s2}}(c_{s2}t - l_{2}x_{1} - m_{2}x_{2})}$$

donde A_{SH2} es la amplitud de la onda refractada, y $q_2=(l_2,m_2)$ su dirección de propagación. Para satisfacer las condiciones de equilibrio y compatibilidad sobre el contorno $x_2=0$, la variación de estos desplazamientos a lo largo del eje x_1 debe ser igual para las tres ondas, esto es:

$$\frac{l_1}{c_{s1}} = \frac{l'_1}{c_{s1}} = \frac{l_2}{c_{s2}}$$
(1.22)

y el desplazamiento en la región $x_2 \ge 0$ será:

$$u_{3} = A_{SH2} e^{-i\frac{\omega}{c_{s2}}m_{2}x_{2}} f(x_{1},t)$$

y el valor de la tensión:

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} = -\mu i \frac{\omega}{c_{s2}} m_2 A_{SH2} e^{-i \frac{\omega}{c_{s2}} m_2 x_2} f(x_1, t)$$

Por tanto, el campo de desplazamientos y el de tensiones a lo largo del contorno $x_2=0$ como parte de la región $x_2\geq 0$ puede ser escrito en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ \sigma_{32} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\frac{\omega}{c_{s2}}m_2\mu_2 \end{bmatrix} A_{SH2}$$
(1.23)

Utilizando las expresiones (1.21), (1.23), además de

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} u_3 \\ \sigma_{23} \end{bmatrix}_2 \quad para \, x_2 = 0$$

es posible determinar las amplitudes de las ondas reflejadas y refractadas en términos de la amplitud de la onda incidente. La dirección de propagación de ambas ondas se halla a partir de la expresión (1.22).

1.5.2 Ondas P y SV

De igual forma que para el caso anterior, se supondrá un semiplano elástico $(x_2 \le 0)$, con propiedades físicas ρ_1 , μ_1 , λ_1 , bajo los efectos de un tren ondas planas P, armónicas, procedentes del infinito y propagándose en la dirección $q_1 = (l_1, m_1)$. Se vuelve a dividir el estudio en dos partes: en la primera se considera que el semiplano $x_2 \ge 0$ no está constituido por ningún material, y en la segunda, será otra región elástica de propiedades ρ_2 , μ_2 , λ_2 . Cuando el tren de ondas incidente se encuentra con el contorno $x_2=0$, tanto ondas P como SV se reflejan en la región $x_2 \le 0$, como se muestra en la figura 1.4:



Fig. 1.4. Reflexión y refracción de ondas P

El desplazamiento u_1 en la región $x_2 \le 0$ presenta la siguiente expresión:

$$u_{1} = l_{1}A_{p1}e^{i\frac{\omega}{c_{p1}}(c_{p1}t - l_{1}x_{1} - m_{1}x_{2})} + l'_{1}A'_{p1}e^{i\frac{\omega}{c_{p1}}(c_{p1}t - l'_{1}x_{1} - m'_{1}x_{2})} - m''_{1}A'_{SV1}e^{i\frac{\omega}{c_{s1}}(c_{s1}t - l'_{1}x_{1} - m''_{1}x_{2})}$$

donde q'₁=(l'₁, -m'₁) y q''₁=(l''₁, -m''₁) son las direcciones de propagación de las ondas P y SV reflejadas, respectivamente, A'_{p1} y A'_{SV1} las correspondientes amplitudes de onda y c_{p1} y c_{s1} las velocidades de propagación. Para satisfacer cualquier condición de contorno a lo largo de la dirección x1, la variación de las ondas tiene que ser la misma, esto es:

$$\frac{l_1}{c_{p1}} = \frac{l'_1}{c_{p1}} = \frac{l''_1}{c_{s1}}$$

y, por tanto:

$$m'_{1} = m_{1}$$

$$m''_{1} = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{c_{s1}}{c_{p1}}\right)^{2} l_{1}^{2}\right)^{2}}$$

Llamando

$$f(x_{1},t) = e^{i\frac{\omega}{c_{p1}}(c_{p1}t - l_{1}x_{1})}$$

se pueden simplificar las expresiones que proporciona el campo de desplazamientos:

$$u_{1} = (l_{1}A_{p1}e^{-i\frac{\omega}{c_{p1}}m_{1}x_{2}} + l_{1}A'_{p1}e^{i\frac{\omega}{c_{p1}}m_{1}x_{2}} - m''_{1}A'_{SV1}e^{i\frac{\omega}{c_{S1}}m''_{1}x_{2}})f(x_{1},t)$$
$$u_{2} = (m_{1}A_{p1}e^{-i\frac{\omega}{c_{p1}}m_{1}x_{2}} - m_{1}A'_{p1}e^{i\frac{\omega}{c_{p1}}m_{1}x_{2}} - l''_{1}A'_{SV1}e^{i\frac{\omega}{c_{S1}}m''_{1}x_{2}})f(x_{1},t)$$

Y las tensiones:

$$\sigma_{22} = \lambda_1 (u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu_1 u_{2,2} =$$

$$= -i \frac{\omega}{c_{p1}} \left[(\lambda_1 + 2\mu_1 m_1^2) A_{p1} e^{-i \frac{\omega}{c_{p1}} m_1 x_2} + (\lambda_1 + 2\mu_1 m_1^2) A'_{p1} e^{i \frac{\omega}{c_{p1}} m_1 x_2} + 2\mu_1 m''_1 l_1 A_{SV1} e^{i \frac{\omega}{c_{s1}} m''_1 x_2} \right] f(x_1, t)$$

$$\sigma_{21} = \mu_1(u_{1,2} + u_{2,1}) =$$

$$= -i\frac{\omega}{c_{s1}} \left[-2\mu_1 l''_1 m_1 A_{p1} e^{-i\frac{\omega}{c_{p1}}m_1 x_2} + 2\mu_1 l''_1 m_1 A'_{p1} e^{i\frac{\omega}{c_{p1}}m_1 x_2} + \mu_1 (l''_1 - m''_1) A'_{sV1} e^{i\frac{\omega}{c_{s1}}m'_1 x_2} \right] f(x_1, t)$$

En forma matricial:

_

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix}_1 = T \begin{bmatrix} A_{p1} \\ A'_{p1} \\ A'_{SV1} \end{bmatrix}$$
(1.24)

donde:

$$T = \begin{bmatrix} l_1 & l_1 & -m''_1 \\ m_1 & -m_1 & -l''_1 \\ -i\frac{\omega}{c_{p1}}(\lambda_1 + 2\mu_1m_1^2) & -i\frac{\omega}{c_{p1}}(\lambda_1 + 2\mu_1m_1^2) & -i\frac{\omega}{c_{p1}}2\mu_1m''_1l_1 \\ -i\frac{\omega}{c_{s1}}2\mu_1m_1l''_1 & i\frac{\omega}{c_{s1}}2\mu_1m_1l''_1 & i\frac{\omega}{c_{s1}}\mu_1(l''_1^2 - m''_1^2) \end{bmatrix}$$

Para condiciones de contorno libre, esto es, $\sigma_{22} = \sigma_{21} = 0$, es posible determinar A'_{p1} y A'_{SV1}, en función de A_{p1}. Si se estuviese ante otras condiciones de contorno bastaría sustituirlas en la expresión (1.24) para obtener dichas amplitudes en función de la incidente.

Cuando la región $x_2 \ge 0$ es otro sólido elástico con propiedades ρ_2 , μ_2 , λ_2 , aparece de nuevo la difracción de ondas en dicho medio. En general, se denotará como A_{p2} la amplitud de la onda P refractada, $q_2=(l_2, m_2)$ su dirección de propagación, A_{SV2} la amplitud de la onda SV refractada y $q'_2=(l'_2, m'_2)$ su dirección de propagación.

Para satisfacer las condiciones de equilibrio y compatibilidad a lo largo del contorno $x_2=0$, todos los desplazamientos deben presentar la misma variación a lo largo del eje x_1 . Por ello:

$$\frac{l_1}{c_{p1}} = \frac{l'_1}{c_{p1}} = \frac{l''_1}{c_{s1}} = \frac{l_2}{c_{p2}} = \frac{l'_2}{c_{s2}}$$
(1.25)

Siguiendo el mismo proceso matemático que en los anteriores casos, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} u_{1} \\ u_{2} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{2} = \begin{bmatrix} l_{2} & m'_{2} \\ m_{2} & -l'_{2} \\ -i\frac{\omega}{c_{p2}}(\lambda_{2} + 2\mu_{2}m_{2}^{2}) & -2\mu_{2}m'_{2}l_{2} \\ -2\mu_{2}m_{2}l'_{2} & \mu_{2}(l''_{2}^{2} - m''_{2}^{2}] \begin{bmatrix} A_{p2} \\ A_{SV2} \end{bmatrix}$$
(1.26)

Utilizando las expresiones (1.25) y (1.26), además de la condición de continuidad a lo largo del contorno $x_2=0$

$\begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix}$	
<i>u</i> ₂	_	<i>u</i> ₂	
$\sigma_{_{22}}$	_	$\sigma_{\scriptscriptstyle 22}$	
$\lfloor \sigma_{\scriptscriptstyle 12} floor$	1	$\sigma_{\scriptscriptstyle 12}$	2

es posible determinar las amplitudes de las ondas reflejadas A'_{p1} y A'_{SV1} , además de las refractadas A_{p2} y A_{SV2} , en términos de la amplitud de la onda incidente A_{p1} .

Por último, considérese que el tren de ondas que procede del infinito es del tipo SV, con amplitud A_{SV1} y dirección de propagación $q_1 = (l_1, m_1)$. Cuando encuentra el contorno $x_2=0$, se generan dos ondas reflejadas, una del tipo P y otra SV, como indica la figura 1.5:



Fig. 1.5. Reflexión y refracción de ondas SV

Si la región $x_2 \ge 0$ no contiene material, sólo habrá ondas reflejadas. Empleando la misma nomenclatura para denotar las características de dichas ondas, para la onda P, A'_{p1} es la amplitud, q'₁=(l'₁,m'₁) la dirección de propagación, mientras que para la SV, A'_{SV1} representa la amplitud y q''₁=(l''₁,-m''₁) su correspondiente dirección de propagación. Para satisfacer las condiciones de contorno, todas las ondas deben presentar la misma variación en x₁:

$$\frac{l_{1}}{c_{s1}} = \frac{l'_{1}}{c_{p1}} = \frac{l''_{1}}{c_{s1}}$$
$$m''_{1} = m_{1}$$
$$m'_{1} = \sqrt{1 - \left(\frac{c_{p1}}{c_{s1}}\right)^{2} l_{1}^{2}}$$

En forma matricial, queda:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix}_1 = T \begin{bmatrix} A_{SV1} \\ A'_{SV1} \\ A'_{P1} \end{bmatrix}$$
(1.27)

donde

$$T = \begin{bmatrix} m_{1} & -m_{1} & l'_{1} \\ -l'_{1} & -l_{1} & -m'_{1} \\ i\frac{\omega}{c_{p1}}2\mu_{1}l'_{1}m_{1} & -i\frac{\omega}{c_{p1}}2\mu_{1}l'_{1}m_{1} & -i\frac{\omega}{c_{p1}}(\lambda_{1}+2\mu_{1}m'_{1}^{2}) \\ i\frac{\omega}{c_{s1}}\mu_{1}(l'_{1}^{2}-m_{1}^{2}) & i\frac{\omega}{c_{s1}}\mu_{1}(l_{1}^{2}-m_{1}^{2}) & i\frac{\omega}{c_{s1}}2\mu_{1}l_{1}m'_{1} \end{bmatrix}$$

en la que se ha omitido el término: $f(x_1,t) = e^{i\frac{\omega}{c_{s1}}(c_{s1}t-l_1x_1)}$

Las amplitudes de las ondas reflejadas pueden ser halladas utilizando la ecuación (1.27) y las condiciones en el contorno $x_2=0$.

Cuando la región $x_2 \ge 0$ es otro sólido elástico de propiedades ρ_2 , μ_2 , λ_2 , aparece nuevamente la refracción de ondas en dicho medio. En general, se denotará como A_{p2} la amplitud de la onda P refractada, $q_2=(l_2, m_2)$ su dirección de propagación, A_{SV2} la amplitud de la onda SV refractada y $q'_2=(l'_2, m'_2)$ su dirección de propagación.

Para satisfacer las condiciones de equilibrio y compatibilidad a lo largo del contorno $x_2=0$, todos los desplazamientos deben presentar la misma variación a lo largo del eje x_1 . Por ello:
$$\frac{l_1}{c_{s1}} = \frac{l'_1}{c_{p1}} = \frac{l''_1}{c_{s1}} = \frac{l_2}{c_{p2}} = \frac{l'_2}{c_{s2}}$$

El procedimiento matemático es idéntico al de los casos anteriores. Se obtendría una expresión similar a (1.26). Las amplitudes de las ondas reflejadas y refractadas se hallaría con la expresión matricial deducida y aplicando condiciones de contorno a lo largo de $x_2=0$.

1.5.3 Ondas superficiales

Hasta el momento no se ha aplicado ninguna restricción al valor de las componentes del vector que indica la dirección de propagación. Cuando alguno de estos coeficientes es complejo, la onda en cuestión se denomina onda superficial. Por ejemplo, supóngase que: $l=(1+\alpha^2)^{1/2}$, m=i α y n=0. Se trata entonces de una onda propagándose en la dirección x₁, con velocidad c/ $(1+\alpha^2)^{1/2}$, y cuya amplitud aumenta o disminuye exponencialmente con la profundidad (x₂), según sea el signo de α .

Cuando el ángulo incidente, el tipo de onda y las propiedades del material son tales que las condiciones de contorno producen un coseno director superior a 1 para cualquier onda reflejada o refractada, una determinada onda plana como las vistas hasta el momento se convierte en onda superficial. Este es el caso de la reflexión y refracción de ondas SH. La relación entre los ángulos de las diferentes ondas cumple la expresión:

$$\frac{l_1}{c_{s1}} = \frac{l'_1}{c_{s1}} = \frac{l_2}{c_{s2}}$$

donde l_1 , l'_1 y l_2 corresponden a las ondas incidente, reflejada y refractada, respectivamente. Se sabe que $l'_1=l_1$, y $l_2=l_1\cdot c_{s2}/c_{s1}$. Cuando $c_{s2}>c_{s1}$, puede ocurrir que l_2 sea superior a 1. En ese caso:

$$m_2 = \pm i \sqrt{l_1^2 \frac{c_{s2}^2}{c_{s1}^2} - 1},$$

y la onda transmitida sería de la forma:

$$u_{3} = A_{SH2}e^{-\frac{\omega}{c_{s2}}(l_{1}^{2}\frac{c_{s2}^{2}}{c_{s1}^{2}}-1)^{1/2}x_{2}}e^{i\frac{\omega}{c_{s2}^{\prime}}(c_{s2}^{\prime}t-x_{1})}$$

donde c'_{s2}=c_{s2}/l₂. Esta ecuación representa el movimiento de una onda en la región definida por $x_2 \ge 0$ cuya amplitud disminuye exponencialmente con la distancia a la interfase. El signo positivo de la primera exponencial no tiene significado físico, ya que supondría una amplificación tendente a infinito. En el caso particular en que l₂=1, m₂=0, y la onda reflejada se propaga a lo largo de la dirección x_1 .

Un tipo particular de onda superficial es la onda de Rayleigh. Considérese una perturbación plana del semiplano, con las siguientes componentes de desplazamiento:

$$u_{1} = A_{1}e^{-bx_{2}}e^{i\frac{\omega}{c}(t-x_{1})}$$

$$u_{2} = A_{2}e^{-bx_{2}}e^{i\frac{\omega}{c}(t-x_{1})}$$

$$u_{3} = 0$$
(1.28)

donde b tiene parte real positiva. Si se sustituye u_1 y u_2 en la ecuación de Navier, teniendo en cuenta que las fuerzas por unidad de volumen son nulas, se llega a un sistema homogéneo de ecuaciones, el cual sólo presenta solución si:

$$\left[c_{p}^{2}b^{2} - (c_{p}^{2} - c_{s}^{2})\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\right]\left[c_{s}^{2}b^{2} - (c_{s}^{2} - c^{2})\frac{\omega^{2}}{c^{2}}\right] = 0$$

cuya solución es:

$$b_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_p^2}}$$
 y $b_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_s^2}}$

Si se sustituye b_1 y b_2 en (1.28), se logra expresar u_1 y u_2 en términos de las amplitudes A_1 y A_2 , y la velocidad de fase c. Aplicando la definición de tensión y las condiciones de contorno libre en la superficie, se llega a otro sistema homogéneo de ecuaciones con solución distinta de la trivial cuando:

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_s^2}\right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_p^2}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_s^2}} = 0$$

expresión conocida como ecuación de Rayleigh para la velocidad de fase. Las raíces de la ecuación son reales y con signos opuestos. Obviamente es el positivo el único que tiene sentido físico. Su valor se encuentra entre $0.862c_s$ y $0.955c_s$, cuando la relación de Poisson varía entre 0 y 0.5.

1.6 ONDAS DE PRESIÓN EN FLUIDOS

En este punto se introducen las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico del agua. Así, será tratada como un fluido compresible y de viscosidad despreciable (fluido perfecto) con comportamiento elástico y lineal que trabaja en un rango de pequeñas perturbaciones.

Todos los fluidos reales tienen viscosidad distinta de cero y los tensores de tensión presentan componentes de cortante no nulas. No obstante, la viscosidad varía entre amplios márgenes para diferentes fluidos de forma tal que, en algunos casos, puede ser despreciada sin que se produzca pérdida de exactitud en los resultados. Así, en las regiones líquidas del modelo que se presenta (agua), los efectos inerciales serán predominantes sobre los viscosos y el fluido podrá considerarse no viscoso. No se tienen en cuenta los efectos provocados por turbulencias. Un fluido perfecto (no viscoso) no soporta tensiones tangenciales y el tensor de tensiones se reduce a su componente esférica:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{1.29}$$

donde p es la presión. El signo negativo indica una tensión de compresión para un valor positivo de la presión. En un rango de pequeñas perturbaciones y teniendo en cuenta el carácter elástico y lineal del modelo, la ley de comportamiento puede plantearse desde la ley de Hooke descrita para sólidos elásticos (1.4) tomando , μ =0:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p = \lambda \varepsilon$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$$
(1.30.a y b)

donde, si $U_i(\mathbf{x}, t)$ son las componentes del campo de desplazamientos en el fluido, $\varepsilon = \varepsilon_{kk} = U_{i,i}$ representa la dilatación volumétrica del mismo. En este caso, la constante de Lamé λ , ha de ser entendida como el módulo de compresibilidad del fluido. También a partir de las ecuaciones de equilibrio para sólidos elásticos (1.5) o (1.13), puede expresarse el equilibrio en un fluido perfecto de densidad ρ como sigue:

$$\lambda \nabla \varepsilon = \rho \dot{U} \tag{1.31}$$

o, haciendo uso de (1.30):

$$\nabla p = -\rho U \tag{1.32}$$

más útil, como se verá, pues establece la relación entre la presión y la derivada segunda del desplazamiento, necesaria a la hora de aplicar las condiciones de contorno en las interfases del modelo. En ambas expresiones del equilibrio no se han tenido en cuenta las cargas de volumen sobre el dominio líquido.

La aplicación de los operadores divergencia y rotacional sobre (1.31) permiten escribir:

$$\nabla^2 \varepsilon = \frac{1}{c^2} \dot{\varepsilon}$$
(1.33.a y b)
$$\nabla \times \boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}$$

Así, con las hipótesis realizadas, el movimiento del líquido está gobernado por la ecuación de onda que rige la dilatación volumétrica en los sólidos elásticos (1.15.a) ($c^2 = \lambda/\rho$ es la velocidad de propagación de las ondas longitudinales). Asimismo, el campo de desplazamientos es irrotacional (1.33.b), como es de sobra conocido. No existe onda S en un fluido perfecto.

En términos de la presión, a partir de (1.30), podemos escribir (1.33.a) como sigue:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \ddot{p} \tag{1.34}$$

Ecuación que gobierna la propagación de ondas de presión y que será utilizada en adelante para caracterizar el comportamiento dinámico de un fluido perfecto, lineal y elástico sometido a pequeñas perturbaciones.

1.7 EL MEDIO POROELÁSTICO

Podemos describir el medio poroelástico como aquel en el que coexisten dos fases, una sólida denominada *esqueleto o matriz sólida y* otra fluida que puede ser líquida y/o gaseosa. En lo que a la primera se refiere, la denominación esqueleto sólido es muy gráfica ya que se trata de un medio sólido provisto de gran número de huecos o poros interconectados de forma tal que sea posible el tránsito de la fase fluida de unas zonas a otras del medio. El índice de huecos o porosidad es una característica del medio y contabiliza el espacio hueco del esqueleto interconectado ocupado por la fase fluida. Sería más adecuado llamarla porosidad efectiva ya que los poros aislados, ocupados o no por la fase fluida, no son tenidos en cuenta a la hora de elaborar este índice y se consideran parte de la matriz sólida (figura1.6).

Son numerosos los ejemplos de materiales que responden a esta configuración. Podemos mencionar los terrenos bajo el nivel freático, los terrenos donde existen bolsas de petróleo o gas, los fangos en el fondo de depósitos de cualquier líquido, los sedimentos en embalses de agua, recubrimientos absorbentes de ondas acústicas, etc... Si la fase fluida llena completamente los intersticios del esqueleto diremos que el medio poroelástico está saturado. Por el contrario, si la fase fluida no ocupa completamente los poros de la matriz sólida nos encontramos ante un medio cuasisaturado. Imaginemos, en este caso, un líquido no libre de pequeñas burbujas de aire.

A pesar de esta descripción inicial del medio poroelástico, el tratamiento que se realiza del mismo no implica el estudio a nivel microscópico del comportamiento de cada fase. Pensaremos antes en un medio donde el espacio intersticial está distribuido regularmente y puedan establecerse unas propiedades medias del mismo de forma tal que, desde un punto de vista macroscópico, sean de aplicación las hipótesis de isotropía y homogeneidad clásicas en el estudio de la mecánica del medio continuo. Desde esta óptica, podemos entender el sólido poroelástico Ω como dos medios continuos superpuestos y acoplados: la matriz sólida y el fluido que ocupa los poros interconectados (Coussy y Dangla, 1995) (figura 1.6). En cada punto del medio, las variables de campo del problema (desplazamientos de ambas fases, tensiones y presión de fluido en los intersticios) tienen también un carácter promedio y, por tanto, cuantificables de forma experimental. Para los desplazamientos de la fase fluida, este carácter promedio puede conducir a algún comportamiento paradójico. Asimismo, se considera lineal la relación entre las variables estáticas y cinemáticas y se trabajará en el rango de pequeñas deformaciones con lo cual será de aplicación el principio de superposición, de gran interés para el enfoque del problema dinámico.

El primer modelo que hace uso de una imagen del continuo similar a la expuesta, fue propuesto por Terzaghi (Terzaghi, 1925) y pretendía explicar el fenómeno de la consolidación de terrenos saturados. Era conocido que terrenos arcillosos bajo carga no sólo sufren una deformación instantánea sino que además se ven sometidos a un proceso de deformación diferida que puede prolongarse durante largos periodos de tiempo. Este proceso está gobernado por dos fenómenos diferentes que se presentan de forma conjunta. De un lado, la expulsión del agua intersticial (consolidación primaria). De otro, un reajuste de las partículas de la matriz sólida (consolidación secundaria). En el modelo de Terzaghi, de carácter monodimensional, el esqueleto sólido y el fluido son incompresibles y el proceso de deformación diferida se produce como consecuencia de la expulsión del fluido de los intersticios del medio debido a la reducción del índice de poros (consolidación primaria). La ecuación diferencial que gobierna este proceso relaciona la derivada espacial de la presión intersticial con la derivada temporal de esta variable a través de un coeficiente de consolidación que depende de las propiedades de ambas fases. A pesar de sus simplificaciones, este modelo explica de forma convincente este fenómeno y tuvo una gran acogida en su época, convirtiéndose los trabajos de este autor en los primeros tratados de una nueva ciencia, la mecánica de suelos.



Fig. 1.6. El sólido poroelástico entendido como dos medios continuos superpuestos

En 1941 M.A. Biot publica una serie de artículos (Biot, 1941a y b, Biot y Clingan, 1941) en los que se desarrolla la teoría general del comportamiento de sólidos poroelásticos bajo carga estática.. El sólido poroelástico de Biot responde a la imagen descrita al principio de este apartado. El medio está constituido por dos fases y la fase fluida ocupa completamente los intersticios de la matriz sólida (medio saturado). Ambas fases, fluido y esqueleto sólido, son compresibles. El medio en su conjunto es homogéneo e isótropo y tiene un comportamiento elástico y lineal en el rango de pequeñas deformaciones. Al igual que en el modelo de Terzaghi, el movimiento del fluido a través de la matriz sólida es gobernado por la ley de Darcy si bien el proceso de consolidación se describe desde un modelo acoplado de tensiones y deformaciones en ambas fases. Algunos años después, el mismo Biot extiende la formulación a medios anisótropos (Biot, 1955 y 1956a) y generaliza la formulación cuasiestática anterior al caso dinámico para sólidos poroelásticos isótropos (Biot, 1956b y c). En estas últimas publicaciones, y a diferencia de los sólidos elásticos, este autor demuestra la existencia de tres ondas asociadas a cualquier fenómeno de propagación en este tipo de medios. Dos ondas acopladas de caracter irrotacional (longitudinales) y una equivolumial (transversal) independiente de las anteriores. Otros trabajos relacionados y de obligada mención de este autor son Biot (1956d, 1962) y Biot y Willis (1957).

1.8 CARACTERIZACIÓN DEL MEDIO POROELÁSTICO

En este apartado se describen las magnitudes geométricas, dinámicas y cinemáticas necesarias para la formulación del problema de acuerdo a los planteamientos de Biot. La estructura de este apartado y la nomenclatura utilizada en el mismo se corresponde con lo escrito por Domínguez (1995). Así, y como ya se ha comentado, la *porosidad* ϕ es quizás la constante más característica de este tipo de medios y representa la fracción del volumen total de material homogéneo ocupada por los intersticios o poros interconectados. Relacionada con esta constante está lo que se denomina *índice de poros n* que representa la relación entre el volumen ocupado por los poros y el ocupado por las partículas sólidas. En la bibliografía específica el índice de poros se representa con la letra *e*. En este texto será utilizada la letra *n* (habitualmente utilizada para la porosidad) ya que *e* la se reservará para representar la dilatación volumétrica del esqueleto sólido. A partir de las definiciones anteriores, es sencillo obtener la relación entre ambos coeficientes:

$$n = \frac{\phi}{1 - \phi} \tag{1.35}$$

De acuerdo a la imagen del medio poroelástico establecida en el apartado anterior, se describen a continuación las variables cinemáticas y dinámicas del problema. Así, sea un punto material o volumen infinitesimal del medio con vector de posición **x** respecto de un sistema de referencia fijo. La matriz sólida de este volumen elemental con su configuración intersticial drenada representan el punto o partícula del medio asociada a la fase sólida. En el mismo punto geométrico **x**, el fluido que ocupa los intersticios de este volumen elemental constituye la partícula de fluido. Por tanto, en cada punto geométrico **x** y para cada instante de tiempo t, se definen dos vectores desplazamiento, uno asociado a la partícula sólida (esqueleto sólido) $u_i(x, t)$ y otro correspondiente a la partícula fluida $U_i(x,t)$. Como ya se comentó en el apartado anterior, ambos deben entenderse como variables promedio. Con esto, se define el tensor de deformaciones en la fase sólida de la forma habitual (1.1):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$
(1.36)

De igual manera, las dilataciones volumétricas en ambas fases responden a las expresiones:

$$e = u_{i,i}$$
 esqueleto sólido
 $\varepsilon = U_{i,i}$ fase fluida (1.37.a y b)

Algunas formulaciones de las ecuaciones de equilibrio utilizan como variable cinemática asociada al fluido, el desplazamiento relativo de éste respecto de la matriz sólida $w_i=U_i-u_i$ (muchos autores denominan desplazamiento relativo al volumen de fluido que abandona el medio por unidad de área $w_i = \phi(U_i-u_i)$ (ver p.e.Cheng et al, 1991). Por otra parte, la primera formulación realizada por Biot de la ley de comportamiento para este tipo de materiales, utilizaba como variable cinemática, junto al tensor de deformaciones del sólido, el incremento de contenido de fluido del material homogéneo ζ . A partir de w_i , se expresa ζ como sigue:

$$\varsigma = -\phi_{W_{i,i}} = -\phi(\varepsilon - e) \tag{1.38}$$

De otro lado, otra variable cinemática asociada a la fase fluida es el *vector de descarga q* o volumen de fluido que abandona por unidad de área y tiempo el volumen de referencia:

$$q_i = \phi \dot{w}_i = \phi (\dot{U}_i - \dot{u}_i) \tag{1.39}$$

En lo que a las variables dinámicas se refiere, se comienza introduciendo el tensor de tensiones sobre el material homogéneo σ_{ij} o tensor de tensiones totales. No existe ninguna diferencia conceptual respecto del tensor de tensiones para sólidos elásticos. Para entender σ_{ij} no es necesario imaginar el sólido poroelástico como un medio bifásico. Para caracterizar completamente el medio, junto al tensor de tensiones totales se introduce una variable dinámica asociada a la fase fluida, la *presión intersticial o presión de poro (p). Su* denominación es clarificadora, es la presión del fluido que ocupa los intersticios del esqueleto sólido. En este texto, sin embargo, serán utilizadas como variables dinámicas otras dos relacionadas directamente con las anteriores. A saber:

Tensión equivalente en el fluido (\tau): Es la tensión sobre el fluido si se toma como referencia el área total de material homogéneo. Así $\tau = -\phi p$. Aclarar que el signo negativo está relacionado con el convenio de signos adoptado para esta

variable: positiva la tracción y negativa la compresión (la presión intersticial positiva representa compresión).

Tensor de tensiones sobre el esqueleto sólido (τ_{ij}): Puede vislumbrarse como la tensión aplicada en la fase sólida del medio tomando como referencia el área total de material homogéneo.

Con ello, el tensor de tensiones sobre el material homogéneo σ_{ij} puede escribirse en término de estas dos nuevas variables como sigue:

$$\sigma_{ii} = \tau_{ii} + \tau \delta_{ii} \tag{1.40}$$

En un próximo apartado será tratado el denominado *tensor de tensiones efectivas* σ_{ij} '. Esta variable, imprescindible en cualquier tratado relacionado con la mecánica de suelos, se comprende mejor una vez introducida la ley de comportamiento para este tipo de sólidos.

1.9. ECUACIONES DE GOBIERNO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Ya en apartados anteriores se han introducido algunos problemas con dependencia temporal de tipo armónico. Recuérdese la expresión de las ondas planas que permitieron el estudio de las características de las ondas en sólidos elásticos y poroelásticos. En este apartado, se obtienen las ecuaciones que rigen el comportamiento en régimen armónico (dominio de la frecuencia) de los tres tipos de regiones que forman parte del modelo acoplado que se presenta.

Como se verá, este planteamiento en el dominio de la frecuencia conduce a una importante simplificación matemática de las ecuaciones de gobierno. En estas ecuaciones reducidas desaparece la dependencia temporal de las variables fundamentales. En el problema poroelástico, este aspecto permite incluso la reducción del número de variables primarias a considerar.

Este planteamiento reducido también simplifica los procedimientos para la obtención de soluciones al problema. Soluciones armónicas claro está. De cualquier forma, y teniendo en cuenta que las funciones de tipo armónico constituyen un conjunto completo de funciones independientes, puede plantearse cualquier dependencia temporal de la variable como superposición de armónicos de diferente frecuencia de

acuerdo a los planteamientos de Fourier. Este último aspecto, si bien sólo es aplicable a problemas elásticos y lineales para la obtención de la respuesta temporal, permite comprender el interés que ha tenido el estudio de la formulación reducida de las ecuaciones de gobierno para muchos autores.

Se comienza con el problema elastodinámico armónico. Así, para frecuencia ω , el vector desplazamiento en un punto **x** del medio puede ser expresado, en notación compleja, como sigue:

$$u(x,t) = u(x,\omega)e^{i\omega t}$$
(1.41)

siendo $u(x,\omega)$ un vector de componentes complejas en general. El módulo de las variables complejas en el dominio de la frecuencia representa el valor máximo que adopta esta variable en el dominio del tiempo, mientras que la relación entre las partes imaginaria y real, determina el desfase. Suponiendo también fuerzas de volumen con dependencia armónica, la expresión reducida de las ecuaciones de Navier (1.6) será:

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \nabla \boldsymbol{e} + \boldsymbol{X} = -\rho \omega^2 \boldsymbol{u}$$
(1.42)

a pesar de la coincidencia en la notación con (1.6), se entiende que las variables de (1.42) dependen de la posición y de la frecuencia. En este punto, puede tenerse en cuenta el carácter viscoelástico del medio (disipativo) mediante la consideración de un valor complejo para $\mu(\lambda)$ de la forma:

$$\mu = \operatorname{Re}[\mu](1+2i\xi) \tag{1.43}$$

donde ξ puede entenderse de la misma forma que el factor de amortiguamiento para sistemas de un grado de libertad (ver p.e. Domínguez, 1993).

Para la ecuación que gobierna la propagación de ondas en fluidos perfectos (1.34), el carácter armónico de la presión (p):

$$p(x,t) = p(x,\omega)e^{i\omega t}$$
(1.44)

permite escribir la ecuación reducida o ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \tag{1.45}$$

donde $k = \omega/c$ es el número de onda. Utilizando como variable primaria la presión, la variable derivada está relacionada con el desplazamiento de las partículas de fluido (U_i) a través de la ecuación de equilibrio (1.32). Así, en puntos del contorno y en la dirección marcada por la normal al mismo, se puede escribir para problemas armónicos:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \omega^2 U_n \tag{1.46}$$

donde U_n es el desplazamiento normal al contorno de las partículas de fluido.

Por último, las ecuaciones de gobierno de la poroelasticidad dinámica (1.50) suponiendo un comportamiento armónico del campo de desplazamientos en ambas fases, serán:

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \nabla \left[\left(\lambda + \mu + \frac{Q^2}{R} \right) \boldsymbol{e} + Q \boldsymbol{\varepsilon} \right] + \boldsymbol{X} = -\omega^2 (\hat{\rho}_{11} \boldsymbol{u} + \hat{\rho}_{12} \boldsymbol{U})$$

$$\nabla (Q \boldsymbol{e} + R \boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{X}' = -\omega^2 (\hat{\rho}_{12} \boldsymbol{u} + \hat{\rho}_{22} \boldsymbol{U})$$
(1.47.a y b)

donde λ , μ , Q y R representan las constantes elásticas del medio o constantes de Biot. Por un lado, λ y μ son la constante de Lamé y el módulo de elasticidad transversal correspondientes al esqueleto sólido drenado, repectivamente. Las constantes Q y R están relacionadas con el comportamiento acoplado de ambas fases. Proceden de la representación adoptada de la ley de comportamiento:

$$\tau_{ij} = \left(\lambda + \frac{Q^2}{R}\right) e \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + Q\varepsilon\delta_{ij}$$
(1.48.a y b)
$$\tau = Qe + R\varepsilon$$

En la expresiones (1.47.a y b), para simplificar la formulación, se utilizan unos parámetros de densidad complejos que incorporan la constante de disipación a los términos de densidad conocidos de la forma siguiente (Norris, 1985):

$$\hat{\rho}_{11} = \rho_{11} - i\frac{b}{\omega}; \ \hat{\rho}_{22} = \rho_{22} - i\frac{b}{\omega}; \ \hat{\rho}_{12} = \rho_{12} + i\frac{b}{\omega};$$
(1.49)

siendo b una constante relacionada con la permeabilidad de Darcy (k), la viscosidad del fluido (η) y la porosidad (ϕ) de la siguiente forma:

$$b = \frac{\eta \phi^2}{k}$$

Esta constante b se denomina constante de disipación, y representa las fuerzas de viscosidad por unidad de volumen y por unidad de velocidad relativa del fluido respecto de la matriz sólida. El término del que forma parte constituye la componente disipativa relativa de ambas fases y se anula cuando no existe movimiento relativo entre ellas. Asimismo, existe otra componente de disipación de tipo viscoelástico asociada a la matriz sólida y que se presenta conjuntamente con la anterior.

La formulación general en el dominio del tiempo implica a seis variables primarias, las tres componentes de desplazamiento de sólido y fluido respectivamente, y se expresa mediante las dos ecuaciones siguientes:

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \nabla \left[\left(\lambda + \mu + \frac{Q^2}{R} \right) \nabla \cdot \boldsymbol{u} + Q \nabla \cdot \boldsymbol{U} \right] + \boldsymbol{X} = \rho_{11} \boldsymbol{u} + \rho_{12} \boldsymbol{\dot{U}} + b(\boldsymbol{\dot{u}} - \boldsymbol{\dot{U}})$$
(1.50.a y b)
$$\nabla (Q \nabla \cdot \boldsymbol{u} + R \nabla \cdot \boldsymbol{U}) + \boldsymbol{X'} = \rho_{12} \boldsymbol{\dot{u}} + \rho_{22} \boldsymbol{\dot{U}} + b(\boldsymbol{\dot{u}} - \boldsymbol{\dot{U}})$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales ha de satisfacerse en todo punto del dominio en estudio y para cada instante de tiempo, y junto con las condiciones de contorno e iniciales permite la solución del problema en términos de u_i y U_i . Conocidos los desplazamientos en ambas fases pueden obtenerse las variables cinemáticas deseadas y con ellas, las tensiones en ambas fases a través de cualquiera de las formulaciones de la ley de comportamiento vistas anteriormente.

Sin embargo, la formulación del problema armónico (1.47) puede realizarse en término de sólo cuatro variables fundamentales. En nuestro caso serán las tres componentes del desplazamiento del esqueleto sólido y la tensión equivalente en el fluido. Así, de (1.47.b) y de la ley de comportamiento (1.48.b), el vector desplazamiento en la fase fluida puede escribirse en términos de la tensión equivalente en la misma y del desplazamiento de las partículas de sólido como sigue:

$$U = -\frac{\nabla \tau + X' + \omega^2 \hat{\rho}_{12} u}{\hat{\rho}_{22}}$$
(1.51)

Sustituyendo ahora esta expresión de los desplazamientos de las partículas de fluido en (1.47.a) se obtienen las tres primeras ecuaciones de equilibrio en términos de \mathbf{u} y τ . Aplicando ahora el operador divergencia sobre las tres ecuaciones de equilibrio del fluido (1.47.b) y utilizando la ley de comportamiento (1.48.b) para eliminar ε , se obtiene la cuarta ecuación necesaria. El resultado del procedimiento descrito será:

$$\mu \nabla^{2} \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \nabla \boldsymbol{e} + (\frac{Q}{R} - \frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}}) \nabla \tau + (\frac{\hat{\rho}_{11}\hat{\rho}_{22} - \hat{\rho}_{12}^{2}}{\hat{\rho}_{22}}) \omega^{2} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{X} - \frac{\hat{\rho}_{12}}{\hat{\rho}_{22}} \boldsymbol{X}' = 0$$

$$\nabla^{2} \tau + \omega^{2} \frac{\hat{\rho}_{12}}{R} \tau + \omega^{2} (\hat{\rho}_{12} - \frac{Q}{R} \hat{\rho}_{22}) \boldsymbol{e} + \nabla \cdot \boldsymbol{X}' = 0$$
(1.52.a y b)

Estas cuatro ecuaciones y las condiciones de contorno completan la formulación dinámica del medio poroelástico en el dominio de la frecuencia. Hacer notar la posibilidad de considerar disipativo el comportamiento del esqueleto sólido drenado. En este caso, el carácter viscoelástico del sólido se incorpora al modelo a través de constantes de Lamé del tipo (1.43).

Para concluir este apartado, puede hacerse alguna consideración adicional relacionada con la componente irrotacional de la propagación en poroelasticidad armónica. Así, aplicando el operador divergencia de las ecuaciones (1.47) y obviando las fuerzas de volumen:

$$\nabla^{2}\left[\left(\lambda+\mu+\frac{Q^{2}}{R}\right)e+Q\varepsilon\right] = -\omega^{2}\left(\hat{\rho}_{11}e+\hat{\rho}_{12}\varepsilon\right)$$

$$\nabla^{2}\left(Qe+R\varepsilon\right) = -\omega^{2}\left(\hat{\rho}_{12}e+\hat{\rho}_{22}\varepsilon\right)$$
(1.53.a y b)

En este punto, las dilataciones del esqueleto sólido y el fluido pueden escribirse como superposición de los dos modos de propagación. Así:

$$\begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_u^{(1)} & D_u^{(2)} \\ D_U^{(1)} & D_U^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$
(1.54)

Lo que puede entenderse como un cambio en el sistema de referencia del problema. Este se expresa ahora en término de dos nuevas variables (Y_1, Y_2) respecto de un sistema de referencia ortogonal constituido por los modos de propagación. Esta superposición modal, introducida en (1.53), permite desacoplar la componente irrotacional y escribir esta ecuación del modo que sigue:

$$\nabla^2 Y_1 + k_{p1}^2 Y_1 = 0$$
(1.55.a y b)
$$\nabla^2 Y_2 + k_{p2}^2 Y_2 = 0$$

Ecuaciones de onda escalares tipo Helmholtz para cada tipo de onda longitudinal. Este planteamiento, muy habitual en análisis dinámico, nos permitirá la obtención de soluciones analíticas a algunos problemas simples que serán utilizadas para validar los resultados del modelo numérico desarrollado.

1.10 CONDICIONES DE CONTORNO

La completa definición del problema dinámico en el dominio de la frecuencia requiere la imposición de las condiciones de contorno en términos de las variables primarias o sus derivadas. En estos problemas, la eliminación de la dependencia temporal en las ecuaciones de gobierno, hace innecesaria la aplicación de condiciones iniciales.

En el caso de sólidos viscoelásticos, se define el vector tensión $\mathbf{t}^{s}(\mathbf{x},\omega)$ en un punto \mathbf{x} del contorno Γ con normal exterior \mathbf{n} como:

$$t_i^{s}(\mathbf{x},\omega) = \sigma_{ii}^{s}(\mathbf{x},\omega)n_i(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in \Gamma$$
(1.56)

donde σ_{ij}^{s} es el tensor de tensiones del sólido en **x**. Para regiones poroelásticas, se define el vector tensión sobre el esqueleto sólido t^e(**x**, ω) en cualquier punto del contorno:

$$t_i^{\ e}(\boldsymbol{x},\omega) = \tau_{ij}(\boldsymbol{x},\omega)n_j(\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x} \in \Gamma$$
(1.57)

siendo τ_{ij} el tensor de tensiones equivalente sobre la matriz sólida. El vector tensión total sobre el material homogéneo, teniendo en cuenta (1.40):

$$t_i^{p}(\mathbf{x},\omega) = t_i^{e}(\mathbf{x},\omega) + \tau(\mathbf{x},\omega)n_i(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$
(1.58)

En general, y estudiando el comportamiento dinámico de cualquiera de los medios tratados, existirá una zona del contorno (Γ_1) donde sean conocidas las variables fundamentales (condiciones de contorno naturales) y una zona complementaria (Γ_2) en la que son dato las variables derivadas (condiciones de contorno esenciales). Para sólidos viscoelásticos:

$$u_i^{s} = \overline{u}_i^{s} \quad en \ \Gamma_1$$

$$t_i^{s} = \overline{t}_i^{s} \quad en \ \Gamma_2$$
(1.59.a y b)

siendo $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 = \Gamma$, y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Para medios fluidos, la presión (p^a) es la variable fundamental. La variable derivada será el flujo de presión en el contorno $(q^a = p_n)$ equivalente al desplazamiento normal de las partículas de fluido (U_n^a) a través de (1.46). Así:

$$p^{a} = \overline{p}^{a} \quad en \quad \Gamma_{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \overline{q}^{a} \quad en \quad \Gamma_{2}$$
(1.60.a y b)

En el caso de sólidos poroelásticos, las variables fundamentales adoptadas serán el vector desplazamiento en el esqueleto sólido (\mathbf{u}^{e}) y la tensión equivalente en el fluido (τ). Las variables derivadas son el vector tensión en el esqueleto (\mathbf{t}^{e}) y el

movimiento normal al contorno del fluido (U_n). Asimismo, será interesante distinguir entre contornos permeables e impermeables. Los primeros se caracterizan porque en ellos la presión de poro es nula (τ =0). En este caso, puede ser conocido el vector desplazamiento de la fase sólida ($u_i^e = \overline{u_i}^e$) o la tensión equivalente sobre ella ($t_i^e = \overline{t_i}^e$). Si el contorno es impermeable, en él son iguales las componentes normales del desplazamiento en ambas fases ($u_n^e = U_n$). Esto último puede ser conocido ($u_n^e = U_n = \overline{u_n}$) y las incógnitas serán las tensiones equivalentes en ambas fases o bien será conocida la tensión total sobre el contorno ($t_i^p = \overline{t_i}^p$) y el desplazamiento incógnita.

El análisis dinámico de modelos donde coexisten los tres tipos de medios (viscoelásticos, escalares y poroelásticos) debe tener en cuenta el efecto de interacción entre ellos a través de las interfases o contornos comunes a dos de estas regiones. Esta interacción se establece matemáticamente a través del cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio de tensiones y compatibilidad de desplazamientos de ambos medios en todos los puntos de estos contornos. Existen cinco tipos de interfases en el modelo implementado dependiendo de la naturaleza de los medios que interactúan, a saber: viscoelástico-viscoelástico, fluido-fluido, viscoelástico-fluido, viscoelástico-poroelástico y poroelástico-fluido.

Interfase viscoelástico-viscoelástico: La ecuación de equilibrio y compatibilidad en este caso son inmediatas. Sean s1 y s2 las regiones viscoelásticas que determinan el contorno interfase. Así:

1)Equilibrio entre los vectores tensión en ambos medios:
$$t^{s1}+t^{s2}=0$$
 (1.61)

2)Compatibilidad de los vectores desplazamiento:
$$\mathbf{u}^{s1} = \mathbf{u}^{s2}$$
 (1.62)

Interfase fluido fluido: Sean, como antes, al y a2 las regiones fluidas en contacto. Así:

 Equilibrio. Igualdad de presión hidrodinámica en ambas regiones a la largo de la interfase.

$$p^{a1}=p^{a2}$$
 (1.63)

 Compatibilidad. Los desplazamientos normales a cada medio son iguales en valor absoluto y signo contrario. Esta condición se expresa en idénticos términos si la variable elegida es el flujo de presión.

$$U_n^{a1} = -U_n^{a2}$$
 (1.64)

Interfase viscoelástico fluido: Las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en este tipo de interfases son como sigue:

Equilibrio entre el vector tensión en el sólido (t^s) y la presión hidrodinámica (p^a):

$$\mathbf{t}^{s} - \mathbf{p}^{a} \mathbf{n}^{a} = \mathbf{0} \tag{1.65}$$

siendo \mathbf{n}^{a} la normal exterior a la región fluida. De nuevo recordar que una presión positiva representa compresión lo que explica el cambio de signo en relación a (1.61).

2) Compatibilidad entre los desplazamientos normales de sólido (u_n^s) y fluido (U_n^a) :

$$u_{n}^{s} = u_{i}^{s} n_{i}^{s} = -U_{n}^{a}$$
(1.66)

siendo n^s la normal exterior a la región viscoelástica

Interfase viscoelástico poroelástico: En este caso conviene distinguir entre dos situaciones extremas posibles. En primer lugar, se plantean las ecuaciones de restricción para este tipo de interfases cuando podemos asimilar al sólido viscoelástico como un material completamente impermeable. Este ha sido el modelo de interfase utilizado en el estudio dinámico de presas para el contacto entre el sedimento y la presa de hormigón o el fondo rocoso del embalse. Por otra parte, la línea marcada por el nivel freático en un terreno puede ser considerada una interfase permeable. En este caso, el terreno anegado puede considerarse un medio poroelástico y el estrato seco asimilarse a una región de naturaleza viscoelástica.

1) Equilibrio. Si el sólido viscoelástico es impermeable, las ecuaciones de equilibrio se establecen entre el vector tensión en el sólido (\mathbf{t}^{s}) y el vector tensión total en el medio poroelástico (\mathbf{t}^{p}) como sigue:

$$t^{s} + t^{p} = t^{s} + t^{e} + \tau n = 0$$
 , (1.67)

la segunda expresada en términos de la tensiones equivalentes en el esqueleto (t^e) y fluido intersticial (τ)[•] En el caso de una interfase permeable ($\tau = 0$), las ecuaciones de equilibrio serán:

$$\mathbf{t}^{s} + \mathbf{t}^{e} = \mathbf{0}$$
 $\tau = 0$ (1.68.a y b)

2) Compatibilidad. Para ambos supuestos serán iguales el vector desplazamiento de las partículas sólidas (u^e) del medio poroso y el correspondiente al medio viscoelástico (u^s). En el caso impermeable habrá de verificarse, además, la igualdad en valor absoluto de desplazamientos normales del medio viscoelástico y del fluido que ocupa los intersticios del medio poroelástico (U_n^p).

$$\mathbf{u}^{\mathrm{e}} = \mathbf{u}^{\mathrm{s}}$$
$$\mathbf{u}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{n}} = -\mathbf{U}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{n}}$$
(1.69.a y b)

Si la interfase es permeable, sólo es de aplicación (1.69.a).

Interfase fluido-poroelástico: En este problema, las condiciones de equilibrio y compatibilidad serán:

1)Equilibrio. En primer lugar, valores iguales de la presión hidrodinámica en el fluido (p^a) y la presión intersticial en el poroso (p^p). En segundo lugar, equilibrio entre las tensiones equivalentes en el sólido (t^e) y la presión hidrodinámica de forma análoga a (1.65). Así:

$$p^{a} = p^{p}$$

 $t^{e} - (1 - \phi)p^{a}n^{a} = 0$ (1.70.a y b)

Si se tiene en cuenta la primera en la segunda, ésta última puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{t}^{e} + (1 - \phi)\mathbf{p}^{p}\mathbf{n}^{p} = \mathbf{t}^{p} + \mathbf{p}^{p}\mathbf{n}^{p} = \mathbf{t}^{p} = \mathbf{0}$$
(1.71)

siendo \mathbf{t}^{p} la tensión efectiva de Terzaghi (\mathbf{n}^{p} es la norma exterior al medio poroso). Así, las condiciones (1.70) se reducen a la condición de tensión efectiva nula en la región porosa de la interfase.

2) Compatibilidad entre el desplazamiento normal del fluido (U_n^a) y el desplazamiento normal promedio de la región porosa considerada como un medio homogéneo:

$$U_n^{\ a} = (1 - \phi) u_n^{\ e} - \phi U_n^{\ p}$$
(1.72)

2. ACCIONES SÍSMICAS

2.1 ZONAS SÍSMICAS DE LA TIERRA.

La definición de terremoto podría ser la de movimiento caótico de la corteza terrestre, caracterizado por una dependencia en el tiempo de amplitudes y frecuencias. Su origen está en choques ocurridos a una cierta profundidad bajo la superficie terrestre, en un punto teórico denominado hipocentro. A la proyección vertical del foco en la superficie terrestre se le denomina epicentro. Éste último es que el que es posible determinar de forma estimativa mediante sencillos cálculos, además de tener gran utilidad a la hora de interpretar los acelerogramas.

El término 'placa tectónica' hace referencia a cada una de las estructuras que conforman la corteza terrestre o litosfera, y que flotan sobre la roca ígnea y fundida que forma el interior del Planeta. La litosfera tiene un grosor que varía entre los 15 y los 200 Km., siendo más gruesa en los continentes que en el fondo marino. Su flotabilidad sobre el magma se debe a que, comparada con los metales que conforman el núcleo, resulta relativamente más liviana, puesto que en su composición abundan el cuarzo y los silicatos.

Las placas tectónicas se encuentran en contacto entre sí, como enormes témpanos que se aproximan o se separan, provocando así los cambios geológicos y los sismos en las fronteras de las mismas. Son varias las teorías que intentan explicar el por qué de su movimiento, siendo la más aceptada aquella cuya base se fundamente en el fenómeno de convección. Se refiere a la influencia que la alta temperatura del magma del núcleo ejerce sobre los distintos minerales, haciendo flotar a los más calientes y hundiéndose los más fríos. El calor provendría del decantamiento radiactivo de isótopos como el uranio, torio y potasio, así como del calor residual aún presente desde la formación de la Tierra.

La figura 2.1 muestra la disposición de las principales placas tectónicas que conforman la corteza terrestre, mientras que la 2.2 presenta un mapa de los principales terremotos ocurridos en el mundo durante el siglo XX. Las principales zonas sísmicas son las punteadas con los epicentros. Comparando ambas figuras puede apreciarse la

coincidencia de estos cinturones sísmicos con los contornos de las placas tectónicas. Por otra parte, resulta interesante contrastar dichas figuras con la Fig. 2.3, la cual indica la posición de los volcanes activos en la Tierra. La conclusión a la que se llega es que tanto los volcanes activos como los epicentros de los terremotos están situados en las proximidades de los contornos de las placas tectónicas, demostrando que las causas de estos fenómenos están fuertemente relacionadas con el proceso tectónico del planeta.



Fig. 2.1. Principales placas tectónicas de la Tierra



Fig. 2.2. Epicentros de los principales terremotos ocurridos en el mundo hacia la mitad del siglo XX



Fig. 2.3. Situación de los volcanes activos

El mundo de la sismología se encuentra rodeado de varios conceptos que convendría aclarar. La intensidad sísmica es una medida de los efectos de los terremotos en el entorno, y en particular sobre las estructuras. La Sismicidad se define como la frecuencia de ocurrencia de fenómenos sísmicos por unidad de área, incluyendo al mismo tiempo cierta información acerca de la energía sísmica liberada. Una clasificación de los terremotos de acuerdo con sus causas mecánicas ha sido realizada por Scheidegger, quien identifica las siguientes clases:

• *Terremotos de colapso*: se trata de terremotos de baja intensidad que tienen lugar en cavidades subterráneas y minas, y son debidos al colapso de las mismas.

· *Choques volcánicos*: las erupciones volcánicas y los terremotos son fenómenos que parecen tener el mismo origen tectónico. Al mismo tiempo, la explosión de gases durante las erupciones volcánicas puede generar movimientos sísmicos, que en general, tienen una intensidad pequeña y afectan a superficies limitadas.

· *Terremotos tectónicos*: son los terremotos más fuertes y frecuentes. Los provocan la rotura brusca de capas rocosas de superficies fracturadas, denominadas fallas.

 Terremotos causados por explosiones: la acción del hombre es capaz de generar explosiones de intensidad suficiente como para producir vibraciones en el terreno y éstas causar movimientos en las estructuras. Tal es el caso de por ejemplo pruebas nucleares subterráneas.

Por su mayor importancia y frecuencia, serán los terremotos tectónicos el centro de este apartado teórico. Como criterio de clasificación de los mismos se utilizará la profundidad focal. Se consideran:

Terremotos normales: son aquellos cuya distancia focal H se encuentre entre 5 y
 70 Km

· Terremotos medios: presentan valores de H entre 70 y 300 Km, y

• Terremotos profundos: son aquellos que cumplen H>300 Km. La máxima profundidad que puede alcanzar un terremoto es de aproximadamente 700 Km.

Una clasificación alternativa de los terremotos la han elaborado Newmark y Rosenblueth, los cuales dividen los terremotos en cuatro grupos, de acuerdo con sus características:

• *Terremotos de una sola sacudida*. Se producen en el caso de focos de poca profundidad, en terrenos firmes, y a distancias epicentrales pequeñas.

• *Terremotos de duración moderada y vibraciones irregulares*, caracterizados por distancias epicentrales moderadas, ocurren en terreno firme. Casi todos los terremotos que se producen en el Cinturón Circumpacífico son de este tipo. Un ejemplo de este tipo se representa en la figura 2.9, correspondiente al registro del terremoto de El Centro (1940).

• *Terremotos de larga duración y períodos predominantes*, provocados por ondas sísmicas filtradas a través de capas blandas de suelo.

· Terremotos que producen deformaciones permanentes en el terreno.

Por último, cabría citar la clasificación elaborada por Mercalli, la cual se encuentra íntimamente relacionada con los daños que provoca el movimiento sísmico sobre la estructura.

2.2 MECANISMO DE LOS TERREMOTOS TECTÓNICOS

Se presentan cuatro tipos fundamentales de fronteras o vecindades de las placas:

· *Fronteras divergentes*: en ellas se genera nueva costra que rellena la brecha de las placas al separarse (Fig.2.4.a). Corresponde al caso de fallas normales, en el que la corteza está en extensión. El caso mejor conocido de frontera divergente es la cordillera mesoatlántica, que se extiende desde el Océano Ártico hasta el sur de África. La velocidad de separación entre las placas Norteamericana y Euroasiática es de aproximadamente 2,5 cm cada año.

• Fronteras convergentes: en ellas, la costra es destruida al hundirse una placa bajo la otra (subducción, Fig. 2.4.b). Representaría al caso de las fallas invertidas, en el que una de las fallas asciende y la otra penetra por debajo de la primera. El ejemplo más conocido es el de la Placa de Nasca (o Nazca), que se está hundiendo bajo la placa Sudamericana frente a las costas de Perú y Chile, dando origen a una de las zonas sísmicas más activas del Planeta. Las placas pueden converger en el continente y dar origen a cadenas montañosas de envergadura, como la del Himalaya, o bien en el océano, provocando la formación de fosas marinas o volcanes submarinos. · *Fronteras de transformación*: donde la costra ni se destruye ni se genera, y las placas sólo se deslizan horizontalmente entre sí (Fig. 2.4.c). Corresponde a fallas de deslizamiento o desgarradura. Un ejemplo de este tipo de fronteras es la tan conocida Falla de San Andrés, en California.

• *Zonas fronterizas de las placas*: es un ancho cinturón en el que las fronteras no están bien definidas, y el efecto de la interacción de las placas aún no se ha explicado.



Fig. 2.4. a) Frontera divergente b) Frontera convergente. c) Frontera de transformación

2.3 TEORÍA DE REID

Aunque el mecanismo de los terremotos tectónicos no se conozca con exactitud, la teoría más ampliamente aceptada por la comunidad científica es la elaborada por Reid en 1906. Las investigaciones de Reid se basaron en el estudio de la falla de San Andrés y sus fallas secundarias. De acuerdo con la figura 2.5, la traslación relativa a lo largo de la falla produciría la deformación de líneas perpendiculares sobre la falla. Se considera que, después de la deformación de las líneas se construye un camino perpendicular sobre la falla (Fig. 2.5b). Si la deformación continúa, el material de las capas del terreno alcanzará tensiones y deformaciones que sobrepasan su resistencia, produciéndose una rotura a lo largo de la falla, a partir de un punto crítico. La situación después de la rotura se indica en la figura 2.5c. El foco del terremoto puede definirse como el punto débil en el cual empieza a producirse la rotura. La ruptura se propaga sobre la superficie de la falla, partiendo del foco.



Fig. 2.5. Mecanismo de los terremotos según Reid.
(a) estado no deformado; (b) estado deformado, con un camino construido después de la deformación; (c) situación después del terremoto.
(1) línea de falla; (2) dirección del movimiento;
(3) líneas imaginarias perpendiculares sobre la falla; (4) camino

2.4 ONDAS SÍSMICAS

En el apartado 1 de este capítulo se estudió el origen y la naturaleza de las ondas sísmicas, pero se ha creído oportuno recordarlo en este apartado, y analizarlas desde el punto de vista sismológico. Pueden distinguirse tres tipos de ondas sísmicas:

- · Ondas másicas, las cuales se propagan a través de la masa de la Tierra
- · Ondas de superficie, que se propagan solamente en la corteza terrestre

• Oscilaciones libres, que se producen únicamente durante terremotos muy fuertes y pueden ser definidas como vibraciones de la Tierra en su totalidad

Las ondas másicas pueden ser subdivididas en ondas primarias (P) y secundarias (S). Las ondas P son de dilatación-contracción, implicando su propagación cambios de volumen en el medio y pueden propagarse tanto a través de sólidos como a través de fluidos. Por este motivo se puede afirmar que, en el caso de que tenga lugar un fenómeno sísmico, será este tipo de ondas las que siempre serán registradas, puesto que son las únicas que pueden atravesar cualquier medio, ya sea líquido o sólido. A ellas se debe el enorme estruendo audible en muchos terremotos. Por otro lado, las ondas S son ondas de cortante que se propagan sin cambio de volumen, pudiendo hacerlo exclusivamente en sólidos. Usualmente, la onda S tiene mayor amplitud que la onda P, y se siente más fuerte que ésta.

Existen dos tipos de ondas superficiales u ondas Q: ondas Rayleigh (R) y ondas Love (L). Las ondas R, al igual que las P, generan cambio de volumen, mientras que el comportamiento de las ondas L es similar al de las S, originando movimientos de traslación de las partículas en sentido normal a la dirección de propagación. En general, las ondas superficiales son las poseen un mayor poder destructivo. En la figura 2.6 se representa cada tipo de onda másica:



Fig. 2.6. Propagación de ondas másicas y superficiales: ondas P, S, Love y Rayleigh

Recordando el comportamiento ondulatorio de la energía cuando viaja a través de medios con distinta densidad, las ondas sísmicas se reflejan y se refractan cuando en su recorrido aparece una discontinuidad o interfase. Ello implica cambios en la velocidad de las ondas, como se analizó en el apartado 1 del presente capítulo. De acuerdo con la Teoría de la Elasticidad, la velocidad de las ondas P puede obtenerse a partir de la expresión:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$$

Y para las ondas S: $v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

donde: $\lambda = \frac{\mu E}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}$, siendo E el módulo de Young, μ el coeficiente de

Poisson y ρ la densidad. El cociente entre las velocidades de propagación de las ondas P y S vale:

$$\frac{v_p}{v_s} = \sqrt{\frac{2(1+\mu)}{1+2\mu}}$$

Suponiendo para el coeficiente de Poisson un valor medio de μ =0.25, el valor de este cociente es:

$$\frac{v_p}{v_s} = \sqrt{3}$$

Se demuestra entonces que la velocidad de propagación de las ondas P es mayor que la de las ondas S, de ahí que las P sean las primeras en detectarse en los sismógrafos. En la siguiente figura se observa la estructura interna de la tierra, así como la variación de la velocidad con la profundidad de ambas ondas. Se aprecia cómo siempre la velocidad de las ondas P es superior a la de las S.



Fig. 2.7. Estructura interna de la tierra y dependencia de la velocidad de ondas P y S con la profundidad

2.5 ACELEROGRAMAS

Para comprender lo que representa un acelerograma convendría identificar un movimiento sísmico como una superposición de ondas P, S y superficiales, de distinta frecuencia y amplitud. El intervalo de llegada de ambas ondas puede observarse de forma práctica en algunos acelerogramas, que no son más que diagramas en los que se representa la aceleración medida por un sismógrafo frente al tiempo. Los registros gráficos o historias de movimientos sísmicos en función del tiempo se obtienen con instrumentos llamados sismógrafos. Tales instrumentos se instalan en el terreno o en las cimentaciones de las estructuras y, generalmente, están diseñados para registrar las tres componentes de la aceleración del terreno. La figura 2.9 muestra la componente N-S del acelerograma del temblor ocurrido en El Centro, California en el año 1940. Esta figura también contiene la velocidad y el desplazamiento del terreno durante dicho sismo, obtenidos por integración del acelerograma. Además, el acelerograma de un temblor puede también ser analizado para obtener el valor máximo del movimiento del terreno y las frecuencias contenidas en el movimiento sísmico.



Fig. 2.8. Terremoto de Kermadec de 11 de junio de 1957.

En la figura 2.8 se ha representado el acelerograma correspondiente al movimiento de Kermadec (1957), y en él se aprecia la llegada simultánea de los tres tipos de ondas.



Fig. 2.9. Terremoto de El Centro (California), 18 de mayo de 1940, componente N-S (a) aceleración; (b) velocidad; (c) desplazamiento

La magnitud de un temblor se estima, comúnmente, por la magnitud Richter (M), que se calcula basándose en la lectura registrada en un instrumento llamado sismógrafo de Wood-Anderson a una distancia especificada de 100 Km del epicentro del temblor. Concretamente, la magnitud de Richter (M) de un temblor se evalúa a partir de la expresión

$$M = \log_{10} \frac{A}{A_0}$$

donde *A* es la amplitud máxima registrada en el instrumento de Wood-Anderson localizado a 100 km del epicentro, y A_0 es una amplitud de referencia de una milésima de milímetro (Para *A* expresada en milímetros, A_0 =0.001). Cuando no se tiene el instrumento de Wood-Anderson a esta distancia, la magnitud de Richter se calcula a partir de lecturas registradas en los sismógrafos de la región afectada por el temblor. Temblores de magnitudes 5.0 o mayores generan movimientos intensos que pueden ser potencialmente destructivos para las estructuras. La energía liberada por un temblor de magnitud M puede estimarse por la fórmula

$$E = 10^{4.8 + 1.5M} J$$

Esta expresión revela que la energía aumenta aproximadamente 32 veces con el aumento de una unidad en la magnitud M y 1000 veces con el de dos unidades. Aunque la magnitud Richter da una medida de la energía liberada por un movimiento sísmico, no describe los efectos destructivos causados en una determinada localización. Tal descripción la proporciona la escala de intensidades sísmicas. En la actualidad, existen dos escalas de intensidades muy semejantes: (1) Escala de Intensidad Modificada de Mercalli (M.M.I.) y (2) Escala de Intensidad Macrosísmica Internacional (M.S.K.).

Ambas escalas tiene un total de doce grados que, usualmente, se expresan en números romanos. El grado de intensidad de un temblor en una determinada localización se asigna basándose en la observación de los daños, y es útil cuando no existen registros instrumentales del movimiento del terreno. Las intensidades hasta el grado VI generalmente no producen daños estructurales, mientras que las intensidades de los grados VI al XII provocan progresivamente mayores daños en edificios y otras estructuras. La clasificación completa se muestra a continuación:

Grado I	Sacudida sentida por muy pocas personas en condiciones especialmente favorables.
Grado II	Sacudida sentida sólo por pocas personas en reposo, especialmente en los pisos altos de los edificios. Los objetos suspendidos pueden oscilar.
Grado III	Sacudida sentida claramente en los interiores, especialmente en los pisos altos de los edificios, muchas personas no lo asocian con un temblor. Los vehículos de motor estacionados pueden moverse ligeramente. Vibración como la originada por el paso de un carro pesado. Duración estimable
Grado IV	Sacudida sentida durante el día por muchas personas en los interiores, por pocas en el exterior. Por la noche algunas despiertan. Vibración de vajillas, vidrios de ventanas y puertas; los muros crujen. Sensación como de un carro pesado chocando contra un edificio, los vehículos de motor estacionados se balancean claramente.
Grado V	Sacudida sentida casi por todo el mundo; muchos despiertan. Algunas piezas de vajilla, vidrios de ventanas, etcétera, se rompen; pocos casos de agrietamiento de aplanados; caen objetos inestables . Se observan perturbaciones en los árboles, postes y otros objetos altos. Se detienen de relojes de péndulo.
Grado VI	Sacudida sentida por todo mundo; muchas personas atemorizadas huyen hacia afuera. Algunos muebles pesados cambian de sitio; pocos ejemplos de caída de aplanados o daño en chimeneas. Daños ligeros.
Grado VII	Advertido por todos. La gente huye al exterior. Daños sin importancia en edificios de buen diseño y construcción. Daños ligeros en estructuras ordinarias bien construidas; daños considerables en las débiles o mal planeadas; rotura de algunas chimeneas. Estimado por las personas conduciendo vehículos en movimiento.
Grado VIII	Daños ligeros en estructuras de diseño especialmente bueno; considerable en edificios ordinarios con derrumbe parcial; grande en estructuras débilmente construidas. Los muros salen de sus armaduras. Caída de chimeneas, pilas de productos en los almacenes de las fábricas, columnas, monumentos y muros. Los muebles pesados se vuelcan. Arena y lodo proyectados en pequeñas cantidades. Cambio en el nivel del agua de los pozos. Pérdida de control en la personas que guían vehículos motorizados.

Grado IX	Daño considerable en las estructuras de diseño bueno; las armaduras de las estructuras bien planeadas se desploman; grandes daños en los edificios sólidos, con derrumbe parcial. Los edificios salen de sus cimientos. El terreno se agrieta notablemente. Las tuberías subterráneas se rompen.
Grado X	Destrucción de algunas estructuras de madera bien construidas; la mayor parte de las estructuras de mampostería y armaduras se destruyen con todo y cimientos; agrietamiento considerable del terreno. Las vías del ferrocarril se tuercen. Considerables deslizamientos en las márgenes de los ríos y pendientes fuertes. Invasión del agua de los ríos sobre sus márgenes.
Grado XI	Casi ninguna estructura de mampostería queda en pie. Puentes destruidos. Anchas grietas en el terreno. Las tuberías subterráneas quedan fuera de servicio. Hundimientos y derrumbes en terreno suave. Gran torsión de vías férreas.
Grado XII	Destrucción total. Ondas visibles sobre el terreno. Perturbaciones de las cotas de nivel (ríos, lagos y mares). Objetos lanzados en el aire hacia arriba.

CAPÍTULO 3.

HERRAMIENTAS NUMÉRICAS

1. MÉTODO DE ELEMENTOS DE CONTORNO

1.1 INTRODUCCIÓN

El auge que ha experimentado el uso de métodos numéricos por parte de la comunidad científica se ha debido en gran parte al profundo desarrollo sufrido por las nuevas tecnologías que hoy día invaden nuestro mundo. Como herramientas numéricas más empleadas en el ámbito de la ingeniería cabe citar las diferencias matemáticas o elementos finitos. Dichas técnicas discretizan el dominio del problema en cuestión en una serie de elementos o celdas. Las ecuaciones de gobierno del problema se aproximan sobre la región por funciones que satisfacen completa o parcialmente las condiciones de contorno. Estos métodos, junto con otras técnicas aplicadas al dominio, se denominan métodos de dominio.

Otra posibilidad es emplear funciones de aproximación que satisfacen las ecuaciones de gobierno en el dominio pero no las condiciones de contorno. Dichas técnicas se denominan métodos de contorno y, por una serie de razones, han experimentado un fuerte crecimiento en los últimos tiempos, debido fundamentalmente a que ofrecen una alternativa elegante y eficaz a los métodos de dominio. Además, pueden ser combinados con estos últimos para obtener una mejor representación de las condiciones de contorno en un programa de elementos finitos o diferencias finitas. Una de las principales ventajas que presenta el método de elementos de contorno es la posibilidad de trabajar con dominios infinitos, definiendo una subdivisión de la región en estudio por medio de elementos finitos, y emplear elementos de contorno para una mejor aproximación de las condiciones de contorno.

El Método de Elementos de Contorno (en adelante MEC) fue bautizado por los precursores del mismo, Brebbia y Domínguez. Basa su metodología en la ecuación integral que define problemas de mecánica del continuo. Así, es posible definir dos tipos de formulaciones:

• *Directa*. Las incógnitas de esta formulación representan magnitudes con un claro significado físico, y las condiciones de contorno se definen en función de ellas.

• *Indirecta*. En este tipo de formulación, las incógnitas no poseen significado físico, pero sirven como medio para obtener aquellas que sí lo tienen.

El término MEC se emplea casi exclusivamente cuando se hace referencia a la formulación directa. Las incógnitas de la ecuación integral son, por un lado, los valores en el contorno o en una parte del mismo, de las variables fundamentales del campo en cuestión (por ejemplo, en elasticidad, desplazamientos), y por otro, sus correspondientes derivadas, que también están dotadas de significado físico (en elasticidad, tensiones). Estas funciones se aproximan sobre el contorno mediante funciones de interpolación previamente seleccionadas, y evaluadas en un número específico de puntos (nodos).

El análisis de problemas estáticos y dinámicos de mecánica del continuo puede llevarse a cabo por medio del MEC de forma elegante y sencilla. Así, una de sus principales ventajas es que el problema se formula en el contorno, por lo que sólo éste debe ser discretizado. Sin embargo, en métodos de dominio como el Método de Elementos Finitos (MEF) o el Método de Diferencias Finitas (MDF) requieren las discretización de todo el dominio. Como consecuencia de ello, el sistema de ecuaciones resultante es netamente inferior en el MEC.

Cabe destacar también que, el hecho de mallar sólo superficies resulta más sencillo que cuando se trata de dominios, aunque tanto la geometría como el mallado pueden sufrir alteraciones, en particular en problemas donde la geometría cambia durante el proceso de cálculo de la solución. El sistema de ecuaciones que surge es en ese caso no simétrico, y totalmente poblado, lo que se traduce en mayores tiempos de computación, en comparación con la solución propuesta por el MEF. No obstante, la exactitud del MEC, tanto en el contorno como en puntos interiores, ha sido suficientemente contrastada.

Como desventaja conviene citar la dificultad que presenta al tratar medios no lineales, por la aparición de integrales de domino en las ecuaciones integrales. En ese caso, las ventajas de una formulación en el contorno desaparecen.

De cualquier modo, cada técnica numérica posee su campo de aplicación, siendo más adecuada una u otra según sean las características del problema en cuestión.
El tratamiento de regiones infinitas o semi-infinitas mediante discretizaciones finitas supone hacer una serie de consideraciones sobre el problema bajo estudio. Así, en estática, bastaría con un contorno artificial de algún tipo ubicado a una cierta distancia. Sin embargo, en dinámica, la reflexión de ondas puede distorsionar la solución cuando se emplea ese tipo de frontera artificial. Como ya se mencionó, el MEC está basado en una formulación de la ecuación integral, la cual, en el caso de regiones externas, consiste en integrales extendidas sólo sobre contornos internos. Por tanto, son éstos los contornos a discretizar. El comportamiento de los dominios sin frontera se representa precisamente con este tipo de integrales. Esta ventaja, unida al hecho de que la mayoría de los análisis dinámicos se encuentran sujetos al comportamiento lineal, le confieren al MEC una serie de cualidades que lo hacen el más apropiado para resolver problemas de muy distinta índole, como son la acústica a cielo abierto o la interacción dinámica entre suelo y estructura.

1.2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

La base teórica del método parte definiendo una región Ω con el contorno Γ , en la que la función escalar u (potencial) se encuentra gobernada por la ecuación de onda:

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c^2} \cdot u = 0$$

siendo c la velocidad de la onda. Las condiciones de contorno serán las siguientes:

$$u = u en \Gamma_1$$

 $q = \frac{\partial u}{\partial n} = \overline{q} en \Gamma_2$

donde n es la normal al contorno, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, y las barras indican valores conocidos. Consideremos una función u*, que pertenezca a clase C¹ y que verifique la ecuación de gobierno. Bajo estas condiciones, se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) \cdot u \ast \cdot d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \overline{q}) \cdot u \ast \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \overline{u}) \cdot q \ast \cdot d\Gamma$$

donde:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$$

Si se integra por partes el miembro de la izquierda de la igualdad, se obtiene:

$$-\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_{k}} \cdot \frac{\partial u^{*}}{\partial x_{k}} \right\} d\Omega = -\int_{\Gamma_{2}} \overline{q} \cdot u^{*} \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_{1}} q \cdot u^{*} \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_{1}} u \cdot q^{*} \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_{1}} \overline{u} \cdot q^{*} \cdot d\Gamma$$

donde se ha aplicado la notación de Einstein. Volviendo a integrar por partes el mismo miembro se consigue la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} u \cdot (\nabla^2 u^*) \cdot d\Omega = -\int_{\Gamma_2} \overline{q} \cdot u^* \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q \cdot u^* \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \cdot q^* \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \overline{u} \cdot q^* \cdot d\Gamma$$
(1.0)

Como se aprecia, se ha debilitado el problema. Esta es la ecuación de partida del método de elementos de contorno. Para un punto interno o del contorno, podemos utilizar la siguiente representación integral:

$$c^{i}u^{i} + \int_{\Gamma} \frac{\partial u^{*}}{\partial n} u \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} u^{*} \cdot d\Gamma$$
(1.1)

donde u^{*} es la solución fundamental ante el caso de una carga puntual armónica, cⁱ=1 para puntos internos y cⁱ=1/2 para puntos del contorno, siendo éste liso. Cuando no cumpla ciertas condiciones de derivabilidad, cⁱ adopta valores que dependen de la geometría particular del contorno en el punto "i". Como prueba, considérese un problema de potencial, es decir, se pretende determinar el valor de la función potencial u en el dominio Ω , verificando ésta la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 u = 0, en \Omega$$

Se considera en este momento que una carga concentrada actúa sobre el punto 'i'. En ese caso:

$$\nabla^2 u * + \Delta^i = 0,$$

siendo i la función Delta de Dirac. Sustituyendo esta expresión en (1.0), ésta última se convierte en:

$$-\int_{\Omega} u \cdot \Delta^{i} \cdot d\Omega = -\int_{\Gamma_{2}} \overline{q} \cdot u^{*} \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma_{1}} q \cdot u^{*} \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_{2}} u \cdot q^{*} \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_{1}} \overline{u} \cdot q^{*} \cdot d\Gamma$$

Operando, se deduce que, en este caso, para puntos internos del dominio, $c^{i} = 1$. Para un medio isótropo tridimensional, la solución fundamental de la ecuación de Laplace es:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r}$$

donde r es la distancia comprendida entre el punto de aplicación del potencial unitario al punto del contorno bajo estudio. La ecuación de Laplace tridimensional en coordenadas polares presenta la forma siguiente, una vez se haya considerado simetría:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} = \Delta^i$$

Sustituyendo la ecuación fundamental en esta última, se aprecia que se satisface siempre r sea distinto de 0. Para estudiar el caso en que r=0, se lleva a cabo la integración de la ecuación diferencial sobre una esfera que rodea el punto donde se aplica la carga:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u * d\Omega = -\int_{\Omega} \Delta^i d\Omega = -1$$

Si se sustituye la solución fundamental en el primer miembro, tras simples operaciones de derivación, se comprueba que efectivamente, para cualquier punto interno es igual a -1. Para un punto del contorno, considérese la semiesfera representada en la siguiente figura:



Fig. 1.1 Integración sobre nodo perteneciente al contorno

El punto bajo estudio se ubica en el centro de la esfera, reduciéndose su radio ε a 0, coincidiendo en ese caso el punto de aplicación de la carga y el del contorno a analizar. Se considerará que el contorno en el punto es lo suficientemente suave como para que verifique unas mínimas condiciones de derivabilidad. De este modo:

$$\int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma$$

Si se sustituye la solución fundamental en la segunda integral del segundo miembro, y tomando límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \, \frac{\partial u^*}{\partial n} \, d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \, \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \, d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\frac{1}{2} \, u \right\} = -\frac{1}{2} \, u$$

(1.2)

Si se toma ε igual a 0 en el contorno Γ - Γ_{ε} , se obtiene Γ . Para el problema bidimensional, aunque la solución fundamental es distinta, el resultado al que finalmente se llega es idéntico. Por tanto, queda entonces demostrado que, para puntos en el contorno, $c^{i} = 1/2$.

Retomando de nuevo la ecuación integral (1.1), ésta será resuelta numéricamente, para lo cual se discretizará la superficie en una serie de elementos sobre los cuales el potencial u y el flujo q serán escritos en términos de sus valores en una serie de puntos nodales. Si se expresa dicha ecuación integral en forma discretizada para cada nodo, se obtiene un sistema algebraico de ecuaciones. Una vez las condiciones de contorno han sido aplicadas, el sistema puede ser resuelto para así determinar las incógnitas en el contorno.

Las variables u y q sobre cada elemento "j" se definen en términos de sus valores nodales como:

$$u = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1 & \mathbf{\Phi}_2 & \mathbf{\Phi}_3 & \dots & \mathbf{\Phi}_N \end{bmatrix} \begin{cases} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ \dots \\ u^N \end{cases} = \mathbf{\Phi} \cdot u^i$$
$$q = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1 & \mathbf{\Phi}_2 & \mathbf{\Phi}_3 & \dots & \mathbf{\Phi}_N \end{bmatrix} \begin{cases} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \\ \dots \\ q^N \end{cases} = \mathbf{\Phi} \cdot q^i$$

donde N es el número de nodos del elemento, uⁱ y qⁱ son vectores conteniendo los potenciales y los flujos en los nodos del elemento, respectivamente, y Φ_1 , Φ_2 , ..., Φ_N son funciones de interpolación polinomiales, de dos dimensiones, tales que adoptan el valor unitario en el nodo k y cero en los demás nodos del elemento. Las funciones de

interpolación, también llamadas funciones de forma, vienen expresadas en términos de las coordenadas homogéneas, definidas sobre cada familia de elementos.

La geometría de cualquier elemento puede definirse a partir de la posición de los nodos empleando las mismas funciones de interpolación. De este modo, cada coordenada podrá expresarse del siguiente modo:

$$x_{m} = \begin{bmatrix} \Phi_{1} & \Phi_{2} & \Phi_{3} & \dots & \Phi_{N} \end{bmatrix} \begin{cases} x_{m}^{-1} \\ x_{m}^{-2} \\ x_{m}^{-3} \\ \vdots \\ x_{m}^{-N} \\ x_{m}^{-N} \end{cases}^{j}; m = 1, 2, 3$$
(1.3)

Para las tres coordenadas cartesianas sería:

$$\begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Phi}_2 & 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{\Phi}_N & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Phi}_1 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Phi}_2 & 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{\Phi}_N & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\Phi}_1 & 0 & 0 & \boldsymbol{\Phi}_2 & \dots & 0 & 0 & \boldsymbol{\Phi}_{N1} \end{bmatrix} \begin{cases} x_1^1 \\ x_2^{-1} \\ \vdots \\ x_1^N \\ x_2^N \\ x_2^N \\ x_3^N \end{cases} = \boldsymbol{\Phi} \cdot x^j$$

De forma sintetizada sería:

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}^{\mathbf{j}} \tag{1.4}$$

En la siguiente tabla se incluyen los tres primeros elementos de los dos tipos más empleados: elemento triangular y cuadrangular. Para este último, se definen dos coordenada $-1 \le \xi_1 \le 1$, $-1 \le \xi_2 \le 1$, por lo que elemento, en el plano tendrá una magnitud de lado 2. Para el elemento triangular, las coordenadas se definen por $0 \le \xi_1 \le 1$, $0 \le \xi_2 \le 1$, incluyéndose además una tercera coordenada simplemente por conveniencia, que depende linealmente de las dos primeras: $\xi_3=1-\xi_1-\xi_2$. Las expresiones de las funciones de interpolación para distintos órdenes se incluyen en la mencionada tabla.



Tabla 1.1. Elemento triangular y rectangular para problemas tridimensionales

De este modo, se puede definir un elemento triangular que posea cualquier forma mediante las coordenadas cartesianas de tres nodos y las funciones de interpolación:

$$x = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\Phi_{k} = \begin{bmatrix} \Phi_{k} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{k} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{k} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{k} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{k} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3$$

$$x^{k} = \begin{bmatrix} x_{1}^{k} \\ x_{2}^{k} \\ x_{3}^{k} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3$$

De forma análoga, para un elemento cuadrangular lineal:

$$x = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix}$$

En la siguiente figura se representan las formas que adoptarían un elemento cuadrático triangular y otro cuadrangular, obtenidos ambos por medio de las funciones de interpolación cuadráticas, con 6 y 9 nodos, respectivamente:



Fig. 1.2. Transformación de un elemento triangular y rectangular para problemas tridimensionales

Como regla general para la mayoría de los elementos de contorno, los nodos y las funciones de interpolación Φ_k empleadas en las ecuaciones (1.2) y (1.4) para representar

las variables de contorno y la geometría, respectivamente, son los mismos, es decir, los elementos son isoparamétricos. Este es el caso de los elementos lineales y cuadráticos.

Considérese de nuevo el contorno Γ del cuerpo Ω , y que el primero ha sido discretizado en NE elementos, y que para cada elemento, las variables de contorno se expresan como en la identidad (1.2). Así, la ecuación (1.1) podrá rescribirse para cualquier nodo 'i' de la siguiente forma:

$$c^{i}u^{i} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_{j}} q * \Phi d\Gamma \right\} u^{j} = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_{j}} u * \Phi d\Gamma \right\} q^{j}$$
(1.5)

donde: $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_N \end{bmatrix}$

Se aprecia que la sumatoria desde j=1 hasta NE indica suma sobre todos los NE elementos de la superficie, siendo Γ_j la superficie del elemento j. Las variables u^j y q^j representan potenciales y flujos nodales en el elemento j, respectivamente. Esta última ecuación puede simplificarse introduciendo los coeficientes de influencia:

$$c^{i}u^{i} + \sum_{m=1}^{N} \hat{H}^{im}u^{m} = \sum_{j=1}^{NE} G^{ij}q^{j}$$
(1.6)

donde N es el número de nodos, u^m el potencial en el nodo m y q^j representa lo mismo que en la ecuación (1.5). En este caso, los dos miembros de la igualdad no poseen la misma estructura. En la parte izquierda, la sumatoria se extiende sobre los nodos, ya que sólo es posible un único valor del potencial para cada nodo. Sin embargo, la parte derecha mantiene la sumatoria sobre los elementos, puesto que, cuando un nodo pertenece a más de un elemento, puede tener distintos valores de flujo, según pertenezca a un elemento o a otros. Los coeficientes de influencia H^{im} y G^{ij} son:

$$\hat{H}^{im} = \sum_{t} \left\{ \int_{\Gamma_{t}} q * \Phi_{k} d\Gamma \right\}$$

$$G^{ij} = \int_{\Gamma_j} u * \Phi d\Gamma$$

donde $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_N \end{bmatrix}$, la sumatoria sobre t se extiende a todos los elementos a los cuales pertenezca el nodo m, y k es el número del nodo m dentro del elemento t. Para elementos constantes, la sumatoria se extiende a un elemento, t=j, $\Phi_k = 1$, N=NE y:

$$\hat{H}^{im} = \int_{\Gamma_{mt}} q^* d\Gamma$$
$$G^{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma$$

Para expresar la ecuación (1.6) de forma matricial, se cambia la notación:

$$H^{im} = \hat{H}^{im}, para \quad i \neq m$$

 $H^{im} = \hat{H}^{im} + c^{i}, para \quad i = m$

con lo que la expresión (1.6) queda como:

$$\sum_{m=1}^{N} H^{im} u^m = \sum_{j=1}^{NE} G^{ij} q^j$$
(1.7)

De forma matricial:

HU = GQ

donde H es una matriz NxN, G es NxNNE, U es un vector Nx1 y Q es otro vector NNEx1, siendo NNE el producto del número de elementos por el número de nodos por elemento.

En esta ecuación, son N las incógnitas presentes, una por nodo: o bien potencial o bien flujo. Para resolver el sistema de ecuaciones, se trasladan todas las incógnitas a la parte izquierda de la ecuación, desplazando las columnas de H y G de un lado a otro. De este modo, la nueva estructura será:

AX = F

donde X representa el vector incógnita, y F se obtiene como producto de las columnas correspondientes de los valores conocidos de u o q.

1.3 PUNTOS INTERNOS

La formulación matemática del método no experimenta ningún cambio. Una vez conocidos los valores de las variables en el contorno, la magnitud del potencial en puntos internos se evalúa empleando la ecuación (1.1), con $c^{i}=1$.

$$u^{i} = \int_{\Gamma} u^{*} q d\Gamma - \int_{\Gamma} q^{*} u d\Gamma$$
(1.8)

Si se utiliza la misma discretización para las integrales de contorno, se obtiene:

$$u^{i} = \sum_{j=1}^{NE} G^{ij} q^{j} - \sum_{m=1}^{N} \hat{H}^{im} u^{m}$$
(1.9)

la cual permite evaluar uⁱ en términos de los valores conocidos de potencial y flujo en los nodos del contorno. Para hallar el valor del flujo en puntos internos en las tres dirección, se deriva la ecuación (1.8):

$$q_k^{\ i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^i = \int_{\Gamma} q\left(\frac{\partial u^*}{\partial x_k}\right)^i d\Gamma - \int_{\Gamma} u\left(\frac{\partial q^*}{\partial x_k}\right)^i d\Gamma \ ; \ k = 1,2,3$$
(1.10)

Las integrales sobre el contorno se discretizan sobre integrales sobre los elementos:

$$q_{k}^{i} = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_{j}} \frac{\partial u^{*}}{\partial x_{k}} \Phi d\Gamma \right\} q^{j} - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_{j}} \frac{\partial q^{*}}{\partial x_{k}} \Phi d\Gamma \right\} u^{j}$$
(1.11)

Los integrandos son derivadas de la solución fundamental u* y su flujo:

$$u^{*} = \frac{1}{4\pi r} e^{-i\frac{\omega r}{c}}$$
(1.12)

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_k} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} \right) e^{-i\frac{\omega r}{c}} r_{,k}$$
(1.13)

$$\frac{\partial q^*}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{3}{r^3} + \frac{3i\omega}{cr^2} - \frac{\omega^2}{c^2 r} \right) \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} - \left(\frac{1}{r^3} + \frac{i\omega}{cr^2} \right) n_k \right] e^{-i\frac{\omega r}{c}}$$
(1.14)

Empleando una cuadratura gaussiana estandar es posible evaluar numéricamente la expresión (1.11) una vez introducidas las ecuaciones (1.13) y (1.14) en la misma. Se aprecia que, mientras 'i' represente un punto interno, no aparece singularidad en los integrandos.

1.4 EVALUACIÓN DE LAS INTEGRALES

El cálculo de los coeficientes de las matrices G y H requiere la resolución de integrales del tipo:

$$\int_{\Gamma_j} u^* \phi_k d\Gamma \quad y \quad \int_{\Gamma_j} q^* \phi_k d\Gamma \tag{1.15}$$

Si el punto de colocación 'i' no se encuentra sobre el elemento de integración 'j', las integrales se evalúan por medio de una cuadratura gaussiana estandar. La integración numérica viene dada en función de las coordenadas homogéneas ξ_1 y ξ_2 . Para transformar el diferencial de superficie en el sistema cartesiano d Γ al sistema de coordenadas homogéneas, es necesario un cambio de coordenadas, el cual puede resumirse en el siguiente diferencial de área:

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = \left| G \right| d\xi_1 d\xi_2$$
(1.16)

donde G representa el jacobiano de la transformación, y su magnitud |G| se obtiene a partir del módulo del vector normal al punto.



Fig.1.3 Transformación de coordenadas para la integración numérica

Las coordenadas x_1 , x_2 y x_3 , componentes del vector **r**, vienen dadas en términos de las coordenadas nodales:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{x} \boldsymbol{j} \tag{1.17}$$

En este caso:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_{k}} = \begin{cases} \frac{\partial x_{1}}{\partial \xi_{k}} \\ \frac{\partial x_{2}}{\partial \xi_{k}} \\ \frac{\partial x_{3}}{\partial \xi_{k}} \end{cases} = \frac{\partial x}{\partial \xi_{k}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{k}} x^{j}$$
(1.18)

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_{1}} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_{2}} = \begin{cases} \frac{\partial x_{2}}{\partial \xi_{1}} \frac{\partial x_{3}}{\partial \xi_{2}} - \frac{\partial x_{3}}{\partial \xi_{1}} \frac{\partial x_{2}}{\partial \xi_{2}} \\ \frac{\partial x_{3}}{\partial \xi_{1}} \frac{\partial x_{1}}{\partial \xi_{2}} - \frac{\partial x_{1}}{\partial \xi_{1}} \frac{\partial x_{3}}{\partial \xi_{2}} \\ \frac{\partial x_{1}}{\partial \xi_{1}} \frac{\partial x_{2}}{\partial \xi_{2}} - \frac{\partial x_{2}}{\partial \xi_{1}} \frac{\partial x_{1}}{\partial \xi_{2}} \end{cases} = \begin{cases} g_{1} \\ g_{2} \\ g_{3} \end{cases}$$
(1.19)

$$|G| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \tag{1.20}$$

Es posible obtener la expresión de G en función de las coordenadas homogéneas, sustituyendo la ecuación (1.17) en (1.19):

$$\frac{\partial x_l}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_k} x_l^{\ j} ; \ k = 1,2; \ l = 1,2,3$$

$$(1.21)$$

$$(1 \times Q)(Q \times 1)$$

El segundo miembro representa el producto de dos vectores, de dimensiones (1xQ) y (Qx1), respectivamente, donde Q es el número de nodos del elemento 'j'. Se evalúa a continuación el producto de dos términos de este tipo:

$$\frac{\partial x_l}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_2} = x_l^{jT} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}\right)^T \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi_2}\right) x_m^{j} = x_l^{jT} DC x_m^{j}$$

$$(1 \times Q) (Q \times 1) (1 \times Q) (Q \times 1)$$

$$(1.22)$$

donde:

$$DC = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \phi_Q}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}$$
(1.23)

y el vector G

$$G = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} = \begin{cases} x_2^{\ jT} \begin{bmatrix} DC - DC^T \\ x_3^{\ jT} \end{bmatrix} x_1^{\ j} \\ DC - DC^T \\ x_1^{\ jT} \begin{bmatrix} DC - DC^T \\ DC - DC^T \end{bmatrix} x_2^{\ j} \end{cases} = \begin{cases} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{cases}$$

$$(3 \times Q)(Q \times Q)(Q \times 3) \quad (3 \times 3)$$

Por tanto, las integrales sobre los elementos pueden escribirse como sigue:

$$\int_{\xi_{2}} \int_{\xi_{1}} u^{*} \phi_{k} |G| d\xi_{1} d\xi_{2}$$

$$\int_{\xi_{2}} \int_{\xi_{1}} q^{*} \phi_{k} |G| d\xi_{1} d\xi_{2}$$
(1.25)

las cuales ya pueden ser evaluadas numéricamente. El límite inferior de dichas integrales es -1 para elementos rectangulares, y 0 para triangulares; el superior es 1 para ambos casos.

Cuando el punto de colocación pertenece al elemento de integración, las integrales sobre los elementos requieren de alguna transformación, que será analizada a continuación. Se subdivide el elemento en regiones triangulares dejando el punto de colocación en uno de los vértices. En el caso de un elemento rectangular con el punto de colocación sobre el punto medio de uno de sus lados; la subdivisión se indica en la siguiente figura:



Fig. 1.4 Subdivisión de elemento rectangular para integración local cuando el punto de colocación coincide con el punto medio de un lado

Una vez subdividido el elemento, se define un nuevo sistema de coordenadas s_1 , s_2 , verificando que el valor del jacobiano en el punto de colocación es nulo. Los vértices de los triángulos se denotan como 1 (punto de colocación), 2 y 3, y el dominio transformado en el sistema s_1 , s_2 , es un cuadrado, como se aprecia en la figura. La relación entre s_1 , s_2 , y ξ_1 , ξ_2 , es la siguiente:

$$\xi_{i} = (1 - s_{1})\xi_{i}^{1} + s_{1}(1 - s_{2})\xi_{i}^{2} + s_{1}s_{2}\xi_{i}^{3} \quad para \ i = 1,2$$
(1.26)

El diferencial de superficie sería:

$$d\xi_1 d\xi_2 = |J_2| ds_1 ds_2 \tag{1.27}$$

siendo la magnitud del jacobiano:

$$\left|J_{2}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_{1}}{\partial s_{1}} & \frac{\partial \xi_{1}}{\partial s_{2}} \\ \frac{\partial \xi_{2}}{\partial s_{1}} & \frac{\partial \xi_{2}}{\partial s_{2}} \end{vmatrix}$$
(1.28)

donde A es el área del triángulo en las coordenadas planas adimensionales ξ_1 , ξ_2 . Se aprecia que $|J_2|=0$ cuando $s_1=0$ (lado 1-4). No se ha impuesto ninguna restricción a las coordenadas ξ_1 , ξ_2 , por lo que la transformación utilizada puede ser utilizada para subdominios definidos sobre elementos rectangulares o triangulares con coordenadas naturales ξ_1 , ξ_2 .

Para aplicar la cuadratura gaussiana, el domino rectangular en el sistema s_1 , s_2 , se transforma en un cuadrado de lado 2 (Fig. 1.4.e) empleando un nuevo cambio de coordenadas:

$$s_i = \frac{t_i + 1}{2}$$
 para $i = 1,2$ (1.29)

$$ds_1 ds_2 = |J_3| dt_1 dt_2 = \frac{1}{4} dt_1 dt_2$$
(1.30)

Ya es posible, por tanto, evaluar las integrales (1.25) en el dominio t_1 , t_2 , por medio de la cuadratura gaussiana:

$$G = \sum_{N^{\circ} triángulos} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} u^{*}(t_{1}, t_{2}) \phi_{k}(t_{1}, t_{2}) |G(t_{1}, t_{2})| (t_{1} + 1) \frac{A}{4} dt_{1} dt_{2}$$
(1.31)

Por último, destacar que, cuando el punto de colocación se encuentre en el punto medio de un elemento rectangular o el punto medio de un lado de un elemento triangular, la subdivisión se lleva a cabo como se indica en la siguiente figura:



Fig. 1.5 Subdivisión de elemento triangular y rectangular

1.5 APLICACIÓN A PRESAS BÓVEDA

Considérese el caso de una presa bóveda ubicada en un cañón de simetría conocida y solicitada por una acción sísmica, tal y como indica la figura 1.6:



Fig. 1.6 Descripción del problema

Se pretende estudiar el campo de desplazamientos de la presa. Para ello, se considera que, tanto la presa como la base rocosa donde se asienta son materiales

viscoelásticos, como ya se especificó en el capítulo 2, con lo que la representación integral para un punto 'i' del contorno Γ sería:

$$\boldsymbol{c}^{i}\boldsymbol{u}^{i} + \int_{\Gamma} \boldsymbol{t}^{*}\boldsymbol{u}d\Gamma = \int_{\Gamma} \boldsymbol{u}^{*}\boldsymbol{t}d\Gamma$$
(1.32)

siendo **u** y **t** el campo de desplazamientos y tensiones, respectivamente, y **u*** y **t***, la solución fundamental correspondiente a una carga puntual en el semiespacio.

El agua se considera fluido compresible no viscoso, sometido a pequeñas oscilaciones. La representación integral para este medio quedaría como:

$$c^{i}p^{i} + \int_{\Gamma_{w}} \frac{\partial p^{*}}{\partial \mathbf{n}} p d\Gamma = \int_{\Gamma_{w}} p^{*} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma$$
(1.33)

donde p representa la presión hidrodinámica, p* la solución fundamental en el semiespacio de dicha variable, Γ_w el contorno mojado excluyendo la superficie libre, y **n** el vector unitario normal. Según se ha explicado, la ecuación (1.32) genera un sistema de ecuaciones, una vez se discretice el problema:

Hu = Gt

De la expresión (1.33) se obtiene:

$$\mathbf{H}^{w}\mathbf{p} = \mathbf{G}^{w} \,\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{n}}$$

siendo **p** y $\partial \mathbf{p}/\partial \mathbf{n}$ vectores cuyos elementos son los valores nodales de p y $\partial \mathbf{p}/\partial \mathbf{n}$.

Se está entonces ante un sistema de ecuaciones acoplado que, junto con las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en las interfases del problema (capítulo 2, apartado 1), permite ser resuelto (véase, p.e. Maeso, Aznárez y Domínguez (2002)).

2. TRANSFORMADA DE FOURIER

2.1 LA INTEGRAL DE FOURIER

Una de las herramientas fundamentales para la resolución de numerosos problemas científicos es la transformada de Fourier. Posiblemente, la principal aplicación de esta técnica matemática es el análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo.

La integral de Fourier se define como:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$$
(2.1)

Si la integral existe para cada valor del parámetro ω , entonces la ecuación (2.1) define H(ω), la transformada de Fourier de h(t). En general, la transformada de Fourier es una cantidad compleja:

$$X(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = |X(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$
(2.2)

donde:

 $R(\omega)$ es la parte real de la transformada de Fourier,

 $I(\boldsymbol{\omega})$ es la parte imaginaria de la transformada de Fourier

 $|X(\omega)|$ es la amplitud o espectro de Fourier de h(t), dado por:

$$|X(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

 $\theta(\omega)$ es la ángulo de fase de la transformada de Fourier, dado por:

$$\theta(\omega) = \arctan(\frac{I(\omega)}{R(\omega)})$$

2.2 LA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER

Se define por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
(2.3)

Esta expresión permite hallar una función del tiempo a partir de su transformada. Si las funciones $x(t) y X(\omega)$ están relacionadas por las ecuaciones (2.1) y (2.3), se dice entonces que forman un par.

2.3 EXISTENCIA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

Hasta este punto no se ha considerado la validez de las ecuaciones (2.1) y (2.3). Sin embargo, la existencia de la transformada de Fourier requiere una serie de condiciones:

· *Condición 1*. Si h(t) es integrable en el sentido $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ (2.4), entonces su transformada H(ω) existe y satisface la transformada inversa de Fourier (Ec.(2.3)).

La condición 1 es suficiente pero no necesaria para la existencia de la transformada de Fourier. De hecho, se pueden encontrar funciones que no satisfacen esta condición, y sin embargo poseen transformada inversa.

· *Condición 2.* Si h(t)= β (t)sen(ω t+ α), donde ω y α son constantes arbitrarias, si β (t+k)< β (t), y si para $0<\lambda<|t|$, la función h(t)/t es absolutamente integrable en el sentido de la ecuación (2.4), entonces H(ω) existe y satisface la transformada inversa de Fourier (Ec.(2.3)).

Es decir, toda función definida por una curva de magnitud finita en cualquier intervalo finito satisface estas dos últimas condiciones. Con la siguiente condición se extiende la teoría a funciones singulares, tales como funciones impulso. · *Condición 3*. Si h(t) es una función periódica o impulso, entonces H(ω) existe solamente si se introduce la teoría de distribución. La función impulso $\delta(t)$ se define como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = x(t_0)$$
(2.5)

donde x(t) es una función arbitraria continua en t₀.

2.4 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Las propiedades de las que disfruta la transformada de Fourier son:

· *Linealidad*. Si x(t) e y(t) tienen como transformadas de Fourier X(ω) e Y(ω), respectivamente, entonces la suma x(t)+y(t) tiene como transformada de Fourier X(ω)+Y(ω).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) + y(t) \right] e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = X(\omega) + Y(\omega)$$
(2.6)

· *Simetría*. Si h(t) y H(ω) forman un par de transformada de Fourier, entonces la transformada de Fourier de H(t) es h(- ω).

$$h(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Intercambiando los parámetros: $h(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{-i\omega t} dt$

· *Escalas de tiempo y frecuencia*. Si la transformada de Fourier de h(t) es H(ω), entonces la transformada de Fourier de h(kt), donde k es una constante real mayor que cero, viene dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(kt)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t')e^{-i\omega t'/k} \frac{dt'}{k} = \frac{1}{k}H(\frac{\omega}{k})$$
(2.7)

Para k<0, el resultado sería: $\frac{1}{|k|}H(\frac{\omega}{k})$

Se aprecia la relación inversa existente entre ambas variables, tiempo y frecuencia.

· *Traslación temporal*. Si h(t) se traslada una constante t_0 , entonces, su transformada de Fourier adopta la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-t_0)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-i\omega(s+t_0)} ds = e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-i\omega s} ds = e^{-i\omega t_0} H(\omega)$$

· *Traslación en frecuencia*. Si H(ω) se traslada una constante ω_0 , entonces, su transformada inversa de Fourier adopta la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} H(s) e^{i\omega(s + \omega_0)} ds = e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} H(s) e^{i\omega s} ds = e^{i\omega_0 t} h(t)$$

· *Funciones pares*. Si $h_p(t)$ es una función par, entonces $h_p(t)=h_p(-t)$, y la transformada discreta de Fourier de $h_p(t)$ es una función par y real:

$$h_p(k) \quad \longleftrightarrow \quad R_p(n) = \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t) \cos(\omega t) dt$$

 \cdot *Funciones impares.* Si h_i(t) es una función impar, entonces h_i(t)=-h_i(-t), y la transformada discreta de Fourier de h_i(t) es una función impar e imaginaria:

h_i(k)
$$\longleftarrow$$
 $jI_i(n) = -j \int_{-\infty}^{\infty} h_i(t) sen(\omega t) dt$

2.5 CONVOLUCIÓN Y CORRELACIÓN

· Convolución integral. Viene dada por la siguiente expresión:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau) d\tau = x(t) * h(t)$$
(2.8)

La función y(t) es la convolución de las funciones x(t) y h(t).

• *Teorema tiempo-convolución*. Probablemente, una de las herramientas más poderosas en el análisis científico es la relación entre la convolución integral (2.8) y su transformada de Fourier. Esta relación, conocida como Teorema tiempo-convolución, permite calcular la convolución de una función multiplicando en el dominio de la frecuencia las funciones transformadas que la componen.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty t} h(t-\tau)x(\tau)d\tau \right] e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty t} h(t-\tau)e^{-i\omega t} dt \right] d\tau$$

El cambio de variable σ =t- τ , permite transformar el término entre corchetes:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i\omega\tau} H(\omega) d\tau = H(\omega) X(\omega)$$
(2.9)

· *Teorema frecuencia-convolución*. De forma equivalente, puede demostrarse que, una función $Y(\omega)$ producto de la convolución de $X(\omega)$ y $H(\omega)$ ($Y(\omega)=X(\omega)*H(\omega)$) tiene una transformada inversa y(t) dada por: y(t)=x(t)h(t)

· *Teorema de Correlación*. Otra definición integral de gran importancia es la correlación integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau) f(\tau) d\tau$$
(2.10)

Puede apreciarse la estrecha relación entre la convolución y la correlación. El par de transformadas sería:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau) f(\tau) d\tau \quad \longleftrightarrow \qquad X(\omega) = H(\omega) F^*(\omega)$$

2.6 SERIES DE FOURIER

Las series de Fourier pueden estudiarse teóricamente como caso particular de la integral de Fourier. Una función periódica y(t) con periodo T_0 , expresada por una serie de Fourier, viene dada por:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t) \right]$$
(2.11)

donde ω_0 es la frecuencia fundamental, igual a $2\pi/T$. Los coeficientes pueden ser obtenidos a partir de las siguientes expresiones:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$
(2.12)

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) sen(n\omega_0 t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
(2.13)

De forma compleja, utilizando la fórmula de Euler, y(t) puede expresarse como:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n - jb_n] e^{n\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{n\omega_0 t}$$
(2.14)

donde:
$$\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-n\omega_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$
 (2.15)

2.7 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Puede demostrarse que, a partir de la definición de serie de Fourier y transformada de Fourier, se obtiene la expresión de la transformada discreta de Fourier de una función h(kT), siendo T el intervalo de muestreo:

$$H(\frac{n}{NT}) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-j2\pi nk/N}, \quad n = 0, 1, ..., N-1$$

La expresión relaciona N muestreos en el espacio temporal con N muestreos en el espacio de frecuencia. Puede comprobarse que el valor de H(n/NT) es igual al valor de H correspondiente a la frecuencia (rN+n)/NT, de ahí que se trabaje con una serie limitada: H(n/NT) = H[(rN+n)/NT], con r=0, ±1, ±2,...

2.8 TRANSFORMADA DISCRETA INVERSA DE FOURIER

Se expresa del siguiente modo:

$$g(kT) = \sum_{k=0}^{N-1} G(\frac{n}{NT}) e^{j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, ..., N-1$$

De igual manera, también esta definición contempla la periodicidad propia de la Transformada de Fourier: g(kT)=g[(rN+k)T], con r=0, ±1, ±2,...

2.9 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Las propiedades de las que disfrutaba la transformada de Fourier, vistas en el apartado 2.4, también se extienden a la transformada discreta:

· *Linealidad*. Si x(k) e y(t) poseen transformada discreta de Fourier X(n) e Y(n), respectivamente, entonces la transformada discreta de Fourier de x(k)+y(k) es X(n)+Y(n), es decir:

 $x(k)+y(k) \quad \longleftarrow \quad X(n)+Y(n)$

 \cdot Simetría. Si h(k) y H(n) forman un par de transformada discreta de Fourier, entonces:

 $1/N \cdot H(k)$ \leftarrow h(-n)

· Traslación temporal. Si h(k) se traslada una cantidad entera i, entonces:

h(k-i)
$$\longleftrightarrow$$
 H(n)e^{-j2\pi ni/N}

 \cdot *Traslación en frecuencia.* Si H(n) se traslada una cantidad entera i, entonces su transformada inversa de Fourier aparece multiplicada por e^{j2πni/N}:

h(k)
$$e^{-j2\pi ni/N}$$
 \longleftrightarrow H(n-i)

· *Funciones pares.* Si $h_p(k)$ es una función par, entonces $h_p(k)=h_p(-k)$, y la transformada discreta de Fourier de $h_p(k)$ es una función par y real:

h_p(k)
$$\leftarrow$$
 $R_p(n) = \sum_{n=0}^{N-1} h_p(k) \cos(\frac{2\pi nk}{N})$

 \cdot *Funciones impares*. Si h_i(k) es una función impar, entonces h_i(k)=-h_i(-k), y la transformada discreta de Fourier de h_i(k) es una función impar e imaginaria:

$$h_i(k)$$
 \longleftrightarrow $jI_i(n) = -j\sum_{n=0}^{N-1} h_i(k)sen(\frac{2\pi nk}{N})$

2.10 CONVOLUCIÓN Y CORRELACIÓN DISCRETA

· Teorema tiempo-convolución. La convolución discreta se define como:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(k-i)$$

donde x(k), h(k) e y(k) son funciones periódicas con periodo N.

El Teorema tiempo-convolución, en la transformada discreta de Fourier, se expresa como:

Convendría demostrar este teorema:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(k-i) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)e^{j2\pi ni/N} \cdot \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} H(m)e^{j2\pi n(k-i)/N} =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} X(n)H(m)e^{j2\pi nk/N} \cdot \frac{1}{N} \left[\sum_{i=0}^{N-1} e^{j2\pi in/N} e^{-j2\pi in/N} \right] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)H(n)e^{j2\pi nk/N}$$

El último corchete representa la relación de ortogonalidad, y es igual a N, si m=n. De este modo, la transformada discreta de la convolución de dos funciones periódicamente muestreadas, con periodo N, es igual al producto de las transformadas discretas de Fourier de las funciones periódicas.

· Teorema Frecuencia-convolución. Se resume en:

$$\mathbf{x}(\mathbf{k})\mathbf{h}(\mathbf{k}) \quad \longleftarrow \quad Y(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X(i) H(n-i)$$

$$Y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} X(i)H(n-i) = \sum_{i=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{-j2\pi m i/N} \right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{N-1} h(k)e^{-j2\pi k(n-i)/N} \right] =$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}x(m)h(k)e^{-j2\pi kn/N}\cdot\left[\sum_{i=0}^{N-1}e^{-j2\pi ni/N}e^{j2\pi ki/N}\right]=N\sum_{k=0}^{N-1}x(k)h(k)e^{-j2\pi nk/N}$$

· Teorema de Correlación. La correlación discreta se define como:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(k+i)$$

donde y(k), x(k) y h(k) son funciones periódicas con periodo N. Se demuestra que:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(k+i) \quad \bigstar \qquad X^*(n)H(n)$$

3. TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)

3.1 INTRODUCCIÓN

El algoritmo de la FFT permite calcular de forma simple y altamente eficaz la transformada discreta de Fourier. El algoritmo fue elaborado en la década de los 60 por Cooley-Tukey, y desde entonces, no ha hecho más que aumentar el número de campos en el que es posible aplicarlo.

Por sencillez, se utilizará un ejemplo formulado matricialmente para explicarlo, así como los denominados diagramas de flujo, que permiten una rápida visualización del algoritmo.

3.2 FORMULACIÓN MATRICIAL

Considérese la transformada discreta de Fourier:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) e^{-j2\pi nk/n}, \quad n = 0, 1, 2, ..., N-1$$
(3.1)

donde se ha sustituido kT por K y n/NT por n, por notación. Se aprecia que la ecuación (3.1) supone el cálculo de N ecuaciones. Por ejemplo, si se hace N=4, y se denomina $W=e^{-j2\pi/N}$, entonces la expresión (3.1) puede escribirse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} \\ W^{0} & W^{1} & W^{2} & W^{3} \\ W^{0} & W^{2} & W^{4} & W^{6} \\ W^{0} & W^{3} & W^{6} & W^{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0}(0) \\ x_{0}(1) \\ x_{0}(2) \\ x_{0}(3) \end{bmatrix}$$
(3.2)

De forma compacta: $X(n) = W^{nk} x_0(k)$

Examinando la expresión (3.2), se aprecia que se necesitan N^2 multiplicaciones complejas y N(N-1) sumas complejas, ya que tanto **W** como $\mathbf{x}_0(\mathbf{k})$ pertenecen al campo complejo. El algoritmo de la FFT debe su éxito al hecho de que reduce el número de multiplicaciones y sumas.

Para ilustrar este algoritmo, conviene elegir un número de muestras de $x_0(k)$ que verifique la relación N=2^{γ}, donde γ es entero. Esta restricción puede ser eliminada con otro algoritmo, pero no será tratado en este capítulo, por no necesitarse en el desarrollo del proyecto.

Si se continúa con el ejemplo propuesto, $N=4=2^2$, con lo que se verifica la condición impuesta.

Conviene rescribir la expresión (3.2):

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix}$$
(3.3)

Esta simplificación se debe a la periodicidad de las funciones senoidales. Por ejemplo, se verifica que $W^6=W^2$:

$$W^{nk} = W^{6} = e^{\left[\left(\frac{-j2\pi}{4}\right)(6)\right]} = e^{-j3\pi} = e^{-j\pi} = e^{\left[\left(\frac{-j2\pi}{4}\right)(2)\right]} = W^{2}$$

A continuación, se descompone la matriz en otras dos, de modo que su producto resulte ser la original:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix}$$
(3.4)

El producto de estas dos matrices cuadradas es la matriz cuadrada de la ecuación (3.3), con la excepción de tener las filas 1 y 2 intercambiadas (las filas se han numerado como 0, 1, 2 y 3). Desarrollando el producto de la derecha, se obtiene:

$\left\lceil X(0) \right\rceil$	=	$\begin{bmatrix} x_2(0) \end{bmatrix}$		1	W^0	0	0	$\begin{bmatrix} x_1(0) \end{bmatrix}$
X(2)		$x_2(1)$		1	W^2	0	0	$x_1(1)$
X(1)		$x_{2}(2)$		0	0	1	W^1	$x_1(2)$
$\lfloor X(3) \rfloor$		$x_{2}(3)$		0	0	1	W^3	$\lfloor x_1(3) \rfloor$

El elemento $x_1(0)$, al igual que $x_1(1)$, se debe a un producto complejo y a una suma compleja:

$$x_1(0) = x_0(0) + W^0 x_0(2)$$

Sin embargo, los términos $x_1(2)$ y $x_1(3)$ sólo necesitan una suma compleja, ya que W^0 =- W^2 :

$$x_1(2) = x_0(0) + W^2 x_0(2) = x_0(0) - W^0 x_0(2)$$

Por último, y siguiendo el mismo razonamiento anterior, los términos $x_2(0)$ y $x_2(2)$ de la matriz incógnita se determinan a partir de una multiplicación y una suma compleja:

$$x_2(0) = x_1(0) + W^0 x_1(1)$$

Mientras que $x_2(1)$ y $x_2(3)$ sólo necesitan una suma compleja, puesto que $W^0=-W^2$ y $W^1=-W^3$:

$$x_1(2) = x_0(0) + W^2 x_0(2) = x_0(0) - W^0 x_0(2)$$

En resumen, el cálculo de X(n) mediante la ecuación (3.4) requiere un total de 4 productos y 8 sumas complejas, mientras que con la expresión (3.2) son necesarias 16 productos y 12 sumas complejas. Esta reducción en el número de operaciones se debe al proceso de factorización de la matriz, encargado de introducir ceros, que son los que, a la postre, simplifican el cálculo. Para este ejemplo, la factorización reduce el número de multiplicaciones por un factor 2. Puesto que el tiempo de computación se debe en gran medida al número de operaciones requeridas, ya es posible apreciar la eficiencia del algoritmo de la FFT.

Para N= 2^{γ} , la FFT es simplemente un procedimiento que factoriza una matriz NxN en γ matrices NxN, de modo tal que cada matriz factorizada posee la propiedad de minimizar el número de multiplicaciones y sumas complejas. Si se extrapolan los resultados del ejemplo anterior, se aprecia que el algoritmo requiere efectuar N $\gamma/2=4$ multiplicaciones complejas, y N $\gamma=8$ sumas complejas, mientras que el método directo (3.2) necesita N² multiplicaciones complejas y N(N-1) sumas complejas. Si se asume que el tiempo computacional es proporcional al número de multiplicaciones, el factor de tiempo requerido por el método directo frente al de la FFT viene dado por:

$$\frac{N^2}{N\gamma/2} = \frac{2N}{\gamma}$$

Para N=1024 = 210, se reduce en más de 200 veces el tiempo de computación. La figura 3.1 ilustra la relación entre el número de multiplicaciones requerido por la FFT, comparado con el necesitado por el método directo.



Fig. 3.1 Comparación entre las multiplicaciones requeridas por el método directo y el algoritmo de la FFT

El proceso de factorización introduce una alteración del orden de X(n), es decir:

$\left[X(0) \right]$		$\begin{bmatrix} X(0) \end{bmatrix}$
X(2)	en vez de	X(1)
X(1)		X(2)
$\lfloor X(3) \rfloor$		X(3)

Esta reasignación es inherente al proceso de factorización, pero no llega a ser un obstáculo grave, ya que existen numerosas técnicas muy eficientes que reordenan los términos del vector. La más sencilla y empleada es la que traduce el subíndice de cada término a su correspondiente número binario. Así:

$\begin{bmatrix} X(0) \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} X(00) \end{bmatrix}$
X(2)	se convierte en	X(10)
X(1)		<i>X</i> (01)
[X(3)]		X(11)

Si el argumento binario se invierte, se obtiene el argumento binario original, es decir, (10) se transforma en (01), que equivale a 1:

$\left\lceil X(00) \right\rceil$		$\left\lceil X(00) \right\rceil$		$\left\lceil X(0) \right\rceil$
X(10)	después de la inversión pasa a	X(01)		X(1)
X(01)		X(10)		X(2)
X(11)		X(11)		<i>X</i> (3)

3.3 DIAGRAMA DE FLUJO

La mejor forma de visualizar el algoritmo es mediante el diagrama de flujo, tal y como muestra la figura 3.2.



Fig. 3.2. Diagrama de flujo del algoritmo FFT para N=4

El diagrama se interpreta como sigue. A cada nodo llegan dos líneas, que representan los coeficientes de transmisión de los nodos previos. Cada flecha de flujo transmite una cantidad desde un nodo de una matriz, multiplicado por una cantidad W^p , e introduce el resultado en el nodo de la siguiente matriz. El factor W^p aparece próximo a la cabeza de la flecha. Se omite cuando $W^p=1$. Las cantidades que llegan a cada nodo se suman. Como ejemplo valga el término $x_1(2)$. De acuerdo con lo comentado previamente:

$$x_1(2) = x_0(0) + W^2 x_0(2)$$

Cada columna computacional del gráfico corresponde a una matriz factorizada. Se contará entonces con γ vectores de N puntos cada uno (N=2 $^{\gamma}$). El empleo de esta representación gráfica permite describir de forma sencilla el proceso de factorización para valores de N grandes. Así, en la figura 3.3. se representa el diagrama de flujo para N=16.


Fig. 3.3. Diagrama de flujo para N=16

3.4 NODOS DUALES

La inspección de la figura 3.3. revela que, en cada vector, podemos encontrar siempre dos nodos cuyas entradas proceden del mismo par de nodos. Por ejemplo, los nodos $x_1(0)$ y $x_1(8)$ se calculan a partir de los nodos $x_0(0)$ y $x_0(8)$. Se aprecia que los nodos $x_0(0)$ y $x_0(8)$ no se emplean como entrada en ningún otro cálculo. Estos dos nodos se definen como par de nodos duales.

Puesto que la computación de un par de nodos duales es independiente de los otros nodos, es posible mejorar el rendimiento del algoritmo. Para ilustrarlo, obsérvese que se puede calcular simultáneamente $x_1(0)$ y $x_1(8)$ en términos de $x_0(0)$ y $x_0(8)$, almacenar el resultado donde antes se encontraba $x_0(0)$ y $x_0(8)$. Así, el espacio de

memoria requerido está determinado por el vector $x_0(k)$ exclusivamente, ahorrándose de este modo gran cantidad de memoria.

3.5 CÁLCULO DE W^P

El valor de p se determina siguiendo el siguiente proceso:

 \cdot Se escribe el índice k en forma binaria, con γ bits

 \cdot Se desplaza este número binario γ -l bits a la derecha, y se rellena los huecos aparecidos a la izquierda con ceros

· Se invierte el orden de los bits empleando simetría. El número resultante es p

Considérese como ejemplo el nodo $x_3(8)$. Como $\gamma=4$, k=8 y l=3, entonces:

 \cdot k=8 equivale a 1000 en binario

· Se desplazan los dígitos una cantidad dada por γ -l=1, con lo que queda 0100

 \cdot Se invierte el orden, resultando 0010, con lo que p=2, como muestra la figura

3.3.

3.6 REORDENAMIENTO DEL VECTOR ORIGINAL

Este es el último paso del algoritmo. Consiste en escribir el índice en binario e invertirlo a base de simetría. La figura 3.4 resume lo comentado, para el caso en que N=16.



Fig 3.4. Ejemplo de la operación de inversión de bits para N=16

3.7 DIAGRAMA DE BLOQUES DEL ALGORITMO FFT

La siguiente figura podría describir la secuencia como diagrama de bloques del algoritmo FFT:



Fig. 3.5. Diagrama de bloques del algoritmo FFT

3.8 DESARROLLO TEÓRICO DEL ALGORITMO EN BASE 2

Considérese la transformada discreta de Fourier definida de la forma:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) W^{nk}, n = 0, 1, 2, ..., N-1$$
(3.5)

donde W=e- $^{j2\pi/N}$. Conviene representar los enteros n y k como números binarios, esto es, si N=4, entonces γ =2, y, en este caso:

$$\begin{split} k &= 0,\,1,\,2,\,3 & \qquad \acute{o} & \qquad k = (k_1,k_0) = 00,\,01,\,10,\,11 \\ n &= 0,\,1,\,2,\,3 & \qquad \acute{o} & \qquad n = (n_1,n_0) = 00,\,01,\,10,\,11 \\ k &= 2k_1 + k_0 & \qquad n = 2n_1 + n_0 \end{split}$$

donde k_0 , k_1 , n_0 y n_1 toman valores de 1 ó 0. Si se utilizan estas expresiones en la ecuación (3.5), ésta adopta la forma:

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^{1} \sum_{k_1=0}^{1} x_0(k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}$$
(3.6)

Se aprecia que el sumatorio que aparecía en la ecuación (3.5) se ha transformado en γ sumatorios. Por otro lado:

$$W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} = W^{(2n_1+n_0)2k_1}W^{(2n_1+n_0)k_0} = \left[W^{4n_1k_1}\right]W^{2n_0k_1}W^{(2n_1+n_0)k_0} = W^{2n_0k_1}W^{(2n_1+n_0)k_0}$$

El término entre corchetes es igual a 1:

$$W^{4n_1k_1} = \left[W^4\right]^{n_1k_1} = \left[e^{-j2\pi 4/4}\right]^{n_1k_1} = 1^{n_1k_1} = 1$$

Así:
$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^{1} \left[\sum_{k_1=0}^{1} x_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1} \right] W^{(2n_1+n_0)k_0}$$
 (3.7)

Esta expresión representa la base del algoritmo de la FFT. Rescribiendo esta ecuación:

$$x_1(n_1, n_0) = \sum_{k_1=0}^{1} x_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1}$$
(3.8)

Para observar la equivalencia entre esta expresión y el desarrollo matricial visto al principio de este apartado, puede enumerarse cada una de las ecuaciones que componen esta igualdad:

$$\begin{split} x_1(0,0) &= x_0(0,0) + x_0(1,0)W^0 \\ x_1(0,1) &= x_0(0,1) + x_0(1,1)W^0 \\ x_1(1,0) &= x_0(0,0) + x_0(1,0)W^2 \\ x_1(1,1) &= x_0(0,1) + x_0(1,1)W^2 \end{split}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0,0) \\ x_0(0,1) \\ x_0(1,0) \\ x_0(1,1) \end{bmatrix}$$

De igual forma para el término $x_2(n_0,n_1)$:

$$x_{2}(n_{1}, n_{0}) = \sum_{k_{0}=0}^{1} x_{1}(n_{0}, k_{0}) W^{(2n_{1}+n_{0})k_{0}}$$
(3.9)

Si se desarrolla esta expresión:

$[x_2(0,0)]$	=	1	W^{0}	0	0	$x_1(0,0)$
$x_2(0,1)$		1	W^2	0	0	$x_1(0,1)$
$x_2(1,0)$		0	0	1	W^1	$x_1(1,0)$
$x_2(1,1)$		0	0	1	W^3	$x_1(1,1)$

Donde se ha aplicado la igualdad: $X(n_1,n_0) = x_2(n_0,n_1)$ (3.10)

La igualdad entre las matrices cuadradas aquí obtenidas y las procedentes de la factorización es evidente. Las ecuaciones (3.8), (3.9) y (3.10) representan la formulación original del algoritmo FFT de Cooley-Tukey para N=4.

CAPÍTULO 4.

CÁLCULO DE LA RESPUESTA

1. RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD. APLICACIÓN A SISTEMAS DE UNO Y DOS GRADOS DE LIBERTAD

1.1. INTRODUCCIÓN

Considérese el sistema dinámico de la figura 1.1, cuya respuesta x(t) es debida a un movimiento sísmico del terreno, de aceleración a(t).



Fig. 1.1. Modelo de un grado de libertad sometido a una excitación sísmica.

Se supone que el sistema tiene *invariancia temporal*, es decir, que si la respuesta producida por una excitación a(t) es u(t), una excitación $a(t+t_0)$ trasladada t_0 proporciona una respuesta $u(t+t_0)$, siendo t_0 una constante arbitraria. Bajo tal supuesto, el movimiento del sistema viene regido por la ecuación diferencial de coeficientes constantes

$$m \cdot u(t) + c \cdot u(t) + k \cdot u(t) = -m \cdot a(t) = f(t)$$

$$(1.1)$$

Los sistemas de un solo grado de libertad tal como el de la figura 1.1 son los modelos dinámicos más simples susceptibles de ser utilizados para analizar el comportamiento dinámico de una estructura. Desde un punto de vista teórico, su aplicación en la resolución de problemas de tipo práctico, está restringida a unos pocos casos, concretamente a aquellos en que la masa está concentrada en un solo punto,

vibrando además dicha masa en una sola dirección. Sin embargo, el estudio de los sistemas de un solo grado de libertad es importante debido al hecho de que en muchos casos, los sistemas más complejos de muchos grados de libertad pueden resolverse por superposición de sistemas simples. De esta forma, en las aplicaciones prácticas, proporcionan una vía aproximada pero sencilla para determinar la respuesta de sistemas estructurales complejos, permitiendo explicar asimismo algunos aspectos fundamentales relacionados con el comportamiento sísmico de tales estructuras. Otro aspecto interesante es que la respuesta puede obtenerse expresando la solución de las ecuaciones del movimiento en forma explícita. Dicha solución, depende de un número reducido de parámetros cuya influencia puede estudiarse con facilidad.

En este capítulo, se resuelve la ecuación del movimiento (1.1) en el dominio del tiempo utilizando el concepto de *respuesta* al *impulso unidad* del sistema y en el campo complejo de la frecuencia el concepto de *función de transferencia* del sistema. Se definen asimismo los espectros sísmicos de respuesta, estudiando métodos numéricos para resolver el problema tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

1.2. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE UN SISTEMA DINÁMICO

La transformada de Fourier de la excitación f(t) y de la respuesta x(t) vienen definidas por:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = -m \int_{-\infty}^{\infty} a(t)e^{-i\omega t} dt = -mA(\omega)$$
(1.2)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$
(1.3)

en donde ω es la frecuencia de excitación y $A(\omega)$ es la transformada de Fourier de la aceleración sísmica a(t). Debido a que tanto en sismología como en ingeniería sísmica las señales de excitación y respuesta f(t) y x(t) son siempre finitas, continuas y acotadas, las integrales (1.2) y (1.3) de sus transformadas de Fourier existen siempre, pudiendo por tanto ser evaluadas. La misma observación puede hacerse respecto de las transformadas inversas de Fourier, las cuales vienen definidas por

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
(1.4)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
(1.5)

La función de transferencia $H(\omega)$ del sistema, formulada en el campo complejo de la frecuencia, se define por

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \tag{1.6}$$

La respuesta compleja en frecuencias se expresa por tanto por

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \tag{1.7}$$

obteniéndose $X(\omega)$ como producto de la transformada de Fourier de la excitación y de la función de transferencia del sistema.

Por otra parte, el teorema de convolución establece que la transformada inversa del producto de dos transformadas de Fourier es igual a la integral de convolución de sus transformadas inversas. Aplicando este teorema a la ecuación (1.7) se obtiene la siguiente ecuación:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega =$$

=
$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) f(\tau) d\tau$$
(1.8)

en donde h(t) es la transformada inversa de Fourier de la función de transferencia compleja $H(\omega)$ del sistema

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
(1.9)

Teniendo en cuenta que h(t) no tiene sentido para t<0 y que la excitación a(t) es una

señal finita, distinta de cero solamente para t>0, la ecuación (1.8) puede escribirse en la forma

$$x(t) = \int_{0}^{t} h(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{t} h(t-\tau) f(\tau) d\tau$$
(1.10)

1.3 HISTORIA EN EL TIEMPO DE LA RESPUESTA SÍSMICA

1.3.1 Respuesta a un impulso unidad

Considérese el sistema de un grado de libertad de la figura 1.1 sometido a un impulso unidad definido como una función delta de Dirac mediante la ecuación

$$\delta(t - t_0) = 0$$
, para t \neq to (t>0) (1.11,a)

$$\int_0^\infty \delta(t - t_0) dt = 1 \tag{1.11,b}$$

Dicha función tiene la propiedad de que

$$\int_{0}^{\infty} \delta(t - t_{0}) f(t) dt = f(t_{0})$$
(1.12)

en donde f(t) es cualquier función dependiente del tiempo. La transformada de Fourier del impulso unidad vale

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt$$
(1.13)

y de acuerdo con (5.12)

$$F(\omega) = 1 \tag{1.14}$$

Por consiguiente, la respuesta compleja $X^{p}(\omega)$ en frecuencias de un sistema

sometido a un impulso unidad vale

$$X^{p}(\omega) = H(\omega)F(\omega) = H(\omega)$$
(1.15)

De aquí se deduce que la transformada de Fourier de la respuesta debida a un impulso delta de Dirac es igual a la función de transferencia compleja del sistema. La respuesta del sistema $x^{p}(t)$ en el dominio del tiempo será igual a la transformada inversa de Fourier de la respuesta compleja del sistema.

$$x^{p}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^{p}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
(1.16)

Utilizando (1.15), la respuesta al impulso unidad se expresa

$$x^{p}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega = h(t)$$
(1.17)

en donde la función de transferencia compleja del sistema

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt$$
(1.18)

es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso unidad. La ecuación (1.17) establece que la transformada inversa h(t) de la función de transferencia compleja es igual a la respuesta del sistema a un impulso unidad.

1.3.2 Respuesta a una excitación cualquiera

Considérese seguidamente que el sistema está sometido a una carga sísmica cualquiera, definida por su aceleración a(t). La respuesta del sistema en desplazamientos se obtiene aplicando la transformada de Fourier a ambos términos de la ecuación (1.1). Suponiendo que inicialmente el sistema está en reposo, se obtiene la siguiente ecuación

algebraica lineal de coeficientes complejos

$$\left[-m\omega^{2} + ic\omega + k\right]X(\omega) = -mA(\omega) = F(\omega)$$
(1.19)

en donde $A(\omega)$ es la transformada de Fourier de la aceleración del terreno y $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de la respuesta. La respuesta en el campo complejo de la frecuencia utilizando (1.19) puede escribirse

$$X(\omega) = \frac{-mA(\omega)}{-m\omega^2 + ic\omega + k} = \frac{F(\omega)}{-m\omega^2 + ic\omega + k}$$
(1.20)

De la comparación de (1.7) con (1.20), resulta que en el caso dinámico más general, la función de transferencia compleja de un solo grado de libertad, adopta la expresión

$$H(\omega) = \frac{1}{m(-\omega^2 + i2\nu\varpi\omega + \varpi^2)}$$
(1.21)

en donde se han utilizado las expresiones: $c = 2v\varpi m$ y $\omega^2 = k/m$

 ϖ es la frecuencia del sistema y v es la fracción del amortiguamiento crítico.

Realizando algunas transformaciones e introduciendo la frecuencia amortiguada del sistema, dada por la expresión:

$$\omega_{\nu} = \varpi \sqrt{1 - \nu^2}$$

la función de transferencia del sistema adopta la siguiente forma:

$$H(\omega) = -\frac{1}{\omega_{v}} \frac{\omega_{v}}{\left[(i\omega + v\varpi)^{2} + \omega_{v}^{2}\right]}$$
(1.22)

Recuérdese que la función de transferencia $H(\omega)$ es la transformada de Fourier de la respuesta del sistema al impulso unidad. La transformada inversa de Fourier h(t) de $H(\omega)$

viene dada por la ecuación (1.9), la cual puede resolverse analíticamente. Por ejemplo, si $H(\omega)$ se expresa mediante (1.22), la respuesta del sistema al impulso unidad puede expresarse en la forma

$$h(t) = -\frac{1}{m\omega_v} e^{-v\omega t} sen[\omega_v t]$$
(1.23)

Por lo que, de acuerdo con (1.10), la respuesta del sistema en el dominio del tiempo se puede formular finalmente como:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_{\nu}} \int_{0}^{t} a(t) e^{-\nu \omega(t-\tau)} sen[\omega_{\nu}(t-\tau)] d\tau$$
(1.24)

La integral (1.24) es conocida con el nombre de integral de Duhamel, y proporciona la respuesta en el dominio del tiempo de un sistema de un solo grado de libertad sometido a una carga cualquiera.

Se llega al mismo resultado si se supone que la excitación está formada por una sucesión de impulsos de igual duración $d\tau$. Para ello, supóngase en primer lugar que actúa un único impulso rectangular de duración $d\tau$ y de intensidad $a(\tau)$, el cual excita el modelo en el instante de tiempo τ . La respuesta para el tiempo t > τ se obtendrá a partir del teorema de convolución (1.10)

$$dx(t) = a(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{1.25}$$

el cual, utilizando (5.23), se expresa

$$dx(t) = \frac{a(\tau)d\tau}{m\omega_{\nu}} e^{-\nu\varpi(t-\tau)} sen\omega_{\nu}(t-\tau)$$
(1.26)

La respuesta total, se obtiene como suma de las contribuciones producidas por cada carga impulsiva individual, es decir integrando la expresión (1.26), con lo cual se llega al mismo resultado (1.24) previamente obtenido.

En el caso particular en que el amortiguamiento del sistema fuera nulo, la respuesta sísmica se simplifica, expresándose mediante la relación

$$x(t) = -\frac{1}{\omega_{v}} \int_{0}^{t} a(t) \operatorname{sen}[\omega_{v}(t-\tau)] d\tau$$
(1.27)

1.3.3 Condiciones iniciales

La respuesta sísmica dada por las ecuaciones (1.24) y (1.27), no considera el efecto de las condiciones iniciales en el sistema. En el caso de que éste no esté en reposo cuando se le aplica la excitación dinámica, es preciso calcular la solución general $x_g(t)$ de la ecuación diferencial (1.1). Dicha solución puede escribirse

$$x_g(t) = x_l(t) + x_p(t)$$

en donde $x_l(t)$ es la solución de la homogénea y $x_p(t)$ una solución particular. La solución $x_p(t)$ se ha obtenido en el párrafo precedente para una carga dinámica cualquiera f(t). Para el caso sísmico, dicha solución viene dada por las expresiones (1.24) o (1.27). La solución $x_l(t)$ describe el comportamiento de un sistema de un grado de libertad amortiguado con vibraciones libres.

$$x_{l}(t) = e^{-\beta t} (c_{1}e^{i\omega_{v}t} + c_{2}e^{-i\omega_{v}t})$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (1.1) se expresará en la forma

$$x_g(t) = e^{-v\omega t} (c_1 sen \omega_v t + c_2 \cos \omega_v t) + x_p(t)$$
(1.28)

en donde se ha utilizado la fórmula de Euler, y se ha tenido en cuenta que $\beta = v \overline{\omega}$. Las constantes c_1 y c_2 dependen de las condiciones iniciales del problema, y pueden escribirse de la forma

$$x(0) = x_0 \qquad x'(0) = x'_0 \tag{1.29}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales en la ecuación (1.28) y su derivada, se obtiene el valor del desplazamiento total, así como la velocidad total. De este modo se calcula el valor de c_1 y c_2 en función de x_0 y x'_0

En el caso sísmico, la aceleración del terreno es nula para el instante de tiempo t=0, y por tanto, como puede deducirse a partir de la ecuación (1.24), $x_p(0)=0$ y $x'_p(0)=0$. Por tanto, los coeficientes c₁ y c₂ se expresarán como

$$c_1 = \frac{x'_0 + v \overline{\omega} x_0}{\overline{\omega}}, \qquad c_2 = x_0 \tag{1.30}$$

por lo que la solución general del sistema amortiguado sometido a vibraciones forzadas puede escribirse de la siguiente forma

$$x_{g}(t) = e^{-\nu \omega t} \left(\frac{x_{0}^{\prime} + \nu \omega x_{0}}{\omega} sen \omega_{v} t + x_{0} \cos \omega_{v} t\right) + \frac{1}{\omega_{v}} \int_{0}^{t} a(t) e^{-\nu \omega (t-\tau)} sen \left[\omega_{v}(t-\tau)\right] d\tau \quad (1.31)$$

Evidentemente, si la excitación se aplica cuando el sistema está en reposo, los términos correspondientes a las vibraciones libres desaparecen de la ecuación (1.31). Asimismo, cuando dicha excitación se aplica durante un tiempo suficientemente largo, las vibraciones libres amortiguadas desaparecen. Por ello, a estos términos de vibración libre se le denomina *respuesta transitoria* del sistema. La respuesta del sistema, algún tiempo después de iniciado el movimiento, se reduce al término de vibraciones forzadas. A dicho término dado por la ecuación (1.24) se le conoce con el nombre de *respuesta estacionaria*. Por otra parte, la frecuencia de las vibraciones forzadas del sistema prácticamente coincide con la frecuencia predominante de vibración de la excitación.

La integral de Duhamel tiene solución analítica solamente para ciertos tipos particulares de funciones que describan la excitación, por lo que en general debe resolverse numéricamente. Por ejemplo, si en la estructura actúa un movimiento de tipo sísmico, la excitación a(t) viene definida en forma discreta por puntos, los cuales forman los picos del acelerograma. En este caso, para el cálculo de dicha integral de Duhamel deben utilizarse procedimientos numéricos, tales como los que se exponen en el siguiente apartado.

1.4 CÁLCULO NUMÉRICO DE LA RESPUESTA EN EL CAMPO COMPLEJO DE LA FRECUENCIA

En el apartado 1.2, se han estudiado los aspectos más importantes relacionados con el cálculo de la respuesta en el campo complejo de la frecuencia. Considérese nuevamente la ecuación del movimiento para un sistema de un solo grado de libertad sometido a una excitación de tipo sísmico

$$m \cdot u(t) + c \cdot u(t) + k \cdot u(t) = -m \cdot a(t) = f(t)$$
(1.1)

La respuesta en frecuencias del sistema viene dada por la ecuación (1.6)

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \tag{1.6}$$

Haciendo uso del hecho de que la excitación a(t) es una señal finita y distinta de cero solamente para t>0, la transformada de Fourier de la excitación definida por la ecuación (1.2), puede expresarse en la forma

$$A(\omega) = -m \int_0^t a(t) e^{-i\omega t} dt$$
(1.32)

mientras que la transformada de Fourier de la respuesta vale

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$$
(1.33)

La respuesta en el tiempo del sistema se obtiene realizando la transformada inversa de Fourier bajo las misma condiciones utilizadas en las ecuaciones (1.32) y (1.33).

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
(1.34)

En ingeniería sísmica la aceleración del terreno a(t) viene dada en forma discreta por sus valores máximos y por sus correspondientes instantes de tiempo. De esta manera, y puesto que en general no se dispone de métodos analíticos, deben ser utilizados procedimientos numéricos. Por ello, la implementación numérica de estos métodos se hizo posible en la práctica solamente después del desarrollo de la *Transformada Rápida de Fourier (FFT)* mediante el algoritmo de Cooley-Tukey, visto en el capítulo 3, apartado 3.

La primera etapa para la evaluación numérica del par de transformadas de Fourier consiste en el desarrollo de la transformada discreta de Fourier directa e inversa (DFT), correspondientes respectivamente a las transformadas directa e inversa de Fourier (1.32) y (1.34). La transformada discreta de Fourier se define por

$$A(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n\Delta\tau) e^{-i\omega n\Delta\tau}$$
(1.35)

$$\omega_c = \frac{\pi}{\Delta \tau} \qquad \qquad \omega \in \left[-\omega_c, \omega_c\right]$$

en donde la excitación sísmica a(t) está muestreada a intervalos regulares $\Delta \tau$. La señal sísmica es finita, esto es 0 < t < T. Si a(t) se muestrea mediante *N* puntos equiespaciados, la transformada discreta limitada de Fourier se define por

$$A_N(k\frac{2\pi}{T}) = \sum_{j=0}^{N-1} a(j\Delta\tau) e^{-i\frac{2\pi}{N}kj}, k = 0, ..., N-1$$

Puede demostrase que el valor de $A_N(k2\pi/T)$ es igual al valor de A_N correspondiente a la frecuencia negativa $(k-N)2\pi/T$ cuando k es mayor que N/2. Por tanto, la transformada discreta de Fourier (1.32) puede determinarse de forma aproximada mediante la transformada discreta limitada de Fourier tal como sigue

$$A(k\frac{2\pi}{T}) \approx \Delta \tau \sum_{j=0}^{N-1} a(j\Delta \tau) e^{-i\frac{2\pi}{N}k_j} = \Delta \tau A_N(k\frac{2\pi}{T}), k = 0, \dots, n \le \frac{N}{2}$$
(1.36)

Recíprocamente, la transformada discreta inversa de Fourier de la respuesta, es decir, la respuesta del sistema en el dominio del tiempo, puede escribirse como

$$x(j\Delta\tau) \approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} A(k\frac{2\pi}{T}) e^{i\frac{2\pi}{N}kj}$$
(1.37)

Puede demostrarse que el par de transformadas discretas, (1.36) y (1.37) son exactamente ciertas cuando a(t) es una función limitada en Banda [- ω_c , ω_c], esto es, $A(\omega)=0$, si $|\omega| \ge \omega_c$.

Existen diferentes algoritmos numéricos eficientes para calcular el par de transformadas discretas de Fourier de una señal finita cualquiera, pero el más comúnmente utilizado consiste en la transformada rápida de Fourier (FFT).

1.5 POSIBLES ERRORES DE LA SOLUCIÓN DE LA DFT

Es evidente que, al discretizar una función continua, se pierde parte de la información que ésta contiene. El intervalo de muestreo $\Delta \tau$ es el primer factor a considerar para que dicha pérdida no suponga una alteración importante de la función original. $\Delta \tau$ deberá ser lo suficientemente pequeño como para que la envolvente de los valores muestreados se solape con la curva de partida.

Considérese la siguiente excitación:



Fig. 1.2 Función excitación

La solución propuesta por la DFT será tanto más precisa cuanto mayor sea la duración de la vibración libre t_f , dado que, cuanto más largo sea este período de tiempo, mayor será el período T_0 , que representa la extensión temporal periódica de la excitación. De este modo, una excitación arbitraria (no periódica) podrá ser considerada como una excitación periódica con período infinito.



Fig. 1.3 Extensión periódica de la excitación con $t_f=4.75T_n(T_0=10.5t_d)$

La influencia del grado de amortiguamiento sobre t_f obliga a tenerlo presente a la hora de elegir el período de la excitación. Así, la respuesta en vibración libre de un sistema con un alto grado de amortiguamiento será breve en el tiempo, con lo que el período de la excitación podrá ser pequeño. En las siguientes figuras es posible apreciar que, ante un grado de amortiguamiento del 5%, una duración de $T_0=10.5t_d$ no proporciona a la respuesta suficiente tiempo como para que se amortigüe, terminando con un desplazamiento significativo y con velocidad no nula, violando así las condiciones de reposo impuestas en este ejemplo.



Fig. 1.4 Respuesta propuesta por la DFT (t_d/T_n=0.5; \zeta=5%)

Sin embargo, para un valor de $T_0=20.5t_d$, se deja que el sistema vibre hasta prácticamente amortiguarse, cumpliendo de esta forma las condiciones iniciales de reposo.



Fig. 1.5 (a) Extensión periódica de la excitación con tf=9.75Tn (T0=20.5td) (b)Respuesta propuesta por la DFT ($t_d/T_n=0.5; \zeta=5\%$)

Si el grado de amortiguamiento se reduce, es de esperar que se necesite un valor de T_0 mayor para dar por válida la respuesta del sistema.

1.6 APLICACIONES DEL ALGORITMO FFT A SISTEMAS DE UNO Y DOS GRADOS DE LIBERTAD

1.6.1 Introducción

En este apartado, se aborda la solución de los sistemas elásticos de uno y dos grados de libertad, resolviéndolos tanto en el campo temporal como en el de la frecuencia. El método de descomposición modal es el más empleado en el cálculo sísmico de estructuras elásticas, pues aparte de su mayor rapidez frente a otros métodos, proporciona una cierta visión conceptual, al proporcionar n formas de desplazamientos independientes. Éstas, llamadas formas modales propias de vibración, o simplemente modos de vibración, sirven además como nuevas coordenadas a las que referir los desplazamientos de respuesta de la estructura. Dicho método permite obtener dos tipos de respuesta:

· La historia en el tiempo, mediante la cual se conoce la respuesta en cada instante de tiempo

· La respuesta máxima, empleando la respuesta espectral

El uso de uno u otro procedimiento depende fundamentalmente de los resultados deseados, teniendo presente que, a mayor cantidad de información corresponde también una mayor necesidad de memoria y de tiempo de cálculo; al mismo tiempo, mucha de la información que proporciona el cálculo de la historia de la respuesta en el tiempo, tiene escaso valor práctico en el diseño de estructuras.

Este método, que es el que sigue la normativa actual, se comparará con la respuesta temporal real que experimentaría la estructura cuando se somete a la misma excitación, concretamente el terremoto de El Centro de 1940 (Chopra, 2001), aplicando el algoritmo de FFT, y se analizará la amplitud máxima de cada grado de libertad. Pero antes, para corroborar los resultados, se solicitará el sistema con un impulso de geometría conocida, y del cual se conoce la respuesta dinámica analítica del sistema.

1.6.2 Sistema de un grado de libertad

El sistema de un grado de libertad que se analizará en este apartado es el representado en la figura. Para apreciar la diferencia entre los dos métodos bajo estudio se ha decidido dar valores numéricos a los componentes de la estructura, en unidades del Sistema Internacional:



Fig. 1.6 Sistema de 1 grado de libertad

Las características del sistema en estudio serían: k = 52.6 N/m EI = 35.1 N/m $c = 2.51 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

m = 1 kgL = 1 m

En un primer estudio, se aplicará a la base un impulso rectangular, y se verificará la solución propuesta por el algoritmo FFT comparándose con la solución analítica. En una segunda fase, se analizará el movimiento del sistema cuando sobre su base actúa el movimiento sísmico de El Centro (1940) (Chopra, 2001).

El programa que incluye el algoritmo FFT, a grandes rasgos, calcula en primer lugar, el espectro en frecuencia de la excitación mediante dicho algoritmo, así como la función de transferencia para cada frecuencia, hasta la denominada frecuencia de Nyquist. Se evalúa el producto de ambos espectros, para cada frecuencia, obteniéndose la respuesta del sistema en frecuencia. Y, por último, a este espectro, se aplica de nuevo el algoritmo para obtener la transformada inversa del mismo, que equivale a la respuesta temporal del sistema. Cabe destacar la gran versatilidad del método, ya que cambiando exclusivamente la excitación es posible conocer de forma inmediata el comportamiento del grado de libertad bajo estudio.

La ecuación que gobierna el movimiento del sistema es:

 $m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = -m \cdot a(t)$

Esta expresión puede ser transformada en otra equivalente:

$$\ddot{u} + 2\xi \omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = -a(t)$$

La dificultad para resolver esta ecuación diferencial aparece cuando la excitación adopta expresiones con una cierta complejidad, de ahí que se pensara en el campo espectral para resolverla de forma rápida y sencilla. El proceso, explicado en el apartado teórico, consiste en sustituir en esta expresión la serie de Fourier correspondiente a cada variable. Así, para cada frecuencia, se verificaría:

$$\omega^{2}U(\omega) + 2\xi\omega_{n}\omega U(\omega) + \omega_{n}^{2}U(\omega) = -A(\omega)$$

El concepto de función de transferencia se introduce a partir de la anterior expresión:

$$U(\omega) = H(\omega) \cdot A(\omega) = \frac{-1}{\omega^2 + 2\xi \omega_n \omega + \omega_n^2} A(\omega)$$

La frecuencia propia de este sistema se obtiene a partir de:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{\frac{3EI}{L^3} + k}{m} = \frac{3\cdot35.1 + 52.6}{1} = 157.9 \implies \omega_n = 12.56 = 4\pi \ rad / seg$$

 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.5 \ seg$

.

1.6.2.1 Excitación: impulso rectangular

La base del sistema es excitada por un impulso rectangular de amplitud a_0 y duración igual al doble del período propio de oscilación, es decir, 1 segundo. Para apreciar la respuesta, se ha elegido $a_0=100$. Así:



Fig. 1.7 Impulso rectangular aplicado a la base

Conocer la respuesta analítica supone resolver la ecuación diferencial de coeficientes constantes que gobierna el movimiento de este sistema. La aplicación de la integral de convolución es uno de los métodos matemáticos capaces de determinar la solución de dicha ecuación:

$$u(t) = A(t)sen4\pi t + B(t)\cos 4\pi t, siendo$$

$$A(t) = -\frac{a_0}{16\pi^2 e^{0.4\pi t}} \cdot \left[e^{0.4\pi t} (0.1\cos 4\pi t + sen4\pi t) - 0.1 \right]$$

$$B(t) = -\frac{a_0}{16\pi^2 e^{0.4\pi t}} \cdot \left[e^{0.4\pi t} (0.1sen4\pi t - \cos 4\pi t) + 1 \right]$$
para 0

$$u(t) = e^{-0.4\pi t} \left[A(2T) sen 4\pi t - B(2T) \cos 4\pi t \right]$$
 para t > 1 seg

El programa que incluye el algoritmo FFT calcula el espectro de la excitación y, frecuencia a frecuencia, se evalúa el producto entre la función de transferencia y dicha solicitación. De nuevo, se aplica el algoritmo, que en este caso se denominaría FFT inversa, determinándose la respuesta en el tiempo del sistema.

En la siguiente figura se representa la respuesta del grado de libertad ante el

impulso rectangular, tanto analítica como numéricamente a partir del algoritmo FFT. El solapamiento entre ambas curvas evidencia la exactitud del procedimiento numérico.



Fig. 1.8 Respuesta al impulso rectangular aplicado a la base

Vista la fiabilidad del método para este ejemplo unidimensional, se pasa a continuación a excitar la base con un movimiento sísmico real.

1.6.2.2 Excitación: terremoto de El Centro (1940)

La abundante bibliografía existente en el campo de los movimientos sísmicos obliga a tomar ciertas determinaciones. Un mismo terremoto, dependiendo de dónde se ubique el sismógrafo, puede ofrecer lecturas bien distintas. Incluso, un mismo acelerograma puede dar lugar a diferentes curvas de velocidad y desplazamiento, puesto que la obtención de las mismas supone integrar curvas con un variopinto campo espectral, de ahí que la utilización de filtros que eliminen ciertas componentes de frecuencia se haga necesario, aplicando cada autor su propia metodología. Se ha optado por el movimiento sísmico utilizado por Chopra (2001), y presenta los siguientes diagramas de aceleración, velocidad y desplazamiento.









El método que propone la Normativa para obtener de forma rápida los desplazamientos máximos de cada grado de libertad hace uso del espectro sísmico correspondiente al terremoto en cuestión. En la gráfica adjunta (al final de este capítulo), de forma general, se entra con los períodos de oscilación propios de cada grado de libertad, y se asciende verticalmente hasta encontrarse con la curva correspondiente al grado de amortiguamiento del sistema. A partir de esta intersección se traza una recta paralela a las líneas que forman 45° a izquierda con la horizontal. El punto de encuentro de esta recta con el eje S_d permite conocer el desplazamiento máximo de ese grado de libertad, en pulgadas. Así, suponiendo un grado de amortiguamiento del 10% como el que posee nuestro sistema, se tiene de forma aproximada:

 $S_d = 1.5 \text{ in} = 3.81 \text{ cm}$

El movimiento en el dominio temporal de la masa es posible determinarlo empleando el algoritmo FFT. La siguiente figura muestra la evolución de dicho desplazamiento respecto al punto de equilibrio, junto con el movimiento que experimentaría un punto ubicado en la superficie libre, durante los primeros 20 segundos del sismo:



Fig. 1.9 Respuesta al terremoto de El Centro (1940) del sistema unidimensional. Amortiguamiento: 10%

La gráfica demuestra que la masa se desvía de su posición de equilibrio unos 4.32

cm, lo que es ligeramente superior al valor procedente del método propuesto por la Normativa. El error supera el 13%, aunque, como se demuestra, a medida que se incrementa el grado de amortiguamiento, la diferencia entre ambos valores se reduce.

Así, para un grado de amortiguamiento del 20%:

 $S_d = 1.1$ in = 2.794 cm

El programa que ejecuta el algoritmo FFT arroja un valor máximo de 2.732 cm, que se traduce un en error próximo al 2.3%. La evolución temporal de la masa se refleja en la figura 1.10:



Fig. 1.10 Respuesta al terremoto de El Centro (1940 del sistema unidimensional. Amortiguamiento: 20%

1.6.3 Sistema de dos grados de libertad

El sistema que se estudiará en este apartado es un pórtico plano de un edificio de dos plantas solicitado en su base a modo de movimiento sísmico. Mediante una serie de simplificaciones, se reducirá el número de grados de libertad a sólo dos, ya que se considera que la masa es posible concentrarla en el centro geométrico de las plantas, tal y como se representa en la siguiente figura, permitiéndose únicamente el movimiento en su plano. Como se aprecia, la estructura en cuestión es no amortiguada:



Fig. 1.11 Sistema de dos grados de libertad

La base de la estructura está empotrada en un bastidor rígido, y cada planta se une por medio de resortes de rigidez conocida al mismo. Los dinteles se suponen infinitamente rígidos, y los pilares inextensibles. Para simplificar el desarrollo teórico, se ha estimado oportuno dar valores numéricos a cada constante. Así:

 $E = 2.0 \cdot 10^{5} \text{ N/cm}^{2}$ $I = 2700 \text{ cm}^{4}$ $H_{1} = H_{2} = 3 \text{ m}$ $K_{1} = 240 \text{ N/cm}$ $K_{2} = 120 \text{ N/cm}$ $M_{1} = M_{2} = 2 \text{ Ton}$

De forma general, el sistema de ecuaciones dinámicas correspondientes a una

estructura con n grados de libertad es:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = -MJa(t)$$
(1.38)

Al ser el sistema no amortiguado, se anula el término correspondiente a la velocidad, quedando:

$$M\ddot{U} + KU = -MJa(t) \tag{1.39}$$

A un sistema con n grados de libertad, le corresponden n frecuencias propias y n vectores propios, los cuales son solución del sistema de ecuaciones algebraicas homogéneo:

$$(-\omega^2 M + K)\varphi = 0 \tag{1.40}$$

Dichos autovectores, denominados también formas modales, son ortogonales respecto a las matrices de masa y de rigidez. Al formar una base completa dada por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_i & \dots & \varphi_n \end{bmatrix},$$

es posible escribir:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i y_i(t) \tag{1.41}$$

en donde $y_i(t)$ es un escalar función del tiempo, a determinar. Sustituyendo esta última ecuación en (1.39), se obtiene:

$$M\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i}\ddot{y}_{i}(t) + K\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i}y_{i}(t) = -MJa(t)$$
(1.42)

A continuación, se multiplica por el traspuesto de un autovector cualquiera ϕ_i :

$$\varphi_{j}^{T}M\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i}\ddot{y}_{i}(t) + \varphi_{j}^{T}K\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i}y_{i}(t) = -\varphi_{j}^{T}MJa(t)$$
(1.43)

De acuerdo con la ortogonalidad de los autovectores ϕ , resulta que:

$$\varphi_j^T M \sum_{i=1}^n \varphi_i = \varphi_j^T M \varphi_j = M_j *$$

$$\varphi_j^T K \sum_{i=1}^n \varphi_i = \varphi_j^T K \varphi_j = K_j *$$
(1.44)

Y la expresión (1.43) queda como:

$$M_{j} * \ddot{y}_{j}(t) + K_{j} * y_{j}(t) = \varphi_{j}^{T} M J a(t)$$
(1.45)

En consecuencia, el sistema de ecuaciones (1.38) queda reducido a n ecuaciones (1.45), cada una de ellas similar a la que correspondería al modelo con un único grado de libertad. Para iniciar el cálculo, es preciso previamente cuantificar la matrices de rigidez y de masa:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{51EI}{H^3} + k_1 & -\frac{24EI}{H^3} \\ -\frac{24EI}{H^3} & \frac{24EI}{H^3} + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.26 \cdot 10^5 & -4.8 \cdot 10^4 \\ -4.8 \cdot 10^4 & 6.0 \cdot 10^4 \end{bmatrix} N/m$$
$$M = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 2000 \end{bmatrix} kg$$

Para hallar el valor de las frecuencias propias se resuelve el determinante procedente de la ecuación (1.40):

$$\left|K - \omega^2 M\right| = \begin{vmatrix} 1.26 \cdot 10^5 - 2000\omega^2 & -4.8 \cdot 10^4 \\ -4.8 \cdot 10^4 & 6 \cdot 10^4 - 2000\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Los posibles valores que verifican esta igualdad son:

$$\omega_1^2 = 17.376 \implies \omega_1 = 4.168 \ rad / s \implies T_1 = 1.51 \ s$$

 $\omega_2^2 = 75.624 \implies \omega_2 = 8.696 \ rad / s \implies T_2 = 0.72 \ s$

Los autovectores serían:

$$(2.625 - \lambda_1)\varphi_{11} - \varphi_{21} = 0 \qquad Si \ \varphi_{11} = 1 \implies \varphi_{21} = 1.90$$

$$(2.625 - \lambda_2)\varphi_{12} - \varphi_{22} = 0 \qquad Si \ \varphi_{12} = 1 \implies \varphi_{22} = -0.53, \ siendo \ \lambda = \frac{2000\omega^2}{4.8 \cdot 10^4}$$

Por tanto:
$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1.90 & -0.53 \end{bmatrix}$$

La matriz de masa generalizada sería:

$$M^* = \Phi^T M \Phi = 2000 \begin{bmatrix} 4.61 & 0 \\ 0 & 1.28 \end{bmatrix} kg$$

Y el segundo miembro de la expresión (1.45) quedaría como:

$$\Phi^T MJ = 2000 \begin{bmatrix} 2.9\\0.47 \end{bmatrix}$$
, siendo $J = \begin{bmatrix} 1\\1 \end{bmatrix}$

Por tanto, el sistema desacoplado sería el siguiente:

$$\ddot{Y}_{1} + \omega_{1}^{2}Y_{1} = -\frac{2.9}{4.61}a_{BASE}(t)$$
$$\ddot{Y}_{2} + \omega_{2}^{2}Y_{2} = -\frac{0.47}{1.28}a_{BASE}(t)$$

1.6.3.1 Excitación: impulso triangular

Supóngase que la base de la estructura es solicitada por un impulso triangular, dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} a_{BASE} = \frac{g}{5}t & si \ t < 5 \ seg \\ a_{BASE} = 2g(1 - \frac{t}{10}) & si \ 5 < t < 10 \ seg \\ a_{BASE} = 0 & si \ t > 10 \ seg \end{cases}$$

De forma gráfica:



Fig. 1.12 Impulso triangular aplicado a la base

La ecuación genérica a resolver es:

$$\ddot{Y}_{1} + \omega_{1}^{2}Y_{1} = -R_{i}a_{BASE}(t)$$

La solución de la ecuación homogénea sería:

$$Y_i^H = Asen\omega_i t + B\cos\omega_i t$$

donde A y B se determinan a partir de las condiciones iniciales. La solución particular adopta tres formas distintas, dependiendo del tramo de curva estudiado. Así quedará:

$$Y_{i}(t) = Y_{i}^{H}(t) + Y_{i}^{P}(t) = \frac{R_{i}}{\omega_{i}^{3}} \cdot \frac{g}{5} sen\omega_{i}t - \frac{R_{i}}{\omega_{i}^{2}} \cdot \frac{g}{5}t \qquad si \quad 0 < t < 5 seg$$

$$Y_{i}(t) = Y_{i}^{H}(t) + Y_{i}^{P}(t) = \frac{R_{i}}{\omega_{i}^{3}} \cdot \frac{g}{5} \cdot (1 - 2\cos 5\omega_{i}) \cdot sen\omega_{i}t + \frac{2R_{i}}{\omega_{i}^{3}} \cdot \frac{g}{5} \cdot sen\omega_{i}5 \cdot \cos\omega_{i}t$$
$$-\frac{R_{i}}{\omega_{i}^{2}} \cdot 2g \cdot (1 - \frac{t}{10}) \qquad si \ 5 < t < 10 \ seg$$

$$Y_{i}(t) = Y_{i}^{H}(t) + Y_{i}^{P}(t) = \frac{\dot{Y}_{i}(10s)}{\omega_{i}}sen\omega_{i}(t-10) + Y_{i}(10s)\cdot\cos\omega_{i}(t-10) \qquad si \ t > 10 \ seg$$

Para poder comparar la solución analítica con la del algoritmo FFT, es necesario introducir un pequeño amortiguamiento en la estructura, ya que, por las características propias de la transformada de Fourier, no es posible resolver sistemas no amortiguados. Con un amortiguamiento del 0.5% es suficiente para apreciar el solapamiento entre ambas soluciones, tal y como se apreciará en la siguiente figura. Las funciones de transferencia que gobiernan ambos grados de libertad son:

$$H_{1}(\omega) = -\frac{0.63}{-\omega^{2} + \omega_{n1}(\omega_{n1} + 2\xi\omega i)}$$

$$H_{2}(\omega) = -\frac{0.367}{-\omega^{2} + \omega_{n2}(\omega_{n2} + 2\xi\omega i)}$$

Como ya se comentó en el caso unidimensional, el programa que incluye el algoritmo FFT calcula el espectro de la excitación y la función de transferencia, para evaluar su producto en el campo de la frecuencia. De nuevo, se aplica el algoritmo, para determinar la respuesta en el tiempo del sistema. La gráfica expuesta a continuación representa la respuesta de cada planta ante el impulso triangular, tanto analítica como numéricamente a partir del algoritmo FFT. El solapamiento entre ambas curvas refleja la gran exactitud del procedimiento numérico:



Fig. 1.13 Respuesta al impulso triangular

Una vez comprobada la veracidad del método en el campo bidimensional, se pasa a continuación a solicitar la estructura con un movimiento sísmico real.

1.6.3.2 Excitación: terremoto de El Centro (1940)

Introducir un cierto amortiguamiento en la estructura no supone modificar sus propiedades intrínsecas, como son en este caso sus frecuencias propias. De ahí que, a partir de este momento se considere a la misma con disipadores de energía dependientes de la velocidad. Se supone, en un primer término, que el amortiguamiento asciende a un 2%, con lo que los desplazamientos máximos de cada modo serían:

$$T_{1} = 1.5 s \implies S_{d1} = \frac{2.9}{4.61} 5.2 = 3.276 \text{ inch} = 8.32 \text{ cm}$$
$$T_{2} = 0.7 s \implies S_{d2} = \frac{0.47}{1.28} 3.1 = 1.137 \text{ inch} = 2.89 \text{ cm}$$
Por tanto:

· Primer modo de oscilación:

- Desplazamiento de la 1ra. Planta: 8.32 cm
- Desplazamiento de la 2da. Planta: $1.9 \cdot 8.32 = 15.808$ cm
- · Segundo modo de oscilación:
 - Desplazamiento de la 1ra. Planta: 2.89 cm
 - Desplazamiento de la 2da. Planta: $0.53 \cdot 2.89 = 1.532$ cm

Los desplazamientos máximos respectivos de cada planta serán:

$$x_2^{max} = \sqrt{15.808^2 + 1.532^2} = 15.89 \ cm$$
$$x_1^{max} = \sqrt{8.32^2 + 2.89^2} = 8.81 \ cm$$

La respuesta temporal de cada planta es posible calcularla a partir del programa que contiene el algoritmo FFT. En las gráficas que a continuación se muestran, se ha representado la curva que proporcionaría el sismógrafo, y el desplazamiento de cada planta, durante los primeros 20 segundos del movimiento sísmico. Se compara con el desplazamiento que sufriría un punto ubicado en la superficie libre:



Fig. 1.14 Respuesta al terremoto de El Centro (1940). Amortiguamiento: 2%

La primera planta experimenta un desplazamiento máximo de **9.75 cm**, alcanzado a los 6.9 segundos de iniciarse el terremoto. Esto supone aproximadamente un 10% más que el desplazamiento calculado a partir del método propuesto por la Normativa. Sin embargo, según indica la figura, la planta superior llega a separarse **15.91 cm** de su posición de equilibrio, valor que está muy próximo al obtenido a partir del espectro sísmico (15.89 cm).

Si se incrementa el grado de amortiguamiento a un 10%, los resultados obtenidos son:

- Espectro sísmico:

- · Primera planta: 6.39 cm
- · Segunda planta: 11.6 cm

- *FFT*:

- · Primera planta: 5.41 cm
- · Segunda planta: 11.2 cm

Los dos métodos proporcionan valores muy similares para la segunda planta, que será siempre la que experimente los mayores desplazamientos. La evolución temporal del campo de desplazamientos experimentado por ambas plantas se refleja en la siguiente gráfica:



Fig. 1.15 Respuesta al terremoto de El Centro (1940). Amortiguamiento: 10%

Si, por último, se evalúa el proceso con un amortiguamiento del 20%, estos son los resultados:

- Espectro sísmico:

- · Primera planta: 4.35 cm
- · Segunda planta: 7.93 cm

- *FFT*:

- · Primera planta: 4.49 cm
- · Segunda planta: 8.01 cm

La evolución temporal del desplazamiento de ambas plantas sería:



Fig. 1.16 Respuesta al terremoto de El Centro (1940). Amortiguamiento: 20%

La exactitud entre ambos métodos crece a medida que se incrementa el grado de amortiguamiento.

APLICACIONES DEL ALGORITMO FFT A SISTEMAS DE 1 Y 2 GDL

En este capítulo, se aborda la solución de los sistemas elásticos con varios grados de libertad, resolviéndolos tanto en el campo temporal como en el de la frecuencia. El método de descomposición modal es el más empleado en el cálculo sísmico de estructuras elásticas, pues aparte de su mayor rapidez frente a otros métodos, proporciona una cierta visión conceptual, al proporcionar n formas de desplazamientos independientes. Estas, llamadas formas modales propias de vibración, o simplemente modos de vibración, sirven además como nuevas coordenadas a las que referir los desplazamientos de respuesta de la estructura. Dicho método permite obtener dos tipos de respuesta:

· La historia en el tiempo, mediante la cual se conoce la respuesta en cada instante de tiempo

· La respuesta máxima, empleando la respuesta espectral

El uso de uno u otro procedimiento depende fundamentalmente de los resultados deseados, teniendo presente que, a mayor cantidad de información corresponde también una mayor necesidad de memoria y de tiempo de cálculo; al mismo tiempo, mucha de la información que proporciona el cálculo de la historia de la respuesta en el tiempo, tiene escaso valor práctico en el diseño de estructuras.

Este método, que es el que sigue la normativa actual, se comparará con la respuesta temporal real que experimentaría la estructura cuando se somete a la misma excitación, concretamente el terremoto de El Centro de 1940, aplicando el algoritmo de FFT, y se analizará la amplitud máxima de cada grado de libertad. Pero antes, para corroborar los resultados, se solicitará el sistema con un impulso de geometría conocida, y del cual se conoce la respuesta dinámica analítica del sistema.

SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD

El sistema de un grado de libertad que se analizará en este apartado es el representado en la figura. Para apreciar la diferencia entre los dos métodos bajo estudio se ha decidido dar valores numéricos a los componentes de la estructura, en unidades del Sistema Internacional:



Fig. X.1. Sistema de 1 grado de libertad

Las características del sistema en estudio serían:

k = 52.6 N/mEI = 35.1 N/m $c = 2.51 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ m = 1 kgL = 1 m

En un primer estudio, se aplicará a la base un impulso rectangular, y se verificará la solución propuesta por el algoritmo FFT comparándose con la solución analítica. En una segunda fase, se analizará el movimiento del sistema cuando sobre su base actúa el movimiento sísmico de El Centro (1940).

El programa que incluye el algoritmo FFT, a grandes rasgos, calcula en primer lugar, el espectro en frecuencia de la excitación mediante dicho algoritmo, así como la función de transferencia para cada frecuencia, hasta la denominada frecuencia de Nyquist. Se evalúa el producto de ambos espectros, para cada frecuencia, obteniéndose la respuesta del sistema en frecuencia. Y, por último, a este espectro, se aplica de nuevo el algoritmo para obtener la transformada inversa del mismo, que equivale a la respuesta temporal del sistema. Cabe destacar la gran versatilidad del método, ya que cambiando exclusivamente la excitación es posible conocer de forma inmediata el comportamiento del grado de libertad bajo estudio.

La ecuación que gobierna el movimiento del sistema es:

 $m \cdot \ddot{u} + c \cdot \dot{u} + k \cdot u = -m \cdot a(t)$

Esta expresión puede ser transformada en otra equivalente:

$$\ddot{u} + 2\xi \omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = -a(t)$$

La dificultad para resolver esta ecuación diferencial aparece cuando la excitación adopta expresiones con una cierta complejidad, de ahí que se pensara en el campo espectral para resolverla de forma rápida y sencilla. El proceso, explicado en los capítulos teóricos, consiste en sustituir en esta expresión la serie de Fourier correspondiente a cada variable. Así, para cada frecuencia, se verificaría:

$$\omega^{2}U(\omega) + 2\xi\omega_{n}\omega U(\omega) + \omega_{n}^{2}U(\omega) = -A(\omega)$$

El concepto de función de transferencia se introduce a partir de la anterior expresión:

$$U(\omega) = H(\omega) \cdot A(\omega) = \frac{-1}{\omega^2 + 2\xi \omega_n \omega + \omega_n^2} A(\omega)$$

La frecuencia propia de este sistema se obtiene a partir de:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{\frac{3EI}{L^3} + k}{m} = \frac{3\cdot35.1 + 52.6}{1} = 157.9 \implies \omega_n = 12.56 = 4\pi \ rad / seg$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.5 \ seg$$

Excitación: impulso rectangular

La base del sistema es excitada por un impulso rectangular de amplitud a_0 y duración igual al doble del período propio de oscilación, es decir, 1 segundo. Para apreciar la respuesta, se ha elegido $a_0=100$. Así:



Fig. X.2. Impulso rectangular aplicado a la base

Conocer la respuesta analítica supone resolver la ecuación diferencial de coeficientes constantes que gobierna el movimiento de este sistema. La aplicación de la integral de convolución es uno de los métodos matemáticos capaces de determinar la solución de dicha ecuación:

$$u(t) = A(t)sen4\pi t + B(t)\cos 4\pi t, siendo$$

$$A(t) = -\frac{a_0}{16\pi^2 e^{0.4\pi}} \cdot \left[e^{0.4\pi} \left(0.1\cos 4\pi t + sen4\pi t \right) - 0.1 \right]$$

$$B(t) = -\frac{a_0}{16\pi^2 e^{0.4\pi}} \cdot \left[e^{0.4\pi} \left(0.1sen4\pi t - \cos 4\pi t \right) + 1 \right]$$
para 0

$$u(t) = e^{-0.4\pi t} [A(2T)sen4\pi t - B(2T)\cos 4\pi t]$$
 para t > 1 seg

El programa que incluye el algoritmo FFT calcula el espectro de la excitación y, frecuencia a frecuencia, se evalúa el producto entre la función de transferencia y dicha solicitación. De nuevo, se aplica el algoritmo, que en este caso se denominaría FFT inversa, determinándose la respuesta en el tiempo del sistema.

En la siguiente figura se representa la respuesta del grado de libertad ante el impulso rectangular, tanto analítica como numéricamente a partir del algoritmo FFT. El solapamiento entre ambas curvas evidencia la exactitud del procedimiento numérico.



Fig. X.3. Respuesta al impulso rectangular aplicado a la base

Vista la fiabilidad del método para este ejemplo unidimensional, se pasa a continuación a excitar la base con un movimiento sísmico real.

Excitación: terremoto de El Centro (1940)

La abundante bibliografía existente en el campo de los movimientos sísmicos obliga a tomar ciertas determinaciones. Un mismo terremoto, dependiendo de dónde se ubique el sismógrafo, puede ofrecer lecturas bien distintas. Incluso, un mismo acelerograma puede dar lugar a diferentes curvas de velocidad y desplazamiento, puesto que la obtención de las mismas supone integrar curvas con un variopinto campo espectral, de ahí que la utilización de filtros que eliminen ciertas componentes de frecuencia se haga necesario, aplicando cada autor su propia metodología. Se ha optado por el movimiento sísmico utilizado por Chopra, y presenta los siguientes diagramas de aceleración, velocidad y desplazamiento.









El método que propone la Normativa para obtener de forma rápida los desplazamientos máximos de cada grado de libertad hace uso del espectro sísmico correspondiente al terremoto en cuestión. En la gráfica adjunta, de forma general, se entra con los períodos de oscilación propios de cada grado de libertad, y se asciende verticalmente hasta encontrarse con la curva correspondiente al grado de amortiguamiento del sistema. A partir de esta intersección se traza una recta paralela a las líneas que forman 45° a izquierda con la horizontal. El punto de encuentro de esta recta con el eje S_d permite conocer el desplazamiento máximo de ese grado de libertad, en pulgadas. Así, suponiendo un grado de amortiguamiento del 10% como el que posee nuestro sistema, se tiene de forma aproximada:

$S_d = 1.5 \text{ in} = 3.81 \text{ cm}$

El movimiento en el dominio temporal de la masa es posible determinarlo empleando el algoritmo FFT. La siguiente figura muestra la evolución de dicho desplazamiento respecto al punto de equilibrio, junto con el movimiento representado en el sismógrafo, durante los primeros 20 segundos del sismo:





Fig. X.4. Respuesta al terremoto de El Centro (1940) del sistema unidimensional

La gráfica demuestra que la masa se desvía de su posición de equilibrio unos 4.32 cm, lo que es ligeramente superior al valor procedente del método propuesto por la Normativa. El error supera el 13%, aunque, como se demuestra, a medida que se incrementa el grado de amortiguamiento, la diferencia entre ambos valores se reduce. Así, para un grado de amortiguamiento del 20%:

 $S_d = 1.1$ in = 2.794 cm

El programa que ejecuta el algoritmo FFT arroja un valor máximo de 2.732 cm, que se traduce un en error próximo al 2.3%.

SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

El sistema que se estudiará en este apartado es un pórtico plano de un edificio de dos plantas solicitado en su base a modo de movimiento sísmico. Mediante una serie de simplificaciones, se reducirá el número de grados de libertad a sólo dos, ya que se considera que la masa es posible concentrarla en el centro geométrico de las plantas, tal y como se representa en la siguiente figura, permitiéndose únicamente el movimiento en su plano. Como se aprecia, la estructura en cuestión es no amortiguada:



Fig. X.5. Sistema de dos grados de libertad

La base de la estructura está empotrada en un bastidor rígido, y cada planta se une por medio de resortes de rigidez conocida al mismo. Los dinteles se suponen infinitamente rígidos, y los pilares inextensibles. Para simplificar el desarrollo teórico, se ha estimado oportuno dar valores numéricos a cada constante. Así:

 $E = 2.0 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2$ I = 2700 cm⁴ H₁ = H₂ = 3 m K₁ = 240 N/cm K₂ = 120 N/cm M₁ = M₂ = 2 Ton De forma general, el sistema de ecuaciones dinámicas correspondientes a una estructura con n grados de libertad es:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = -MJa(t)$$
(8.1)

Al ser el sistema no amortiguado, se anula el término correspondiente a la velocidad, quedando:

$$M\ddot{U} + KU = -MJa(t) \tag{8.2}$$

A un sistema con n grados de libertad, le corresponden n frecuencias propias y n vectores propios, los cuales son solución del sistema de ecuaciones algebraicas homogéneo:

$$(-\omega^2 M + K)\varphi = 0 \tag{8.3}$$

Dichos autovectores, denominados también formas modales, son ortogonales respecto a las matrices de masa y de rigidez. Al formar una base completa dada por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_i & \dots & \varphi_n \end{bmatrix},$$

es posible escribir:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i} y_{i}(t)$$
 (8.4)

en donde $y_i(t)$ es un escalar función del tiempo, a determinar. Sustituyendo esta última ecuación en (8.2), se obtiene:

$$M\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i}\ddot{y}_{i}(t) + K\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i}y_{i}(t) = -MJa(t)$$
(8.5)

A continuación, se multiplica por el traspuesto de un autovector cualquiera $\boldsymbol{\varphi}_i$:

$$\varphi_{j}^{T}M\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i}\ddot{y}_{i}(t) + \varphi_{j}^{T}K\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i}y_{i}(t) = -\varphi_{j}^{T}MJa(t)$$
(8.6)

De acuerdo con la ortogonalidad de los autovectores ϕ , resulta que:

$$\varphi_{j}^{T}M\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i} = \varphi_{j}^{T}M\varphi_{j} = M_{j}^{*}$$

$$\varphi_{j}^{T}K\sum_{i=1}^{n}\varphi_{i} = \varphi_{j}^{T}K\varphi_{j} = K_{j}^{*}$$
(8.7)

Y la expresión (8.6) queda como:

$$M_{j} * \ddot{y}_{j}(t) + K_{j} * y_{j}(t) = \varphi_{j}^{T} M J a(t)$$
(8.8)

En consecuencia, el sistema de ecuaciones (8.1) queda reducido a n ecuaciones (8.8), cada una de ellas similar a la que correspondería al modelo con un único grado de libertad. Para iniciar el cálculo, es preciso previamente cuantificar la matrices de rigidez y de masa:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{51EI}{H^3} + k_1 & -\frac{24EI}{H^3} \\ -\frac{24EI}{H^3} & \frac{24EI}{H^3} + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.26 \cdot 10^5 & -4.8 \cdot 10^4 \\ -4.8 \cdot 10^4 & 6.0 \cdot 10^4 \end{bmatrix} N/m$$
$$M = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 2000 \end{bmatrix} kg$$

Para hallar el valor de las frecuencias propias se resuelve el determinante procedente de la ecuación (8.3):

$$\left|K - \omega^{2} M\right| = \begin{vmatrix} 1.26 \cdot 10^{5} - 2000 \omega^{2} & -4.8 \cdot 10^{4} \\ -4.8 \cdot 10^{4} & 6 \cdot 10^{4} - 2000 \omega^{2} \end{vmatrix} = 0$$

Los posibles valores que verifican esta igualdad son:

$$\omega_1^2 = 17.376 \implies \omega_1 = 4.168 \ rad / s \implies T_1 = 1.51 \ s$$

 $\omega_2^2 = 75.624 \implies \omega_2 = 8.696 \ rad / s \implies T_2 = 0.72 \ s$

Los autovectores serían:

$$(2.625 - \lambda_1)\varphi_{11} - \varphi_{21} = 0 \qquad Si \ \varphi_{11} = 1 \implies \varphi_{21} = 1.90$$

$$(2.625 - \lambda_2)\varphi_{12} - \varphi_{22} = 0 \qquad Si \ \varphi_{12} = 1 \implies \varphi_{22} = -0.53, \ siendo \ \lambda = \frac{2000\omega^2}{4.8 \cdot 10^4}$$

Por tanto:
$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1.90 & -0.53 \end{bmatrix}$$

La matriz de masa generalizada sería:

$$M^* = \Phi^T M \Phi = 2000 \begin{bmatrix} 4.61 & 0 \\ 0 & 1.28 \end{bmatrix} kg$$

Y el segundo miembro de la expresión (8.8) quedaría como:

$$\Phi^{T} M J = 2000 \begin{bmatrix} 2.9\\0.47 \end{bmatrix}, \text{ siendo } J = \begin{bmatrix} 1\\1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el sistema desacoplado sería el siguiente:

$$\ddot{Y}_{1} + \omega_{1}^{2}Y_{1} = -\frac{2.9}{4.61}a_{BASE}(t)$$
$$\ddot{Y}_{2} + \omega_{2}^{2}Y_{2} = -\frac{0.47}{1.28}a_{BASE}(t)$$

Excitación: impulso triangular

Supóngase que la base de la estructura es solicitada por un impulso triangular, dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} a_{BASE} = \frac{g}{5}t & si \ t < 5 \ seg \\ a_{BASE} = 2g(1 - \frac{t}{10}) & si \ 5 < t < 10 \ seg \\ a_{BASE} = 0 & si \ t > 10 \ seg \end{cases}$$

De forma gráfica:



Fig. X.6. Impulso triangular aplicado a la base

La ecuación genérica a resolver es:

$$\ddot{Y}_1 + \omega_1^2 Y_1 = -R_i a_{BASE}(t)$$

La solución de la ecuación homogénea sería:

$$Y_i^H = Asen\omega_i t + B\cos\omega_i t$$

donde A y B se determinan a partir de las condiciones iniciales. La solución particular adopta tres formas distintas, dependiendo del tramo de curva en el que nos encontremos. Así quedará:

$$Y_{i}(t) = Y_{i}^{H}(t) + Y_{i}^{P}(t) = \frac{R_{i}}{\omega_{i}^{3}} \cdot \frac{g}{5} sen\omega_{i}t - \frac{R_{i}}{\omega_{i}^{2}} \cdot \frac{g}{5}t \qquad si \quad 0 < t < 5 \ seg$$

$$Y_{i}(t) = Y_{i}^{H}(t) + Y_{i}^{P}(t) = \frac{R_{i}}{\omega_{i}^{3}} \cdot \frac{g}{5} \cdot (1 - 2\cos 5\omega_{i}) \cdot sen\omega_{i}t + \frac{2R_{i}}{\omega_{i}^{3}} \cdot \frac{g}{5} \cdot sen\omega_{i}5 \cdot \cos\omega_{i}t$$
$$-\frac{R_{i}}{\omega_{i}^{2}} \cdot 2g \cdot (1 - \frac{t}{10}) \qquad si \ 5 < t < 10 \ seg$$

$$Y_{i}(t) = Y_{i}^{H}(t) + Y_{i}^{P}(t) = \frac{\dot{Y}_{i}(10 s)}{\omega_{i}} sen\omega_{i}(t-10) + Y_{i}(10 s) \cdot \cos\omega_{i}(t-10) \qquad si \ t > 10 \ seg$$

Para poder comparar la solución analítica con la del algoritmo FFT, es necesario introducir un pequeño amortiguamiento en la estructura, ya que, por las características propias de la transformada de Fourier, no es posible resolver sistemas no amortiguados. Con un amortiguamiento del 0.5% es suficiente para apreciar el solapamiento entre ambas soluciones, tal y como se apreciará en la siguiente figura. Las funciones de transferencia que gobiernan ambos grados de libertad son:

$$H_{1}(\omega) = -\frac{0.63}{-\omega^{2} + \omega_{n1}(\omega_{n1} + 2\xi\omega i)}$$

$$H_2(\omega) = -\frac{0.367}{-\omega^2 + \omega_{n2}(\omega_{n2} + 2\xi\omega i)}$$

Como ya se comentó en el caso unidimensional, el programa que incluye el algoritmo FFT calcula el espectro de la excitación y la función de transferencia, para evaluar su producto en el campo de la frecuencia. De nuevo, se aplica el algoritmo, para determinar la respuesta en el tiempo del sistema. La gráfica expuesta a continuación representa la respuesta de cada planta ante el impulso triangular, tanto analítica como numéricamente a partir del algoritmo FFT. El solapamiento entre ambas curvas refleja la gran exactitud del procedimiento numérico:



Fig. X.7. Respuesta al impulso triangular

Una vez comprobada la veracidad del método en el campo bidimensional, se pasa a continuación a solicitar la estructura con un movimiento sísmico real.

Excitación: terremoto de El Centro (1940)

Introducir un cierto amortiguamiento en la estructura no supone modificar sus propiedades intrínsecas, como son en este caso sus frecuencias propias. De ahí que, a partir de este momento se considere a la misma con disipadores de energía dependientes de la velocidad. Se supone, en un primer término, que el amortiguamiento asciende a un 2%, con lo que los desplazamientos máximos de cada modo serían:

$$T_{1} = 1.5 s \implies S_{d1} = \frac{2.9}{4.61} 5.2 = 3.276 inch = 8.32 cm$$
$$T_{2} = 0.7 s \implies S_{d2} = \frac{0.47}{1.28} 3.1 = 1.137 inch = 2.89 cm$$

Por tanto:

· Primer modo de oscilación:

- Desplazamiento de la 1ra. Planta: 8.32 cm
- Desplazamiento de la 2da. Planta: $1.9 \cdot 8.32 = 15.808$ cm

· Segundo modo de oscilación:

- Desplazamiento de la 1ra. Planta: 2.89 cm
- Desplazamiento de la 2da. Planta: $0.53 \cdot 2.89 = 1.532$ cm

Los desplazamientos máximos respectivos de cada planta serán:

$$x_2^{máx} = \sqrt{15.808^2 + 1.532^2} = 15.89 \ cm$$
$$x_1^{máx} = \sqrt{8.32^2 + 2.89^2} = 8.81 \ cm$$

La respuesta temporal de cada planta es posible calcularla a partir del programa que contiene el algoritmo FFT. En las gráficas que a continuación se muestran, se ha representado la curva que proporcionaría el sismógrafo, y el desplazamiento de cada planta, durante los primeros 20 segundos del movimiento sísmico:





Fig. X.8. Respuesta al terremoto de El Centro (1940)

La primera planta experimenta un desplazamiento máximo de **9.75 cm**, alcanzado a los 6.9 segundos de iniciarse el terremoto. Esto supone aproximadamente un 10% más que el desplazamiento calculado a partir del método propuesto por la Normativa. Sin embargo, según indica la figura, la planta superior llega a separarse **15.91 cm** de su posición de equilibrio, valor que está muy próximo al obtenido a partir del espectro sísmico (15.89 cm).

Si se incrementa el grado de amortiguamiento a un 10%, los resultados obtenidos son:

- Espectro sísmico:

- · Primera planta: 6.39 cm
- · Segunda planta: 11.6 cm

- FFT:

- · Primera planta: 5.41 cm
- · Segunda planta: 11.2 cm

Los dos métodos proporcionan valores muy similares para la segunda planta, que será siempre la que experimente los mayores desplazamientos. Si, por último, se evalúa el proceso con un amortiguamiento del 20%, estos son los resultados:

- Espectro sísmico:

- · Primera planta: 4.35 cm
- · Segunda planta: 7.93 cm

- FFT:

- · Primera planta: 4.49 cm
- · Segunda planta: 8.01 cm

La exactitud entre ambos métodos crece a medida que se incrementa el grado de amortiguamiento.

CAPÍTULO 5.

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

1. ANÁLISIS DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS EN CAÑONES DE DIVERSA GEOMETRÍA ANTE SOLICITACIÓN SÍSMICA. EFECTO LOCAL

1.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se analiza la influencia de distintas variables en la discretización de cañones utilizando dos programas informáticos en los que se integra el Método de Elementos de Contorno (en adelante MEC). Serán tres las geometrías a estudiar, y los resultados se compararán con la solución analítica exacta correspondiente a cada caso, si existiese. Pretende servir como manual de instrucciones a la hora de diseñar modelos tridimensionales, de modo que la solución aportada en este último espacio coincida en un rango lo más amplio posible con la solución analítica o con la propuesta por métodos bidimensionales. Se enfocará el desarrollo de este capítulo desde un punto de vista histórico o evolutivo, partiendo de un modelo específico y optimizándolo de diversas formas hasta lograr un parecido evidente entre las soluciones del problema en cuestión.

Se ha hecho uso de dos programas informáticos elaborados por los Tutores de este PFC, e implementados en lenguaje FORTRAN. El primero de ellos representa un modelo numérico basado en el MEC y capaz de resolver problemas de diversa índole en modelos tridimensionales. Lógicamente, el problema que se contempla en este proyecto es el estudio dinámico de estructuras y suelos ante una acción sísmica, debiendo abordar el problema desde el dominio de la frecuencia Es precisamente el estudio de las características de los modelos tridimensionales uno de los objetivos de este proyecto.

La otra herramienta informática es también un modelo numérico basado en el MEC, con la misma finalidad que el anterior, pero orientado a modelos bidimensionales. Se empleará como elemento comparativo.

En una primera parte se analizará el movimiento anteroposterior, transversal y vertical, si los hubiese, que sufre la superficie del cañón bajo estudio ante la incidencia de ondas SH con distinto ángulo. En la segunda parte se estudiará el desplazamiento que

sufre un edificio de dos plantas ubicado en distintas posiciones a lo ancho de un valle aluvial, y se comparará con el que experimentaría si no existiese dicho valle.

La amplitud unitaria del tren de ondas SH que ataca cada uno de los cañones provoca que, en la superficie, debido a la suma de la onda incidente más la reflejada, la amplitud total del movimiento anteroposterior en un punto alejado del semiespacio sea igual a 2.

Serán tres las geometrías bajo estudio. Se han denominado del siguiente modo:

- · Cañón semicircular
- · Cañón recto
- · Cañón semielíptico con inclusión

Las variables geométricas del modelo tridimensional que es necesario determinar son tres: longitud total del cañón, cantidad de semiespacio a discretizar y tamaño de los elementos en la discretización.

1.2 CAÑÓN SEMICIRCULAR

La sección que presenta este cañón es la representada en la figura 1.1:



Fig. 1.1 Sección del cañón semicircular. Radio = 1 um

El diámetro del cañón es de 2 unidades métricas (en adelante um). Por su sencillez y la abundante bibliografía existente, fue la geometría elegida para iniciar las primeras modelizaciones. Se comenzó fijando la longitud del cañón, así como la cantidad de semiespacio discretizado, variando únicamente el tamaño del elemento. El tren de ondas SH incide verticalmente (90°), y su frecuencia angular es de 2π rad/s. De

este modo, se empezó con una longitud de cañón de 12 um (12 λ), y una longitud de semiespacio igual a 4 um (2 a cada lado del eje axial), o lo que es equivalente, 4 λ . La primera discretización contempla una longitud transversal para cada elemento de $\lambda/4$. Se ha incluido la solución analítica deducida por Trifunac (1973), además de la sección transversal del cañón, para ubicar de forma exacta la posición de los puntos críticos.

La siguiente gráfica muestra el desplazamiento anteroposterior que sufren las distintas secciones del cañón, empezando en x=0, que coincide con la sección central del cañón, y llegando hasta x=6, borde del modelo tridimensional.



Fig. 1.2 Cañón semicircular ante incidencia vertical. ω=6.283 rad/s

A raíz de los resultados expuestos en la gráfica anterior se deduce que:

- La coincidencia entre los resultados numéricos y la solución analítica es evidente, aunque convendría disminuir el tamaño del elemento, sobre todo en la parte del cañón, y disponer así de un mallado más fino.
- La sección correspondiente al borde del cañón es la única en la que no se verifica la similitud entre las soluciones. En este cañón, por lo que se desprende de esta última figura, no es recomendable traspasar la sección x=5, lo que supone un amplio rango de validez de la solución tridimensional.
- Se aprecia cierta divergencia en el valor central (y=0), entre todas las secciones y la analítica. Como se demostrará posteriormente, es debido a la escasa longitud axial del cañón.

Si se mantiene la geometría pero se reduce el tamaño del elemento hasta $\lambda/8$, bajo las mismas condiciones de onda incidente, el resultado que se obtiene es el que a continuación se muestra:



Fig. 1.3 Cañón semicircular ante incidencia vertical. ω =6.283 rad/s. $\lambda/8$

La discretización más fina se traduce en una mayor suavidad de las curvas, a lo largo de toda la sección transversal. Por otro lado, sigue existiendo discrepancia entre el valor central (y=0) de la solución analítica y el resto de las curvas, al no haberse modificado la longitud del cañón. Convendría mencionar que, aunque la sección x=4 se solapa en algunos tramos con la analítica, representa una mera casualidad. Como se demostrará en posteriores discretizaciones, el tamaño del elemento no altera la magnitud de los valores de cada curva, siempre que dicho tamaño sea lo bastante pequeño en relación a la longitud de onda (mínimo $\lambda/4$), obviamente. La sección que debe proporcionar los mejores resultados debe ser la central (x=0), puesto que no se ve alterada por las condiciones de borde.

La sección correspondiente al borde del cañón vuelve a destacar sobre el resto por su evidente discordancia.

Se prueba a continuación a modificar el tamaño del semiespacio. Si este se reduce a la mitad, es decir, 2 um (1 um a cada lado), los resultados no se ven alterados, como puede a apreciarse en la siguiente figura, y en la posterior, en la que se compara con la anterior dimensión del semiespacio:



Fig. 1.4 Cañón semicircular ante incidencia vertical. ω =6.283 rad/s. λ /16. Semiespacio reducido.

Se ha empleado un tamaño de elemento aproximadamente igual a $\lambda/16$. Compárese la sección central (x=0) de este modelo con la correspondiente a la que posee el doble de semiespacio:



Fig. 1.5 Cañón semicircular ante incidencia vertical. ω =6.283 rad/s. Comparativa por semiespacios

Compárese finalmente un modelo con longitud de semiespacio igual a 8λ , utilizando una discretización $\lambda/4$, frente a otro con longitud de semiespacio igual a 4λ , empleando idéntico tamaño de elemento:



Fig. 1.6 Cañón semicircular ante incidencia vertical. ω =6.283 rad/s. Comparación de semiespacios

Resulta evidente el solapamiento entre ambas curvas. Por tanto, se puede afirmar que, a partir de una cierta cantidad de semiespacio discretizado, incrementos de la misma no modifican los resultados, al menos en la geometría que se está analizando en el presente apartado. Por tanto, queda por modificar una última variable, que no es otra que la longitud del cañón.

El modelo que se presenta a continuación es un cañón de longitud 40 λ , superficie de semiespacio discretizada 2 λ , y tamaño de elemento variable: $\lambda/4$ en el semiespacio y $\lambda/8$ en el cañón. En este caso, la solución numérica coincide plenamente con la analítica, tal y como expone la siguiente figura:



Fig. 1.7 Cañón semicircular ante incidencia vertical. ω =6.283 rad/s. Longitud = 40 λ

Incluso el desplazamiento anteroposterior de la sección x=19, muy próxima al borde, puede ser considerado como aceptable.

Hasta el momento sólo se ha empleado la herramienta tridimensional en el cálculo del movimiento anteroposterior del cañón de sección semicircular. El software bidimensional posee la particularidad de poder determinar la cantidad de semiespacio requerida para lograr una solución lo más parecida a la analítica, o bien considerar a este como infinito, aportando de este modo una solución prácticamente exacta. Esta virtud se empleará en posteriores cañones de sección más complicada, y así conocer el semiespacio necesario en el modelo tridimensional. Por ahora, compárese la solución propuesta por el modelo bidimensional, con la del tridimensional y con la exacta, para el último cañón analizado:



Fig. 1.8 Cañón semicircular ante incidencia vertical. ω=6.283 rad/s. Comparativa 3D vs. 2D

Queda patente en esta última gráfica que, eligiendo de forma adecuada los modelos, cualquiera de los dos métodos puede ser utilizado para resolver problemas con geometrías más complicadas, y cuyas correspondientes soluciones exactas todavía no han podido ser encontradas.

1.3 CAÑÓN RECTO

Se ha denominado así a un cañón de paredes rectas, geometría presente en numerosas presas del Planeta. Se dividirá el estudio en dos partes. En una primera se considerará un cañón de paredes rectas, cuya sección se mantiene constante a lo largo del mismo. En la segunda fase, se estudia la ruptura del problema antiplano mediante un cambio de sección en el cañón, manteniendo siempre la geometría de paredes rectas.

1.3.1 Cañón recto de sección constante

La sección que presenta este cañón es la dibujada en la figura 1.9:



Fig. 1.9 Sección del cañón recto. Sección constante

Coincide con el cañón donde se ubica la presa de Morrow Point, objeto de numerosos estudios elaborados por los tutores de este PFC. Su profundidad es de 141.732 m, su semiancho menor de 23.903 m, y su semiancho mayor de 91.921 m. Atendiendo a los criterios mínimos de modelización de cañones extraídos del apartado anterior, la discretización más burda del cañón bajo estudio genera tal cantidad de nodos que los recursos de memoria de los que dispone el equipo informático se encuentran enormemente ajustados, de ahí que, por razones de tiempo de ejecución, sólo se haya obtenido el movimiento anteroposterior de la superficie del cañón ante incidencia vertical con el software tridimensional. El bidimensional se utilizará para incidencias distintas de la vertical.

El cañón posee las siguientes propiedades físicas:

$$\begin{split} G &= 11.5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \\ \rho &= 2641.64 \text{ kg/m}^3 \\ \upsilon &= 0.2 \\ \xi &= 0.05 \\ \omega_s &= 27.22 \text{ rad/s} \end{split}$$

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{11.5 \cdot 10^9}{2641.65}} = 2086.46 \ m/s$$

Conviene definir un parámetro adimensional entre la profundidad del cañón y la longitud de onda. Así:

$$\eta = \frac{p}{\lambda}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lambda = c \cdot T = c \cdot \frac{2\pi}{\omega},$$

se podría elaborar la siguiente tabla:

$\eta = p/\lambda$	λ (m)	ω (rad/s)	$a = \omega/\omega_s$
0.15	944.880	13.874	0.51
0.3	472.440	27.748	1.02
0.5	283.464	46.248	1.70
0.75	188.976	69.372	2.55
1.0	141.732	92.496	3.40

Estas serán las frecuencias con las que se trabaje en este apartado.

1.3.1.1 Incidencia vertical.

En un primer acercamiento al cañón se aplicará el modelo numérico bidimensional para conocer la cantidad de semiespacio a discretizar cuando sobre la superficie incide un tren de ondas SH verticalmente. Se pretende obtener algún criterio de discretización relacionado con λ , o bien con la profundidad del cañón. La

discretización empleada es del orden de $\lambda/16$. Por último, reseñar que, por un lado, en la leyenda de cada gráfica, 'L' significa λ . Por otro, la curva 'Exacta' se refiere a la solución del problema cuando el semiespacio es infinito. Por ser la referencia, se ha discretizado con tamaño de elemento igual a $\lambda/64$.



Fig. 1.10 Cañón recto ante incidencia vertical. Análisis de la cantidad de semiespacio a discretizar. ω_l .

Como se aprecia, el solapamiento de las curvas en el cañón y sus alrededores evidencia que no es necesario discretizar una cantidad de semiespacio superior a 0.45λ , o lo que en este caso es igual a 3 veces la profundidad del cañón. La discrepancia entre las curvas crece cuanto mayor es la distancia entre un punto del semiespacio y el cañón.



Fig. 1.11 Cañón recto ante incidencia vertical. Análisis de la cantidad de semiespacio a discretizar. ω_2 .

Para esta segunda frecuencia, discretizar 0.6λ de semiespacio no basta para igualar a la curva exacta. Se podría dar por válida una cantidad de 0.9λ , aunque para puntos alejados del cañón la concordancia entre las curvas disminuye.



Fig. 1.12 Cañón recto ante incidencia vertical. Análisis de la cantidad de semiespacio a discretizar. ω₃.

Ninguna de las curvas representadas se ajusta en todo el rango de abcisas a la curva exacta. Incluso con superficie libre del orden de 5 λ tampoco se lograba coincidencia plena. Quizás, a partir de λ ó 1.5 λ los resultados comienzan a no discrepar tanto, aunque exista diferencia apreciable en el eje axial del cañón.



Fig. 1.13 Cañón recto ante incidencia vertical. Análisis de la cantidad de semiespacio a discretizar. ω_4 .

La primera curva (0.75λ) , si bien adopta valores próximos a los de la curva exacta, no se ajusta todo lo deseable. Es a partir de 1.5λ cuando el solapamiento comienza a ser mayor, y a medida que se incrementa la superficie libre mejores son los resultados.



Fig. 1.14 Cañón recto ante incidencia vertical. Análisis de la cantidad de semiespacio a discretizar. ω_5 .

De esta figura destaca el solapamiento de las curvas, incluso la que posee una menor superficie libre.

Por tanto, de las gráficas anteriores puede extraerse como criterio de modelización el siguiente: si se desea un grado de exactitud relativo, se debe discretizar una cantidad de semiespacio no inferior a 0.5λ para bajas frecuencias (inferiores a ω_s), y λ para altas. Para frecuencias intermedias, según las curvas, se requiere aproximadamente 1.5λ de superficie libre a cada lado del cañón. Si el parámetro de referencia es la profundidad, se necesitaría un mínimo de 3 veces la profundidad del cañón para bajas frecuencias, mientras que para altas, con 1 vez es suficiente. Para frecuencias intermedias, 2 veces la profundidad podría valer.

Ya se está, por tanto, en disposición de crear el modelo tridimensional. Por la mayor dificultad que entraña elaborar dicho modelo, convendría diseñar un cañón que sirviese para todas las frecuencias. Esto supondría extender de forma excesiva la superficie libre, con lo que el número de elementos y, por consiguiente, el de nodos, se elevaría notablemente, problema que sería inviable para los recursos informáticos de los que dispone el Departamento. Por ello, se probó en primera instancia con un cañón sencillo, intuyendo de antemano que los resultados se asemejarían bastante a los del programa bidimensional para altas frecuencias, pero no así para bajas. El cañón en cuestión fue el siguiente:



Fig. 1.15 Cañón recto tridimensional

La longitud total del cañón asciende hasta los 2000 m, mientras que desde el eje del mismo hasta el punto más alejado del semiespacio la distancia es de 200 m.

Este modelo generó los resultados que a continuación se exponen:





Para la primera frecuencia se intuía semejante discrepancia entre ambos modelos. Recuérdese que, según el criterio anterior, el modelo tridimensional requeriría para esta frecuencia aproximadamente 2 veces más de superficie libre. Es de esperar que, al incrementar la frecuencia, las dos curvas se parezcan más, aunque para ω_2 sigue existiendo una diferencia apreciable.



Fig. 1.17 Cañón recto ante incidencia vertical. Comparación 3D vs. 2D. ω_2 .

A partir de la tercera frecuencia, se evidencia el acercamiento entre ambas curvas, tal y como muestran las figuras:



Fig. 1.18 Cañón recto ante incidencia vertical. Comparación 3D vs. 2D. ω_3 .


Fig. 1.19 Cañón recto ante incidencia vertical. Comparación 3D vs. 2D. ω_4 .



Fig. 1.20 Cañón recto ante incidencia vertical. Comparación 3D vs. 2D. ω_5 .

Los peores resultados se alcanzan para ω_1 , ω_2 y ω_4 . Para corregirlos, se decidió aumentar la longitud del cañón al doble, apreciándose una leve mejoría en los resultados, pero todavía lejos de la curva aportada por el programa bidimensional. En las siguientes gráficas, se compara además con el caso anterior, para observar así que el aumento de la coordenada axial supone únicamente desplazar las curvas previas, lo que obliga a pensar que la influencia nociva procede de la cantidad de semiespacio discretizada, como ya se intuía. He aquí los resultados:







Fig. 1.22 Cañón recto ante incidencia vertical. Comparación 3D vs. 2D. ω_2 .



Fig. 1.23 Cañón recto ante incidencia vertical. Comparación 3D vs. 2D. ω_4 .

Mejorar en este caso el modelo tridimensional consistiría en incrementar la superficie libre, y si es posible, aumentar también la longitud axial. Por ello, se fabrica un cañón de 10000 m de longitud y 400 m de semiespacio a cada lado del cañón. La relación ancho:largo del cañón es del orden de 1:10. Para bajas frecuencias, sigue siendo una cantidad de superficie libre escasa, pero como se verá, los resultados mejoran visiblemente. Se representan las tres primeras frecuencias:



Fig. 1.24 Cañón recto ante incidencia vertical. Comparación 3D vs. 2D. ω_1 . Incremento longitudinal



Fig. 1.25 Cañón recto ante incidencia vertical. Comparación 3D vs. 2D. ω₂. Incremento longitudinal



Fig. 1.26 Cañón recto ante incidencia vertical. Comparación 3D vs. 2D. ω₃. Incremento longitudinal

1.3.1.2 Influencia del carácter espacial de la excitación

Para finalizar con este cañón se determina el movimiento anteroposterior de su superficie cuando sobre él incide un tren de ondas SH con ángulo distinto a 90°, utilizando para ello el modelo bidimensional. Se pondrá de manifiesto las zonas de amplificación y de sombra, producto de una excitación no simétrica. Además, otra consecuencia de la incidencia oblicua es la ruptura del problema antiplano, que no será estudiado en este apartado, pero sí en el correspondiente al cañón de sección recta con ensanchamiento.

Los anteriores criterios de discretización no se modifican por el hecho de la incidencia no vertical. De cualquier modo, se supondrá en este caso que el modelo bidimensional posee una cantidad de superficie libre infinita, y el tamaño del elemento es del orden de $\lambda/64$. El tren de ondas SH llega al cañón por su costado izquierdo. La modificación del movimiento anteroposterior ante distintas incidencias para cada frecuencia es representada en las siguientes figuras:



Fig. 1.27 Cañón recto ante incidencia variable. ω_1 . Modelo 2D



Fig. 1.28 Cañón recto ante incidencia variable. ω_2 . Modelo 2D



Fig. 1.29 Cañón recto ante incidencia variable. ω₃. Modelo 2D



Fig. 1.30 Cañón recto ante incidencia variable. ω_4 . Modelo 2D



Fig. 1.31 Cañón recto ante incidencia variable. ω_5 . Modelo 2D

Cualquiera de las figuras expuestas evidencia el fenómeno del 'Efecto Local', o, lo que es lo mismo, la modificación del campo de desplazamientos provocada por una alteración morfológica o topográfica del semiespacio. A medida que se reduce el ángulo de incidencia se incrementa la respuesta por el lado del cañón por el que llega la solicitación, y disminuye en la parte opuesta. Así, para incidencia rasante (0°), el efecto alcanza su máxima expresión, independientemente de la frecuencia. La explicación se halla en el transporte energético que supone cualquier onda. Cuando la excitación sísmica llega a la intersección entre el cañón y el semiespacio (parte izquierda del cañón) gran parte de la energía se refleja, y el resto se propaga por el costado izquierdo del cañón, hasta llegar a su fondo. Es por esto por lo que al costado derecho llega un remanente de energía muy inferior al incidente, producto del mayor recorrido que tiene que efectuar la energía y, por tanto, mayor es la disipación de ésta. Si bien las ondas de Rayleigh provocan un campo de desplazamientos distinto al de las ondas SH, este ejemplo podría servir para entender el por qué de las zonas de amplificación y de sombra a lo ancho del cañón. Como se comentó en el correspondiente apartado teórico, las ondas de Rayleigh son ondas superficiales capaces de recorrer grandes distancias a gran velocidad, pero cuya amplitud con la profundidad se disipa exponencialmente.

Atendiendo ahora a los valores numéricos, se aprecia que, cuanto más alta es la frecuencia, mayores son las amplificaciones, llegando prácticamente a 2.5 veces el movimiento anteroposterior del semiespacio para incidencia rasante. También la zona de sombra registra un crecimiento con el aumento de la frecuencia, alcanzando reducciones del orden de 0.25 veces el campo de desplazamientos en la superficie libre.

Cabe destacar por último cómo, por la geometría del cañón, para pequeñas frecuencias, la variación del campo de desplazamientos con el ángulo de incidencia se produce en todo el rango de valores de este último, es decir, se aprecia el aumento paulatino en el movimiento anteroposterior con el mencionado ángulo. Sin embargo, para altas frecuencias, no existe una diferencia notoria entre desplazamientos provocados por incidencia a 30° e incidencia a 60°, o, lo que es lo mismo, la influencia del ángulo incidente en el desplazamiento es mayor cuanto menor sea el primero.

1.3.2 Cañón recto con ensanchamiento

El cañón que se presenta a continuación posee una sección idéntica a la del estudiado en el apartado anterior durante la primera mitad, ensanchándose en un pequeño tramo, y manteniendo otra sección recta durante la segunda mitad. La zona de ensanchamiento consiste en una pared plana, no alabeada. Esta geometría pretende aproximarse a la morfología típica de cañones aptos para el almacenamiento de agua mediante presas. Una perspectiva tridimensional del cañón puede observarse en la siguiente figura:



Fig. 1.32 Cañón recto con ensanchamiento. Modelo 3D

La longitud total del cañón es de 12000 m, y la cantidad mínima de superficie libre discretizada de 408 m. Si bien la relación ancho:largo en cada semilongitud del cañón es de aproximadamente 1:5, lo cual es, a la vista de los resultados, insuficiente, fue imposible elaborar un modelo que alcanzase en cada tramo valores del orden de 1:10, por límites en la relación de aspecto de los elementos, que ANSYS fija en 20.

El tamaño de elemento, para la frecuencia mayor, está próximo a $\lambda/4$. El tren de ondas SH incide verticalmente, y será ésta la única incidencia estudiada en este apartado. Las frecuencias de la excitación serán las mismas que las empleadas en el cañón de sección recta constante.

Además del movimiento anteroposterior, se analizará el movimiento transversal y el vertical, puesto que, aunque la incidencia sea vertical, el cambio de sección provoca la ruptura del problema antiplano.

En cuanto a la leyenda de cada gráfica, en ella aparece el término 'd = ', que indica la distancia que separa cada sección, considerando siempre que la sección x_1 limita con la zona del ensanchamiento.

1.3.2.1 Evaluación del movimiento anteroposterior

Cada frecuencia se ilustra con 4 gráficas, correspondientes dos de ellas a cada una de las secciones que componen el cañón, una tercera a la zona de ensanchamiento y la cuarta representa una visión tridimensional de esta componente del campo de desplazamientos. Se quiere con ello dar una visión global de cómo se desplazaría la superficie del cañón, así como el semiespacio que lo rodea.



Fig. 1.33 Cañón recto ante incidencia vertical. ω₁. Modelo 3D. Sección mayor

La curva 'Exacta' representa el movimiento anteroposterior que sufriría el cañón si su única sección fuese la superpuesta en la gráfica. La sección x5 se encuentra aproximadamente en la mitad de la parte del cañón que presenta esta sección. Si el modelo hubiese tenido suficiente longitud, esta curva estaría superpuesta con la 'Exacta'. De cualquier modo, como se ha visto en apartados anteriores, modificar la longitud del cañón supone desplazar las curvas, no alterar su forma. Por ello, puede intuirse dónde y cómo sería la respuesta si la longitud del cañón fuese la deseada. De igual forma le ocurre a la zona de sección más estrecha. No obstante, este efecto se reduce cuando el valor de la frecuencia aumenta, tal y como se verá en breve.



Fig. 1.34 Cañón recto ante incidencia vertical. ω_1 . Modelo 3D. Sección menor

En ambas gráficas aparece la tendencia lógica a recuperar la respuesta que se tendría si el cañón no presentase cambio de sección, a medida que crece la distancia entre la zona de ensanchamiento y la sección bajo estudio. Es decir, en la zona intermedia de cada semicañón puede considerarse que existe situación antiplana, puesto que, según los datos expuestos, la influencia de la zona de ensanchamiento y la de borde no es importante. Se apreciará mejor observando el valor del campo de desplazamientos transversal y vertical, próximo a nulo en dicha zona.

Véase a continuación cómo es el movimiento anteroposterior en la zona de transición:



Fig. 1.35 Cañón recto ante incidencia vertical. ω_1 . Modelo 3D. Zona de transición

Una gráfica tridimensional del movimiento permite apreciar de forma global su evolución a lo largo y ancho del cañón:



Fig. 1.36 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω_1 *. Vista 3D.*

La coordenada 'x' hace referencia al eje longitudinal del cañón, correspondiendo la parte negativa de la misma a la zona de sección mayor. La coordenada 'y' coincide entonces con el ancho del cañón.

La mejora de los resultados según se incrementa el valor de la frecuencia queda patente en las figuras que a continuación se exponen:



Fig. 1.37 Cañón recto ante incidencia vertical. ω₂. Modelo 3D. Sección mayor







Fig. 1.39 Cañón recto ante incidencia vertical. ω₂. Modelo 3D. Zona de transición



Fig. 1.40 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω_2 . Vista 3D



Para la tercera frecuencia los resultados mejoran visiblemente:

Fig. 1.41 Cañón recto ante incidencia vertical. ω₃. Modelo 3D. Sección mayor



Fig. 1.42 Cañón recto ante incidencia vertical. ω₃. Modelo 3D. Sección menor



Fig. 1.43 Cañón recto ante incidencia vertical. ω₃. Modelo 3D. Zona de transición



Fig. 1.44 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω_3 . Vista 3D





Fig. 1.45 Cañón recto ante incidencia vertical. ω_4 . Modelo 3D. Sección mayor







Fig. 1.47 Cañón recto ante incidencia vertical. ω_4 . Modelo 3D. Zona de transición



Fig. 1.48 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω_4 . Vista 3D



Para terminar con este apartado, se presentan las curvas de la última frecuencia:

Fig. 1.49 Cañón recto ante incidencia vertical. ω₅. Modelo 3D. Sección mayor



Fig. 1.50 Cañón recto ante incidencia vertical. ω_5 . Modelo 3D. Sección menor



Fig. 1.51 Cañón recto ante incidencia vertical. ω₅. Modelo 3D. Zona de transición



Fig. 1.52 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω_5 . Vista 3D

Como tendencia general cabe destacar cómo, para valores altos de la frecuencia, la distancia que se requiere para recuperar la respuesta del problema antiplano es menor, independientemente de la sección. Incluso para ω_3 , en los propios límites de la zona de transición, la curva se encuentra muy próxima a la correspondiente del problema antiplano.

1.3.2.2 Evaluación del movimiento transversal

Se estudiará en este apartado el movimiento transversal que sufre la superficie del modelo, producto del cambio de sección. Únicamente se representará la gráfica tridimensional correspondiente a cada frecuencia, al integrarse en ésta toda la información. Para la primera frecuencia se tiene:



Fig. 1.53 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω_1 . Vista 3D del mvto. transversal

Tanto el cambio de sección como la zona de borde son las que provocan la ruptura del problema antiplano. De cualquier forma, la magnitud de estos desplazamientos es un orden de magnitud inferior al movimiento anteroposterior.

Si la excitación posee la segunda frecuencia, el desplazamiento sería el siguiente:



Fig. 1.54 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω₂. Vista 3D del mvto. transversal

El efecto es el mismo, aunque la magnitud del movimiento es superior que el provocado por la frecuencia anterior.

La tercera frecuencia presenta su máximo en la zona del ensanchamiento, como en los anteriores casos. Sin embargo, en el resto del cañón no se aprecia desplazamiento transversal. Sólo el pequeño abultamiento generado por el borde de la discretización altera esa carencia de movimiento.



Fig. 1.55 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω₃. Vista 3D del mvto. transversal

Para la cuarta frecuencia, el comportamiento es similar, aunque con mayor oscilación. Cabe destacar el aumento en la zona de transición del campo de desplazamientos transversales a medida que se va incrementando la frecuencia. Esta tendencia también la verifica el campo de desplazamientos verticales, como se comprobará en el siguiente apartado. La vista tridimensional del movimiento transversal para la cuarta frecuencia se presenta en la figura 1.56:



Fig. 1.56 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω₄. Vista 3D del mvto. transversal

Para terminar se presenta la figura perteneciente a la quinta frecuencia:



Fig. 1.57 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω₅. Vista 3D del mvto. transversal

1.3.2.3 Evaluación del movimiento vertical

Al igual que el transversal, debido al cambio de sección, el movimiento vertical no es nulo. Se expone en este apartado su variación con la frecuencia. Para ω_1 :



Fig. 1.58 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω_1 . Vista 3D del mvto. vertical



Para ω_2 :

Fig. 1.59 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω_2 . Vista 3D del mvto. vertical



Para ω_4 :



Fig. 1.60 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω₃. Vista 3D del mvto. vertical



Fig. 1.61 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω₄. Vista 3D del mvto. vertical

Y para la última frecuencia:



Fig. 1.62 Cañón recto con ensanchamiento ante incidencia vertical. ω_5 . Vista 3D del mvto. vertical

1.4 CAÑÓN SEMIELÍPTICO CON INCLUSIÓN

Para este modelo se dispone de solución analítica, deducida por Dravinski en 1980. Consiste en un cañón de sección semielíptica relleno hasta la superficie libre por un material más blando, como muestra la figura:



Fig. 1.63 Sección del cañón semielíptico con inclusión

La profundidad máxima (semieje menor) es de 1.4 um, mientras que el semieje mayor alcanza las 2 um. Las propiedades físicas del cañón se denotarán con el subíndice 1, mientras que las de la inclusión con el 2:

. . .

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1 & \rho_2 &= 0.668 \\ c_1 &= 1 & c_2 &= 0.5 \\ G_1 &= 1 & G_2 &= 0.167 \end{aligned}$$

El modelo será sometido a un tren de ondas SH cuya frecuencia adoptará 3 valores, incidiendo sobre el cañón siempre de forma vertical (90°). Dichas frecuencias son: $\omega_1 = 0.79 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 1.57 \text{ rad/s}$ y $\omega_3 = 2.36 \text{ rad/s}$

Se comenzó elaborando un modelo tridimensional con una elevada cantidad de superficie libre (10 um a cada lado del cañón, lo que supone 1.26 λ , siendo λ la longitud de onda correspondiente a la frecuencia más pequeña), y escasa longitud (20 um). El tamaño de elemento varía desde λ /8 en la zona del cañón (para la frecuencia más alta) hasta λ /4, aproximadamente, en la zona del semiespacio más alejada de la inclusión. Dicho modelo tridimensional se representa en la siguiente figura:



Fig. 1.64 Cañón semielíptico con inclusión tridimensional

Aunque no atiende a los criterios de discretización deducidos en apartados anteriores, los resultados para la frecuencia más baja no son del todo negativos:



Fig. 1.65 Cañón semielíptico con inclusión ante incidencia vertical. ω_1 .



Fig. 1.66 Cañón semielíptico con inclusión ante incidencia vertical. ω_2 .



Fig. 1.67 Cañón semielíptico con inclusión ante incidencia vertical. ω_3 .

La modificación del modelo tridimensional consistió en reducir la superficie libre a 5.6 um (0.7 λ , utilizando la frecuencia menor) e incrementar su dimensión longitudinal hasta 160 um (20 λ). De este modo, la relación ancho:largo es del orden de 1:10, cumpliendo así uno de los requisitos deducidos en anteriores cañones. El tamaño de elemento se ha mejorado, siendo ahora del orden de $\lambda/8$ en todo el cañón. Con estos parámetros, los resultados logrados fueron los siguientes:



Fig. 1.68 Cañón semielíptico con inclusión ante incidencia vertical. ω_{l} .

En primer lugar, cabe mencionar que la curva que representa la solución analítica ha sido obtenido en condiciones muy adversas, por lo que su exactitud es relativa. De cualquier modo, los resultados numéricos son más que aceptables. Conviene además resaltar el hecho de la escasa influencia del borde del modelo sobre la solución. La sección que corresponde a dicho borde es la x_8 , que se solapa con las demás.



Fig. 1.69 Cañón semielíptico con inclusión ante incidencia vertical. ω_2 .



Fig. 1.70 Cañón semielíptico con inclusión ante incidencia vertical. ω_3 .

En estos dos últimos casos sí que aparece la influencia del borde del modelo, pero la discrepancia entre esta sección y las demás no es alta. En general, los resultados numéricos pueden considerarse aceptables. La amplificación que sufre el desplazamiento anteroposterior en la superficie de la inclusión se debe a que parte de las ondas incidentes se difractan, entrando en la misma, y quedando 'atrapadas' en ella, puesto que, en ese momento, la superficie que la rodea posee una densidad mayor. Esto explicaría el efecto local que se produce en geometrías de este tipo, similar a la de Ciudad de México. El desplazamiento anteroposterior a lo largo y ancho del cañón puede visualizarse mediante un gráfico tridimensional. Así, para la primera frecuencia:



Fig. 1.71 Cañón semielíptico con inclusión ante incidencia vertical. ω_1 . Visión 3D del mvto. antero-posterior

Quizás en este tipo de gráfica se aprecia mejor la alteración en el campo de desplazamientos provocada por el borde de la discretización. Para la segunda frecuencia sería:







Fig. 1.73 Cañón semielíptico con inclusión ante incidencia vertical. ω_3 . Visión 3D del mvto. antero-posterior

Se comprueba, por último, que el campo de desplazamientos transversal y vertical es nulo, producto de la simetría del problema. Sólo para la tercera frecuencia se altera levemente el problema antiplano, apareciendo pequeñas ondulaciones en el desplazamiento transversal, fruto del hecho de estar trabajando con un modelo tridimensional, además de las típicas amplificaciones originadas por el borde del modelo. De cualquier forma, se aprecia cómo la magnitud de este campo de desplazamientos es aproximadamente un orden de magnitud inferior al movimiento anteroposterior, especialmente en la zona central del modelo, lejos del borde. Dicho campo de desplazamientos transversal se comporta del siguiente modo:



Fig. 1.74 Cañón semielíptico con inclusión ante incidencia vertical. ω_3 . Visión 3D del mvto. transversal

1.5 INFLUENCIA DEL EFECTO LOCAL SOBRE ACELEROGRAMAS

1.5.1. Introducción

Se pretende en este apartado cuantificar cómo varía un determinado acelerograma cuando la estación medidora se sitúa en zonas con alteraciones topográficas, las cuales son capaces de inducir una amplificación o reducción del sismo. Como aplicación directa, se estudiará el desplazamiento que sufre la segunda planta de una misma estructura si ésta se hubiese construido en diferentes localizaciones.



Fig. 1.75 Sección del cañón semielíptico

Como principales herramientas de trabajo, se necesitará el algoritmo FFT y el modelo numérico bidimensional. El movimiento sísmico empleado será el ocurrido en la localidad de El Centro, California, en 1940. La geometría sobre la que actúa es un valle aluvial, de 6 km de ancho, y 400 m de profundidad. La sección se supondrá semielíptica, como se muestra en la figura 1.76. Los 5 puntos donde supuestamente se coloca la estructura han sido enumerados:

En cuanto al material que compone el valle, se supondrá en un primer caso que es granito, y en el segundo, arcilla. Se pretende cuantificar la influencia de la densidad del material sobre los desplazamientos que provoca el terremoto. Dicho sismo se compone de un tren de ondas SH, de frecuencia variable, e incide con 3 ángulos distintos: 90°, 45° y 0°.

El proceso de cálculo comienza determinando, mediante el modelo numérico bidimensional, la función de transferencia en cada uno de los puntos de interés. Esto es, se hace incidir sobre el valle una onda de frecuencia conocida con cada uno de los ángulos prescritos. El rango de frecuencias lo determina la geometría y el acelerograma que se esté utilizando. En nuestro caso, no fue necesario superar los 158 rad/s. Dicha función de transferencia es necesario tratarla, puesto que se encuentra contaminada por el 'efecto viajero' de la onda. Ya se explicará en qué consiste y cómo se repara.

Una vez se conozca cómo es el comportamiento de un punto de la superficie del valle con la frecuencia, se multiplica el espectro del acelerograma por la función de transferencia obtenida, todo ello mediante el algoritmo FFT. El resultado de esta multiplicación no es más que el espectro del desplazamiento anteroposterior de la superficie en el punto en cuestión. Aplicando de nuevo el algoritmo FFT para determinar ahora la transformada inversa, se obtiene en el dominio temporal el movimiento de dicho punto.

1.5.1.1 Influencia del efecto viajero

El 'efecto viajero' de la onda, al cual se hizo mención líneas atrás, consiste en el retardo que sufre la respuesta debido a que la velocidad de la onda es finita. Puntos próximos entre sí no reflejarán este fenómeno, pero sí aquellos entre los que existan distancias del mismo orden de magnitud que la velocidad, en cifras, obviamente.

Considérese un medio duro, como por ejemplo el granito, y tres puntos equidistantes (500 m). Su separación es lo suficientemente grande como para detectar un retardo considerable en la excitación. El origen del sistema de coordenadas se tomará en el punto n°3. Al ser este punto la referencia, en el instante t=0 comenzará en él el acelerograma:



Fig. 1.76 Onda SH con incidencia rasante sobre semiespacio

Sin embargo, la onda habrá pasado previamente por los puntos 1 y 2, de ahí que los acelerogramas de estos nodos no comiencen en 0. Si no se tiene en cuenta el efecto viajero de la onda, el programa que contiene el algoritmo FFT aportaría las siguientes curvas:



Fig. 1.77 Pérdida de información en acelerogramas

Se aprecia que sólo existe una traslación temporal de los registros, sin cambio de forma alguna. Para que los acelerogramas partan de 0, se debería trasladar el punto de referencia al nodo 1, que es el que primero recibe a la onda. De este modo, el instante t=0 coincide con el momento en que la excitación solicita al origen, y a partir de aquí comienza a transcurrir el tiempo, apreciándose cómo el sismo llega a los otros nodos con cierto retardo. Se representan los 5 primeros segundos:



Fig. 1.78 Cambio del punto de referencia

Los registros se encuentran desfasados 0.4 s, que es el tiempo que emplea la onda en recorrer la distancia que separa dos nodos consecutivos. De forma analítica:

$$t = \frac{e}{c_s} = \frac{1500}{3747.46} = 0.4 \, s$$

Ya en el dominio de la frecuencia, la operación que efectúa esta traslación temporal es la multiplicación de la función de transferencia por un fasor de módulo unitario, deducido a partir de la definición de Transformada de Fourier. Para demostrarlo, se calcula la Transformada de la función de transferencia en el dominio temporal, y desplazada una cantidad t_0 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-t_0) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{-i\omega(s+t_0)} ds = e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{-i\omega s} ds = e^{-i\omega t_0} H(\omega)$$

siendo t_0 el tiempo que tarda la onda en recorrer la distancia comprendida entre el nodo bajo estudio y el punto de referencia. Una forma alternativa de representar este fasor sería:

$$e^{-i\omega t_0} = e^{-i(kx+ky)},$$

donde k es el número de onda: $k = \omega/c_s$, siendo c_s la velocidad de propagación de la onda. Esta última forma de expresar el fasor resulta muy útil para incidencia oblicua, ya que en este caso no resulta inmediato el cálculo del tiempo de traslación.

Se supondrá, en lo que queda de apartado, que el instante t=0 es el mismo para todos los nodos, es decir, se considera que el terremoto llega a cualquier punto del valle aluvial en el mismo momento, o, lo que es lo mismo, se anula el efecto viajero. Así se podrán comparar los acelerogramas registrados en los distintos sismógrafos del valle.

1.5.2 Influencia de las características del terreno

1.5.2.1 Cañón Granítico

La geometría de este cañón es la representada en la figura 1.76. Las propiedades del material son las siguientes:

G = 3.71·10¹⁰ N/m²

$$\rho = 2641.65 \text{ kg/m}^3$$

 $c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3747.56 \text{ m/s}$

Para la primera situación, en la que la excitación incide verticalmente, sólo es necesario representar los registros de 3 nodos, por cuestión de simetría. Aunque este movimiento sísmico dura aproximadamente 30 segundos, se representará únicamente los 5 primeros, donde la solicitación es de mayor magnitud. Se comparan las curvas con el desplazamiento de un punto ubicado en el semiespacio, y a una distancia suficiente como para considerar que el cañón no influye en su movimiento:



Fig. 1.79 Acelerogramas registrados a lo ancho del cañón. Incidencia vertical

El punto 1, al igual que el 5, presentan un registro idéntico al original, el cual sería el que tuviese un punto del semiespacio infinitamente alejado de la anomalía

topográfica. Dicho resultado podría resultar evidente, por encontrarse ambos nodos a 6000 m del valle. Sin embargo, los puntos 2 y 4, por su ubicación, presentan un aumento en líneas generales de los valores del acelerograma original. Recuérdese que eran los vértices del cañón semicircular los que presentaban las mayores amplificaciones del desplazamiento anteroposterior, independientemente del valor de la frecuencia. Por su similitud, se podría extrapolar esta conclusión a este tipo de cañón. El valor máximo para este nodo alcanza 0.496g, lo que supone un 55.3% respecto al valor máximo del registro original, aunque se produce en otro instante de tiempo.

El punto 3, localizado en el fondo del valle, sufre una reducción general de sus valores, respecto a los que se encuentran suficientemente alejados sobre la superficie libre.

Ante incidencia oblicua se rompe la simetría en el comportamiento de los puntos. Dicho ataque tiene lugar por el costado izquierdo del valle. Así, para 45°, los registros obtenidos fueron estos:



Fig. 1.80 Acelerogramas registrados a lo ancho del cañón. Incidencia oblicua

El punto 1 vuelve a adoptar los mismos valores que el registro original, debido tanto a su lejanía del cañón como a su situación opuesta respecto a la incidencia de la onda. El punto 2 tampoco se ve alterado gravemente. En algunas zonas adopta valores superiores al registro de partida, pero en general es muy parecido. El punto 3, si bien
presenta un acelerograma distinto al original, en magnitud sufre en algunos tramos cierta amplificación, y en otros, reducción. No se puede calificar como zona de sombra o de amplificación, para esta incidencia.

Es el punto 4 el que, a grandes rasgos, presenta valores sobresalientes del resto, y naturalmente, del original. La amplificación máxima llega hasta el 70.2%., alcanzándose una aceleración de 0.543g. La explicación es la misma que se dio para el cañón de sección recta e incidencia oblicua. Por último, el punto 5, al encontrarse también muy alejado del valle, no altera de forma profunda el registro. De hecho, es muy similar al registrado en la posición 1.

De la gráfica resalta el desfase de aproximadamente 0.1 s existente entre las curvas correspondientes a los puntos 1 y 5. Se debe a la presencia del cañón en el semiespacio. Esta alteración topográfica provoca una variación en los tiempos de recorrido de la onda, cuando ésta viaja entre los distintos nodos, en comparación con la situación de semiespacio libre. Debido al efecto local, la onda debe recorrer una mayor distancia cuando cruza el cañón, lo que se traduce en una inversión de tiempo mayor. Para corregir esta situación, bastaría sumar al t₀ original este tiempo de desfase. Esto no altera de ningún modo los valores de cada registro, sólo provoca la traslación temporal, como se demuestra en la siguiente figura:



Fig. 1.81 Acelerogramas corregidos. Incidencia oblicua



Cuando la incidencia es rasante, la discrepancia entre las curvas se hace más evidente:

Fig. 1.82 Acelerogramas registrados a lo ancho del cañón. Incidencia rasante

Si, como se comentó anteriormente, se incluye el desfase producto del efecto local en el fasor, el resultado para incidencia rasante es el siguiente:



Fig. 1.83 Acelerogramas corregidos. Incidencia rasante

El máximo valor de aceleración se produce ahora en los puntos 3 y 4, aunque destaca, como siempre, el ubicado en el vértice del cañón, mientras que el punto 2 parece ser zona de sombra, por situarse la mayoría de sus valores por debajo de los del acelerograma de partida. Los registros de los puntos 1 y 5 son muy parecidos en magnitud. La máxima aceleración en la ubicación definida por 4 llega hasta 0.561g, superando el 76% respecto al valor máximo del sismograma de partida.

Una vez se ha ratificado la modificación del registro debido a cambios morfológicos en el semiespacio, se aplican los resultados a un caso particular. Supóngase una estructura de dos plantas similar a la utilizada en un capítulo 4, que presenta un pórtico plano como el de la figura. Dicho modelo se colocará en las posiciones definidas por los 5 puntos estudiados.

La estructura es solicitada en su base por el movimiento sísmico de El Centro (1940). Mediante una serie de simplificaciones, se reducirá el número de grados de libertad a sólo dos, ya que se considera que la masa es posible concentrarla en el centro geométrico de las plantas, permitiéndose exclusivamente el movimiento en el plano del pórtico por suponerse los dinteles infinitamente rígidos y los pilares inextensibles. Como se aprecia, se trata de una estructura no amortiguada, unida sólo al bastidor con rigideces de distinto valor:



Fig. 1.84 Estructura de dos plantas (Modelo)

Los valores numéricos de cada constante son los siguientes:

 $E = 2.0 \cdot 10^{5} \text{ N/cm}^{2}$ $I = 2700 \text{ cm}^{4}$ $H_{1} = H_{2} = 3 \text{ m}$ $K_{1} = 240 \text{ N/cm}$ $K_{2} = 120 \text{ N/cm}$ $M_{1} = M_{2} = 2500 \text{ kg}$

Se está entonces ante un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, que es necesario desacoplar para encontrar los desplazamientos que experimenta cada grado de libertad. Efectuando el mismo desarrollo matemático que en el capítulo 4 se introdujo, se llega a la siguiente expresión:

$$M_j * \ddot{y}_j(t) + K_j * y_j(t) = \varphi_j^T M J a(t)$$

En este caso, el sistema de ecuaciones acoplado queda reducido a 2 ecuaciones desacopladas, cada una de ellas similar a la que correspondería a un modelo con un único grado de libertad. Las matrices de rigidez y de masa son:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{51EI}{H^3} + k_1 & -\frac{24EI}{H^3} \\ -\frac{24EI}{H^3} & \frac{24EI}{H^3} + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.77 \cdot 10^5 & -2.13 \cdot 10^5 \\ -2.13 \cdot 10^5 & 2.25 \cdot 10^5 \end{bmatrix} N/m$$
$$M = \begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix} kg$$

Para hallar el valor de las frecuencias propias se resuelve el determinante:

$$\left|K - \omega^{2} M\right| = \begin{vmatrix} 4.77 \cdot 10^{5} - 2500\omega^{2} & -2.13 \cdot 10^{5} \\ -2.13 \cdot 10^{5} & 2.25 \cdot 10^{5} - 2500\omega^{2} \end{vmatrix} = 0$$

Los posibles valores que verifican esta igualdad son:

$$\omega_1^2 = 41.43 \implies \omega_1 = 6.44 \ rad / s \implies T_1 = 0.976 \ s$$

 $\omega_2^2 = 239.64 \implies \omega_2 = 15.48 \ rad / s \implies T_2 = 0.406 \ s$

Los autovectores serían:

$$(2.237 - \lambda_{1})\varphi_{11} - \varphi_{21} = 0 \qquad Si \ \varphi_{11} = 1 \implies \varphi_{21} = 1.752$$

$$(2.237 - \lambda_{2})\varphi_{12} - \varphi_{22} = 0 \qquad Si \ \varphi_{12} = 1 \implies \varphi_{22} = -0.571, \text{ siendo } \lambda = \frac{2500\omega^{2}}{2.13\cdot10^{5}}$$
Por tanto: $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.752 & -0.571 \end{bmatrix}$

La matriz de masa generalizada sería:

$$M^* = \Phi^T M \Phi = 2500 \begin{bmatrix} 4.07 & 0 \\ 0 & 1.326 \end{bmatrix} kg$$

Y el segundo miembro de la ecuación diferencial desacoplada quedaría como:

$$\Phi^{T} M J = 2500 \begin{bmatrix} 2.752\\ 0.43 \end{bmatrix}, \text{ siendo } J = \begin{bmatrix} 1\\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el sistema desacoplado sería el siguiente:

$$\dot{Y}_{1} + \omega_{1}^{2} Y_{1} = -\frac{2.752}{4.07} a_{BASE}(t)$$

$$\dot{Y}_{2} + \omega_{2}^{2} Y_{2} = -\frac{0.43}{1.326} a_{BASE}(t)$$

Introducir un cierto amortiguamiento en la estructura no supone modificar sus propiedades intrínsecas, como son en este caso sus frecuencias propias. De ahí que, a partir de este momento se considere a la misma con disipadores de energía dependientes de la velocidad. Se supone, en un primer término, que el amortiguamiento asciende a un 2%, con lo que los desplazamientos máximos de cada modo según la Norma serían:

$$T_{1} = 0.976 s \implies S_{d1} = \frac{2.752}{4.07} 5.7 = 3.854 \text{ inch} = 9.79 \text{ cm}$$

$$T_{2} = 0.406 s \implies S_{d2} = \frac{0.43}{1.326} 1.25 = 0.405 \text{ inch} = 1.029 \text{ cm}$$

Por tanto:

· Primer modo de oscilación:

- Desplazamiento de la 1ra. Planta: 9.79 cm
- Desplazamiento de la 2da. Planta: 1.752.9.79 = 17.152 cm

· Segundo modo de oscilación:

- Desplazamiento de la 1ra. Planta: 1.029 cm
- Desplazamiento de la 2da. Planta: 0.571·1.029 = **0.587 cm**

Los desplazamientos máximos respectivos de cada planta serán:

$$x_2^{max} = \sqrt{17.152^2 + 0.587^2} = 17.162 \ cm$$
$$x_1^{max} = \sqrt{9.79^2 + 1.029^2} = 9.844 \ cm$$

La respuesta temporal de cada planta es posible calcularla a partir del programa que contiene el algoritmo FFT. Así, si se considera que el cañón está constituido de granito, los desplazamientos que sufriría la segunda planta si la estructura estuviese en cada uno de los puntos sería como sigue. Para incidencia vertical:



Fig. 1.85 Desplazamiento de la 2da. Planta. Incidencia vertical

Si la estructura se construyese sobre la superficie libre, muy alejada del cañón, el máximo desplazamiento que experimentaría la segunda planta sería de 18.64 cm, ligeramente por encima del valor propuesto por la Norma, concretamente un 8.6%. Si la estructura se colocase sobre los puntos 1, 5 y 3, las curvas indican que ni el movimiento de la estructura ni su desplazamiento máximo diferirían mucho del movimiento de la misma sobre superficie libre. Sin embargo, la posición de los puntos 2 y 4 sí que incrementa el desplazamiento máximo, llegando hasta 23.71 cm, un 27.2% superior al valor correspondiente a la estructura sobre el semiespacio, y un 38.15% superior al de la Norma.

Para incidencia oblicua, es de esperar que la magnitud de los desplazamientos máximos crezca. Así, para 45°:



Fig. 1.86 Desplazamiento de la 2da. Planta. Incidencia oblicua

Destaca sobre todos los demás el punto 4, presentando un desplazamiento máximo de 25.16 cm, esto es, un 35% mayor que el valor correspondiente al de la estructura sobre semiespacio, y un 46.6% respecto a la Norma. La siguiente localización que presenta valores de mayor porte es la 3, y a ésta la siguen a la par las restantes. En este caso, no existe gran diferencia entre los puntos 3 y 4.

Las curvas de desplazamiento de las posiciones 1, 2 y 5 se solapan con la correspondiente a la estructura sobre superficie libre. Se deduce de ello que, bajo estas circunstancias, es posible considerar que la influencia de la alteración topográfica a una distancia igual al ancho del cañón (6000 m) es casi nula.



Para incidencia rasante, éstos son los resultados:

Fig. 1.87 Desplazamiento de la 2da. Planta. Incidencia rasante

Vuelve a ser la localización del punto 4 la que provocaría mayores desplazamientos en la segunda planta de la estructura, llegando a un máximo de 25.86 cm, sólo 7 mm por encima de la incidencia a 45°. Se aprecia, por otro lado, que la posición 3 generaría desplazamientos muy próximos a los del 4.

Destacar por último la zona de sombra en la que se encuentra el punto 2. Los movimientos que sufre la segunda planta a lo largo del terremoto son inferiores a los de cualquier otra ubicación, presentando un desplazamiento máximo de 15.75 cm, es decir, un 9% inferior al valor de la Norma, y 18.35% por debajo de lo que supondría colocar el modelo en el semiespacio. Los puntos 1 y 5 pueden ser de nuevo considerados como semiespacio. La influencia del cañón sobre ellos es escasa.

Para finalizar con el cañón de granito, se representa la evolución del movimiento de la segunda planta cuando la estructura se localiza en el nodo 4:



Fig. 1.88 Desplazamiento de la 2da. Planta. Punto 4

Aunque las frecuencias propias de la estructura se encuentran en la zona donde los armónicos del terremoto tienen mayor amplitud, parece ser que no es suficiente para provocar amplificaciones muchísimo mayores. También es cierto que el material con el se está trabajando posee una gran densidad, lo que dificulta la aparición de efectos resonantes como los que se buscan, ya que los modelos con los que se trabaja presentan frecuencias propias bajas.

En definitiva, para este cañón granítico, el carácter espacial de la excitación y el efecto local han modificado los registros de forma apreciable en los puntos de los vértices y en lo más profundo del valle, con valores de aceleración superiores al 70%. Sin embargo, este porcentaje se reduce a la mitad cuando se habla del desplazamiento máximo sufrido por la segunda planta de la estructura estudiada. No obstante, la influencia tanto del efecto local como del ángulo incidente ha quedado patente.

1.5.2.2 Cañón arcilloso

Se realiza el mismo estudio que para el caso anterior. Tanto la geometría del cañón como la ubicación de los puntos es idéntica al del cañón granítico. Lo único que se modifica son las propiedades del material. En este caso:

 $G = 3.2175 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ $\rho = 1425 \text{ kg/m}^3$

La velocidad de propagación resulta ser de:

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 150.26 \, m/s \, ,$$

muy inferior a la del granito. En este caso, es de esperar que el desfase temporal provocado no sólo por el efecto viajero, sino también por el efecto local, sea mayor, puesto que el tiempo que invierte la onda en propagarse es netamente superior.

Los registros que presentarían los 5 sismógrafos localizados en las 5 posiciones, para las 3 incidencias analizadas serían:



Fig. 1.89 Acelerogramas registrados a lo ancho del cañón. Incidencia vertical

El valor máximo se registra en los puntos 2 y 4, siendo de 0.50g, lo que supone más del 57% con respecto al valor máximo del sismograma de partida, y muy similar al cañón granítico. En general, la magnitud del terremoto en la posición 3 sería inferior al original. Y en los puntos 1 y 5, igual, producto de su lejanía al accidente topográfico



Para incidencia oblicua:

Fig. 1.90 Acelerogramas registrados a lo ancho del cañón. Incidencia oblicua

Destaca por encima de todas la curva del punto 4, presentado 4 picos con aceleraciones superiores a 0.55g, y con un máximo de 0.572g, lo que representa un 80% más que el valor máximo registrado en 1940. En este caso, al efecto local y a la incidencia oblicua habría que añadir la blandura del terreno para explicar este comportamiento. Sin embargo, los acelerogramas aportados por el resto de posiciones no difieren de forma notable respecto al registro original. Esta conducta, normal en los puntos 1 y 5, rompe la tendencia detectada en el cañón granítico correspondiente a las localizaciones 2 y 3: la primera figura como la segunda posición que presenta mayores amplificaciones, y la segunda, zona de sombra o reducción.

Pero, sin duda, la incidencia rasante es la que presenta mayores cambios respecto al comportamiento esperado del sismógrafo cuando se ubica éste en los nodos estudiados:



Fig. 1.91 Acelerogramas registrados a lo ancho del cañón. Incidencia rasante

Es ahora el punto 2 el que sufre las mayores aceleraciones, llegando a un pico de 1.447g, es decir, más de un 350% respecto al valor máximo del terremoto original. El origen de este fenómeno se encuentra en la función de transferencia obtenida a partir del modelo numérico bidimensional. En la siguiente figura se expone el módulo de dicha función hasta aproximadamente 100 rad/s:



Fig. 1.92 Módulo de la función de transferencia correspondiente al desplazamiento del suelo en cada nodo. Incidencia rasante

Se aprecia cómo la función de transferencia del punto 2 oscila en torno a 7.5, lo que supone una amplificación del orden de 3.75. Este comportamiento, debido probablemente a un efecto resonante en el cañón, sólo se produce en esta localización. La conducta del resto de puntos es muy similar a la estudiada hasta el momento. La función de transferencia de la posición 4 se mueve en los alrededores de 4, lo que explicaría por qué la señal registrada en el sismógrafo es del orden del doble (respecto a la original, obviamente). Los puntos 1 y 5 presentan acelerogramas muy parecidos al original, producto de la estabilidad de sus respectivas funciones de transferencia alrededor de 2.

Se coloca ahora en cada nodo, para las 3 incidencias, la misma estructura con la que se trabajó en el cañón granítico, y se analizan los desplazamientos de la segunda planta. Para incidencia vertical:



Fig. 1.93 Desplazamiento de la 2da planta. Incidencia vertical

Como era de esperar, los puntos donde el desplazamiento de la estructura es mayor son los vértices del cañón (posiciones 2 y 4). Si la estructura se construyese en dichos puntos, la segunda planta experimentaría un desplazamiento máximo de 30.52 cm. El movimiento sufrido por dicha planta en 1 y 5 coincide con el que tendría en superficie libre, puesto que los registros sísmicos son casi idénticos. El punto 3 presenta una situación intermedia entre los vértices y los extremos. Al final de este apartado se

efectúa una breve comparativa entre los resultados obtenidos para los dos cañones y el valor predicho por la Norma.



Fig. 1.94 Desplazamiento de la 2da planta. Incidencia oblicua

En este caso resalta el punto 4, provocando un desplazamiento máximo de 34.74 cm. Las posiciones 1, 2 y 4 generan movimientos muy parecidos, y casi idénticos al caso de superficie libre. El punto 3 se presenta como zona de sombra.



Para incidencia rasante:

Fig. 1.95 Desplazamiento de la 2da planta. Incidencia rasante

Es el punto 2 ahora el más peligroso para la estructura, suponiendo desplazamientos netamente superiores al resto de posiciones. El máximo alcanza un valor de 52.85 cm. Le sigue en amplificación la posición 4 y la 3. Los puntos 1 y 5 se pueden considerar como pertenecientes al semiespacio, puesto que no introducen ninguna modificación en las curvas de desplazamiento.



Se expone a continuación la evolución de los puntos 2 y 4:





Fig. 1.97 Desplazamiento de la 2da planta. Punto 4

Se compara por último el campo de desplazamientos de la segunda planta en una misma posición cuando la estructura se sitúa en el cañón granítico o en el arcilloso, para incidencia vertical y rasante (puntos 3 y 4):



Fig. 1.98 Desplazamiento de la 2da planta. Incidencia vertical. Punto 2 (y 4)



Fig. 1.99 Desplazamiento de la 2da planta. Incidencia vertical. Punto 3

Se aprecia cómo en el terreno arcilloso el campo de desplazamientos es



Fig. 1.100 Desplazamiento de la 2da planta. Incidencia rasante. Punto 4



Fig. 1.101 Desplazamiento de la 2da planta. Incidencia rasante. Punto 3

La siguiente tabla incluye los valores máximos de los desplazamientos de la segunda planta, en cm, y los porcentajes de variación respecto al valor predicho por la Norma, por un lado, y por otro, respecto al valor del semiespacio. Se pretende con ello cuantificar en porcentajes la influencia del carácter espacial de la excitación y la presencia del cañón.

Según la Norma, el desplazamiento que sufriría la segunda planta sería de 17.162 cm, mientras que si la estructura estuviese en el semiespacio, según el programa que integra el algoritmo FFT, esa distancia sería de 18.64 cm.

Nomenclatura:

- · Dxg: Desplazamiento máximo de la segunda planta en el cañón granítico
- · Dx_a: Desplazamiento máximo de la segunda planta en el cañón arcilloso

Nodos	Dxg(90°)	Dxg(45°)	Dxg(0°)	D x _a (90°)	$Dx_a(45^\circ)$	Dx _a (0°)
1	18.83	18.08	18.33	19.61	19.91	16.94
	(9.72% , 1.02%)	(5.35%, -3.1%)	(6.8%, -1.7%)	(14.26%, 5.2%)	(16.01%, 6.81%)	(-1.31%, -10%)
2	23.71	18.51	15.74	30.52	21.22	52.85
	(38.12%, 27.2%)	(7.8%, -0.7%)	(-9.0%, -18,4%)	(77.8%, 63.7%)	(23.6%, 13.8%)	(208%, 183.5%)
3	19.04	24.35	23.91	20.68	11.29	30.52
	(10.9%, 2.14%)	(41.9%, 30.6%)	(39.3%, 28.3%)	(20.5%, 10.9%)	(-52%, -65.1%)	(77.8%, 63.7%)
4	23.71	25.16	25.86	30.52	34.74	36.02
	(38.12%, 27.2%)	(46.6%, 34.9%)	(50.7%, 38.7%)	(77.8%, 63.7%)	(102%, 86.4%)	(109.8%, 93.2%)
5	18.83	18.69	18.63	19.61	18.85	18.12
	(9.72%, 1.02%)	(8.9%, 0.26%)	(8.55%, -0.05%)	(14.26%, 5.2%)	(9.83%, 1.12%)	(5.58%, -2.87%)

En líneas generales, se puede considerar que los puntos 1 y 5 no se encuentran afectados por la presencia del cañón, por lo que puede afirmarse que, a una distancia igual al ancho del cañón, la influencia del efecto local casi desaparece.

La ubicación del punto 2 representa una zona de sombra, en el cañón granítico. Cuando el material es arcilla, desaparece esta tendencia y se amplifica de forma espectacular para incidencia rasante.

En la posición 3 no se incrementa de forma excesiva la respuesta, y su comportamiento no guarda una relación definida con el carácter espacial de la onda.

El punto 4 representa, en términos generales, una zona de amplificación del movimiento, independientemente del material. Cuando el ángulo de incidencia se reduce, la respuesta incrementa su cuantía, siendo el terreno arcilloso el que genera mayores coeficientes amplificadores.

2. ANÁLISIS DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS DE Presas Bóveda ante Solicitación Sísmica

2.1 INTRODUCCIÓN

En el presente apartado se pretende poner de manifiesto el comportamiento de una estructura de grandes dimensiones, como es la presa bóveda de Morrow Point (figura 2.1), cuando se ve solicitada por acciones sísmicas de distintas características. Los Tutores de este proyecto han redactado numerosos artículos relacionados con el campo de desplazamientos de la presa cuando sobre ella influyen distintos factores, como es el carácter espacial de la excitación, la presencia de sedimentos, la profundidad del cañón, etc. (Véase p.e. Aznárez (2001), Maeso, Aznárez y Domínguez (1999 y 2000), y Maeso y Domínguez (1993)). El problema podría sintetizarse en la siguiente figura 2.1. La acción sísmica solicita la presa de Morrow-Point:



Fig. 2.1 Descripción del problema. Presa de Morrow-Point

El modelo que simula la situación real podría ser el siguiente:



Fig. 2.2 Modelo utilizado

La discretización de los distintos medios que componen el sistema puede observarse en la figura 2.3:



Fig.2.3 Discretización de la presa y el contorno

Las hipótesis del modelo consideran el agua como fluido compresible, el suelo y la presa medios viscoelásticos, y los sedimentos, saturados y no saturados, medio poroelástico. La interacción entre ambos medios se define a través de las condiciones de contorno ya explicadas en el capítulo 2, apartado 1. Las características geométricas de la del cañón donde se ubica la presa son las siguientes:

- · Profundidad : 141.732 m
- · Semiancho menor: 23.903 m
- · Semiancho mayor: 91.942 m

El hormigón del que está compuesta la presa presenta estas propiedades físicas:

· G = 11.5·10⁹ N/m² · v = 0.2 · μ = 0.05 · ρ = 2641.65 kg/m³

En un primer nivel de estudio, se analizará la composición espectral tanto de la excitación sísmica como de la función de transferencia, por tratarse de un paso intermedio de cierta importancia.

Ya en el dominio temporal, se comparará el desplazamiento debido a solicitación sísmica que sufre la presa frente al que experimentaría un punto infinitamente alejado, y que también fuese excitado con idéntico sismo. El resultado se expresa en varias

gráficas, en las que se analizan los distintos conjuntos que rodean la presa y cómo influyen en ésta.

En un segundo estudio será, por un lado, el desplazamiento relativo del nodo emplazado en la coronación de la presa respecto de un punto situado sobre el semiespacio, y, por otro, la deformación que sufre la presa la que centrará nuestra atención ante el movimiento sísmico de El Centro (1940) y diferentes entornos. Se pretende observar la influencia que tienen sobre el campo de desplazamientos distintos factores como el terreno, la presencia de agua embalsada y las características de los sedimentos.

Aunque el trabajo se ha centrado en el movimiento anteroposterior, también se incluyen resultados del movimiento vertical.

Los resultados aquí expuestos es posible obtenerlos a partir de dos metodologías bien distintas. La primera de ellas consiste en integrar el acelerograma del movimiento sísmico que se esté utilizando en ese momento. Así se conocería el valor de la velocidad y del desplazamiento de un punto lejano y que estuviese sometido a dicha excitación. El desplazamiento en el espacio temporal de este registro de aceleraciones sería la solicitación que se utiliza para analizar el comportamiento dinámico de la presa. A partir de este momento, se calcularía la distribución espectral de esta excitación por medio del algoritmo FFT y, con la función de transferencia adecuada, es posible conocer la respuesta de la presa en el dominio de la frecuencia. De nuevo empleando el algoritmo FFT podría obtenerse la respuesta dinámica de la presa en el dominio temporal. El procedimiento aquí relatado refleja de forma básica el modo de actuar de gran parte de los investigadores que dedican su tiempo a este campo de la ciencia.

Sin embargo, un posible método alternativo que, por un lado arroja los mismos resultados que el anterior, y por otro, reduce el número de pasos, es el que a continuación se explica. Se comienza aplicando el algoritmo FFT al acelerograma del movimiento sísmico en cuestión. Será ésta ahora la excitación que se empleará. Por otro lado, se modifica la función de transferencia original, obtenida a partir de desplazamientos absolutos. Dicha función de transferencia fue cedida por los tutores de este proyecto. Su comportamiento respecto a la frecuencia adimensional puede observarse, por ejemplo, en Maeso, Aznárez y Domínguez (1999 y 2000). La nueva función de transferencia o la siguiente expresión:

$$H'(\omega) = \frac{H(\omega) - (2,0)}{-\omega^2 \cdot (2,0)}$$

Sería una función de transferencia que refleja el desplazamiento relativo del sistema frente a un punto que se estuviera excitando con una onda incidente de amplitud 1, y que, sumada a la reflejada, del mismo valor, se desplazaría una magnitud de 2 unidades. En el denominador aparece el cuadrado de la frecuencia porque la excitación original es una aceleración, con lo que, si se desea que la respuesta sea un desplazamiento, es preciso dividir por ω^2 , tal y como se ha explicado en el capítulo teórico correspondiente. Una vez efectuado el producto entre la nueva función de transferencia y la distribución espectral de la excitación, se aplica de nuevo el algoritmo FFT para obtener la respuesta de la presa en el dominio temporal. Se trata de un método elegante en el que no es necesario el proceso de integración, evitando así la introducción de posibles errores numéricos en el cálculo, aunque, si bien es cierto, los resultados arrojados por ambos procedimientos son idénticos.

2.2 ANÁLISIS ESPECTRAL

Estudiar la composición espectral de una función supone, a grandes rasgos, determinar el peso que tiene cada armónico en la correspondiente serie de Fourier. Los movimientos sísmicos están constituidos por distribuciones espectrales de baja frecuencia, producto de la gran masa de los sistemas a los que afectan, el grado de amortiguamiento y la rigidez. A modo de ejemplo, se ilustra en las siguientes figuras, los espectros correspondientes a la excitación, la función de transferencia del nodo bajo estudio y el producto de ambos, que correspondería con la distribución espectral respuesta de la presa ante dicha solicitación. Concretamente se ha representado la respuesta espectral del movimiento antero-posterior del sistema Presa-terreno ante una onda S horizontal incidiendo verticalmente, junto con el espectro de desplazamientos del terremoto de El Centro y la función de transferencia correspondiente a este grado de libertad:



Fig.2.4 Distribuciones espectrales de la respuesta antero-posterior del sistema Presa-terreno ante incidencia vertical, función de transferencia y terremoto de El Centro

Las amplitudes de los armónicos correspondientes a la excitación son netamente superiores a los de la función de transferencia, de ahí que casi no se distingan estos últimos. El mayor peso de la distribución espectral se encuentra a bajas frecuencias. A partir de frecuencias superiores a 40 rad/s, el espectro de la respuesta se aproxima a cero, de modo que la influencia de los armónicos de frecuencias superiores será escasa. Este análisis espectral resulta fundamental en aquellos sistemas informáticos cuyos recursos de memoria y velocidad sean reducidos.

2.3 MOVIMIENTO ANTERO-POSTERIOR

El desplazamiento anteroposterior que experimenta un punto de la presa situado en su plano de simetría, concretamente en la coronación, se debe al provocado por las onda P y las SH. Dicho punto respondería al movimiento sísmico de El Centro (1940) de forma muy distinta, según se considere la presa exclusivamente, la presa junto con el terreno, la presa con el terreno y el agua y la presa con el terreno, agua y sedimentos, ya sean éstos saturados o cuasisaturados. Se supone que el terremoto utilizado consta únicamente de ondas SH.

2.3.1 Incidencia vertical

En las siguientes figuras puede observarse el comportamiento del nodo en coronación durante los primeros 10 segundos cuando las ondas inciden verticalmente (90°) sobre diversos sistemas: la presa y el terreno (PT); la presa, el terreno y el agua (PTA); la presa, el terreno, el agua y sedimentos cuasisaturados (PTAC); la presa, el terreno, el agua y sedimentos saturados (PTAS). En ambas gráficas se compara con el desplazamiento absoluto que sufriría un punto emplazado en el semiespacio, y libre de efecto local. Tal curva se ha denominado 'Excitación':



Fig.2.5 Desplazamiento absoluto del nodo en coronación ante incidencia vertical. PT: presa-terreno; PTA: presa-terreno-agua; PTAC: presa-terreno-agua-sedimentos cuasisaturados; PTAS: presa-terreno-agua-sedimentos saturados

Del análisis de estas gráficas se deduce que el movimiento absoluto del nodo en cuestión oscila en torno la desplazamiento que sufriría un punto del semiespacio, sea cual sea el sistema que se esté considerando. Para observar mejor las pulsaciones, se representa la diferencia entre el movimiento del nodo en coronación y el correspondiente a un punto cualquiera del semiespacio. Tales gráficas serán nombradas con 'Desplazamiento relativo'.

La deformación en un plano vertical que sufre la presa cuando se excita con el sismo de El Centro (1940) es posible estudiarla comparando el desplazamiento experimentado por el nodo situado sobre la coronación, en el punto medio (nodo 1) con el que posee otro nodo ubicado en ese mismo plano vertical, pero en el fondo de la presa

(nodo 2). En la leyenda aparecerá en tal caso 'Deformación vertical'.

El método para obtener tanto el desplazamiento relativo del nodo 1 como la deformación de la presa consiste en calcular la diferencia entre las funciones de transferencia modificadas de ambos nodos, en el dominio de la frecuencia, obviamente. En este caso no es necesario tener en cuenta el efecto viajero de la onda, ya que la velocidad de la onda es superior a 2000 m/s en el hormigón, y la distancia que separa los nodos es 141.732 m, con lo que desfase entre los movimientos será aproximadamente de 0.06 s, a todas luces despreciable.

Se divide a continuación el estudio en tres partes, para deducir por separado la influencia del terreno (si se considera o no base rígida), la influencia del agua, y la presencia de sedimentos saturados o cuasisaturados.

2.3.1.1 Influencia del terreno

Se analizan los 10 primeros segundos del terremoto, y se observa el siguiente comportamiento:



Fig.2.6 Desplazamiento relativo del nodo en coronación ante incidencia vertical. PT: presa-terreno; PBR: presa sobre base rígida



Y la deformación de la presa en el plano vertical se desplaza del siguiente modo:

Fig.2.7 Deformación de la presa en el plano vertical medio ante incidencia vertical. PT:Presa-terreno; PBR: Presa sobre base rígida

Las dos gráficas reflejan que ambas curvas poseen frecuencias de oscilación muy parecidas. En líneas generales, la presa sobre base rígida presenta valores de mayor magnitud que el sistema presa-terreno, lo que reflejaría la influencia del terreno en la estructura. Cuando se tiene en cuenta la rigidez del mismo (no infinita), tanto la deformación en un plano vertical de la presa como el desplazamiento relativo del nodo 1 se reduce. En caso contrario, se estarían falseando los resultados de forma grave

2.3.1.2 Influencia del agua

Es de esperar que la presencia de agua, al ser ahora un sistema con mayor masa, disminuya la frecuencia de los pulsos, respecto al sistema presa-terreno. Se representan a continuación el desplazamiento relativo y la deformación vertical durante los 10 primeros segundos del terremoto:



Fig.2.8 Desplazamiento relativo del nodo en coronación ante incidencia vertical. PT: presa-terreno; PTA: presa-terreno-agua



Fig 2.9 Deformación de la presa en el plano vertical medio ante incidencia vertical. PT: presa-terreno; PTA: presa-terreno-agua

Efectivamente, se comprueba cómo la frecuencia de oscilación del sistema presaterreno-agua es ligeramente menor a la del sistema presa-terreno. Sin embargo, la magnitud de los valores del primero es superior a la del segundo. En algunos tramos, la amplificación es superior al doble. La explicación puede encontrarse en la disminución de la frecuencia. Como se observó en el apartado 2.2, la composición espectral del movimiento sísmico es fundamentalmente de baja frecuencia. Al reducirse la frecuencia quiere decir que los armónicos de baja tiene un mayor peso que los de alta, por lo que se estaría excitando valores de mayor magnitud.

2.3.1.3 Influencia del sedimento

Se pretende determinar en este caso si las características del sedimento afectan a la respuesta, y en qué cuantía. Para ello se considera la presa con sedimentos saturados, por un lado, y por otro, sedimentos cuasisaturados, es decir, con pequeñas cámaras de aire en su seno. Los resultados son los siguientes:



Fig.2.10 Desplazamiento relativo del nodo en coronación ante incidencia vertical. PTAC: presa-terreno-agua con sedimentos cuasisaturados; PTAS: presa-terreno-agua con sedimentos saturados



Fig 2.11 Deformación de la presa en el plano vertical medio ante incidencia vertical. PTAC: presa-terreno-agua con sedimentos cuasisaturados; PTAS: presa-terreno-agua con sedimentos saturados

La saturación del sedimento no altera la frecuencia de oscilación de la deformación. Sin embargo, sí que cambia la magnitud de los puntos extremos, en particular el máximo absoluto. La diferencia entre ambos supera el 8%, siendo mayor en el caso del sedimento saturado. El fenómeno se explica por la presencia de pequeñas cámaras de aire en el sedimento cuasisaturado. La energía sísmica se ve amortiguada al llegar a la zona de decantación, producto de la mayor dificultad que presenta para propagarse a través de medios poroelásticos. Por tanto, la existencia de burbujas de aire en el sedimento contribuye de forma positiva a reducir la amplitud del movimiento.

2.3.2 Influencia del carácter espacial de la excitación

Podría analizarse exclusivamente la incidencia de ondas SH con distintos ángulos, y determinar el desplazamiento antero-posterior experimentado por el nodo de la coronación emplazado en el plano de simetría, es decir, estudiar el carácter espacial de la solicitación. En la figura 2.10 se representa la diferencia entre el movimiento de dicho punto respecto a uno ubicado a gran distancia y sometido a la misma excitación en el sistema Presa-terreno:



Fig.2.12 Desplazamiento relativo del nodo en coronación ante varias incidencias. PT: presa-terreno

Según indican los resultados, el máximo desplazamiento lo provoca la incidencia vertical, seguida de la oblicua a 60°. Es de resaltar también cómo el hecho de variar el ángulo de ataque de la onda SH no induce un cambio en la frecuencia de oscilación del movimiento relativo del nodo bajo estudio, aunque sí que existe un desfase entre la incidencia vertical y el resto. Para el sistema presa-terreno-agua se tiene:



Fig.2.13 Desplazamiento relativo del nodo en coronación ante varios incidencias. PTA: presa-terreno-agua

El comportamiento ondulatorio es muy similar al del sistema Presa-terreno, pero ahora las amplificaciones son mayores. La incidencia vertical vuelve a estar desfasada respecto a las demás, y producto de ella, se alcanza el máximo desplazamiento relativo.

Se estudia a continuación la deformación que sufre la presa en su plano medio cuando incide sobre ella un tren de ondas SH con distintos ángulos. Al igual que antes, no se tendrá en cuenta el efecto viajero de la onda, ni siquiera para incidencia vertical. Se considerará únicamente dos casos: Presa-terreno y Presa-terreno-agua, y la deformación se obtendrá como hasta ahora se ha efectuado, es decir, restando las funciones de transferencia modificadas correspondientes al desplazamiento del nodo en coronación y el sufrido por el nodo ubicado en el punto más profundo de la presa. Se representa la deformación experimentada por la presa durante los 10 primeros segundos del terremoto de El Centro (1940):



Fig.2.14 Deformación vertical de la presa. Sistema Presa-terreno

La deformación máxima tiene lugar para incidencia rasante. El valor máximo de la deformación alcanza los 1.33 cm, esto es, un 14.3% por encima de la deformación de la presa sobre base rígida. El carácter espacial de la excitación no altera el comportamiento ondulatorio en lo que se refiere a la frecuencia. Sin embargo, sí que modifica las amplitudes de la deformación estudiada.

Por último, cabe resaltar de nuevo la influencia del terreno sobre la presa. En determinados momentos de tiempo, la deformación experimentada por la presa sobre base rígida es superior a cualquier valor del sistema presa-terreno. Los datos se estarían falseando si no se tuviese en cuenta la rigidez verdadera del terreno.

Para el sistema Presa-terreno-agua, los resultados son:



Fig.2.15 Deformación vertical de la presa. Sistema Presa-terreno-agua

El máximo desplazamiento se produce para incidencia vertical, alcanzando los 2.08 cm, es decir, más del 56% respecto al sistema Presa-terreno y casi un 79% por encima del valor correspondiente a la presa sobre base rígida. De nuevo se aprecia la reducción en la frecuencia del movimiento oscilatorio, y destaca cómo a medida que se reduce el ángulo de incidencia, también lo hace la deformación.

2.4 MOVIMIENTO VERTICAL

En el primer apartado de este capítulo se comprobó, entre otros puntos, cómo la asimetría del cañón con ensanchamiento rompía el problema antiplano, y generaba movimientos en el plano de la sección, esto es, desplazamiento transversal y vertical. En el caso de la presa ocurre de forma parecida. La asimetría del modelo provoca la ruptura del problema antiplano, y un tren de ondas SH incidiendo con varios ángulos es capaz de desplazar los nodos de la presa en las tres direcciones del espacio.

Sólo el movimiento absoluto vertical será analizado en este punto. Se considera el

nodo emplazado en el plano de simetría vertical, en coronación, y se compara su desplazamiento ante distintas incidencias: 90°, 60°, 30° y 0°. Se representa el sistema presa-terreno:



Fig.2.16 Desplazamiento vertical absoluto del nodo en coronación ante varias incidencias. Sistema Presa-terreno

El movimiento vertical no supera en ningún caso el centímetro, y es muy similar para todas las incidencias. De nuevo la incidencia vertical se encuentra desfasada respecto a las demás.

Para el sistema presa-terreno-agua no se observan grandes cambios. La presencia del agua se traduce en un ligero aumento del campo de desplazamientos vertical, pero no para todas las incidencias. Así, la incidencia rasante parece no verse influenciada por la cantidad de agua embalsada. Todo ello se observa en la figura 2.15:



Fig.2.17 Desplazamiento vertical absoluto del nodo en coronación ante varias incidencias. Sistema Presa-terreno-agua

CAPÍTULO 6.

CONCLUSIONES
CONCLUSIONES

El estudio realizado puede sintetizarse en una serie de conclusiones que, a continuación se enumeran:

· Se comprobó cómo la solución arrojada por el algoritmo FFT para el campo de desplazamientos de un sistema, tanto de uno como de dos grados de libertad, ante una entrada impulso, coincidía con la solución analítica correspondiente.

• El método a través de los espectros sísmicos de respuesta propuesto por la Normativa para la obtención de los desplazamientos máximos sufridos por una estructura propone valores de inferior magnitud a los obtenidos de forma numérica, por medio de la FFT. Se observa que, cuanto mayor es el amortiguamiento menor es la discrepancia entre ambos métodos.

· En cuanto a la creación de modelos tridimensionales para el estudio del campo de desplazamientos de cañones con sección dada, se observó la necesidad de discretizar el modelo con un tamaño de elemento no inferior a $\lambda/4$. La suavidad de las curvas mejora a medida que disminuye el mismo, obviamente. Con respecto a la superficie libre discretizada, se recurrió al modelo bidimensional para determinar la cantidad de semiespacio necesario. A la vista de los resultados, se requiere un mínimo de 1.5 λ a cada lado del cañón para lograr una solución que pueda calificarse como aceptable. Un aumento de esta superficie se traduce en una mejora de los resultados, aunque el comportamiento depende de la frecuencia. Por último, quedó constancia de la influencia de la dimensión longitudinal del cañón, y su relación con la cantidad de superficie libre discretizada. Así, los resultados demostraron que, para conseguir un solapamiento entre la solución propuesta por el modelo tridimensional y el bidimensional (o la analítica, si la hubiese), es necesario una relación ancho-largo de 1:10. Cuando se reduce esta proporción aparece un desplazamiento vertical de la solución tridimensional, y una ligera deformación de la misma. • El comportamiento del campo de desplazamientos propuesto por el modelo numérico tridimensional puede considerarse muy estable a lo largo del cañón, superando incluso un rango del 90% de dicha longitud. Es decir, sólo en zonas muy próximas al borde del cañón se altera el campo de desplazamientos, rompiéndose el problema antiplano y apareciendo movimientos transversales y verticales.

• Se analizaron tres tipos de cañones: cañón con sección semicircular, cañón con sección recta (con y sin ensanchamiento) y cañón de sección semielíptica (con y sin inclusión). Sobre el primero de ellos incidió exclusivamente ondas SH verticales, y se corroboró que los puntos de mayor amplificación son los vértices del cañón con el semiespacio, llegando a valores próximos al 35%. Curiosamente, puntos muy próximos a este vértice presentan desplazamientos muy inferiores al incidente (del orden del 90%).

· Se estudió un cañón de sección recta pero con ensanchamiento de la misma a la mitad del modelo tridimensional, y se demostró la ruptura producida por esa zona de transición en el problema antiplano, comprobándose como un modelo no simétrico modifica el campo de desplazamientos y crea las componentes transversal y vertical.

• El modelo bidimensional se utilizó para analizar el carácter espacial de la excitación. Para ello, se hizo incidir un tren de ondas SH de distinta frecuencia con varios ángulos de incidencia sobre el cañón de sección recta, y se observó la zona de amplificación que aparece por la parte del cañón próxima a la incidencia, al igual que la zona de sombra en el lado contrario. La dependencia de la respuesta con la frecuencia quedó patente al apreciar distinta magnitud de la amplificación, siendo ésta mayor para altas frecuencias.

· Se observó además el efecto resonante que aparece en cañones rellenos de un material más blando, a modo de inclusión, y se comparó con la solución analítica correspondiente. La magnitud del desplazamiento depende de la frecuencia de la excitación, pero sin tendencia evidente.

· La influencia del efecto local sobre los acelerogramas se reflejó en un estudio realizado con un valle aluvial de sección semielíptica. Se tuvo en cuenta el efecto viajero de la onda, por ser un cañón de grandes dimensiones, y se cuantificó la amplificación que sufre el registro original, medido supuestamente sobre el semiespacio y lejos de cualquier influencia topográfica del terreno. Se alcanzó el 76% para incidencia rasante cuando el cañón está constituido por granito, y un aumento del 350% cuando el material es arcilla. De este modo, se hizo constar la influencia que también posee el material del que está formado el terreno.

· Como aplicación del efecto local sobre las estructuras, se ubicó un modelo de dos plantas en 5 puntos del cañón, y se estudió el desplazamiento de la segunda planta, para compararlo a posteriori con el desplazamiento máximo propuesto por la Normativa, así como el desplazamiento máximo que sufriría dicha planta si la estructura se emplazase en el semiespacio y lo suficientemente alejada de cualquier alteración topográfica del terreno. Es para incidencia rasante en el cañón arcilloso donde se obtienen los máximos desplazamientos.

· Se comprobó la influencia del terreno sobre el campo de desplazamientos de presas bóveda, estudiando tres tipos de movimientos en un mismo nodo: el absoluto, el relativo respecto a un punto ubicado sobre el semiespacio y lo bastante alejado de cualquier alteración topográfica, y el relativo respecto a otro nodo de la presa (deformación de la presa).

• Cuando se considera base rígida, es decir, rigidez infinita del terreno, los desplazamientos son ligeramente mayores respecto al caso en el que se tiene en cuenta su rigidez real. La frecuencia de oscilación en ambas situaciones es muy parecida.

· La presencia de agua reduce la frecuencia de oscilación del movimiento de la presa, por contar con mayor masa respecto a la situación en la que la presa se encuentre vacía. La magnitud de los desplazamientos es mayor cuando la presa cuenta con agua embalsada.

· Las características de los sedimentos también provoca modificaciones en el campo de desplazamientos. Así, cuando son cuasisaturados, la presencia de aire en el seno del sedimento amortigua la propagación de la energía sísmica, y reduce la

deformación y el desplazamiento que sufre la estructura, respecto al caso en que el sedimento es saturado.

· Debido a la falta de simetría de la presa, no es posible que se presente el problema antiplano, por lo que aparece movimiento transversal y vertical, aunque de magnitud muy inferior al desplazamiento anteroposterior.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Achenbach, J. D. (1973). <u>Wave Propagation in Elastic Solids</u>. North-Holland, Amsterdam.

Antes, H. (1985). <u>A Boundary Elements Procedure for Transient Wave</u> <u>Propagation in Two-Dimensional Isotropic Elastic Media</u>. Finite Elements Anal. Des., 1, 313-322.

Aznárez, J. J., Maeso O. y Domínguez J. (2001). <u>A 3-D Boundary Element Model</u> for Dynamic Analysis of Arch Dams with Porous Sediments. Earthquake Resistant Engineering Structures III. C. A. Brebbia y A. Corz (Eds.). Wit Press, Southampton.

Banaugh, R. P. and Goldsmith, W. (1963a). <u>Diffraction of Steady Elastic Waves</u> by Surfaces of Arbitrary Shape. J. Acoust. Soc. Am., 35, 1590-1601.

Banaugh, R. P. and Goldsmith, W. (1963b). <u>Diffraction of Steady Elastic Waves</u> by Surfaces of Arbitrary Shape. J. Acoust. Soc. Am., 30, 589-597.

Banerjee, P. K. and Butterfield, R. (1977). <u>Boundary Element Method in</u> <u>Geomechanics</u>. In Finite Elements in Geomechanics, G. Gudehus (ed.), 529-570, J. Wiley, London.

Banerjee, P. K. And Butterfield, R. (1981). <u>Boundary Element Method in</u> <u>Engineering Science</u>. McGraw-Hill, London.

Banerjee, P. K., Ahmad, S. and Manolis, G. D. (1987). <u>Advanced Elastodynamic</u> <u>Analysis</u>, In boundary Element Methods in Mechanics, Beskos, D. E. (Ed.), 257-284, North-Holland, Amsterdam.

Beskos, D. E. (Ed.) (1987a). <u>Boundary Element Methods in Mechanics</u>. North-Holland, Amsterdam.

Beskos, D. E. (Ed.) (1987b). <u>Boundary Element Methods in Dynamic Analysis</u>. *Appl. Mech. Reviews*, 40, 1-23.

Beskos, D. E. (Ed.) (1988). <u>Boundary Element Methods in Structural Analysis</u>. *ASCE*, New York.

Biot, M. A. (1941a). <u>General Theory of Three-dimensional Consolidation</u>. J. Appl. Phys., 12, 155-164.

Biot, M. A. (1941b). <u>Consolidation Settlement under a Rectangular Load</u> <u>Distribution</u>. J. Appl. Phys., 12, 426-430.

Biot, M. A. and Clingan, F. M. (1941). <u>Consolidation Settlement of a Soil with</u> <u>Impervious Top Surface</u>. J. Appl. Phys., 12, 578-581. Biot, M. A. (1956a). <u>Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic</u> <u>Solid</u>. *J. Appl. Phys.*, 27, 459-467.

Biot, M. A. (1956b). <u>Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-saturates</u> <u>Porous Solid, I. Low Frequency Range</u>. J. Acoust. Soc. Am., 28, 168-178.

Biot, M. A. (1956c). <u>Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-saturates</u> <u>Porous Solid, II. Higher Frequency Range</u>. J. Acoust. Soc. Am., 28, 179-191.

Biot, M. A. (1956d). <u>General Solutions of the Equations of Elasticity and</u> <u>Consolidation for a a Porous Material</u>. J. Acoust. Soc. ASME., 23(1), 91-96.

Biot, M. A. and Willis, D. G. (1957). <u>The Elastic Coefficients of the Theory of</u> <u>Consolidation</u>. J. Appl, Mech, ASME, 24, 594-601.

Bonnet, G and Auriault, J. L. (1985). <u>Dynamics of Saturated and Deformable</u> <u>Porous Media: Homogenization Theory and Determination of the Solid-Liquid</u> <u>Coupling Coefficients</u>. Physics of Finely Divided Matter, N. Boccara y M. Daoud Ed., 306-316, Springer-Verlag, Berlín.

Brebbia, C. A. and Domínguez, J. (1977). <u>Boundary Element Methods for</u> <u>Potential Problems</u>. *Appl. Math. Mod*, 1, 372-378.

Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C. (1984). <u>Boundary Element</u> <u>Techniques</u>. Springer-Verlag, Berlín.

Brebbia, C. A. and Domínguez, J. (1989). <u>Boundary Elements: An Introductory</u> <u>Course</u>. CMP and McGraw-Hill, Southampton and New York.

Brigham, E. O. <u>The Fast Fourier Transform and its application</u>. Prentice-Hall International Editions.

Cámara, R. J. (2000). <u>A method for coupled arch dam-foundation-reservoir</u> seismic behaviour analysis. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 29, 441-460.

Canet, J. M., y Barbat, A. H. Estructuras sometidas a acciones sísmicas. Cap.1.

Cole, D. M., Kosloff, D. D. and Minster, J. B. (1978). <u>A Numerical Boundary</u> <u>Integral Equation Method for Elastodynamics I. Bull. Seismol. Soc. Am.</u>, 68, 1331-1357.

Cruse, T. A. (1968). <u>A Direct Formulation and Numerical Solution of the General</u> <u>Transient Elastodynamic Problem II</u>. J. Math. Anal. Appl., 22, 341-355.

Cruse, T. A. and Rizzo, F. J. (1968). <u>A Direct Formulation and Numerical</u> <u>Solution for the General Transient Elastodynamic Problem I</u>. J. Math. Anal. Appl., 22, 244-259.

Chen, H., and Hou, S. (1987). Effect of seismic travelling wave on the response of arch dams. *Proc., China-U.S. Workshop on Earthquake Behaviour of Arch Dams*, Beijing, China, R. W. Clough and G. Zhang, eds., Pergamon, New York.

Cheng, A. H. D., Badmus, T and Beskos, D. E. (1991). <u>Integral Equation for</u> <u>Dynamic Poroelasticity in Frequency Domain with BEM Solution</u>. J. Eng. Mech., ASCE, 117(5), 1136-1157.

Chopra, A. K. (2001). <u>Dynamics of Structures. Theory and Applications to</u> <u>Earthquake Engineering</u>. 2nd Ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Chopra, A. K., and Chakrabarti, P. (1981). <u>Earthquake analysis of concrete</u> gravity dams including dam-water-foundation rock interaction. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 9, 363-381.

Darcy, H. (1856). Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. Dalmont, París.

Domínguez, J. (1977). <u>Computation of Stresses Near Anchor Plates: An</u> <u>Application of the Boundary Element Method</u>. Ph. D. Thesis, Univ. of Seville (En español).

Domínguez, J. (1978a). <u>Dynamic Stiffnes of Rectangular Foundations</u>. Report. R78-20, Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

Domínguez, J. (1978a). <u>Response of Embedded Foundations to Travelling Waves</u>. Report. R78-24, Dept. of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

Domínguez, J. (1992). <u>Boundary Element Approach for Dynamic Poroelastic</u> <u>Problems</u>. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 35, 307-324.

Domínguez, J. (1993). <u>Boundary elements in dynamics</u>. Computational Mechanics Publications, Southampton and Elsevier Applied Science, London.

Domínguez, J. (1995). <u>Formulación Estática y Dinámica de la Poroelasticidad</u>. E.T.S.I.I. Universidad de Sevilla.

Domínguez, J. and Abascal, R. (1987). <u>Dynamics of Foundations</u>. In Topics in Boundary Element Research, 4, C. A. Brebbia (Ed.), 27-75, Springer-Verlag, Berlín.

Domínguez, J. and Alarcón, E. (1981). <u>Elastodynamics</u>. In Progress in Boundary Element Methods, 1, C. A. Brebbia (Ed.), 213-257, Pentech Press, London.

Domínguez, J., Gallego, R and Japón, B. R. (1997) Effects of Porous Sediments of Seismic Response of Concrete Gravity Dams. J. Eng. Mech., ASCE, 123(4), 302-311.

Domínguez, J. and Maeso, O. (1993). <u>Earthquake analysis of arch dams. II: Dam-</u> water-foundation interaction. J. Eng. Mech., 119(3), 513-530.

Domínguez, J. and Meise, T. (1991). <u>On the use of the BEM for wave propagation</u> in infinite domains. *Eng. Anal. Boundary Elem.*, 8(3), 132-138. Dravinski, M (1982). <u>Scattering of SH waves by subsurface topography</u>. J. Eng. Mech. Div., 108(1), 1-17.

Dravinski, M. (1988). <u>Elastodynamics</u>. In Boundary Element Methods in Structural Analysis D. E. Beskos (Ed.), 63-192. *ASCE*, New York.

Erigen, A. C., and Suhubi, E. (1975). <u>Elastodynamics, II. Linear theory</u>, Academic Press, New York.

Fenves, G., and Chopra, A. K. (1985). <u>Effects of reservoir bottom absorption and</u> dam-water-foundation rock interaction on frequency response functions for concrete gravity dams. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 13, 13-31.

Fok, K., and Chopra, A. K. (1986). <u>Earthquake analysis of ach dams including</u> dam-water-interaction, reservoir boundary absorption and foundation flexibility. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 14(2), 155-184.

Fok, K., and Chopra, A. K. (1987). <u>Water compressibility in earthquake response</u> of arch dams. J. Struct. Eng., 113(5), 958-975.

Fredholm, I. (1905). <u>Solution d'un Probléme Fondamental de la Theorie de</u> <u>L'elasticité</u>. *Arch. Mat. Astronom. Fysik.*, 2.

Friedman, M. B. and Shaw, R. P. (1962). <u>Diffraction of Pulses by Cylindrical</u> <u>Obstacles of Arbitrary Cross Section</u>. J. Appl. Mech., 29, 40-46.

Gallego, R. and Domínguez, J. (1990). <u>A Unified Formulation of Two Existing</u> <u>Time-Domain boundary Element Approaches</u>. *Comm. App. Num. Meth.*, 6, 17-25.

Geers, T. L. (1983). <u>Boundary Element Methods for Transient Response Analysis</u>. In Computational Methods for Transient Analysis, T. Belytschko & T. J. R. Hughes (Eds.) 221-243, North-Holland, Amsterdam.

Hall, J. F. (1986). <u>Study of the earthquake response of pine flat dam</u>. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 14, 281-295.

Hall, J. F., and Chopra, A. K. (1983). <u>Dynamic analysis of arch dams including</u> hydrodynamic effects. *J. Eng. Mech.*, 109(1), 149-167.

Hartman, F. (1989). Introduction to Boundary Elements. Springer-Verlag, Berlín.

Jaswon, M. A. (1963). <u>Integral Equation Methods in Potential Theory I</u>. *Proc. Roy. Soc.*, Ser. A, 275, 23-32.

Jaswon, M. A. and Ponter, A. R. (1963). <u>An Integral Equation Solution of the Torsion Problem</u>. *Proc. Roy. Soc.*, Ser. A, 273, 237-246.

Jiménez Salas, J. A y De Justo, J. L. (1975). <u>Geotecnia y Cimientos I. Propiedades</u> <u>de los Suelos y de las Rocas</u>. Ed. Rueda, Madrid. Karabalis, D. L. and Beskos, D. E. (1984). <u>Dynamic Response of 3-D Rigid</u> <u>Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method</u>. *Earthquake Eng. Struct. Dyn*, 12, 73-93.

Karabalis, D. L. and Beskos, D. E. (1985). <u>Dynamic Response of 3-D Flexible</u> Foundations by Time Domain BEM and FEM. *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 4, 91-101.

Karabalis, D. L. and Beskos, D. E. (1987). <u>Dynamic Soil-Structure Interaction</u>. In Boundary Element Methods in Mechanics, D. E. Beskos (Ed.), 499-562, North-Holland, Amsterdam.

Karabalis, D. L., Spyrakos, C. C. and Beskos, D. E. (1984). <u>Dynamic Response of</u> <u>Surface Foundations by Time Domain Boundary Element Method</u>. In Dynamic Soil-Structure Interaction, D. E. Beskos, T. Krauthammer & I. Vardoulakis (Eds.), 19-24, A. A. Balkema, Rotterdam.

Kobayashi, S., (1987). <u>Elastodynamics</u>. In Boundary Element Methods in Mechanics, D. E. Beskos (Ed.), 191-255, North-Holland, Amsterdam.

Kupradze, V. D., Gegelia, T. G., Basheleishvili, M. o. and Burchuladze, T. V. (1979). <u>Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity</u>. North-Holland, Amsterdam.

Lachat, J. C. (1975). <u>A Further Development of the boundary Integral Technique</u> for Elastostatic. Ph. D. Thesis, Univ of Southampton.

Lachat, J. C. and Watson, J. O. (1976). <u>Effective Numerical Treatment of</u> <u>Boundary Integral Equations: A Formulation for Three-Dimensional Elastostatics</u>. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 10, 991-1005.

Lee, V. W., and Sherif, R. I. (1996). <u>Diffraction around circular canyon in elastic</u> wedge space by plane SH-waves. J. Eng. Mech., 122(6), 539-544.

Lotfi, V., Roesset, J. M., and Tassoulas, J. (1987). <u>A technique for the analysis of the response of dams to earthquakes</u>. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 15, 463-490.

Love, A. E. H. (1944). <u>A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity</u>. 4th ed., Dover, New York.

Maeso, O., Aznárez, J. J., and Domínguez, J. (1999). <u>A 3-D model for the seismic</u> analysis of concrete dams including poroelastic sediment effects. *Proc.*, 13th ASCE Engineering Mechanics Conf., John Hopkins U., N. Jomes and R. Ghanem, eds., CD-ROM.

Maeso, O., Aznárez, J. J., and Domínguez, J. (2000). <u>Travelling wave effects on</u> <u>the seismic response of arch dams</u>. *Proc.*, 14th ASCE Engineering Mechanics Conf., University of Texas at Austin, J. L. Tassoulas, ed., CD-ROM. Maeso, O., Aznárez, J. J., and Domínguez, J. (2001). <u>Numerical Model for</u> <u>Dynamic behaviour of Reservoir Bottom Sediments</u>. *Proc.*, 2nd Biot Conference on *Poromechanich*. Balkema, Rotterdam.

Maeso, O., Aznárez, J. J., and Domínguez, J. (2002). <u>Effects of the Space</u> <u>Distribution of the Excitation on the Seismic Response of Arch Dams</u>. J. Eng. Mech., ASCE, 128(7), 1-10.

Maeso, O., and Domínguez, J. (1993). <u>Earthquake analysis of arch dams. I: Dam-</u> foundation interaction. J. Eng. Mech., 119(3), 496-512.

Manolis, G. D. (1983). <u>A Comparative Study on Three Boundary Element</u> <u>Method Approaches to Problems in Elastodynamics</u>. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 19, 73-91.

Manolis, G. D. And Beskos, D. E. (1981). <u>Dynamic Stress Concentration Studies</u> by Boundary Integrals and Laplace Transform. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 17, 573-599.

Mansur, W. J. (1983). <u>A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation</u> <u>Problems Using the Boundary Element Method</u>. Ph. D. Thesis, University of Southampton.

Mansur, W. J. and Brebbia, C. A. (1982a). <u>Numerical Implementation of the</u> <u>Boundary Element Method for Two-Dimensional Transient Scalar Wave Propagation</u> <u>Problems</u>. *Appl. Math. Modelling*, 6, 299-306.

Mansur, W. J. and Brebbia, C. A. (1985). <u>Transient Elastodynamics</u>. In Topics in Boundary Element Research, 2, C. A. Brebbia (Ed.) 124-155, Springer-Verlag, Berlín.

Nardini, D. and Brebbia, C. A. (1983). <u>A New Approach to Free Vibration</u> <u>Analysis Using Boundary Elements</u>. *Appl. Math. Modelling*, 7, 157-162.

Nardini, D. and Brebbia, C. A. (1985). <u>Boundary Integral Formulation of Mass</u> <u>Matrices for Dynamic Analysis</u>. In Topics in Boundary Element Research, 2, C. A. Brebbia (Ed.), 191-208, Springer-Verlag, Berlín.

Niwa, Y., Kobayashi, S. and Azuma, N. (1975). <u>A Analysis of Transient Stresses</u> <u>Produced Around Cavities of Arbitrary Shape During Passage of Travelling Waves</u>. *Mem. Fac. Engng.*, Kyoto Univ., 37, 28-46.

Niwa, Y., Kobayashi, S. and Fukui, T. (1976). <u>Applications of Integral Equation</u> <u>Method o Some Geomechanical Problems</u>. In Numerical Methods in Geomechanics, C. S. Desai (Ed.), 120-131, *ASCE*, New York.

Niwa, Y., Fukui, T., Kato, S. and Fujiki, K. (1980). <u>An Application of the Integral</u> <u>Equation Method to Two-Dimensional Elastodynamics</u>. *Theor. Appl. Mech.*, 28, 281-290.

Norris, A. N. (1985). <u>Radiation from a Point Source and Scattering Theory in a</u> <u>Fluid Saturated Porous Solid.</u> J. Acoust. Soc. Am., 77(6), 2012-2022. Nowak, P. S., and Hall, J. F. (1990). <u>Arch dam response to nonuniform seismic</u> input. J. Eng. Mech., 116(1), 125-139.

París, F. (1988). Teoría de la Elasticidad. E.T.S.I.I. Universidad de Sevilla.

Sánchez-Sesma, F. J. (1983). <u>Diffraction of elastic waves by three-dimensional</u> surface topography. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 73 1621-1636.

Sánchez-Sesma, F. J., Bravo, M. A., and Herrera.(1985). <u>Surface motion of topographical irregularities for incident P, SV and Rayleigh waves</u>. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 75, 263-269.

Skempton, A. W. (1954). <u>The Pore Pressure Coefficients A y B</u>. *Géotechnique*, 4, 143-147.

Spyrakos, C. C. (1984). <u>Dynamic Response of Strip-Foundations by the Time</u> <u>Domain BEM-FEM Methods</u>. Ph. D. Thesis, University of Minnesota, Minneapolis.

Spyrakos, C. C. and Beskos, D. E. (1986). <u>Dynamic Response of Rigid Strip-</u> <u>Foundations by a Time-Domain Boundary Element Method</u>. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 23, 1547-1565.

Stockes, G. G. (1849). <u>On the Dynamical Theory of Diffraction</u>. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 9, 1-62.

Symm., G. T. (1963). <u>Integral Equation Methods in Potential Theory II</u>. *Proc. Roy. Soc.*, Ser. A, 275, 33-46.

Tan, H., and Chopra, A. K. (1995a). <u>Earthquake analysis of arch dam including</u> dam-water-foundation rock interaction. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 24,1453-1474.

Tan, H., and Chopra, A. K. (1995a). <u>Dam-foundation rock interaction effects in</u> <u>frequency-response functions of arch dams.</u> *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 24,1475-1489.

Tassoulas, J. L. (1988). <u>Dynamic Soil-Structure Interaction</u>. In Boundary Element Methods in Structural Analysis, D. E. Beskos (Ed.), 273-308, ASCE, New York.

Terzaghi, K. (1925). <u>Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage</u>. Deutlicke, Viena.

Trifunac, M. D. (1973). <u>Scattering of plane SH-waves by a semicylndrical</u> canyon. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 1 267-281.

Verruigt, A. (1969). <u>Elastic Storage of Aquifers</u>. Flow Through Porous Media, R.J.M. De Wiest Ed., 331-376, Academic Press, New York.

Wheeler, L. T. and Sternberg, E. (1968). <u>Some Theorems in Classical Elastodynamics</u>. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 31, 51-90.

Wong, H. L. (1982). Effect of surface topography on the diffraction of P, SV, and Rayleigh waves. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 72, 1167-1183.

Zhang, L., and Chopra, A. K. (1991a). <u>Three-dimensional analysis of spatially</u> varying ground motions around a uniform canyon in a homogeneous half-space. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 20(11), 911-926.

Zhang, L., and Chopra, A. K. (1991b). <u>Impedance functions for three-dimensional</u> foundation supported on an infinitely long canyon of uniform cross-section in a <u>homogeneous half-space</u>. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 20(11), 1011-1027.

Zhang, C., and Zhao, C. (1988). <u>Effects of canyon topography and geological</u> conditions on strong ground motion. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 16, 81-97.