



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS
DE GRAN CANARIA



Influencia del ángulo de incidencia y tipo de onda en la respuesta sísmica de estructuras de edificación pilotadas

Ingeniería Industrial
Especialidad en Mecánica y Construcción
Escuela de Ingenierías Industriales y Civiles

Autor:

José María Zarzalejos Familiar

Tutor:

Luis A. Padrón Hernández

Tutor:

Juan José Aznárez González

Las Palmas de Gran Canaria, Octubre de 2010

Agradecimientos

El presente trabajo no habría podido desarrollarse sin el esfuerzo y la dedicación de mis tutores. A los Drs. D. Luis Alberto Padrón Hernández y D. Juan José Aznárez González les debo mucho más de lo que podría esperarse de los directores de un Proyecto Fin de Carrera. Sin sus consejos, su apoyo, sus numerosas explicaciones y su infinita paciencia nunca habría llegado hasta este punto. Quiero aprovechar la ocasión para agradecer al primero el haberme dado la oportunidad de aprender de su experiencia y de forjar una amistad que espero se mantenga con el paso del tiempo. Por otra parte, estoy enormemente agradecido a Juan José Aznárez González por haberme permitido iniciarme en el mundo de la investigación y por haber puesto a mi disposición tantos medios y recursos como le ha sido posible. Puedo afirmar sin miedo a equivocarme que lo único que supera la valía profesional de ambos es su valía humana.

De igual modo, quiero agradecer al Dr. D. Orlando Maeso Fortuny por el apoyo y la asistencia que me ha prestado a lo largo de este tiempo, así como al Dr. D. José Carlos Nelson Santana por suscitar en mí el interés por la Mecánica de Medios Continuos. En este sentido, quisiera también agradecer a mis compañeros de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería Asunción González, Ariel Santana y Fernando García los buenos ratos pasados entre hora y hora de trabajo.

Mención especial merecen mis padres, a quienes les debo eterna gratitud y en quienes recae la responsabilidad primera de haber llegado hasta aquí. Gracias también al resto de mi familia, quienes siempre me han hecho sentir querido aún desde la lejanía existente.

Gracias también a mis amigos Óscar, Noe, Cathy, Felipe, Amar y a todos a los que involuntariamente he omitido. Por último, agradecer muy especialmente a Patricia su paciencia, apoyo y cariño durante estos últimos meses.

Índice general

Índice de figuras	IX
Índice de cuadros	XIII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos y alcance	3
1.3. Estructura del documento	5
2. El problema elastodinámico armónico y su formulación MEC	7
2.1. Introducción	7
2.2. Ecuaciones de gobierno del problema elastodinámico	8
2.3. Propagación de ondas en medios elásticos	9
2.3.1. Ondas planas armónicas	10
2.4. Representación integral del problema elastodinámico	11
2.4.1. Teorema de reciprocidad en la elastodinámica	11
2.4.2. Solución fundamental	13
2.4.3. Representación integral	14
2.4.4. Representación integral en el contorno	15
2.5. El método de elementos de contorno	16
2.5.1. Proceso de discretización	17
2.5.2. Sistema de ecuaciones que surge del MEC	19
2.5.3. Tipología de elementos de contorno	19
2.5.4. Acoplamiento entre regiones	20
2.5.5. Aspectos numéricos del MEC	22
2.6. Modelado del amortiguamiento del material	23
2.6.1. Materiales viscoelásticos lineales	23
2.6.2. Relación constitutiva para materiales viscoelásticos armónicos	23
2.6.3. Modelo histerético viscoelástico lineal	24

3. Modelo BEM-FEM	25
3.1. Introducción	25
3.2. Ecuaciones de elementos de contorno para el suelo	26
3.3. Ecuaciones de elementos finitos para la cimentación pilotada . . .	29
3.3.1. Ecuación de movimiento	29
3.3.2. Definición del elemento viga	30
3.3.3. Fuerzas sobre el pilote	32
3.3.4. Sistema de ecuaciones para el pilote simple	34
3.4. Acoplamiento BEM-FEM	34
3.5. Formulación del encepado rígido	36
3.5.1. Restricciones cinemáticas	37
3.5.2. Ecuaciones de equilibrio	39
3.6. Modelo para las estructuras pilotadas	40
3.6.1. Introducción	40
3.6.2. Relaciones cinemáticas	41
3.6.3. Matriz de rigidez de entreplanta	43
3.7. Ensamblaje de la matriz global del sistema	45
3.8. Evaluación numérica de las integrales definidas sobre las líneas de carga	47
4. Ecuaciones del campo incidente	53
4.1. Introducción	53
4.2. Fundamentos	53
4.3. Onda SH incidente	56
4.3.1. Campo incidente	56
4.3.2. Tensores de deformación y tensión	58
4.3.3. Aplicación de las condiciones de contorno	59
4.4. Onda P incidente	60
4.4.1. Campo incidente	60
4.4.2. Tensores de deformación y tensión	62
4.4.3. Aplicación de las condiciones de contorno	64
4.4.4. Cambios de modo	67
4.5. Onda SV incidente	69
4.5.1. Campo incidente	69
4.5.2. Ángulo crítico	71
4.5.3. Tensores de deformación y tensión	74
4.5.4. Aplicación de las condiciones de contorno	76
4.5.5. Cambios de modo	80
4.6. Implementación del ángulo ϕ_0 en la formulación	82
4.7. Implementación del campo incidente en la formulación	86
4.8. Implementación del modelo en el código	88

4.8.1. Tratamiento de la simetría	88
4.8.2. Implementación computacional	91
5. Resultados de comprobación	95
5.1. Introducción	95
5.2. Comparación con Maeso <i>et ál.</i> y Padrón	95
5.3. Comparación con Kaynia y Novak	99
6. Influencia del tipo de onda y ángulo de incidencia	113
6.1. Introducción	113
6.2. Influencia del ángulo de incidencia respecto al plano horizontal (φ_0)	114
6.2.1. Introducción	114
6.2.2. Pilotes simples	116
6.2.3. Grupos de pilotes	116
6.3. Influencia del ángulo de incidencia y tipo de onda	119
6.3.1. Definición del problema	119
6.3.2. Parámetros del problema	120
6.3.3. Variación del desplazamiento de campo libre con el ángulo de incidencia en el plano vertical (θ_0)	120
6.3.4. Factores de interacción cinemática de las cimentaciones em- pleadas	123
6.3.5. Funciones de transferencia en los encepados	124
6.3.6. Deflexión lateral del edificio	133
6.3.7. Esfuerzos en los pilotes	135
7. Conclusiones y líneas futuras	167
7.1. Resumen y conclusiones	167
7.2. Líneas futuras	169
Bibliografía	171

Índice de figuras

2.1.	Movimientos y direcciones de propagación correspondientes a ondas planas tipo P y S. Extraído de [2]	11
2.2.	Procedimiento de eliminación de la singularidad. Semiesfera alrededor del punto de colocación para integración	15
2.3.	Acoplamiento entre dos regiones sólidas	20
3.1.	Representación de las líneas de carga	27
3.2.	Definición del elemento finito	30
3.3.	Fuerzas puntuales externas (izquierda) y tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo, definidas sobre un elemento genérico	33
3.4.	Pilote de referencia (r) y pilote periférico (p)	37
3.5.	Esquema bidimensional del modelo de estructuras pilotadas	40
3.6.	Grados de libertad para el acoplamiento entre pilares y encepado	41
3.7.	Estructura de la matriz de coeficientes \mathcal{A} del sistema	46
3.8.	Superficie cilíndrica de integración sobre la interfase pilote-suelo cuando el punto de colocación pertenece al pilote	48
3.9.	Estrategia de colocación no nodal	50
3.10.	Integración sobre la superficie de la punta del pilote	51
4.1.	Definición de ejes en el semiespacio	54
4.2.	Ángulos de interés en el plano $x_2 x_3$ para los distintos problemas	55
4.3.	Ángulos de interés en el plano $x_2 x_3$ para una onda SH incidente	57
4.4.	Ángulos de interés en el plano $x_2 x_3$ para una onda P incidente	61
4.5.	Variación de la amplitud de la onda P reflejada con el ángulo de incidencia θ_0 y el coeficiente de Poisson ν del terreno	68
4.6.	Ángulos de interés en el plano $x_2 x_3$ para una onda SV incidente	69
4.7.	Variación de la amplitud de la onda SV reflejada con el ángulo de incidencia θ_0	81
4.8.	Ángulo φ_0	82
4.9.	Campos incidente y reflejado para pilotes embebidos en un semiespacio	87

4.10. Diagrama de flujo del programa principal	91
4.11. Diagrama de flujo de la subrutina programada	93
5.1. Factores de interacción cinemática para un pilote simple sometido a ondas SH de incidencia vertical. Comparación con Maeso <i>et ál.</i>	97
5.2. Factores de interacción cinemática para un pilote simple sometido a ondas P de incidencia vertical. Comparación con Maeso <i>et ál.</i>	98
5.3. Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un pilote simple sometido a ondas SH con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak	100
5.4. Factores de interacción cinemática en giros para un pilote simple sometido a ondas SH con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak	101
5.5. Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un grupo de 3×3 pilotes sometido a ondas SH con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak	102
5.6. Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un grupo de 3×3 pilotes sometido a ondas SH con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak	103
5.7. Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un pilote simple sometido a ondas SV con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak	104
5.8. Factores de interacción cinemática en giros para un pilote simple sometido a ondas SV con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak	105
5.9. Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un grupo de 3×3 pilotes sometido a ondas SV con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak	106
5.10. Factores de interacción cinemática en giros para un grupo de 3×3 pilotes sometido a ondas SV con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak	107
5.11. Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un pilote simple sometido a ondas P con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak	108
5.12. Factores de interacción cinemática en giros para un pilote simple sometido a ondas P con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak	109
5.13. Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un grupo de 3×3 pilotes sometido a ondas P con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak	110

5.14. Factores de interacción cinemática en giros para un grupo de 3×3 pilotes sometido a ondas P con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak	111
6.1. Influencia del ángulo φ_0 . Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un pilote simple sometido a ondas SV, SH y P. Ángulo $\theta_0 = 50^\circ$	117
6.2. Influencia del ángulo φ_0 . Factores de interacción cinemática en desplazamientos para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Ángulo $\theta_0 = 50^\circ$	118
6.3. Definición del problema	120
6.4. Variación del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre con el ángulo θ_0 y ν_s . Ondas SV y P incidentes	121
6.5. Factores de interacción cinemática en desplazamientos para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P	125
6.6. Factores de interacción cinemática en giros para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P	126
6.7. Factores de interacción cinemática en desplazamientos para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Caso con edificios. Relación de aspecto $h/b = 2$	127
6.8. Factores de interacción cinemática en giros para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Caso con edificios. Relación de aspecto $h/b = 2$	128
6.9. Factores de interacción cinemática en desplazamientos para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Caso con edificios. Relación de aspecto $h/b = 3$	129
6.10. Factores de interacción cinemática en giros para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Caso con edificios. Relación de aspecto $h/b = 3$	130
6.11. Factores de interacción cinemática en desplazamientos para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Caso con edificios. Relación de aspecto $h/b = 4$	131
6.12. Factores de interacción cinemática en giros para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Caso con edificios. Relación de aspecto $h/b = 4$	132
6.13. Deflexión lateral del edificio. Relación de aspecto $h/b = 2$	136
6.14. Deflexión lateral del edificio. Relación de aspecto $h/b = 3$	137
6.15. Deflexión lateral del edificio. Relación de aspecto $h/b = 4$	138
6.16. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda P, $h/b = 2$	140
6.17. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda P, $h/b = 2$	141
6.18. Momentos flectores en los pilotes. Onda P, $h/b = 2$	142

6.19. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SH, $h/b = 2$	143
6.20. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SH, $h/b = 2$	144
6.21. Momentos flectores en los pilotes. Onda SH, $h/b = 2$	145
6.22. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SV, $h/b = 2$	146
6.23. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV, $h/b = 2$	147
6.24. Momento flector en los pilotes. Onda SV, $h/b = 2$	148
6.25. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda P, $h/b = 3$	149
6.26. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda P, $h/b = 3$	150
6.27. Momentos flectores en los pilotes. Onda P, $h/b = 3$	151
6.28. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SH, $h/b = 3$	152
6.29. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SH, $h/b = 3$	153
6.30. Momentos flectores en los pilotes. Onda SH, $h/b = 3$	154
6.31. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SV, $h/b = 3$	155
6.32. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV, $h/b = 3$	156
6.33. Momentos flectores en los pilotes. Onda SV, $h/b = 3$	157
6.34. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda P, $h/b = 4$	158
6.35. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda P, $h/b = 4$	159
6.36. Momentos flectores en los pilotes. Onda P, $h/b = 4$	160
6.37. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SH, $h/b = 4$	161
6.38. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SH, $h/b = 4$	162
6.39. Momentos flectores en los pilotes. Onda SH, $h/b = 4$	163
6.40. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SV, $h/b = 4$	164
6.41. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV, $h/b = 4$	165
6.42. Momentos flectores en los pilotes. Onda SV, $h/b = 4$	166

Índice de cuadros

2.1.	Tipos de elementos triangulares y cuadriláteros cuadráticos	21
4.1.	Cuadro resumen de los ángulos de cambio de modo para una onda incidente tipo P y un conjunto de coeficientes de Poisson del terreno	68
4.2.	Cuadro resumen de los ángulos críticos para una onda incidente tipo SV y un conjunto de coeficientes de Poisson del terreno . . .	71
4.3.	Cuadro resumen de los ángulos de cambio de modo para una onda incidente tipo SV y un conjunto de coeficientes de Poisson del terreno	82
6.1.	Cuadro resumen de los valores del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre en el punto de referencia (0,0,0) en función del ángulo θ_0 de incidencia. Onda SV incidente y $\nu_s = 0,4$	122
6.2.	Cuadro resumen de los valores del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre en el punto de referencia (0,0,0) en función del ángulo θ_0 de incidencia. Onda P incidente y $\nu_s = 0,4$	122

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Este Proyecto Fin de Carrera se integra en la línea de trabajo principal que se desarrolla en la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería, a la que pertenecen los tutores, y que tiene por objetivo el desarrollo de modelos numéricos que permitan determinar la respuesta dinámica de estructuras de diferente tipología. Se trata de modelos que posibilitan el estudio de desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y tensiones en cualquier punto de la estructura ante cargas de cualquier tipo variables en el tiempo y que, por tanto, son magnitudes que también poseen dependencia temporal.

Es posible, así, obtener de forma precisa la respuesta dinámica de una estructura ante, por ejemplo, las solicitaciones producidas por una maquina anclada a la misma o en sus proximidades, las cargas dinámicas producidas por el viento o las vibraciones que se transmiten desde el terreno a través del cimiento durante el desarrollo de un evento de carácter sísmico. Este último tipo de problema, de especial interés en el diseño de estructuras civiles singulares (puentes, presas, edificios altos, etc.), presenta algunas dificultades añadidas para su tratamiento. Los modelos a desarrollar para el estudio sísmico de estructuras deben tener en cuenta aspectos tales como el carácter propagatorio de la excitación y el ángulo de incidencia de las ondas sísmicas sobre el emplazamiento, los efectos de distorsión del campo incidente asociados a la topografía, estratigrafía o la propia geometría del cimiento y, en general, cualquier aspecto relacionado con la interacción entre la estructura analizada y el terreno de cimentación. Considerar con rigor estos efectos requiere de la utilización de modelos directos que tengan en cuenta la estructura y el terreno y que formulen adecuadamente la interacción mutua. Su principal inconveniente es el elevado número de grados de libertad que implican, de ahí que estos modelos directos, hasta el desarrollo reciente de computadores de

grandes prestaciones accesibles, tuviesen un campo de aplicación muy restringido. La metodología desarrollada entonces (ampliamente utilizada actualmente en algunos problemas) se basa en la aplicación de técnicas de subestructuración que permitan el análisis dinámico teniendo en cuenta los fenómenos de interacción de forma simplificada [1].

Los modelos formulados en la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras se enmarcan dentro de la categoría de Modelos Directos, siendo aplicados a problemas donde coexisten medios de diferentes características y comportamientos (suelo, estructura, agua, sedimentos) sometidos a solicitaciones sísmicas. Ante este tipo de solicitaciones, estos medios interactúan entre sí formando un sistema acoplado en el que ninguna de las partes puede ser estudiada aisladamente. Además, existe una dificultad adicional asociada al hecho de que algunas de estas regiones pueden ser muy extensas (o prácticamente infinitas, como el suelo). Este hecho dificulta el estudio, ya que, a diferencia del análisis estático, en el caso dinámico acciones muy alejadas de un punto pueden tener una gran influencia sobre los movimientos y tensiones a que éste se ve sometido.

El método utilizado para el tratamiento numérico de las ecuaciones del problema en estos modelos ha sido, fundamentalmente, el Método de los Elementos de Contorno. Teniendo en cuenta las características del problema a resolver y sus condicionantes, el Método de los Elementos de Contorno es, sin duda, la opción más adecuada [2]. Este Método permite el tratamiento sencillo de regiones de geometría infinita o semi-infinita en problemas dinámicos, ya que verifica de forma implícita las condiciones de radiación. Asimismo, la incorporación de un tren de ondas como solicitación en el terreno simulando el evento sísmico es también muy natural. En este sentido, y con anterioridad al desarrollo del presente Proyecto Fin de Carrera, ya se había desarrollado un modelo numérico acoplado que, haciendo uso del Método de Elementos de Contorno, permite el estudio de la respuesta sísmica de estructuras continuas, habiendo sido aplicado con éxito al estudio sísmico de presas bóveda [3-5]. En este modelo, todas los dominios implicados (terreno, presa, agua y sedimentos de fondo) son discretizados haciendo uso del Método de Elementos de Contorno como regiones continuas sin simplificación dimensional o de comportamiento alguna. La interacción dinámica entre dichas regiones se formula de manera rigurosa (equilibrio y compatibilidad) dando lugar a un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son desplazamientos o tensiones en el contorno de dichas regiones. Los desplazamientos y tensiones en el interior de estas regiones pueden obtenerse de forma muy sencilla a través de los valores calculados en el contorno. La solicitación consiste en un tren de ondas sísmicas planas de diferente tipo (P, SH, SV y ondas de Rayleigh) que, partiendo desde el infinito, incide en el lugar de emplazamiento de la estructura.

Otro caso de interés para los miembros de la División en los últimos años ha sido el análisis de la respuesta dinámica de estructuras de edificación cimenta-

das mediante pilotes. Este problema tiene gran interés, principalmente, por dos motivos básicos: el gran número de edificaciones de estas características en zonas de peligrosidad sísmica y la necesidad, aún hoy en día, de alcanzar una mayor y mejor comprensión de los fenómenos implicados en la respuesta dinámica de estructuras de estas características. En este sentido, se ha desarrollado e implementado un modelo acoplado de Elementos de Contorno y Elementos Finitos (MEC-MEF) tridimensional armónico que aprovecha las ventajas de cada metodología para el análisis dinámico directo de este tipo de estructuras. Este modelo cuenta con las ventajas del Método de Elementos de Contorno para representar el terreno donde se asienta la edificación, es decir, su carácter de medio semi-infinito así como la presencia de ondas sísmicas excitadoras, y la simplificación que supone modelar vigas, pilares y pilotes de la estructura como barras mediante el MEF. Este programa, muy desarrollado en la actualidad, ha permitido el análisis de la respuesta de cimentaciones pilotadas, tanto en impedancias como en interacción cinemática [6–8], así como el estudio de la respuesta de la superestructura y de otras estructuras cercanas, sometido el conjunto a trenes de ondas sísmicas con incidencia vertical [9, 10].

Con este Proyecto Fin de Carrera se pretende ampliar el tipo de excitación incorporando en el código la posibilidad de un tren de ondas volumétricas incidente de tipo P, SH o SV que incidan sobre el emplazamiento de los edificios con un ángulo completamente genérico. Así, una vez formuladas e implementadas las ecuaciones que describen el campo incidente, se validará el programa con ejemplos sencillos y se resolverán algunos problemas que pongan de manifiesto la importancia del ángulo de incidencia y tipo de onda en la respuesta dinámica del sistema.

1.2. **Objetivos y alcance**

Con este Proyecto Fin de Carrera se pretende continuar con el desarrollo de un modelo directo acoplado de Elementos de Contorno - Elementos Finitos para el estudio de la respuesta sísmica de estructuras de edificación pilotadas que incorpora de forma rigurosa los fenómenos de interacción con el suelo, en particular en lo que tiene que ver con la ampliación de la definición del campo incidente y su ulterior aplicación al mejor conocimiento de los fenómenos que determinan el comportamiento dinámico de este tipo de estructuras. De forma concreta, los objetivos a cumplir con este Proyecto se relacionan a continuación:

- Incorporación de un campo incidente de ondas planas armónicas (P, SH y SV) con ángulo de incidencia completamente genérico sobre el emplazamiento. La implementación de este campo incidente en el modelo acoplado

MEC-MEF que incorpora simetría a un cuarto (con el objetivo de reducir el número de grados de libertad del problema) requiere un tratamiento adicional de las ecuaciones del campo incidente.

- Validación del código modificado con ejemplos existentes en la bibliografía.
- Estudio, desde el punto de vista de la respuesta del encepado y de la superestructura de la influencia de la tipología de la onda incidente (P, SH o SV) y su ángulo de incidencia. Se analizan los casos correspondientes a ángulos de incidencia de ondas de corte cercanos al crítico, a partir del cual aparecen ondas de superficie, y por tanto cambio en los mecanismos de propagación de la energía en el suelo [11, 12].
- Para el campo incidente general, también se estudia la influencia de parámetros tales como la configuración de la cimentación o la esbeltez de la estructura.
- Análisis de los esfuerzos axiales, cortantes y momentos flectores inducidos por el sismo en los pilotes, así como la sensibilidad de dichos esfuerzos ante variables tales como el tipo de onda y su ángulo de incidencia en relación con parámetros como la esbeltez de la estructura.

Aclarar que, si bien el modelo ha quedado preparado para un estudio exhaustivo de la influencia del ángulo de incidencia en la respuesta de edificios pilotados, este estudio se presentará a un nivel preliminar en este Proyecto Fin de Carrera.

Tras esta relación de objetivos de carácter científico, puede enumerarse otra serie de objetivos de carácter más metodológico, de no menor interés, que han permitido la formación del autor en el campo de estudio y su introducción a las tareas de investigación que continuarán con el desarrollo de una Tesis Doctoral en la materia. Entre éstos están:

- Formación curricular del autor en el campo de la dinámica de estructuras, materia no incluida en ninguna de las asignaturas de la titulación de Ingeniero Industrial, estudiando las bases teóricas de la dinámica de estructuras de barras.
- Por la misma razón, estudio y comprensión de las bases de la Elastodinámica Lineal, del Método de los Elementos de Contorno y el Método de los Elementos Finitos, que han servido para el desarrollo del software aplicable al análisis dinámico de estructuras pilotadas.
- Familiarización con el lenguaje de programación FORTRAN, lenguaje utilizado en la implementación de los modelos matemáticos utilizados y modificados, así como el desarrollo de la capacidad de escritura, compilación y ejecución de programa propios en tal lenguaje.

- Estudio con alto nivel de detalle del programa informático vinculado al modelo acoplado MEC-MEF, programa que, en el momento anterior al comienzo del presente Proyecto Fin de Carrera, permitía el estudio dinámico de estructuras de edificación pilotadas ante trenes de ondas sísmicas de incidencia exclusivamente vertical.
- Realización de búsquedas bibliográficas y recopilación de bibliografía con el uso frecuente de los mecanismos de búsquedas de datos en las fuentes electrónicas de los organismos y centros de investigación.

1.3. Estructura del documento

Una vez se han comentado los aspectos genéricos del Proyecto Fin de Carrera en el presente capítulo introductorio, es hora de resumir el contenido del resto de capítulos del documento. De este modo, en el capítulo 2 se explican las bases y se escriben las ecuaciones que gobiernan el problema elastodinámico armónico en sólidos isótropos. También se introducen las bases del Método de Elementos de Contorno aplicado a este problema y se discuten sus aspectos metodológicos y de implementación. En el capítulo 3 se describe el modelo acoplado MEC-MEF, tanto en sus aspectos teóricos como de implementación. Se estudia en detalle la formulación de Elementos de Contorno para el suelo y la correspondiente de Elementos Finitos para pilotes y estructura, así como las ecuaciones de acoplamiento dinámico, las variables primarias del problema y el sistema de ecuaciones resultante. Por otro lado, en el capítulo 4 se formulan las ecuaciones del campo incidente para ondas P, SH y SV con ángulo de incidencia genérico en su propagación por el terreno. Se obtienen las expresiones del campo de desplazamientos y tensor de tensiones necesarias para su incorporación al código en términos del campo difractado. Se reserva para el capítulo 5 la validación del código modificado con resultados desarrollados por la División y con otros existentes en la bibliografía. En el capítulo 6 se presentan los resultados obtenidos de la aplicación del código modificado. Se estudia la influencia del ángulo de incidencia y tipo de onda en la respuesta dinámica de la estructura y cimentación (desplazamientos y esfuerzos) para algunos ejemplos tipo. Tratándose de resultados preliminares, el capítulo 7 extrae algunas conclusiones parciales proponiendo, además, algunas actuaciones futuras en la misma línea de investigación.

Capítulo 2

El problema elastodinámico armónico y su formulación mediante el Método de Elementos de Contorno

2.1. Introducción

A lo largo del presente trabajo se estudia el comportamiento dinámico de cimentaciones pilotadas tridimensionales alojadas en suelos viscoelásticos y de las superestructuras que esta clase de cimentaciones soportan. El citado comportamiento se encuentra enmarcado en el ámbito de los problemas elastodinámicos tridimensionales, cuyas soluciones analíticas son, generalmente, inabordables. Por ello, se han desarrollado distintas metodologías aproximadas, entre las que el método de elementos de contorno ha demostrado ser una aproximación numérica suficientemente precisa, siendo especialmente adecuada para problemas en los que intervienen regiones no acotadas.

Este capítulo introductorio comienza estableciendo las ecuaciones básicas de gobierno del problema elastodinámico y estudiando con brevedad el fenómeno de propagación de ondas en medios elásticos en los apartados 2.2 y 2.3 respectivamente. Posteriormente, la sección 2.4 presenta la representación integral del problema elastodinámico, permitiendo, de este modo, formular el método de elementos de contorno (MEC en lo sucesivo) en la sección 2.5. Para terminar, el presente capítulo finaliza en la sección 2.6 con algunos conceptos relacionados con el tratamiento de problemas viscoelásticos haciendo uso de la misma formulación obtenida para medios elásticos.

2.2. Ecuaciones de gobierno del problema elastodinámico

La formulación presentada en el presente trabajo trata la solución numérica de un problema dinámico en estado estacionario para regiones elásticas, lineales, homogéneas e isotrópicas. El primer paso es, por tanto, establecer las ecuaciones de gobierno del problema, que pueden obtenerse de la combinación de las relaciones cinemáticas, las ecuaciones de equilibrio y la ley de comportamiento del material y que controlan el comportamiento dinámico de los sólidos elásticos.

Sea \mathbf{x} el vector de posición de un punto del cuerpo Ω con respecto a un sistema fijo de coordenadas cartesianas rectangulares. El tensor de pequeñas deformaciones ε_{ij} del citado punto en el instante de tiempo t se define, en términos de las componentes de su vector de desplazamientos $u_i(\mathbf{x}, t)$, como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

donde las comas indican derivación con respecto a las coordenadas espaciales.

Por otro lado, se pueden expresar las condiciones de equilibrio para los puntos de un sólido elástico en términos del siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.2)$$

donde σ_{ij} representa el tensor de tensiones, b_i las fuerzas de volumen que actúan en Ω , ρ es la densidad del cuerpo, los puntos indican derivadas temporales y los subíndices repetidos implican suma (según el convenio de sumación de Einstein).

Finalmente, la relación entre los tensores de tensión y deformación para sólidos elásticos, lineales, isotrópicos y homogéneos se establece, en términos de la ley de Hooke, como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (2.3)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ en otro caso). λ y μ son las constantes de Lamé, que se relacionan con el módulo de elasticidad transversal o módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν según:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.4)$$

siendo μ el módulo de elasticidad transversal o módulo de cizalladura.

Sabiendo lo anterior, el comportamiento dinámico de un cuerpo elástico, lineal, isotrópico y homogéneo se encuentra gobernado por las expresiones (2.1), (2.2) y (2.3), las cuales forman un sistema completo de ecuaciones (15 en el caso tridimensional). La sustitución de (2.1) y (2.3) en (2.2) da como resultado:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.5)$$

que son las ecuaciones de Navier, representando las ecuaciones de gobierno del movimiento en términos del vector de desplazamientos \mathbf{u} . \mathbf{b} es, como se comentó con anterioridad, el vector de fuerzas volumétricas actuantes en el cuerpo. Como ecuaciones diferenciales que son, la resolución del conjunto de ecuaciones (2.5) requiere el establecimiento de una serie de condiciones de contorno que, en este caso, consisten en un conjunto de tensiones y/o desplazamientos conocidos en el contorno Γ del cuerpo Ω , así como de condiciones iniciales $\forall \mathbf{x} \in \Omega$.

2.3. Propagación de ondas en medios elásticos

La integración de las expresiones (2.5) para un caso general es una tarea complicada y no siempre posible. Por ello, se han desarrollado distintos procedimientos para expresar las ecuaciones de Navier de modo que se pueda obtener su solución de manera más sencilla para determinados problemas. Entre esos procedimientos, la formulación del problema elastodinámico en términos de dilatación y rotación lleva a un conjunto de ecuaciones de onda más simples que, además, dependen de variables con un claro significado físico. Así, sean \mathbf{e} y $\boldsymbol{\omega}$, respectivamente, los vectores dilatación y rotación, expresables del modo siguiente:

$$\mathbf{e} = \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.6a)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.6b)$$

Tomando la divergencia y el rotacional de la ecuación (2.5) se obtiene, respectivamente, el siguiente par de ecuaciones de onda:

$$c_p^2 \nabla^2 \mathbf{e} + \nabla \cdot \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{e}} \quad (2.7)$$

$$c_s^2 \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{b} = \ddot{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.8)$$

donde

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{y} \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.9)$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) representan la formulación desacoplada de las ecuaciones de Navier en términos de la dilatación y de tres componentes del vector de rotación. La ecuación (2.7) es una ecuación de onda escalar, con velocidad de propagación c_p , mientras que la ecuación (2.8) es una ecuación de onda vectorial con velocidad de propagación c_s . Por lo tanto, las ondas que se propagan en

el sólido elástico se pueden clasificar en ondas irrotacionales y equivolumiales, también conocidas como ondas compresionales (o *primarias* -P-) y de corte (o *secundarias* -S-). La denominación *primaria* y *secundaria* proviene del campo de la sismología, ya que $c_p > c_s$ y, en consecuencia, las primeras alcanzan la estación sismológica en primer lugar en caso de existir un terremoto.

2.3.1. Ondas planas armónicas

Es momento de centrarse en el problema específico de las ondas elásticas planas propagándose en una cierta dirección, definida por un cierto vector unitario \mathbf{s} . En esta situación, todos los puntos de un plano común perpendicular a \mathbf{s} están sometidos a los mismos movimientos, definidos por el vector unitario \mathbf{d} . En el caso armónico en estado estacionario, los desplazamientos de un punto \mathbf{x} tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = A e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (2.10)$$

donde A es la amplitud del movimiento, independiente de t y \mathbf{x} , $i = \sqrt{-1}$ y $k = \omega/c$ es el número de onda, siendo c la velocidad de onda. Por otro lado, definiendo las características elásticas del sólido por medio de c_s y c_p y asumiendo nulas, por simplicidad, las fuerzas de volumen, las ecuaciones de Navier pueden escribirse como:

$$-c_s^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} + c_p^2 \nabla \mathbf{e} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.11)$$

Sustituyendo la ecuación (2.10), cada término de (2.11) queda:

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -k^2 \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.12a)$$

$$\nabla \mathbf{e} = -k^2 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.12b)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (2.12c)$$

Por lo tanto, y teniendo en cuenta que $\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} - \mathbf{d}$, la ecuación (2.11) se convierte en:

$$(c_s^2 - c^2) \mathbf{d} + (c_p^2 - c_s^2) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} = 0 \quad (2.13)$$

y, en consecuencia:

$$\text{si } \begin{cases} c = c_s \Rightarrow \mathbf{s} \cdot \mathbf{d} = 0 & \Rightarrow \text{mov. perpendicular a la dirección de propagación} \\ c = c_p \Rightarrow \mathbf{s} \times \mathbf{d} = 0 & \Rightarrow \text{mov. paralelo a la dirección de propagación} \end{cases}$$

como se ilustra en la figura 2.1.

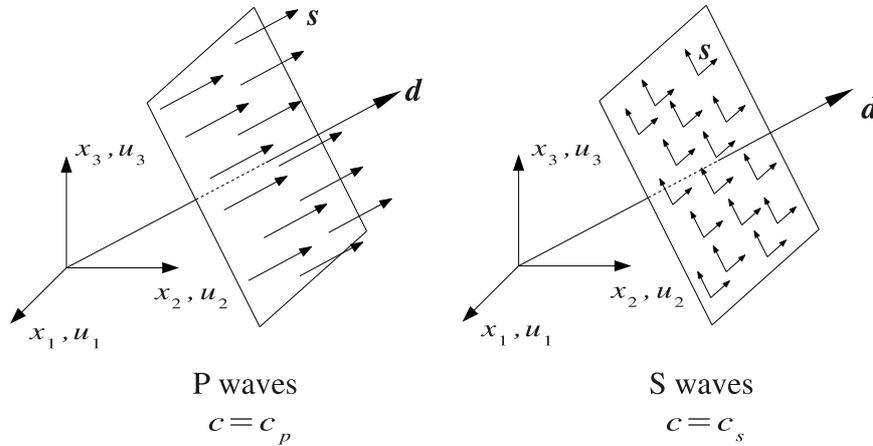


Figura 2.1: Movimientos y direcciones de propagación correspondientes a ondas planas tipo P y S. Extraído de [2]

En esta sección sólo se han apuntado algunos conceptos esenciales de los fenómenos de propagación de ondas elásticas para facilitar la comprensión de las siguientes secciones y capítulos. Una explicación más profunda de los fenómenos de propagación de ondas en elastodinámica y su resolución con elementos de contorno puede encontrarse en Domínguez [2]. Además, un análisis exhaustivo del problema se puede encontrar en [11, 12]

2.4. Representación integral del problema elastodinámico

En la sección anterior se ha descrito el comportamiento dinámico de un medio elástico, lineal, isótropo y homogéneo mediante sus ecuaciones de gobierno. La transformación de ese conjunto de ecuaciones diferenciales en expresiones integrales dará como resultado la formulación del problema en términos del método de elementos de contorno.

2.4.1. Teorema de reciprocidad en la elastodinámica

El punto de partida es el teorema de reciprocidad entre dos estados elastodinámicos. Éste es una extensión del clásico teorema de la reciprocidad en la elastoestática de Betti, formulado en el dominio del tiempo. El teorema de reciprocidad en la elastodinámica fue propuesto inicialmente por Graffi [13], siendo extendido con posterioridad a dominios infinitos por Wheeler y Sternberg [14].

Sean $\mathcal{S}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b}; \Omega)$ y $\mathcal{S}^*(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{b}^*; \Omega)$ dos estados elastodinámicos diferentes que satisfacen las ecuaciones (2.5) de Navier en un dominio regular Ω . \mathcal{S}^* será una solución de referencia conocida de antemano que se empleará para resolver el problema y obtener el estado desconocido \mathcal{S} . Asumiendo condiciones iniciales nulas, el teorema de reciprocidad en la elastodinámica puede escribirse como:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{p} * \mathbf{u}^*) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{b} * \mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{p}^* * \mathbf{u}) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{b}^* * \mathbf{u}) d\Omega \quad (2.14)$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{u}^* son los vectores de desplazamiento en cualquier punto del dominio, mientras que \mathbf{p} y \mathbf{p}^* son los vectores de tensión en Γ , en equilibrio con los correspondientes tensores de tensión $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\sigma}^*$, en los estados \mathcal{S} y \mathcal{S}^* respectivamente. El operador $*$ representa la convolución de Riemann.

La formulación elastodinámica desarrollada en el presente trabajo considera fuerzas de volumen y condiciones de contorno armónicas en el tiempo con frecuencia angular ω , *i.e.*, del tipo $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t}$. En este caso, los movimientos consisten en una parte transitoria ($\mathbf{u}^t(\mathbf{x}, t)$) y una permanente ($\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$) variando armónicamente en el tiempo, de modo que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t} \quad (2.15)$$

Sin embargo, todos los sistemas físicos reales poseen alguna clase de mecanismo de disipación de energía, de modo que cuando $t \rightarrow \infty$, la parte transitoria desaparece. Esto hace posible la formulación del problema cuando es sólo la parte permanente (causada por las condiciones de contorno armónicamente variables) la que tiene influencia. En general, $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$ será una función compleja desfasada con la excitación. Entonces, asumiendo que las propiedades del medio elástico no varían con el tiempo, los campos de desplazamientos y tensiones se pueden expresar como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t} \quad (2.16a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}; \omega)e^{i\omega t} \quad (2.16b)$$

La sustitución de las ecuaciones (2.16) en las ecuaciones de gobierno permite eliminar el término repetido $e^{i\omega t}$ y reescribir las ecuaciones para el estado elastodinámico permanente. Por lo tanto, es posible redefinir los dos estados elastodinámicos expuestos con anterioridad en el dominio de la frecuencia $\mathcal{S}_{\omega}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b}; \omega, \Omega)$ y $\mathcal{S}_{\omega}^*(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{b}^*; \omega, \Omega)$. Bajo estas consideraciones, los productos de convolución desaparecen de la ecuación (2.14), simplificándose la expresión y quedando, entonces, del modo siguiente:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{p}\mathbf{u}^* d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{b}\mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*\mathbf{u} d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{b}^*\mathbf{u} d\Omega \quad (2.17)$$

2.4.2. Solución fundamental

La formulación de la ecuación integral de la elastodinámica de la ecuación (2.17) pasa por escoger un estado de referencia \mathcal{S}_ω^* adecuado, generalmente denominado *solución fundamental*. Existen distintas soluciones fundamentales (o funciones de Green) para diversos problemas de referencia. La solución empleada en el presente trabajo representa la respuesta, en términos de desplazamientos y tensiones, de un medio elástico, lineal, isótropo y homogéneo no acotado cuando es sometido a una carga armónica unitaria concentrada de la forma:

$$\rho b_k^* = \delta(\boldsymbol{\iota}) \delta_{lk} e^{i\omega t} \quad (2.18)$$

aplicada en el punto $\boldsymbol{\iota}$, en dirección l , siendo δ_{lk} la delta de Kronecker y $\delta(\boldsymbol{\iota})$ la delta de Dirac, definida como:

$$\int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\iota}) d\Omega = \begin{cases} 1, & \text{si } \boldsymbol{\iota} \in \Omega \\ 0, & \text{si } \boldsymbol{\iota} \notin \Omega \end{cases} \quad (2.19)$$

Se trata de un problema clásico resuelto por Stokes [15] en el dominio del tiempo, por Cruse y Rizzo [16] en el de Laplace, y, algunos años antes, por Kupradze [17] para problemas armónicos. Como ya ha sido mencionado, esta solución fundamental corresponde al espacio completo, lo que obliga a discretizar la superficie libre cuando se estudia un dominio semi-infinito, como ocurre en este trabajo. En la práctica, sin embargo, sólo se debe incluir en el modelo una pequeña región alrededor del área de análisis para obtener resultados precisos.

Sean $u_{ik}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\iota}, \omega)$ los desplazamientos en dirección k en el punto \mathbf{x} debidos a la carga puntual. De igual modo, sea $p_{ik}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\iota}, \omega)$ la componente en k de las tensiones asociadas a un plano con normal exterior (unitaria) \mathbf{n} en el punto \mathbf{x} . Sus expresiones, para $k, l = 1, 2$ o 3 , son:

$$u_{ik}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\iota}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} [\psi \delta_{lk} - \chi r_{,k} r_{,l}] \quad (2.20)$$

$$p_{ik}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\iota}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \left(\delta_{kl} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + r_{,k} n_l \right) - \frac{2}{r} \chi \left(n_k r_{,l} - 2 r_{,k} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} r_{,k} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \left(\frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{2}{r} \chi \right) r_{,l} n_k \right] \quad (2.21)$$

donde $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\iota}|$ y

$$\begin{aligned}\psi &= -\left(\frac{c_s}{c_p}\right)^2 \left(\frac{1}{z_p^2 r^2} - \frac{1}{z_p r}\right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left(\frac{1}{z_s^2 r^2} - \frac{1}{z_s r} + 1\right) \frac{e^{z_s r}}{r} \\ \chi &= -\left(\frac{c_s}{c_p}\right)^2 \left(\frac{3}{z_p^2 r^2} - \frac{3}{z_p r} + 1\right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left(\frac{3}{z_s^2 r^2} - \frac{3}{z_s r} + 1\right) \frac{e^{z_s r}}{r}\end{aligned}\quad (2.22)$$

siendo

$$z_p = -\frac{i\omega}{c_p}; \quad z_s = -\frac{i\omega}{c_s} \quad (2.23)$$

Es interesante resaltar que esta solución fundamental presenta una singularidad cuando $\omega r \rightarrow 0$, lo que implica la necesidad de un tratamiento especial de las integrales de estas funciones en los alrededores del punto fuente (ver, p. ej., [2, 18]).

2.4.3. Representación integral

La aplicación del teorema de reciprocidad (2.17) entre el estado desconocido en estudio y el de referencia \mathcal{S}_ω^* definido con anterioridad lleva a la representación integral del problema. En lo sucesivo, las ecuaciones se escribirán representando un conjunto de tres ecuaciones, que aparecen de la colocación de la carga unitaria en las tres direcciones del espacio, de modo que los vectores \mathbf{u}^* , \mathbf{p}^* y \mathbf{b}^* se organizarán en las matrices de 3×3 \mathbf{u}^* , \mathbf{p}^* y \mathbf{b}^* . De esta manera, cuando se considera la solución fundamental definida anteriormente, y teniendo en cuenta la ecuación (2.18), el último término de la ecuación (2.17) se convierte en:

$$\rho \int_{\Omega} \mathbf{b}^* \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\iota}) \mathbf{u} \, d\Omega = \mathbf{u}^{\boldsymbol{\iota}} \quad (2.24)$$

lo que hace que la ecuación (2.17) se transforme en:

$$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\iota}} + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} \, d\Omega \quad (2.25)$$

que es la representación integral del campo de desplazamientos del problema elastodinámico armónico cuando la carga puntual se aplica en $\boldsymbol{\iota} \in \Omega$, donde \mathbf{u} y \mathbf{p} son los vectores de desplazamientos y tensión, mientras que \mathbf{u}^* y \mathbf{p}^* son los tensores de la solución fundamental, que en forma matricial se pueden escribir como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

2.4.4. Representación integral en el contorno

La ecuación (2.25) permite obtener los desplazamientos en puntos internos de Ω cuando se conocen los desplazamientos y tensiones en Γ . Para formular el problema de modo que, dadas las condiciones de contorno, puedan obtenerse las incógnitas en los contornos, la ecuación integral debe escribirse únicamente en términos de variables en Γ , lo que implica aplicar la carga unitaria en el contorno. Sin embargo, el caso específico de $\boldsymbol{\iota} \in \Gamma$, que lleva a la representación integral en el contorno, requiere atención especial debido a la singularidad de la solución fundamental cuando $r \rightarrow 0$.

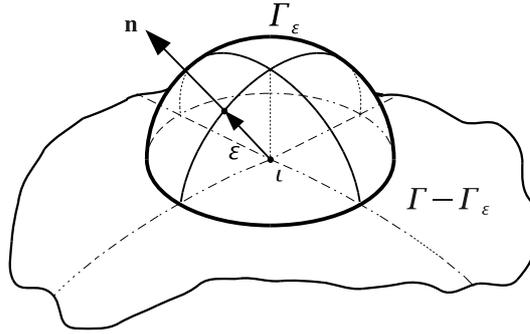


Figura 2.2: Procedimiento de eliminación de la singularidad. Semiesfera alrededor del punto de colocación para integración

El proceso de eliminación de la singularidad suele llevarse a cabo modificando ligeramente Γ para evitar el caso $r = 0$. Para este fin, se considera un contorno aproximado, elaborado aumentando el contorno Γ del dominio Ω mediante una semiesfera Γ_ϵ de radio $\epsilon \rightarrow 0$. Como se puede observar en la figura 2.2, el punto de colocación $\boldsymbol{\iota}$ se supone en el centro de la semiesfera. De esta manera, cada integral en el contorno se puede descomponer en otras dos, extendidas a $\Gamma - \Gamma_\epsilon$ y Γ_ϵ respectivamente. Así, la ecuación (2.25) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\boldsymbol{\iota} + \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma &= \\ &= \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \end{aligned}$$

Las integrales extendidas sobre $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$ no contienen la singularidad, y para $\varepsilon \rightarrow 0$ representan el valor principal de Cauchy de la integral original.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \text{val. princ.} \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (2.28)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma = \text{val. princ.} \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma \quad (2.29)$$

Por otra parte, las integrales que se extienden sobre Γ_ε se definen en el límite. Teniendo en cuenta que $\mathbf{u}^* \sim O(1/\varepsilon)$, $\mathbf{p}^* \sim O(1/\varepsilon^2)$ y $d\Gamma \sim O(\varepsilon^2)$, se puede escribir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma = 0 \quad (2.30)$$

$$\mathbf{u}^\iota + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota \quad (2.31)$$

donde \mathbf{c}^ι es el *término libre* que, en un caso tridimensional, es un tensor de 3×3 dependiente de la geometría del contorno en el punto ι y del coeficiente de Poisson del dominio (ver, p. ej., [19]). Si el contorno es suave en ι , entonces $\mathbf{c}^\iota = 1/2 \mathbf{I}$, mientras que $\mathbf{c}^\iota = \mathbf{I}$ en puntos internos, siendo \mathbf{I} la matriz unidad de 3×3 . Teniendo en cuenta las ecuaciones desde (2.28) a (2.31), la ecuación (2.30) se convierte en:

$$\mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} \, d\Omega \quad (2.32)$$

donde todas las integrales son integrales en el sentido del valor principal de Cauchy, a pesar de que se ha omitido *val. princ.* por simplicidad.

2.5. El método de elementos de contorno

Para puntos $\iota \in \Gamma$, la ecuación (2.32), junto con las condiciones de contorno, constituye una formulación cerrada que puede permitir obtener los campos de desplazamiento y tensiones en el contorno. Una vez conocidos estos campos, los desplazamientos en cualquier punto $\iota \in \Omega$ se pueden conocer mediante la ecuación (2.25). Sin embargo, no es posible obtener, en general, la solución analítica del problema, excepto para algunos casos simples. Por este motivo, es preciso llevar a cabo un proceso de discretización para obtener un sistema de ecuaciones lineal de donde puede obtenerse la solución numérica del problema en un conjunto de puntos.

En esta sección, las fuerzas de volumen se asumirán, como es habitual, nulas. De esta manera, la ecuación (2.32) queda:

$$\mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma \quad (2.33)$$

2.5.1. Proceso de discretización

La solución numérica de la ecuación (2.33) requiere, en primer lugar, la discretización del contorno en \mathcal{N}_e elementos Γ_j y en \mathcal{N}_n nodos, de forma que:

$$\Gamma \simeq \bigcup_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \Gamma_j \quad (2.34)$$

donde cada elemento se define mediante \mathcal{N}_n^j nodos. Se aproximan los campos de desplazamientos \mathbf{u} y tensiones \mathbf{p} sobre cada elemento j en términos de sus valores nodales haciendo uso de un conjunto de funciones polinómicas de interpolación $\Phi(\boldsymbol{\xi})$. $\boldsymbol{\xi}$ representa el conjunto de coordenadas naturales empleado para definir un punto en el elemento de referencia, que se presentará con posterioridad. De esta manera, los campos de desplazamientos ($\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$) y tensiones ($\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})$) en un elemento se aproximan como:

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \Phi(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}^j; \quad \mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}) = \Phi(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{p}^j \quad (2.35)$$

donde \mathbf{u}^j y \mathbf{p}^j son vectores de $3\mathcal{N}_n^j \times 1$ que contienen los desplazamientos y tensiones nodales de los elementos, y $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ es una matriz de $3 \times 3\mathcal{N}_n^j$ en la forma:

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \cdots & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \cdots & 0 & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

conteniendo las funciones de interpolación específicas del elemento, que se definirán con posterioridad. Por otra parte, la geometría de cada elemento se puede definir empleando las mismas funciones de interpolación:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \Phi(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}^j \quad (2.37)$$

donde \mathbf{x}^j es un vector de $3\mathcal{N}_n^j \times 1$ que contiene las coordenadas de los nodos que definen al elemento j . Esta clase de elemento, en el que se emplean las mismas funciones de interpolación para describir la geometría y las incógnitas, recibe el nombre de *elemento isoparamétrico*.

Se debe destacar que la geometría aproximada mediante la ecuación (2.37) no será, en general, completamente coincidente con el contorno original, como se expresa en la ecuación (2.34). El error en la aproximación depende de la complejidad de la geometría original, de la discretización empleada y de las funciones de interpolación ϕ_i . Sin embargo, esta clase de errores, que también existen en los campos aproximados, son inherentes al concepto de aproximación en el que el

MEC, como muchos otros métodos, se basa y, en consecuencia, no invalida esta clase de aproximación.

Una vez que todos los contornos han sido discretizados, y teniendo en cuenta que tanto \mathbf{u}^j como \mathbf{p}^j son vectores constantes en Γ_j , la sustitución de las ecuaciones (2.35) en (2.33) da como resultado:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{u}^t + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \quad (2.38)$$

que constituye un conjunto de tres ecuaciones algebraicas que dependen de los desplazamientos en el punto de colocación y de los desplazamientos y tensiones en todos los nodos del contorno correspondiente. La ecuación (2.38) se puede escribir, en forma matricial, como:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{u}^t + \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \hat{\mathbf{H}}^{\iota m} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{G}^{\iota m} \mathbf{p}^m \quad (2.39)$$

donde, en esta ocasión, los sumatorios se extienden a todos los nodos de la discretización.

Se debe destacar que cada punto posee un único valor del desplazamiento. Sin embargo, pueden existir valores distintos de las tensiones en el mismo punto si éste pertenece a más de un elemento con normales exteriores no paralelas. Esta situación puede resolverse considerando más de un nodo en el mismo punto. Cuando al menos una de las tensiones es conocida, los desplazamientos en ambos nodos serán, de la solución del sistema de ecuaciones resultante, iguales. Por el contrario, cuando ambas tensiones son desconocidas, la matriz del sistema de ecuaciones se convierte en singular porque las ecuaciones asociadas a los nodos duplicados son iguales entre sí. En este caso, conocido como *problema de esquina*, se lleva a cabo una técnica denominada estrategia de colocación no nodal. Este procedimiento, empleado por primera vez por Medina [20], fue estudiado en profundidad por Aznárez [18].

Los vectores \mathbf{u}^m y \mathbf{p}^m , de dimensiones 3×1 , representan las tres componentes nodales de los desplazamientos y tensiones en el nodo m . Por su parte, las matrices $\hat{\mathbf{H}}^{\iota m}$ y $\mathbf{G}^{\iota m}$, de dimensiones 3×3 , representan la respuesta en el nodo m debida a una carga armónica unitaria en el punto de colocación ι , y se definen como:

$$\hat{\mathbf{H}}^{\iota m} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_{e_m}} \mathbf{p}^* \phi_k d\Gamma \quad (2.40)$$

$$\mathbf{G}^{\iota m} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_{e_m}} \mathbf{u}^* \phi_k d\Gamma \quad (2.41)$$

donde los sumatorios se extienden sobre todos los elementos e_m a los que pertenece el nodo m y ϕ_k es la función de forma del nodo m en el elemento Γ_{e_m} . Generalmente, el punto de colocación ι se corresponderá con un cierto nodo m de la discretización. En este caso, llamando:

$$\mathbf{H}^{\iota m} = \begin{cases} \hat{\mathbf{H}}^{\iota m} & , \text{ si } \iota \neq m \\ \mathbf{c}^{\iota} + \hat{\mathbf{H}}^{\iota m} & , \text{ si } \iota = m \end{cases} \quad (2.42)$$

la ecuación (2.39) se puede expresar como:

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{H}^{\iota m} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{G}^{\iota m} \mathbf{p}^m \quad (2.43)$$

que representa la ecuación integral en el contorno discretizada.

2.5.2. Sistema de ecuaciones que surge del método de elementos de contorno

Finalmente, escribiendo la ecuación (2.43) para cada nodo, se obtiene un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{p}} \quad (2.44)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{p}}$ son vectores de dimensión $3\mathcal{N}_n \times 1$ que contienen los valores nodales del problema, y donde las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} se componen de las submatrices $\mathbf{H}^{\iota m}$ y $\mathbf{G}^{\iota m}$. Aplicando las condiciones de contorno y reordenando las columnas de modo que todas las incógnitas (desplazamientos y tensiones) estén agrupadas en un vector $\bar{\mathbf{x}}$, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones linealmente independiente de la forma:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (2.45)$$

donde $\bar{\mathbf{f}}$ es el vector de valores conocidos, obtenido por aplicación de las condiciones de contorno y por reordenación de las ecuaciones.

2.5.3. Tipología de elementos de contorno

A pesar de que la formulación presentada con anterioridad es genérica y, por tanto, válida para cualquier clase de elementos, en el presente trabajo se emplean elementos cuadráticos de forma triangular y cuadrilátera de seis y nueve nodos

respectivamente. Estos elementos, en conjunción con sus funciones de aproximación (también llamadas funciones de forma), que se escriben en términos de las coordenadas naturales ξ_1 y ξ_2 , se definen en el cuadro 2.1. La función de aproximación ϕ_i se define de modo que toman un valor unitario en el nodo i y cero en el resto de nodos del elemento.

2.5.4. Acoplamiento entre regiones

Si el dominio bajo estudio está definido, no sólo por una única región, sino por un conjunto de regiones con distintas propiedades elásticas, la formulación integral y su discretización son válidas todavía para cada subdominio. Así, para el ejemplo mostrado en la figura 2.3, se deben obtener, previamente, dos conjuntos independientes de ecuaciones, correspondientes a las regiones 1 y 2. A continuación, se imponen las condiciones de equilibrio y compatibilidad para escribir un único sistema de ecuaciones que represente el problema completo.

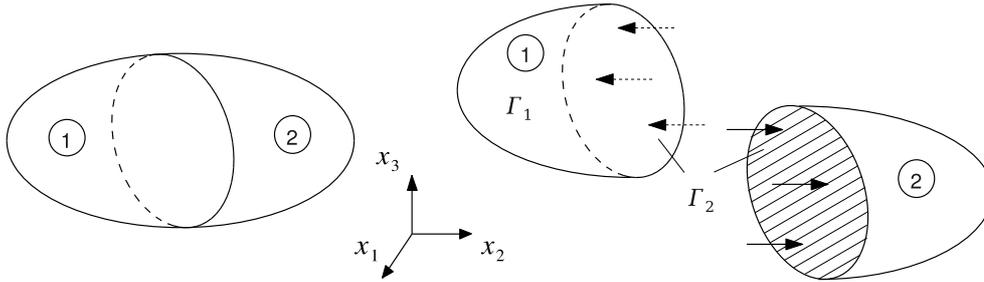


Figura 2.3: *Acoplamiento entre dos regiones sólidas*

Entonces, para una pareja de regiones, es posible escribir:

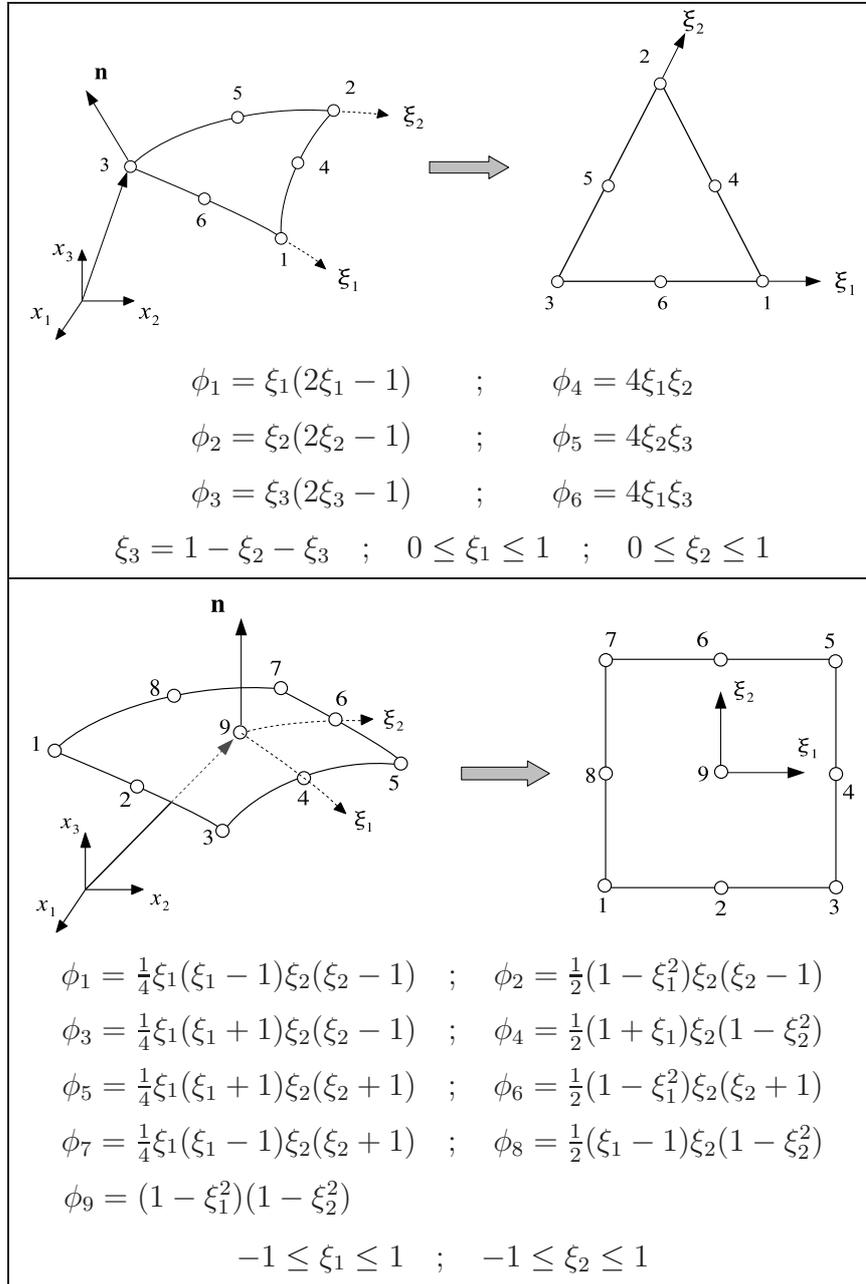
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^1 \bar{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{H}_2^1 \bar{\mathbf{u}}_2 &= \mathbf{G}_1^1 \bar{\mathbf{p}}_1 + \mathbf{G}_2^1 \bar{\mathbf{p}}_2 \\ \mathbf{H}_2^2 \bar{\mathbf{u}}_2 + \mathbf{H}_3^2 \bar{\mathbf{u}}_3 &= \mathbf{G}_2^2 \bar{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{G}_3^2 \bar{\mathbf{p}}_3 \end{aligned} \quad (2.46)$$

que, junto con:

$$\bar{\mathbf{u}}_2^1 = \bar{\mathbf{u}}_2^2 = \bar{\mathbf{u}}_2 \quad ; \quad \bar{\mathbf{p}}_2^1 = -\bar{\mathbf{p}}_2^2 = \bar{\mathbf{p}}_2 \quad (2.47)$$

lleva a un único sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^1 & \mathbf{H}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2^2 & \mathbf{H}_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1^1 \\ \bar{\mathbf{u}}_2 \\ \bar{\mathbf{u}}_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^1 & \mathbf{G}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_2^2 & \mathbf{G}_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_1^1 \\ \bar{\mathbf{p}}_2 \\ \bar{\mathbf{p}}_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$



Cuadro 2.1: Tipos de elementos triangulares y cuadriláteros cuadráticos

2.5.5. Aspectos numéricos del MEC

Como se ha comentado anteriormente, la resolución del problema de los valores en el contorno mediante el método de elementos de contorno se apoya en la discretización del problema, en la evaluación numérica de las submatrices \mathbf{H}^{lm} y \mathbf{G}^{lm} , en el ensamblaje de la matriz \mathbf{A} del sistema de ecuaciones y del vector de valores conocidos (mediante la aplicación de las condiciones de contorno) y, finalmente, en la resolución del sistema lineal de ecuaciones algebraicas resultante. De esta manera, se obtiene una aproximación numérica de los campos de interés en un conjunto de puntos del contorno pudiendo, entonces, obtenerse los desplazamientos en cualquier punto interno $\mathbf{x} \in \Omega$ mediante la aplicación de la ecuación (2.25). Por lo tanto, uno de los puntos clave del método es la correcta y eficiente evaluación numérica de las integrales que intervienen, aspecto que se tratará en lo sucesivo.

Cuando el punto de colocación no pertenece al elemento j en el que se integra, los integrandos de las ecuaciones (2.40) y (2.41) son regulares en Γ_j y, en consecuencia, las integrales se pueden evaluar empleando una cuadratura de Gauss (ver, p. ej., [21, 22]). Sin embargo, cuando la distancia r desde el punto fuente hasta el elemento integrado es relativamente pequeña, las integrales son casi singulares porque los integrandos son inversamente proporcionales a r . En este caso, se debe usar un esquema de normalización como el presentado por Telles [23]. Por el contrario, cuando el punto de colocación pertenece al elemento j integrado, los tensores \mathbf{u}^* y \mathbf{p}^* de la solución fundamental presentan singularidades de orden $O(1/r)$ y $O(1/r^2)$, respectivamente. La primera clase de singularidad, también conocida como *singularidad débil*, se puede resolver mediante una técnica de subdivisión elemental (similar a la presentada por Li *et ál.* [24] en coordenadas polares) en conjunción con un procedimiento de transformación de coordenadas (parecido al presentado por Telles [23] o por Cerrolaza y Alarcón [25]) para convertir el integrando en regular. El segundo tipo de términos, denominados *términos fuertemente singulares*, se evalúan haciendo uso de una técnica directa propuesta por Chirino *et ál.* [26] en la línea de trabajos previos de Cruse *et ál.* [27] y Li *et ál.* [24]. Estas integrales fuertemente singulares se evalúan identificando los elementos $O(1/r^2)$ y dividiéndolos en integrales regulares de superficie y una integral de línea sobre el perímetro del elemento. De esta manera, las singularidades se cancelan con la contribución de los elementos adyacentes, eliminándose, por tanto la problemática.

La exposición rigurosa de estos detalles numéricos se encuentra fuera del alcance del presente trabajo, habiéndose comentado en el presente apartado unas nociones básicas de referencia. Una explicación más detallada de la evaluación numérica de integrales y de otros aspectos numéricos del MEC puede hallarse, entre otros, en [2, 18].

2.6. Modelado del amortiguamiento del material

A lo largo del presente capítulo se ha planteado la formulación integral del problema elastodinámico, junto con una metodología numérica para la resolución del problema de valores en el contorno (MEC), estando el comportamiento elástico del dominio definido mediante una serie de ecuaciones de gobierno dependientes de un conjunto de parámetros del material.

Sin embargo, nada se ha mencionado hasta el momento sobre la posible existencia de mecanismos de disipación de energía, A pesar de ello, se puede demostrar que la formulación expuesta hasta este punto es válida tanto para materiales con amortiguamiento como para materiales en los que éste no se considera.

2.6.1. Materiales viscoelásticos lineales

En este trabajo, el amortiguamiento del material ha sido incluido en el modelo considerando las regiones MEC como materiales viscoelásticos. En las regiones viscoelásticas, como en sólidos elásticos, las tensiones y deformaciones se supone que están relacionadas de modo lineal en un tiempo t , siendo de aplicación, por tanto, el principio de superposición. Sin embargo, al contrario de lo que ocurre en los sólidos elásticos, las tensiones y deformaciones en materiales viscoelásticos dependen, no sólo de la situación en el tiempo t , sino también de las configuraciones previas.

En sólidos viscoelásticos ocurren dos fenómenos que no se presentan en sólidos elásticos. En concreto, se trata de los fenómenos de fluencia y relajación. Se entiende por fluencia al incremento en la deformación de un material debida a un estado de tensión prolongado en el tiempo, mientras que la relajación consiste en la lenta reducción del nivel de tensión en un sólido cuando está sometido a una deformación constante. Una descripción más profunda de estos fenómenos puede encontrarse en Christensen [28].

2.6.2. Relación constitutiva para materiales viscoelásticos armónicos

Puede demostrarse que el comportamiento armónico en el tiempo de medios elásticos, lineales, isótropos y homogéneos puede describirse mediante la ecuación constitutiva siguiente:

$$\sigma_{ij} = \lambda(\omega) \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu(\omega) \varepsilon_{ij} \quad (2.49)$$

que es idéntica a la ecuación (2.3) para problemas elásticos y lineales, dependiendo ahora de parámetros del material de valores complejos dependientes de

la frecuencia (ver, p. ej., Domínguez [2]). Por lo tanto, siendo idéntica la formulación en ambos casos, los materiales con amortiguamiento (viscoelásticos) o sin él (elásticos) pueden considerarse, simplemente, asumiendo que las constantes de Lamé son valores reales o complejos, siendo éstos últimos de la forma:

$$\mu(\omega) = \text{Re}[\mu](1 + i2\beta_\mu(\omega)) \quad (2.50a)$$

$$\lambda(\omega) = \text{Re}[\lambda](1 + i2\beta_\lambda(\omega)) \quad (2.50b)$$

donde β_μ y β_λ tienen generalmente el mismo valor β . Como λ y μ son magnitudes complejas en materiales viscoelásticos, c_s , c_p y los números de onda k tendrán, también, componente imaginaria. En consecuencia, de acuerdo a la ecuación (2.10), el movimiento de la onda se multiplicará por una función exponencial decreciente, proveniente de la parte imaginaria de k , de manera que, al aumentar la distancia en la dirección de propagación, la amplitud del movimiento decrece, estando este fenómeno producido por el amortiguamiento del material.

2.6.3. Modelo histerético viscoelástico lineal

Esta manera de modelar materiales con amortiguamiento se corresponde con el modelo tridimensional de Kelvin-Voigt, cuya representación unidimensional consiste en un resorte \mathcal{R} y un amortiguador \mathcal{C} lineales conectados en paralelo, de manera que:

$$\sigma = \mathcal{R}\varepsilon + \mathcal{C}\dot{\varepsilon} = (\mathcal{R} + i\omega\mathcal{C})\varepsilon = \mathcal{R}(1 + i2\beta(\omega))\varepsilon \quad (2.51)$$

Entonces, si se asume que $\beta(\omega)$ es directamente proporcional a ω , el amortiguamiento del material, que se incrementa linealmente con la frecuencia, sería de tipo *viscoso*. Por el contrario, el amortiguamiento *histerético* puede modelarse considerando un coeficiente de amortiguamiento β independiente de la frecuencia.

Este último modelo (el modelo de amortiguamiento histerético viscoelástico lineal), donde las constantes de Lamé son del tipo:

$$\mu = \text{Re}[\mu](1 + i2\beta) \quad (2.52a)$$

$$\lambda = \text{Re}[\lambda](1 + i2\beta) \quad (2.52b)$$

se considera que es el que mejor representa el comportamiento dinámico de los materiales incluidos en los análisis posteriores y, en consecuencia, es el modelo que ha sido implementado en los códigos empleados en el presente trabajo.

Capítulo 3

Modelo BEM-FEM para el análisis dinámico de cimentaciones y estructuras pilotadas

3.1. Introducción

A la hora de plantear el método directo de los elementos de contorno aplicado al problema elastodinámico en el dominio de la frecuencia, la ecuación integral en el contorno se obtiene, generalmente, a partir del teorema de reciprocidad en la elastodinámica, teniendo en cuenta las fuerzas por unidad de volumen. Sin embargo, antes del proceso de discretización que permite plantear el sistema lineal de ecuaciones del método de los elementos de contorno se asume, en la mayor parte de las aplicaciones, que dichas fuerzas por unidad de volumen son nulas en todo el dominio, lo que permite cancelar el último término de la ecuación integral, tal y como se mostró en el capítulo anterior.

Por contra, el enfoque utilizado en este trabajo, similar al presentado por Matos Filho et al [29] en un modelo estático previo, incluye este término al considerar que las tensiones que aparecen en la interfase pilote-suelo pueden entenderse como fuerzas de volumen que actúan en el interior del dominio. Por otro lado, la rigidez aportada por los pilotes es tenida en cuenta a través de elementos finitos longitudinales que relacionan los desplazamientos de distintos puntos internos del suelo alineados a lo largo del eje del pilote. De este modo, no hay necesidad de discretizar la interfase pilote-suelo utilizando elementos de contorno, con el consiguiente ahorro en grados de libertad. Así, no se considera un vaciado en el suelo, que se modela como un medio continuo.

La sección 3.2 presenta la ecuación integral de contorno para el suelo, donde las fuerzas y las tensiones que aparecen en la interfase pilote-suelo son consideradas como líneas de carga y fuerzas internas que aparecen en el interior del dominio. A continuación, la sección 3.3 expone la formulación de elementos finitos utilizada para modelar los pilotes, con la que es posible realizar el acoplamiento entre los elementos finitos y los elementos de contorno, tal y como se hace en la sección 3.4. Posteriormente, la agrupación de pilotes por medio de encepados rígidos se presenta en la sección 3.5 y, a partir de ahí, la sección 3.6 aborda el modo en que se introducen en el modelo estructuras cimentadas sobre los grupos de pilotes formulados en los apartados anteriores. La exposición del modelo numérico de elementos de contorno y elementos finitos termina en la sección 3.7, donde se aborda el proceso de ensamblaje del sistema de ecuaciones final. Por último, en la sección 3.8 se explican algunos aspectos numéricos sobre la evaluación de las integrales relacionadas con las líneas de carga. Parte del material presentado en este capítulo ha sido publicado en algunos trabajos realizados por los tutores del proyecto [6, 30]

3.2. Ecuaciones de elementos de contorno para el suelo

El terreno se modela a través del método de los elementos de contorno como una región lineal, homogénea, isótropa, viscoelástica y no acotada, con un módulo de elasticidad transversal complejo μ del tipo $\mu = Re[\mu](1 + 2i\beta)$, donde β es el coeficiente de amortiguamiento. La ecuación integral en el contorno para un estado elastodinámico definido en un dominio Ω con un contorno Γ puede ser escrito de forma general y condensada como:

$$\mathbf{c}'\mathbf{u}' + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*\mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^*\mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^*\mathbf{X} d\Omega \quad (3.1)$$

donde \mathbf{c}' es el tensor del término libre en el punto de colocación \mathbf{x}' , \mathbf{X} son las fuerzas de volumen en el dominio Ω , \mathbf{u} y \mathbf{p} son los vectores de desplazamientos y tensiones, y \mathbf{u}^* y \mathbf{p}^* son los tensores de la solución fundamental elastodinámica, que representan la respuesta de una región no acotada a una carga armónica unitaria concentrada en un punto \mathbf{x} y con una variación temporal del tipo $e^{i\omega t}$

En gran número de aplicaciones se considera que las fuerzas de volumen \mathbf{X} son nulas. De aquí en adelante, por contra, se considerará que la interacción pilote-suelo se produce, desde el punto de vista de la ecuación integral, a través de fuerzas internas puntuales situadas en la punta de los pilotes y de líneas de carga repartidas a lo largo del eje de los pilotes. Se considera, por tanto, que la continuidad del suelo no se ve alterada por la presencia de los pilotes. Las líneas de carga dentro

del suelo, las tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo, actuando sobre el pilote y en el interior del suelo ($\mathbf{q}^{p_j} = -\mathbf{q}^{s_j}$) y las fuerzas internas puntuales F_{p_j} en la punta de los pilotes, están representadas en la figura 3.1, donde se muestra un esquema del modelo.

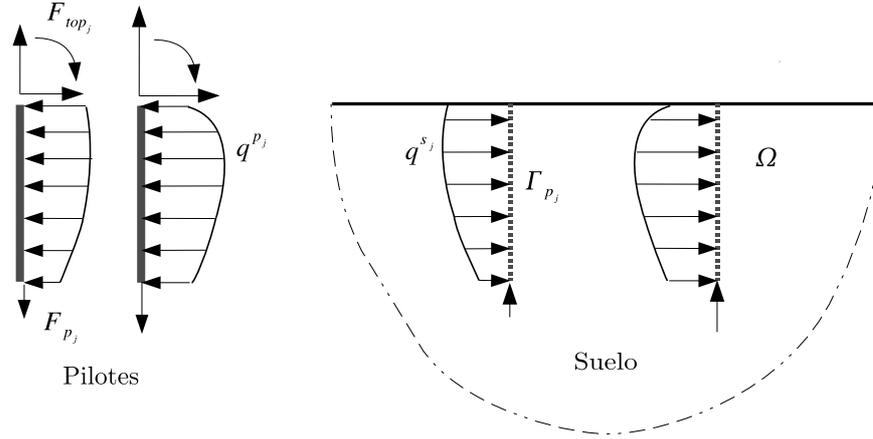


Figura 3.1: Representación de las líneas de carga

De acuerdo a las hipótesis enumeradas anteriormente, la ecuación (3.1) puede ser escrita como:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{u}^t + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_p} \left[\int_{\Gamma_{p_j}} \mathbf{u}^* \mathbf{q}^{s_j} d\Gamma_{p_j} - \delta_j \Upsilon_k^j F_{p_j} \right] \quad (3.2)$$

donde Γ_{p_j} es la interfase pilote-suelo a lo largo de la línea de carga j en el interior del dominio Ω , n_p es el número total de pilotes en el dominio Ω , δ_j toma valor unitario si la línea de carga j contiene a la punta de un pilote flotante, tomando el valor cero en caso contrario, y Υ_k^j es un vector de tres componentes que representa la contribución de la fuerza axial F_{p_j} en la punta de la línea de carga j -ésima.

Los contornos Γ son discretizados por medio de elementos cuadráticos triangulares o cuadriláteros con seis o nueve nodos, respectivamente. Cuando los contornos han sido discretizados, la ecuación (3.2) puede escribirse para cada región Ω en todos los nodos sobre Γ con el fin de obtener una ecuación matricial del tipo:

$$\mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{sp_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{sj} F_{p_j} = 0 \quad (3.3)$$

donde \mathbf{u}^s y \mathbf{p}^s son los vectores de desplazamientos y tensiones nodales de los elementos de contorno, \mathbf{H}^{ss} y \mathbf{G}^{ss} son las matrices de coeficientes obtenidas de la

integración numérica sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental por las funciones de forma correspondientes y \mathbf{G}^{sp_j} es la matriz de coeficientes obtenida de la integración numérica sobre la línea de carga j del producto de la solución fundamental por las funciones de interpolación (3.12), cuando la carga unitaria está aplicada sobre Γ .

Por otro lado, la ecuación (3.2) se aplica también en los puntos internos que pertenecen a la línea de carga Γ_{p_i} , lo que lleva a la siguiente expresión:

$$\mathbf{c} \mathbf{u}^{p_i} + \mathbf{H}^{p_i s} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{p_i s} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{p_i p_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{p_i j} F_{p_j} = 0 \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{H}^{p_i s}$ y $\mathbf{G}^{p_i s}$ son matrices de coeficientes obtenidas a través de la integración numérica sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental por las funciones de forma correspondientes y $\mathbf{G}^{p_i p_j}$ es la matriz de coeficientes obtenida a través de la integración numérica sobre la línea de carga j del producto de la solución fundamental por las funciones de interpolación (3.12), cuando la carga unitaria está aplicada sobre la línea de carga Γ_{p_i} . Aquí, \mathbf{u}^{p_i} es el vector de desplazamientos nodales de la línea de carga i , el cual es multiplicado por el vector \mathbf{c} , que toma el valor 1/2 en posiciones correspondientes a nodos del pilote localizados sobre un contorno suave (como en el caso de las cabezas de los pilotes) o toma un valor unitario en los puntos internos. Debe tenerse en cuenta que la posición del nodo que define la cabeza del pilote puede coincidir con la posición de algún nodo de la superficie. En este caso, existirán dos nodos con idénticas coordenadas espaciales. Entonces, dos de las ecuaciones del sistema, la escrita para el nodo de la superficie y la escrita para el nodo de la línea de carga, serán equivalentes, pero el término libre ocupará diferentes posiciones en la matriz de coeficientes, lo que evitará que se tenga un sistema de ecuaciones singular.

Por otra parte, dado que para pilotes flotantes se considera la existencia de una fuerza axial actuando en la punta, es necesario escribir una ecuación extra. Para ello, la carga puntual debe ser aplicada en la dirección x_3 en algún punto no nodal. Dada su cercanía a la punta del pilote, el punto idóneo es el de coordenada elemental adimensional $\xi = -1/2$ del elemento inferior (véase la sección 3.3.2). De este modo, la ecuación extra es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left(3u_3^{b_k} + 6u_3^{b_l} - u_3^{b_m} \right) + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{p}}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{p} \, d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_p} \left[\int_{\Gamma_{p_j}} \hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{q}^{s_j} \, d\Gamma_{p_j} - \delta_j (\Upsilon_b^j)_3 F_{p_j} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $u_3^{b_k}, u_3^{b_l}$ y $u_3^{b_m}$ son los desplazamientos verticales de los nodos k, l y m del elemento inferior, $\hat{\mathbf{p}}^* = \{p_{31}^*, p_{32}^*, p_{33}^*\}$ y $\hat{\mathbf{u}}^* = \{u_{31}^*, u_{32}^*, u_{33}^*\}$. En forma matricial, la ecuación (3.5) puede escribirse como:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{u}_b^{p_i} + \mathbf{H}_e^{p_i s} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}_e^{p_i s} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}_e^{p_i p_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon_{b_3}^{p_i j} F_{p_j} = 0 \quad (3.6)$$

donde $\mathbf{u}_b^{p_i}$ es el vector de desplazamientos nodales en los nodos del elemento inferior de la línea de carga i (que corresponde al extremo inferior de un pilote flotante), donde la carga unitaria está aplicada, $\mathbf{H}_e^{p_i s}$ y $\mathbf{G}_e^{p_i s}$ son vectores obtenidos por integración numérica sobre Γ del producto de la solución fundamental elastodinámica por las funciones de forma de los elementos de contorno y $\mathbf{G}_e^{p_i p_j}$ es el vector obtenido de la integración sobre Γ_{p_j} del producto de la solución fundamental elastodinámica por las funciones de forma definidas en (3.12), cuando la carga unitaria está aplicada en el punto extra de la línea de carga i . Finalmente, $\mathbf{D}^T = 1/8\{0, 0, 3, 0, 0, 6, 0, 0, -1\}$.

3.3. Ecuaciones de elementos finitos para la cimentación pilotada

3.3.1. Ecuación de movimiento

El comportamiento de un pilote sometido a cargas dinámicas puede ser descrito a través de la siguiente ecuación diferencial:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.7)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son, respectivamente, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del pilote, $\mathbf{u}(t)$ es el vector de desplazamientos nodales y $\mathbf{f}(t)$ es el vector de fuerzas nodales sobre el pilote.

Considérese ahora que el pilote está sujeto a cargas armónicas, en cuyo caso los vectores de desplazamientos y fuerzas nodales pueden ser expresados como:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^p e^{i\omega t}; \quad \mathbf{f}(t) = \mathbf{F} e^{i\omega t} \quad (3.8)$$

donde \mathbf{u}^p es el vector que contiene las amplitudes de las traslaciones y rotaciones nodales, \mathbf{F} es el vector que contiene las amplitudes de las fuerzas y momentos nodales, ω es la frecuencia angular de la excitación, e $i = \sqrt{-1}$. De este modo, y considerando un pilote con amortiguamiento interno nulo, la ecuación (3.7) puede expresarse ahora como

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}^p = \mathbf{F} \quad (3.9)$$

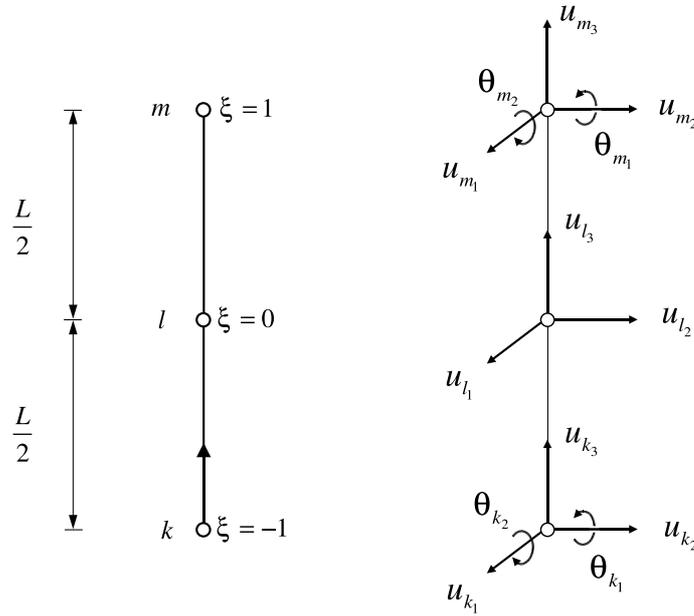


Figura 3.2: Definición del elemento finito

3.3.2. Definición del elemento viga

Los pilotes son modelados, haciendo uso del método de los elementos finitos, como elementos verticales de acuerdo a la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, siendo discretizados utilizando elementos de tres nodos (como se muestra en la figura 3.2) que han sido definidos de manera que sea posible aproximar la deformada del pilote con un número reducido de elementos. Se definen 13 grados de libertad sobre dicho elemento: un desplazamiento vertical y dos desplazamientos horizontales en cada nodo y, además, dos rotaciones θ en cada uno de los nodos extremos, uno alrededor del eje x_1 y otro alrededor del eje x_2 .

Los desplazamientos laterales u_1 y u_2 a lo largo del elemento son aproximados a través de un conjunto de funciones de forma de cuarto grado, mientras que los desplazamientos verticales u_3 son aproximados por funciones de segundo grado. De este modo, los desplazamientos se aproximan del siguiente modo:

$$u_i = \varphi_1 u_{k_i} + \varphi_2 \theta_{k_i} + \varphi_3 u_{l_i} + \varphi_4 u_{m_i} + \varphi_5 \theta_{m_i}; \quad i = 1, 2 \quad (3.10a)$$

$$u_3 = \phi_1 u_{k_3} + \phi_2 u_{l_3} + \phi_3 u_{m_3} \quad (3.10b)$$

donde

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \xi\left(-\frac{3}{4} + \xi + \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3\right) \\
\varphi_2 &= \frac{1}{4}\xi(-1 + \xi + \xi^2 - \xi^3) \\
\varphi_3 &= 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \\
\varphi_4 &= \xi\left(\frac{3}{4} + \xi - \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3\right) \\
\varphi_5 &= \frac{1}{4}\xi(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

y

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\
\phi_2 &= 1 - \xi^2 \\
\phi_3 &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

siendo ξ la coordenada adimensional elemental que varía desde $\xi = -1$ hasta $\xi = +1$.

Las submatrices de rigidez que definen el comportamiento lateral y axial del elemento (indicadas por los superíndices l y a respectivamente), pueden obtenerse haciendo uso de las funciones de forma arriba indicadas y del principio de los desplazamientos virtuales como:

$$k_{ij}^l = \int_L \varphi_i'' EI \varphi_j'' dx_3; \quad i, j = 1, \dots, 5 \tag{3.13}$$

y

$$k_{ij}^a = \int_L \phi_i' EA \phi_j' dx_3; \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.14}$$

donde las primas indican derivada respecto de la coordenada x_3 . De este modo, las submatrices de rigidez son:

$$\mathbf{K}^l = \frac{EI}{5L} \begin{bmatrix} \frac{316}{L^2} & \frac{94}{L} & \frac{-512}{L^2} & \frac{196}{L^2} & \frac{-34}{L} \\ \frac{94}{L} & 36 & \frac{-128}{L} & \frac{34}{L} & -6 \\ \frac{512}{L^2} & \frac{-128}{L} & \frac{1024}{L^2} & \frac{-512}{L^2} & \frac{128}{L} \\ \frac{196}{L^2} & \frac{34}{L} & \frac{-512}{L^2} & \frac{316}{L^2} & \frac{-94}{L} \\ \frac{-34}{L} & -6 & \frac{-128}{L} & \frac{-94}{L} & 36 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}^a = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

donde E es el módulo de Young del pilote, A e I son, respectivamente, el área y el momento de inercia de la sección del pilote, y L es la longitud del elemento. Además, se ha considerado que los momentos de inercia respecto a ambos ejes principales de inercia son iguales.

De manera similar, los coeficientes de influencia que constituyen la matriz de masa de un elemento, y que representan las fuerzas de inercia que se oponen a la aceleración experimentada por un cierto grado de libertad, pueden ser evaluadas de manera similar como:

$$m_{ij}^l = \int_L \varphi_i \bar{m} \varphi_j dx_3; \quad m_{ij}^a = \int_L \phi_i \bar{m} \phi_j dx_3 \quad (3.16)$$

De este modo, y considerando un viga con una masa \bar{m} uniformemente distribuida, las matrices de masa consistente que rigen los comportamientos lateral y axial son, respectivamente:

$$\mathbf{M}^l = L \bar{m} \begin{bmatrix} \frac{13}{63} & \frac{L}{63} & \frac{4}{63} & \frac{-23}{630} & \frac{L}{180} \\ \frac{L}{63} & \frac{L^2}{630} & \frac{2L}{315} & \frac{-L}{180} & \frac{L^2}{1260} \\ \frac{4}{63} & \frac{2L}{315} & \frac{128}{315} & \frac{4}{63} & \frac{-2L}{315} \\ \frac{-23}{630} & \frac{-L}{180} & \frac{4}{63} & \frac{13}{63} & \frac{-L}{63} \\ \frac{L}{180} & \frac{L^2}{1260} & \frac{-2L}{315} & \frac{-L}{63} & \frac{L^2}{630} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}^a = \frac{L \bar{m}}{15} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.3.3. Fuerzas sobre el pilote

Dentro de las fuerzas externas actuando sobre el pilote, se considera la existencia de fuerzas y momentos puntuales en la cabeza del pilote, fuerzas distribuidas a lo largo del fuste debidas a la interacción pilote-suelo y una fuerza axial sobre la punta del pilote. De este modo, el vector de fuerzas nodales \mathbf{F} puede ser descompuesto como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{F}^{eq} = \mathbf{F}_{top} + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}^{eq} \quad (3.18)$$

donde \mathbf{F}^{ext} incluye las fuerzas en la cabeza (\mathbf{F}_{top}) y la fuerza axial en la punta del pilote (\mathbf{F}_p) y \mathbf{F}^{eq} es el vector de fuerzas nodales equivalente debido a la interacción pilote-suelo, que puede ser calculado como $\mathbf{F}^{eq} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}^p$, siendo \mathbf{Q} la matriz que transforma las tensiones en fuerzas nodales equivalentes.

Las fuerzas externas que se definen sobre un elemento genérico están esquematizadas en la figura 3.3. Las tensiones \mathbf{q}^p a lo largo de la interfase pilote-suelo se aproximan como:

$$q_i = \phi_1 q_{k_i} + \phi_2 q_{l_i} + \phi_3 q_{m_i}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.19)$$

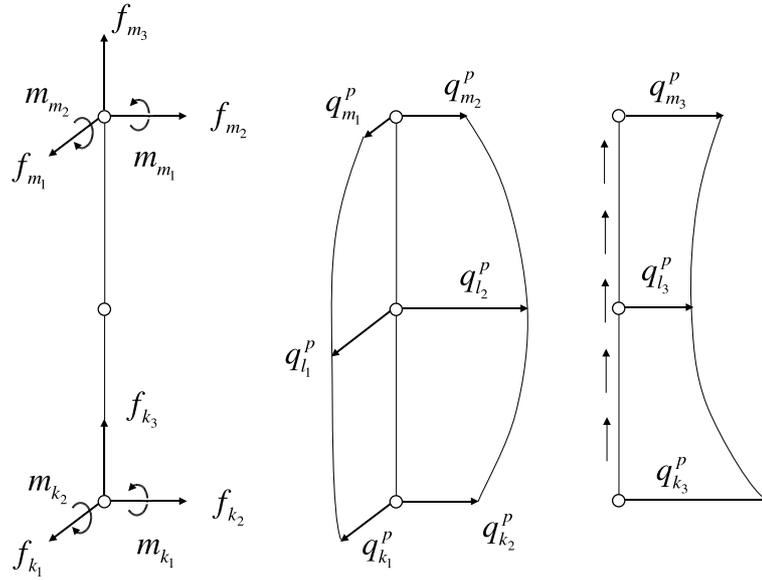


Figura 3.3: Fuerzas puntuales externas (izquierda) y tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo, definidas sobre un elemento genérico

utilizando el conjunto de funciones de forma definidos por la ecuación (3.12). La distribución de tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo es continua entre elementos.

De nuevo, los coeficientes de la matriz \mathbf{Q} para la obtención de las fuerzas laterales pueden ser obtenidos utilizando el principio de los desplazamiento virtuales:

$$q_{ij}^l = \int_L \varphi_i \phi_j dx; \quad i = 1, \dots, 5; \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.20)$$

mientras que los coeficientes de la matriz correspondiente a las fuerzas axiales se obtienen haciendo:

$$q_{ij}^a = \int_L \phi_i \phi_j dx; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

lo cual permite obtener las siguientes matrices:

$$\mathbf{Q}^l = \begin{bmatrix} \frac{23L}{140} & \frac{11L}{105} & \frac{-L}{28} \\ \frac{L^2}{84} & \frac{L^2}{105} & \frac{-L^2}{210} \\ \frac{4L}{105} & \frac{16L}{35} & \frac{4L}{105} \\ \frac{-L}{28} & \frac{11L}{105} & \frac{23L}{140} \\ \frac{L^2}{210} & \frac{-L^2}{105} & \frac{-L^2}{84} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}^a = \frac{L}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

3.3.4. Sistema de ecuaciones para el pilote simple

Una vez que todas las matrices elementales han sido obtenidas para el pilote completo, es posible escribir, para cada pilote, la siguiente expresión

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}^p = \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{Q} \mathbf{q}^p \quad (3.23)$$

donde $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$. Dado que cada pilote es discretizado utilizando tantos elementos como sea necesario para poder seguir de forma precisa su deformada, las matrices $\bar{\mathbf{K}}$ y \mathbf{Q} deben ser entendidas como matrices globales, obtenidas a partir de las matrices elementales siguiendo los procedimientos usuales del método de los elementos finitos.

Nótese que, dado que se asume que la continuidad del suelo no se ve alterada por la presencia de los pilotes, el valor de la masa distribuida asignado a cada pilote debe ser modificado según la expresión $\bar{m} = A(\rho_p - \rho_s)$, con el objetivo de no sobrestimar la masa total del sistema, siendo ρ_p y ρ_s , respectivamente, las densidades del pilote y del suelo. Consideraciones de similar naturaleza fueron adoptadas en [31–33].

3.4. Acoplamiento BEM-FEM

El siguiente paso es la construcción de un sistema de ecuaciones global a partir de las expresiones deducidas en las secciones anteriores. El acoplamiento se realiza a través de las tensiones $\mathbf{q}^{sj} = -\mathbf{q}^{pj}$ a lo largo de la interfase pilote-suelo y de los desplazamientos \mathbf{u}^{pj} a lo largo del pilote j .

La ecuación (3.23), escrita para el pilote j , puede expresarse ahora como:

$$\bar{\mathbf{K}}^{pj} \mathbf{u}^{pj} - \mathbf{F}_{pj} + \mathbf{Q} \mathbf{q}^{sj} = \mathbf{F}_{top}^j \quad (3.24)$$

Imponiendo condiciones de compatibilidad y equilibrio soldados a lo largo de las interfases pilote-suelo, y tomando como criterio de signos que las tensiones \mathbf{q}^s

son positivas, las ecuaciones (3.3), (3.4), (3.6) y (3.24) pueden ser reordenadas en un único sistema de ecuaciones que representa al sistema suelo-cimentación pilotada. Para un semiespacio uniforme, el sistema acoplado será de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{ss} & -\mathbf{G}^{sp} & \boldsymbol{\Upsilon}^s & \emptyset \\ \mathbf{H}^{ps} & -\mathbf{G}^{pp} & \boldsymbol{\Upsilon}^p & \mathbf{C}' \\ \mathbf{H}_e^{ps} & -\mathbf{G}_e^{pp} & \boldsymbol{\Upsilon}_{b_3}^p & \mathbf{D}' \\ \emptyset & \mathbf{Q} & -\mathbf{I}' & \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{q}^s \\ \mathbf{F}_p \\ \mathbf{u}^p \end{bmatrix} = \mathcal{B} \quad (3.25)$$

donde \mathbf{H}^{ss} es una matriz de dimensiones $3N \times 3N$ obtenida mediante la integración, sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental armónica en tensiones por las funciones de forma correspondientes, cuando la carga es aplicada sobre los contornos, N es el número de nodos en el contorno, \mathbf{D}' es una matriz constituida por los distintos vectores \mathbf{D} , \mathbf{C}' es una matriz que contiene los términos libres correspondientes a la colocación sobre los nodos del pilote e \mathbf{I}' es una matriz nula excepto en los términos correspondientes a las incógnitas F_{p_j} , donde se coloca un término de valor unidad. El resto de las submatrices son:

$$\mathbf{G}^{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{p_1 p_1} & \mathbf{G}^{p_1 p_2} & \dots & \mathbf{G}^{p_1 p_n} \\ \mathbf{G}^{p_2 p_1} & \mathbf{G}^{p_2 p_2} & \dots & \mathbf{G}^{p_2 p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}^{p_n p_1} & \mathbf{G}^{p_n p_2} & \dots & \mathbf{G}^{p_n p_n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_e^{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_e^{p_1 p_1} & \mathbf{G}_e^{p_1 p_2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p_1 p_n} \\ \mathbf{G}_e^{p_2 p_1} & \mathbf{G}_e^{p_2 p_2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p_2 p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_e^{p_n p_1} & \mathbf{G}_e^{p_n p_2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p_n p_n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Upsilon}^p = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Upsilon}^{p_1 1} & \boldsymbol{\Upsilon}^{p_1 2} & \dots & \boldsymbol{\Upsilon}^{p_1 n} \\ \boldsymbol{\Upsilon}^{p_2 1} & \boldsymbol{\Upsilon}^{p_2 2} & \dots & \boldsymbol{\Upsilon}^{p_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Upsilon}^{p_n 1} & \boldsymbol{\Upsilon}^{p_n 2} & \dots & \boldsymbol{\Upsilon}^{p_n n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{b_3}^p &= \begin{bmatrix} \Upsilon_{b_3}^{p_1 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_1 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_1 n} \\ \Upsilon_{b_3}^{p_2 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_2 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Upsilon_{b_3}^{p_n 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_n 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_n n} \end{bmatrix} \\
\mathbf{G}^{sp} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{sp_1} & \mathbf{G}^{sp_2} & \dots & \mathbf{G}^{sp_n} \end{bmatrix} \\
\Upsilon^s &= \begin{bmatrix} \Upsilon^{s1} & \Upsilon^{s2} & \dots & \Upsilon^{sn} \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}^{ps} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{p_1 s} & \mathbf{H}^{p_2 s} & \dots & \mathbf{H}^{p_n s} \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{H}_e^{ps} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_e^{p_1 s} & \mathbf{H}_e^{p_2 s} & \dots & \mathbf{H}_e^{p_n s} \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{p_1} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \mathbf{Q}^{p_2} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & \mathbf{Q}^{p_n} \end{bmatrix} \\
\bar{\mathbf{K}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^{p_1} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \bar{\mathbf{K}}^{p_2} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & \bar{\mathbf{K}}^{p_n} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

\mathcal{B} es el vector del lado derecho, obtenido de aplicar las condiciones de contorno, mientras que el vector de incógnitas es:

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{u}^s, \mathbf{q}^{s_1}, \mathbf{q}^{s_2}, \dots, \mathbf{q}^{s_n}, F_{p_1}, F_{p_2}, \dots, F_{p_n}, \mathbf{u}^{p_1}, \mathbf{u}^{p_2}, \dots, \mathbf{u}^{p_n}\}^T \quad (3.26)$$

3.5. Formulación del encepado rígido

Pilotes diferentes pueden trabajar juntos en un grupo si sus cabezas están vinculadas a través de un encepado. En este trabajo en concreto, se considerará que los pilotes están fijamente conectados a un encepado rígido. Las restricciones cinemáticas entre los distintos pilotes, junto a las ecuaciones de equilibrio del conjunto, se presentan en las siguientes secciones.

3.5.1. Restricciones cinemáticas

La vinculación de los desplazamientos de las cabezas de los pilotes de un grupo es ejecutada definiendo las ecuaciones de movimiento de sólido rígido y, posteriormente, condensando los grados de libertad deseados. Con el objetivo de simplificar la implementación, los grados de libertad definidos sobre las cabezas de algunos pilotes serán los utilizados como referencia para condensar el resto de grados de libertad. Sólo existen cinco grados de libertad en la cabeza de un pilote, mientras que se necesitan seis grados de libertad (tres desplazamientos y tres rotaciones) para representar el comportamiento del encepado rígido, por lo que se utilizarán dos pilotes. Éstos serán denominados como *pilote de referencia* y *pilote periférico*, siendo este último necesario tan solo para la definición de la rotación del encepado alrededor de un eje vertical.

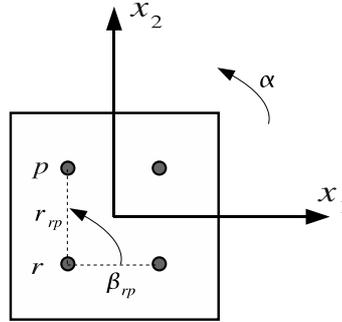


Figura 3.4: Pilote de referencia (r) y pilote periférico (p)

Sean β_{rp} y r_{rp} el ángulo y la distancia existentes entre las cabezas de los pilotes de referencia y periférico (véase la fig. 3.4). Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, se pueden escribir las siguientes relaciones:

$$u_{p1} = u_{r1} - r_{rp}\alpha \sin(\beta_{rp}) \quad (3.27a)$$

$$u_{p2} = u_{r2} + r_{rp}\alpha \cos(\beta_{rp}) \quad (3.27b)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican desplazamientos a lo largo de los ejes x_1 y x_2 , respectivamente. De este modo, el ángulo α de rotación del encepado puede definirse entre ambos pilotes como:

$$si \begin{cases} 45^\circ \leq \beta_{rp} \leq 135^\circ \\ 225^\circ \leq \beta_{rp} \leq 315^\circ \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \alpha = \frac{u_{r1} - u_{p1}}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} \quad (\text{caso a})$$

$$si \begin{cases} 315^\circ \leq \beta_{rp} \leq 45^\circ \\ 135^\circ \leq \beta_{rp} \leq 225^\circ \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \alpha = \frac{u_{p2} - u_{r2}}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} \quad (\text{caso b}) \quad (3.28)$$

de tal modo que en el caso a, el grado de libertad auxiliar del pilote periférico es u_{p_1} , mientras que en el caso b, el grado de libertad utilizado es u_{p_2} . Teniendo en cuenta el conjunto de grados de libertad elegidos para representar el comportamiento del encepado rígido, el acoplamiento entre los pilotes de referencia y periférico puede expresarse, para los casos a y b respectivamente, a través de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} u_{p_2} \\ u_{p_3} \\ \theta_{p_1} \\ \theta_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan(\beta_{rp})^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\tan(\beta_{rp})^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp1} & -d_{rp2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_1} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

y

$$\begin{bmatrix} u_{p_1} \\ u_{p_3} \\ \theta_{p_1} \\ \theta_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan(\beta_{rp}) & 0 & 0 & 0 & -\tan(\beta_{rp}) \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp1} & -d_{rp2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_2} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

donde $d_{rp_i} = x_{p_i} - x_{r_i}$, siendo \mathbf{x} el vector de posición del punto de interés. Sean ahora β_{rj} y r_{rj} el ángulo y la distancia existentes entre la cabeza del pilote de referencia y la de cualquier otro pilote j . Las matrices de acoplamiento, para los casos a y b, son, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} u_{j_1} \\ u_{j_2} \\ u_{j_3} \\ \theta_{j_1} \\ \theta_{j_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} \\ \frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rj_1} & -d_{rj_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_1} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

y

$$\begin{bmatrix} u_{j_1} \\ u_{j_2} \\ u_{j_3} \\ \theta_{j_1} \\ \theta_{j_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} \\ 0 & 1 - \frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rj_1} & -d_{rj_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_2} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

donde $d_{rj_i} = x_{j_i} - x_{r_i}$. Tal y como ya se ha comentado con anterioridad, estas matrices son utilizadas para condensar los grados de libertad definidos en las cabezas de los pilotes de un grupo en sólo seis grados de libertad de referencia.

3.5.2. Ecuaciones de equilibrio

Deben imponerse condiciones de equilibrio dinámico sobre el encepado entre las fuerzas externas, las fuerzas de inercia y las reacciones en la cabeza de los pilotes. Sean F_i^e las fuerzas externas aplicadas sobre el centro de gravedad del encepado \mathbf{x}_{cg}^c en dirección i y M_1^e , M_2^e y M_3^e los momentos externos aplicados alrededor de los ejes x_2 , x_1 y x_3 , respectivamente. Las propiedades inerciales del encepado son su masa m^c y sus momentos de inercia I_1 , I_2 e I_3 , definidos alrededor de los ejes x_2 , x_1 y x_3 , respectivamente. Finalmente, la reacciones en la cabeza del pilote j -ésimo son las fuerzas F_{j_i} y los momentos M_{j_1} y M_{j_2} , definidos alrededor de los ejes x_2 y x_1 , respectivamente. Con esta nomenclatura, las ecuaciones de equilibrio dinámico del encepado c pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} F_i^e + \sum_{j=1}^{n_p^c} F_{j_i} &= -\omega^2 m^c u_{cg_i} & i = 1, 2, 3 \\ M_i^e + \sum_{j=1}^{n_p^c} (M_{j_i} - (x_{j_i} - x_{cg_i})F_{j_3} + (x_{j_3} - x_{cg_3})F_{j_i}) &= -\omega^2 I_i \theta_i & i = 1, 2 \\ M_3^e + \sum_{j=1}^{n_p^c} ((x_{j_1} - x_{cg_1})F_{j_2} - (x_{j_2} - x_{cg_2})F_{j_1}) &= -\omega^2 I_3 \alpha & (3.33) \end{aligned}$$

donde n_p^c es el número de pilotes agrupados bajo el encepado c .

3.6. Modelo para las estructuras pilotadas

3.6.1. Introducción

En esta sección se describe la formulación que se ha adoptado para el análisis dinámico de estructuras pilotadas compuestas por uno o más pilares verticales extensibles y uno o más forjados horizontales infinitamente rígidos, tal y como se muestra en la figura 3.5. Los pilotes son modelados como vigas de Euler-Bernoulli sin masa, con deformación axial y lateral y con amortiguamiento de tipo viscoelástico, introducido a través de un módulo de rigidez complejo del tipo $k = Re[k](1 + 2i\zeta)$. Se desprecia la rigidez torsional de los pilares. Se considera, además, que los ejes principales de inercia de los forjados rígidos son paralelos a los ejes de coordenadas, aunque la posición de sus centros de gravedad en el plano horizontal puede variar entre distintas plantas.

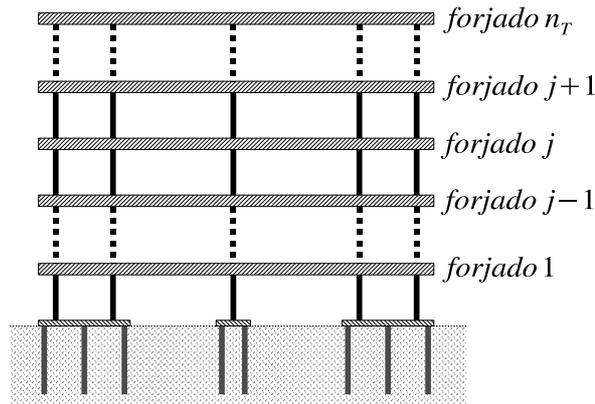


Figura 3.5: Esquema bidimensional del modelo de estructuras pilotadas

Con el objetivo de escribir las ecuaciones de movimiento directamente en función de los desplazamientos y rotaciones de los forjados (parámetros de mayor interés en este trabajo), se condensan todos los grados de libertad correspondientes a los extremos de los pilares al centro de gravedad del forjado o del encepado situado a su mismo nivel. Dado que las matrices elementales de rigidez de los pilares serán expresadas inicialmente respecto a los extremos de los pilares, es necesario escribir primero las relaciones cinemáticas existentes entre tales extremos y los centros de gravedad de los forjados o los encepados. Posteriormente, se define una matriz de rigidez elemental para la entreplanta entre dos niveles consecutivos.

3.6.2. Relaciones cinemáticas

Sea $\mathbf{X}^j = \{u_{cg1^j}, u_{cg2^j}, u_{cg3^j}, \alpha_{cg^j}, \Theta_{cg1^j}, \Theta_{cg2^j}\}^T$ el vector que define los desplazamientos y rotaciones del centro de gravedad del forjado o encepado j , donde α_{cg^j} , Θ_{cg1^j} y Θ_{cg2^j} son las rotaciones en sentido antihorario alrededor de los ejes x_3 , x_2 y x_1 , respectivamente. Sea $\mathbf{Y}_i^j = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, \theta_{i1}, \theta_{i2}\}_j^T$ el vector que define los desplazamientos y las rotaciones en un extremo del pilar i vinculado al forjado o encepado j . La compatibilidad entre \mathbf{X}^j y \mathbf{Y}_i^j puede ser expresada, en forma matricial, como:

$$\begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \\ \theta_{i1} \\ \theta_{i2} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (x_{cg2^j} - x_{i2}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (x_{i1} - x_{cg1^j}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (x_{i1} - x_{cg1^j}) & (x_{i2} - x_{cg2^j}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{cg1^j} \\ u_{cg2^j} \\ u_{cg3^j} \\ \alpha_{cg^j} \\ \Theta_{cg1^j} \\ \Theta_{cg2^j} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Sobre el acoplamiento entre pilares y encepado

Sin embargo, tal y como se vio en la sección 3.5, los grados de libertad correspondientes al centro de gravedad del encepado no están presentes de modo explícito en el sistema de ecuaciones final, estando, por contra, definidos en función de los correspondientes a dos de los pilotes del grupo. Por esta razón, las columnas de la matriz de rigidez elemental de la entreplanta, correspondientes a la vinculación de los pilares con el encepado, deberán ser escritas en función de dichos grados de libertad auxiliares.

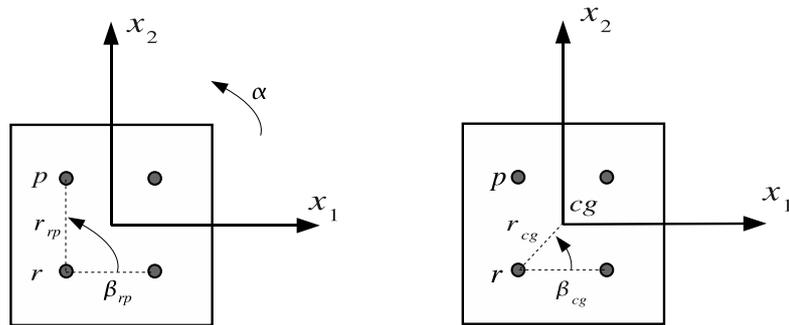


Figura 3.6: Grados de libertad para el acoplamiento entre pilares y encepado

Para ello, sean β_{rp} y r_{rp} el ángulo y la distancia entre las cabezas de los pilotes

de referencia y periférico y β_{cg} y r_{cg} el ángulo y la distancia entre el pilote de referencia y el centro de gravedad del encepado (véase figura 3.6). En concordancia con el conjunto de seis grados de libertad elegido para definir los desplazamientos y rotaciones del encepado, se definen las matrices de acoplamiento entre la cabeza del pilote de referencia y el centro de gravedad del encepado que, para los casos a y b (véase la sección 3.5), son, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} u_{cg1} \\ u_{cg2} \\ u_{cg3} \\ \alpha_{cg} \\ \Theta_{cg1} \\ \Theta_{cg2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_{cg} \sin \beta_{cg}}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{cg} \sin \beta_{cg}}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} \\ \frac{r_{cg} \cos \beta_{cg}}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{cg} \cos \beta_{cg}}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp1} & -d_{rp2} & 0 \\ \frac{1}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ u_{r3} \\ \theta_{r1} \\ \theta_{r2} \\ u_{p1} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

y

$$\begin{bmatrix} u_{cg1} \\ u_{cg2} \\ u_{cg3} \\ \alpha_{cg} \\ \Theta_{cg1} \\ \Theta_{cg2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_{cg} \sin \beta_{cg}}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{cg} \sin \beta_{cg}}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} \\ 0 & 1 - \frac{r_{cg} \cos \beta_{cg}}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{cg} \cos \beta_{cg}}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp1} & -d_{rp2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ u_{r3} \\ \theta_{r1} \\ \theta_{r2} \\ u_{p2} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

donde $d_{rp_i} = x_{p_i} - x_{r_i}$

3.6.3. Matriz de rigidez de entreplanta

La submatriz elemental de rigidez de dimensión 10×10 de un pilar i , modelado como una viga de Euler-Bernoulli, puede ser definida como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^{j-1} \\ \mathbf{f}_i^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{x_1} & 0 & 0 & -b_{x_1} & 0 & -a_{x_1} & 0 & 0 & -b_{x_1} & 0 \\ & a_{x_2} & 0 & 0 & -b_{x_2} & 0 & -a_{x_2} & 0 & 0 & -b_{x_2} \\ & & c & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\ & & & d_{x_1} & 0 & b_{x_1} & 0 & 0 & \frac{d_{x_1}}{2} & 0 \\ & & & & d_{x_2} & 0 & b_{x_2} & 0 & 0 & \frac{d_{x_2}}{2} \\ & & & & & a_{x_1} & 0 & 0 & b_{x_1} & 0 \\ & & & & & & a_{x_2} & 0 & 0 & b_{x_2} \\ & & \text{sim} & & & & & c & 0 & 0 \\ & & & & & & & & d_{x_1} & 0 \\ & & & & & & & & & d_{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_i^{j-1} \\ \mathbf{Y}_i^j \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

donde

$$a_{x_i} = 12 \frac{E I_{x_i}}{L^3}; \quad b_{x_i} = 6 \frac{E I_{x_i}}{L^2}; \quad c = \frac{E A}{L}; \quad d_{x_i} = 4 \frac{E I}{L}$$

siendo, además, $\mathbf{f}_i^j = \{f_{x_1^i}, f_{x_2^i}, f_{x_3^i}, m_{x_1^i}, m_{x_2^i}\}^{jT}$ las reacciones en la conexión entre el pilar y el forjado.

Con el objetivo de construir una matriz elemental equivalente \mathcal{K}^i para la entreplanta que relacione directamente los grados de libertad de los forjados superior e inferior, la submatriz de rigidez correspondiente a cada extremo del pilote i es post-multiplicada por la ecuación (3.34), obteniéndose las submatrices de rigidez expresadas en términos de los grados de libertad asociados a los centros de gravedad de forjados y encepados. Del mismo modo se opera con las filas para definir las fuerzas resultantes respecto a los centros de gravedad de los forjados. Este proceso lleva a la obtención de la siguiente matriz de rigidez elemental del pilar i para la entreplanta situada entre los niveles $j - 1$ y j :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{j-1}^i \\ \mathcal{F}_j^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11(6 \times 6)}^i & \mathcal{K}_{12(6 \times 6)}^i \\ \mathcal{K}_{21(6 \times 6)}^i & \mathcal{K}_{22(6 \times 6)}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{j-1} \\ \mathbf{X}^j \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

donde

$$\mathcal{K}_{11} = \begin{bmatrix} 12\frac{EI_{x1}}{L^3} & 0 & 0 & -12\frac{EI_{x1}}{L^3}x_2^b & -6\frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 \\ 0 & 12\frac{EI_{x2}}{L^3} & 0 & 12\frac{EI_{x2}}{L^3}x_1^b & 0 & -6\frac{EI_{x2}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L}x_1^b & \frac{EA}{L}x_2^b \\ -12\frac{EI_{x1}}{L^3}x_2^b & 12\frac{EI_{x2}}{L^3}x_1^b & 0 & 12\frac{E}{L^3}IX^b & 6\frac{EI_{x1}}{L^2}x_2^b & -6\frac{EI_{x2}}{L^2}x_1^b \\ -6\frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L}x_1^b & 6\frac{EI_{x1}}{L^2}x_2^b & 4\frac{EI_{x1}}{L} + \frac{EA}{L}x_1^b & \frac{EA}{L}x_2^bx_1^b \\ 0 & -6\frac{EI_{x2}}{L^2} & \frac{EA}{L}x_2^b & -6\frac{EI_{x2}}{L^2}x_1^b & \frac{EA}{L}x_2^bx_1^b & 4\frac{EI_{x2}}{L} + \frac{EA}{L}x_2^b \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{12} = \begin{bmatrix} -12\frac{EI_{x1}}{L^3} & 0 & 0 & 12\frac{EI_{x1}}{L^3}x_2^a & -6\frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 \\ 0 & -12\frac{EI_{x2}}{L^3} & 0 & -12\frac{EI_{x2}}{L^3}x_1^a & 0 & -6\frac{EI_{x2}}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L}x_1^a & -\frac{EA}{L}x_2^a \\ 12\frac{EI_{x1}}{L^3}x_2^b & -12\frac{EI_{x2}}{L^3}x_1^b & 0 & -12\frac{E}{L^3}IX^{ab} & 6\frac{EI_{x1}}{L^2}x_2^b & -6\frac{EI_{x2}}{L^2}x_1^b \\ 6\frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 & -\frac{EA}{L}x_1^b & -6\frac{EI_{x1}}{L^2}x_2^a & 2\frac{EI_{x1}}{L} + \frac{EA}{L}x_1^ax_1^b & -\frac{EA}{L}x_2^ax_1^b \\ 0 & 6\frac{EI_{x2}}{L^2} & -\frac{EA}{L}x_2^b & 6\frac{EI_{x2}}{L^2}x_1^a & -\frac{EA}{L}x_1^ax_2^b & 2\frac{EI_{x2}}{L} - \frac{EA}{L}x_2^ax_2^b \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{21} = \begin{bmatrix} -12\frac{EI_{x1}}{L^3} & 0 & 0 & 12\frac{EI_{x1}}{L^3}x_2^b & 6\frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 \\ 0 & -12\frac{EI_{x2}}{L^3} & 0 & -12\frac{EI_{x2}}{L^3}x_1^b & 0 & 6\frac{EI_{x2}}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L}x_1^b & -\frac{EA}{L}x_2^b \\ 12\frac{EI_{x1}}{L^3}x_2^a & -12\frac{EI_{x2}}{L^3}x_1^a & 0 & -12\frac{E}{L^3}IX^{ab} & -6\frac{EI_{x1}}{L^2}x_2^a & 6\frac{EI_{x2}}{L^2}x_1^a \\ -6\frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 & -\frac{EA}{L}x_1^a & 6\frac{EI_{x1}}{L^2}x_2^b & 2\frac{EI_{x1}}{L} - \frac{EA}{L}x_1^ax_1^b & -\frac{EA}{L}x_2^bx_1^a \\ 0 & -6\frac{EI_{x2}}{L^2} & -\frac{EA}{L}x_2^a & -6\frac{EI_{x2}}{L^2}x_1^b & -\frac{EA}{L}x_1^bx_2^a & 2\frac{EI_{x2}}{L} - \frac{EA}{L}x_2^bx_2^a \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{22} = \begin{bmatrix} 12\frac{EIx_1}{L^3} & 0 & 0 & -12\frac{EIx_1}{L^3}x_2^a & 6\frac{EIx_1}{L^2} & 0 \\ 0 & 12\frac{EIx_2}{L^3} & 0 & 12\frac{EIx_2}{L^3}x_1^a & 0 & 6\frac{EIx_2}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L}x_1^a & \frac{EA}{L}x_2^a \\ -12\frac{EIx_1}{L^3}x_2^a & 12\frac{EIx_2}{L^3}x_1^a & 0 & 12\frac{E}{L^3}IX^a & -6\frac{EIx_1}{L^2}x_2^a & 6\frac{EIx_2}{L^2}x_1^a \\ 6\frac{EIx_1}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L}x_1^a & -6\frac{EIx_1}{L^2}x_2^a & 4\frac{EIx_1}{L} + \frac{EA}{L}x_1^{a2} & \frac{EA}{L}x_2^ax_1^a \\ 0 & 6\frac{EIx_2}{L^2} & \frac{EA}{L}x_2^b & 6\frac{EIx_2}{L^2}x_1^a & \frac{EA}{L}x_2^ax_1^a & 4\frac{EIx_2}{L} + \frac{EA}{L}x_2^{a2} \end{bmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} IX^a &= I_{x_1}x_2^{a2} + I_{x_2}x_1^{a2} \\ IX^{ab} &= I_{x_1}x_2^ax_2^b + I_{x_2}x_1^ax_1^b \\ IX^b &= I_{x_1}x_2^{b2} + I_{x_2}x_1^{b2} \end{aligned}$$

En estas expresiones, $x_k^a = x_{i_k} - x_{cg_k^a}$ y $x_k^b = x_{i_k} - x_{cg_k^b}$ son las coordenadas horizontales relativas del eje del pilar respecto al centro de gravedad del forjado superior o inferior, respectivamente, y $\mathcal{F}_j^T = \{F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}, M_\alpha, M_{x_1}, M_{x_2}\}^J$ corresponde a las reacciones que aparecen en la conexión entre el pilar y el forjado, expresadas también respecto al centro de gravedad correspondiente.

Habiendo definido una matriz de rigidez de la entreplanta con carácter genérico, puede seguirse el procedimiento de ensamblaje usual del método de los elementos finitos para obtener la ecuación de movimiento de la estructura una vez discretizada, quedando de la forma:

$$(\mathcal{K} - \omega^2 \mathcal{M}) \mathcal{X} = \mathcal{F} \quad (3.39)$$

donde \mathcal{K} es la matriz de rigidez global de la estructura, \mathcal{X} es el vector de desplazamientos y rotaciones en los forjados, \mathcal{F} es el vector de fuerzas externas sobre la estructura y \mathcal{M} es la matriz de propiedades inerciales de la estructura, definida para cada forjado.

3.7. Ensamblaje de la matriz global del sistema

La manera en que las ecuaciones (3.23), (3.3), (3.4), (3.6) y (3.39) son reorganizadas en un único sistema de ecuaciones depende de la configuración de

estructuras, cimentaciones y suelos y de las condiciones de contorno. Sin embargo, siempre deben aplicarse las condiciones de equilibrio y de compatibilidad, considerando contacto soldado entre las diferentes interfases del sistema. En la situación más general, existen múltiples estructuras cimentadas sobre diferentes grupos de pilotes que están embebidos en el terreno, estando el sistema sometido a fuerzas externas o a ondas sísmicas. En tal caso, el sistema de ecuaciones es:

$$\mathcal{A} \{ \mathbf{u}^s, \mathbf{p}^s, \mathbf{q}^s, \mathbf{F}_p, \mathbf{u}^p, \mathbf{X}^j, \mathbf{F}_{top}, \mathbf{f}_o \}^T = \mathcal{B} \quad (3.40)$$

donde \mathcal{A} , cuya estructura está esquematizada en la fig. 3.7, es la matriz de coeficientes y \mathcal{B} es el vector del lado derecho, ambos obtenidos después de aplicar las condiciones de contorno y de reordenar las ecuaciones. El vector de incógnitas incluye los desplazamientos \mathbf{u}^s y/o las tensiones \mathbf{p}^s en los nodos correspondientes a los elementos de contorno, las tensiones en la interfase pilote-suelo \mathbf{q}^s , las fuerzas en la punta de los pilotes \mathbf{F}_p , las traslaciones y rotaciones nodales a lo largo del pilote \mathbf{u}^p , los grados de libertad definidos en las superestructuras \mathbf{X}^j , las reacciones en las uniones pilote-encepado \mathbf{F}_{top} y las fuerzas en la base de la estructura \mathbf{f}_o

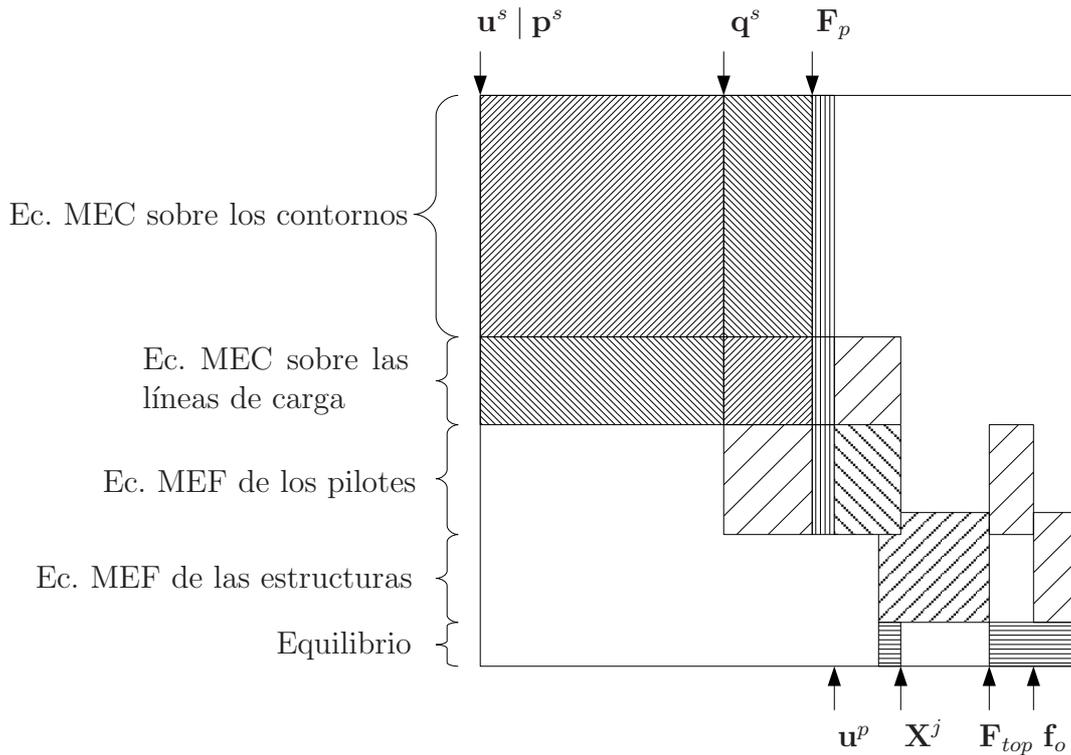


Figura 3.7: Estructura de la matriz de coeficientes \mathcal{A} del sistema

3.8. Evaluación numérica de las integrales definidas sobre las líneas de carga

Siempre que la fuente esté situada fuera de la línea de carga j , las integrales de $\mathbf{u}^* \mathbf{q}^{sj}$ y $\hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{q}^{sj}$, definidas sobre la línea de carga Γ_{pj} y que aparecen en las ecuaciones (3.2) y (3.5), respectivamente, son calculadas como integrales monodimensionales extendidas sobre una línea definida por el eje del pilote correspondiente. Por contra, estas mismas integrales poseen una singularidad cuando la fuente está situada sobre la línea que está siendo integrada. En este caso, y para evitar esta singularidad, las integrales se evalúan sobre un cilindro cuyo radio R_p tiene por valor $\sqrt{A/\pi}$. Considérese entonces que la interfase Γ_p entre el pilote (cualquiera que sea su sección) y el suelo es un cilindro de radio R_p , sobre el que existen unas tensiones σ_{ps} . En este caso, el último sumando de la ecuación (3.1) incluye integrales del tipo:

$$\int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \sigma_{ps} d\Gamma_p = \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \frac{\mathbf{q}^s}{2\pi R_p} d\Gamma_p = \frac{1}{2\pi R_p} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=k,l,m} \left[\int_{\Gamma_{pe}} \mathbf{u}^* \phi_i d\Gamma_p \right] \mathbf{q}_i^s \quad (3.41)$$

donde N_e es el número de elementos en que se ha discretizado la línea de carga, y donde se ha utilizado la ecuación (3.19) para expresar \mathbf{q}^s a lo largo del elemento. Tal y como se vio en el capítulo 2, la solución fundamental elastodinámica utilizada en este trabajo, que da el desplazamiento en el punto \mathbf{x} y en la dirección k cuando la fuente es aplicada en el punto \mathbf{x}^t y en la dirección l , tiene la siguiente expresión:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{4\pi\mu} [\psi \delta_{lk} - \chi r_{,k} r_{,l}]$$

$$\psi = - \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 \left(\frac{1}{z_p^2 r^2} - \frac{1}{z_p r} \right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left(\frac{1}{z_s^2 r^2} - \frac{1}{z_s r} + 1 \right) \frac{e^{z_s r}}{r} \quad (3.42)$$

$$\chi = - \left(\frac{c_s}{c_p} \right)^2 \left(\frac{3}{z_p^2 r^2} - \frac{3}{z_p r} + 1 \right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left(\frac{3}{z_s^2 r^2} - \frac{3}{z_s r} + 1 \right) \frac{e^{z_s r}}{r}$$

donde μ es el módulo de elasticidad transversal, δ_{lk} es la función delta de Kronecker y $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^t|$. Para este caso específico (véase la figura 3.8), las derivadas del vector posición $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^t$ son:

$$r_{,1} = \frac{x_1^r}{r} = \frac{R_p \cos(\gamma)}{r} \quad (3.43a)$$

$$r_{,2} = \frac{x_2^r}{r} = \frac{R_p \sin(\gamma)}{r} \quad (3.43b)$$

$$r_{,3} = \frac{x_3^r}{r} \quad (3.43c)$$

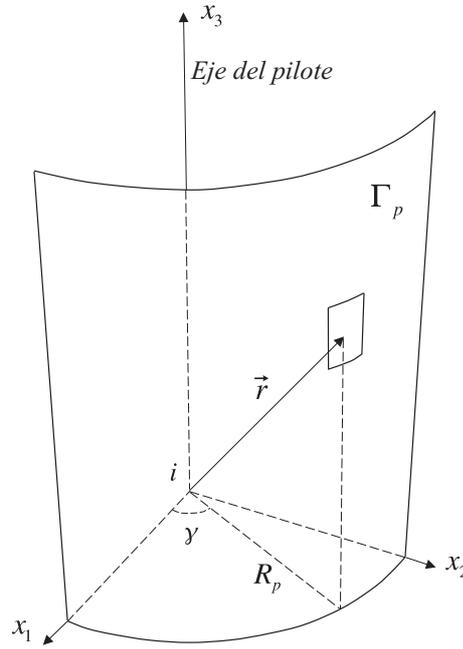


Figura 3.8: Superficie cilíndrica de integración sobre la interfase pilote-suelo cuando el punto de colocación pertenece al pilote

Entonces, las integrales del último término de la ecuación (3.41) pueden ser evaluadas, en coordenadas cilíndricas (véase la figura 3.8), como:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_{pe}} \mathbf{u}^* \phi_i d\Gamma_p &= \int_{x_3^r} \int_{\theta} \frac{1}{4\pi\mu} [\psi\delta_{lk} - \chi r_{,k}r_{,l}] \phi_i R_p d\theta dx_3 \\
 &= \frac{R_p}{4\pi\mu} \int_{x_3^r} \left[2\pi\psi\delta_{lk} - \chi \int_0^{2\pi} r_{,k}r_{,l} d\theta \right] \phi_i dx_3 \quad (3.44) \\
 &= \frac{R_p}{4\mu} \int_{x_3^r} \left[2\psi\delta_{lk} - \frac{1}{r^2} \chi \mathbf{R}_{lk} \right] \phi_i dx_3
 \end{aligned}$$

donde $x_3^r = x_3 - x_3^k$ y

$$\mathbf{R}_{lk} = \begin{pmatrix} R_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & R_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_3^r)^2 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Ahora, la integral de la ecuación (3.41) puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \boldsymbol{\sigma}_{ps} d\Gamma_p = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{L_e}{16\pi\mu} \sum_{i=k,l,m} \left[\int_{-1}^1 \left(2\psi\delta_{lk} - \frac{\chi}{r^2} \mathbf{R}_{lk} \right) \phi_i d\xi \right] \mathbf{q}_i^s \quad (3.46)$$

Puede adoptarse, también, una estrategia de colocación no nodal para computar las integrales sobre Γ_{p_j} desde el mismo pilote. Esto lleva a un procedimiento que permite la reinterpretación de la ecuación anterior. En tal caso, deben elegirse al menos cuatro puntos no nodales, colocados simétricamente alrededor del pilote (tal y como se muestra en la figura 3.9) para evitar romper la simetría del problema. Se obtiene así, por superposición de las cuatro ecuaciones procedentes de esta estrategia de colocación no nodal, una única ecuación, que es dividida entre cuatro para mantener el orden de los coeficientes resultantes. En tal caso, e integrando sobre la línea de carga, el último término de la ecuación (3.1) se convierte en:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \mathbf{q}^s d\Gamma_p &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ c.p.}}^4 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=k,l,m} \frac{1}{4\pi\mu} \left[\int_{x_3^r} (\psi\delta_{lk} - \chi r_{,k} r_{,l}) \phi_i dx_3 \right] \mathbf{q}_i^s \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ c.p.}}^4 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=k,l,m} \frac{1}{4\pi\mu} \left[\int_{x_3^r} \phi_i \left(\psi\delta_{lk} - \frac{\chi}{r^2} \mathbf{R}_{lk}^n \right) dx_3 \right] \mathbf{q}_i^s \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde

$$\mathbf{R}_{lk}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_p^2 & (-1)^n R_p x_3^r \\ 0 & (-1)^n R_p x_3^r & (x_3^r)^2 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{R}_{lk}^n = \begin{pmatrix} R_p^2 & 0 & (-1)^n R_p x_3^r \\ 0 & 0 & 0 \\ (-1)^n R_p x_3^r & 0 & (x_3^r)^2 \end{pmatrix}$$

Tal y como puede apreciarse, este procedimiento lleva a una ecuación completamente equivalente a la ecuación (3.46), con lo que se demuestra que ambas aproximaciones son análogas.

Por otro lado, cuando el punto de colocación 'k' está situado fuera de la línea de carga j , puede afirmarse que:

$$\Upsilon_k^j = \{u_{13}^* \ u_{23}^* \ u_{33}^*\}_k \quad (3.49)$$

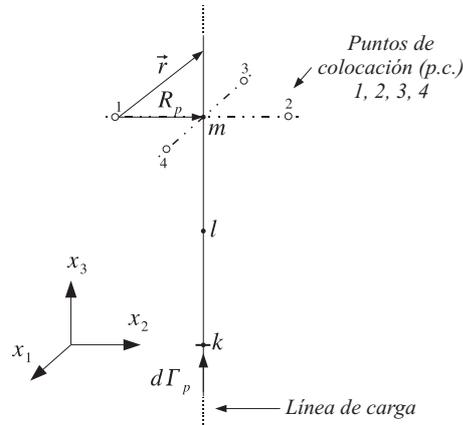


Figura 3.9: Estrategia de colocación no nodal

Sin embargo, cuando el punto de colocación está situado en el nodo inferior de la línea de carga j y éste coincide con el extremo inferior del pilote, $\Upsilon_k^j F_{p_j}$ pasa a contener una singularidad. Para evitar tal singularidad, la fuerza axial en la punta del pilote puede modelarse como una presión uniforme σ_b aplicada sobre una superficie circular con radio $R_p = \sqrt{A/\pi}$. En este trabajo, esta estrategia ha sido utilizada siempre que el punto de colocación está situado a lo largo de la línea de carga j . De este modo, puede escribirse

$$\Upsilon_k^j F_{p_j} = \int_{\Gamma_b} u_{i3}^* \sigma_b d\Gamma_b \quad (3.50)$$

donde Γ_b es la superficie de la punta del pilote y $\sigma_b = F_p/A$. Así, y utilizando coordenadas polares (véase la figura 3.10), la ecuación (3.50) pasa a ser expresada como:

$$\begin{aligned} \Upsilon_k^j &= \frac{1}{4\pi\mu A} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_p} [\psi \delta_{i3} - \chi r_{,i} r_{,3}] a da d\theta = \\ &= \frac{1}{2\mu A} \int_0^{R_p} \delta_{i3} \left[\psi - (x_3^r)^2 \frac{\chi}{r^2} \right] a da \quad (3.51) \end{aligned}$$

donde la integral es regular y puede ser evaluada numéricamente.

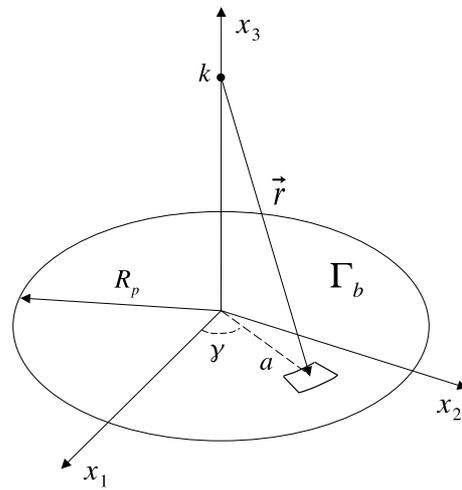


Figura 3.10: Integración sobre la superficie de la punta del pilote

Capítulo 4

Ecuaciones del campo incidente producido por ondas SH, P y SV con ángulo de incidencia genérico

4.1. Introducción

Comentado el modelo acoplado de elementos de contorno y elementos finitos es hora, pues, de profundizar en el objeto del presente trabajo. Para ello, se establecen a continuación las consideraciones y expresiones que permitirán estudiar el comportamiento de un medio sometido a la incidencia de ondas sísmicas tipo SH, P y SV que llegan a la superficie con un ángulo de incidencia totalmente genérico.

El presente capítulo se estructura de modo que en la sección 4.2 se establecen las consideraciones generales respecto a los fenómenos asociados a la propagación de ondas a través del terreno. Una vez planteados los datos de partida, se analizan, en las secciones 4.3, 4.4 y 4.5, las características propias de cada tipo de onda incidente, haciendo especial hincapié en sus particularidades específicas. Definidas las características de las ondas incidentes, éstas se generalizan en la sección 4.6 a ángulos de incidencia totalmente genéricos. Por otra parte, la sección 4.7 indica el modo de incluir el campo incidente en la formulación general del problema explicada hasta ese punto. Para finalizar, la sección 4.8 recoge los aspectos relativos a la implementación del código desarrollado en el existente con anterioridad a la realización al presente trabajo.

4.2. Fundamentos

Considérese un semiespacio con propiedades mecánicas homogéneas, constantes con la profundidad, dadas por su módulo de elasticidad E y su coeficiente de

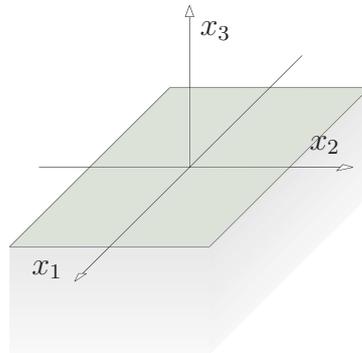


Figura 4.1: Definición de ejes en el semiespacio

Poisson ν . Asúmase, además, que por el medio se propaga un tren de ondas cuya dirección de propagación se encuentra contenida en un plano perpendicular a la superficie del semiespacio (plano $x_2 x_3$ en la figura 4.1), formando un ángulo θ_0 con el eje x_2 , medido en sentido trigonométrico. Ese tren de ondas puede suponerse formado por ondas volumétricas de tipo P o S, pudiendo estar estas últimas polarizadas horizontal o verticalmente (tratándose, respectivamente, de ondas SH y SV).

La propagación del tren de ondas a través del medio produce en éste una perturbación en forma de campo de desplazamientos que, como se verá, es función del ángulo θ_0 de incidencia y de las propiedades mecánicas del terreno. A fin de obtener las expresiones analíticas del campo de desplazamientos provocado por el tren incidente (denominado en lo sucesivo campo incidente), se establecerá a continuación el conjunto de parámetros que se precisarán para la total definición posterior del problema. Para ello, en la siguiente figura se presentan las características geométricas que intervendrán con posterioridad.

En la figura 4.2 se puede observar el ángulo θ_0 de la onda incidente y los ángulos θ_1 y θ_2 de las ondas reflejadas. Esto se debe a que, a la llegada del frente de ondas a la superficie libre del semiespacio, se produce un proceso de reflexión que provoca la generación de dos ondas adicionales en el caso más genérico (ver, por ejemplo, Domínguez [2]). Como más tarde se verá, la cantidad de ondas reflejadas depende del tipo de onda incidente, siendo de dos cuando la onda que incide es de tipo P o SV y de una única cuando es una SH (ver, también, [2]).

Se pueden definir, en función de los ángulos presentados en el párrafo anterior, los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} mencionados en el capítulo 2 (figura 2.1) que contengan, respectivamente, los cosenos directores de las direcciones de propagación y de los desplazamientos de las partículas que cada una de las ondas que intervienen en el problema provocan, sabiendo que ambas direcciones son ortogonales en ondas S y coincidentes en ondas P.

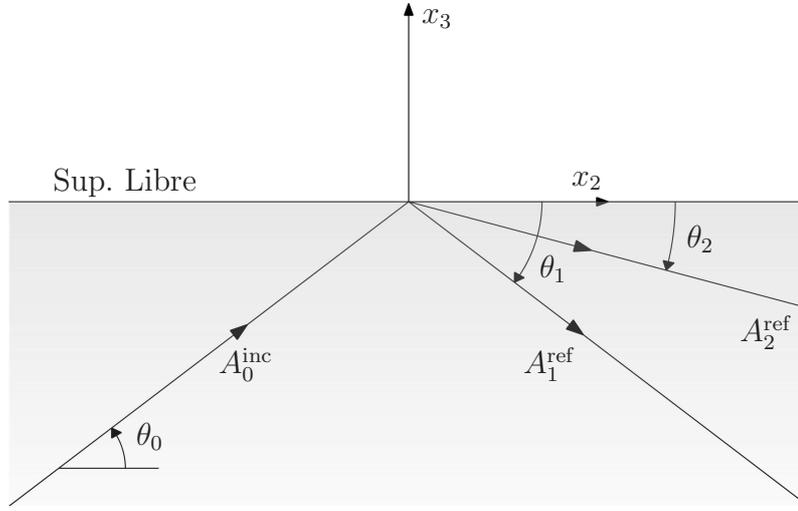


Figura 4.2: Ángulos de interés en el plano $x_2 x_3$ para los distintos problemas

Sabiendo lo anterior, las expresiones analíticas del campo de desplazamientos se pueden representar en notación subíndicada del modo que a continuación se muestra:

$$u_i = \sum_{j=1}^n d_i^j A_j e^{-i k_j (\mathbf{s}^{(j)} \cdot \mathbf{r})} \quad (4.1)$$

donde u_i es la componente en la dirección i del desplazamiento, n es el número de ondas total del problema en análisis, d_i^j es la componente en la dirección i del vector que contiene los cosenos directores de los desplazamientos que la onda j provoca en las partículas del medio, A_j y k_j son, respectivamente, la amplitud de la onda j y su número de onda (definido como el cociente entre la frecuencia ω y la velocidad de propagación de la misma en el medio $-k_j = \omega/c_j$), mientras que $\mathbf{s}^{(j)} \cdot \mathbf{r}$ representa el producto escalar del vector de la dirección de propagación de la onda j por el vector de posición del punto donde se pretenden determinar los desplazamientos ($\mathbf{s}^{(j)} \cdot \mathbf{r} = s_1^{(j)} x_1 + s_2^{(j)} x_2 + s_3^{(j)} x_3$, siendo x_1 , x_2 y x_3 las coordenadas del punto bajo análisis). Es interesante mencionar, por último, que la i que aparece en el exponente de la función representa a la unidad imaginaria ($i = \sqrt{-1}$).

Obtenidas las expresiones analíticas del campo de desplazamientos en las tres direcciones del espacio para cualquier punto del medio, el tensor de pequeñas deformaciones puede obtenerse, para cada punto, por aplicación directa de las ecuaciones de compatibilidad. La ecuación es la (2.1), que se estableció en el

capítulo 2, la cual se repite a continuación a fin de ilustrar de mejor manera el problema bajo análisis:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Así, obtenido el tensor de deformaciones para cada caso, las componentes del tensor de tensiones se pueden obtener de la ecuación constitutiva que, asumiendo que el suelo es un medio elástico, lineal, homogéneo e isótropo, se establece por la ley de Hooke, la cual se escribió en el capítulo 2 a través de la ecuación (2.3). La citada ecuación es la siguiente:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (2.3)$$

Una vez obtenidos los tensores de tensión para los puntos del semiespacio es posible establecer las condiciones de contorno que permitirán, una vez aplicadas, determinar las relaciones existentes entre la amplitud de la onda incidente y la reflejada (o las reflejadas). Las condiciones de contorno a aplicar en esta ocasión son las condiciones de superficie libre, es decir, que la tensión normal σ_{33} y la tensión tangencial σ_{23} sean nulas en los puntos de coordenada x_3 cero.

Las consideraciones realizadas hasta el momento son de aplicación totalmente genérica, sin estar referenciadas a ningún tipo de onda incidente en concreto. Por ello, a continuación se procede a la particularización de las expresiones obtenidas a cada caso a fin de, en primer lugar, aclarar los conceptos introducidos y, posteriormente, incidir en las características propias de cada tipo de problema.

4.3. Onda SH incidente

4.3.1. Campo incidente

En el presente epígrafe se estudiará el problema de una onda de tipo SH incidente en un semiespacio. En este caso, se puede demostrar (ver, por ejemplo, [2]) que la llegada del frente de ondas a la superficie libre del semiespacio provoca un fenómeno de reflexión que propicia la generación de una única onda que, además, es del mismo tipo que la onda incidente. En la figura 4.3 adjunta se refleja lo comentado, definiéndose, además, los ángulos de interés del problema.

En estas circunstancias, los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} que, como se indicó en el apartado 4.1, son los que contienen, respectivamente, los cosenos directores de las direcciones de propagación y desplazamientos de cada una de las ondas que intervienen en el problema, son los que se muestran a continuación. Es conveniente resaltar,

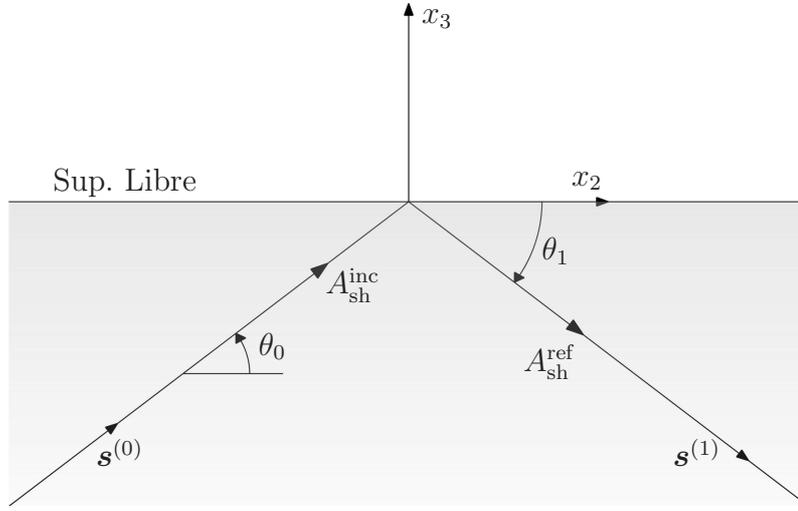


Figura 4.3: Ángulos de interés en el plano $x_2 x_3$ para una onda SH incidente

como puede observarse en la figura 4.3, que la notación 0 hace referencia a la onda SH incidente, mientras que el 1 indica referencia a la onda SH reflejada.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(0)} &= [0, s_2^{(0)}, s_3^{(0)}] = [0, \cos(\theta_0), \sin(\theta_0)] & \mathbf{d}^{(0)} &= [1, 0, 0] \\ \mathbf{s}^{(1)} &= [0, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}] = [0, \cos(\theta_1), -\sin(\theta_1)] & \mathbf{d}^{(1)} &= [1, 0, 0] \end{aligned}$$

Por su parte, las expresiones explícitas del campo de desplazamientos son, en función de los vectores definidos en el párrafo anterior y de las amplitudes de las ondas implicadas:

$$\begin{aligned} u_1 &= d_1^{(0)} A_{\text{sh}}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_1^{(1)} A_{\text{sh}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Tal y como se puede observar, la estructura de las expresiones del campo de desplazamientos es, como no podía ser de otro modo, totalmente análoga a la establecida en la ecuación (4.1). En esta ocasión puede verificarse el hecho de que una onda SH incidente con un ángulo θ_0 cualquiera con respecto a la superficie del semiespacio provoca en éste desplazamientos sólo en la dirección del eje x_1 , siendo nulas el resto de componentes del desplazamiento. Además, el desplazamiento no nulo se obtiene como la suma de las contribuciones de las ondas SH incidente y reflejada.

Por tratarse de un semiespacio, en cualquier plano $x_2 x_3$ perpendicular a la superficie libre del mismo debe de cumplirse la independencia de la condición de contorno en x_2 . Por ello, es posible establecer las siguientes igualdades:

$$k_s s_2^{(0)} = k_s s_2^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos(\theta_0)}{c_s} = \frac{\cos(\theta_1)}{c_s} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \theta_1 \quad (4.3)$$

de donde la ecuación (4.3) establece la igualdad entre el ángulo θ_0 de la onda incidente y el ángulo θ_1 de la onda reflejada. Una vez sabido esto, es simple demostrar algunas relaciones adicionales, como las que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} s_2^{(1)} &= s_2^{(0)} = \cos(\theta_0) \\ s_3^{(1)} &= -s_3^{(0)} = -\text{sen}(\theta_0) \end{aligned}$$

4.3.2. Tensores de deformación y tensión

Una vez determinadas las expresiones analíticas del campo incidente, es posible pasar a la determinación de los tensores de deformación y tensión. El procedimiento que se seguirá es el indicado en la sección 4.1, es decir, comenzar con la determinación del tensor de deformaciones haciendo uso de las ecuaciones de compatibilidad (mostradas en notación subíndicada en la ecuación (2.1)) y continuar aplicando la ley de comportamiento (ecuación (2.3)) para obtener el tensor de tensiones en cada punto del semiespacio.

Cuando la onda que incide en el semiespacio es una de tipo SH, el campo de desplazamientos sólo posee componente en x_1 (ecuación (4.2)). De esta manera, todas las derivadas parciales de las componentes en x_2 y x_3 del campo de desplazamientos se anularán. Así, el tensor de deformaciones tiene el aspecto siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

cuyas componentes no nulas se ilustran a continuación:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} u_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-d_1^{(0)} s_2^{(0)} A_{\text{sh}}^{\text{inc}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - d_1^{(1)} s_2^{(1)} A_{\text{sh}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} \right]$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} u_{1,3} = \frac{1}{2} \left[-d_1^{(0)} s_3^{(0)} A_{\text{sh}}^{\text{inc}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - d_1^{(1)} s_3^{(1)} A_{\text{sh}}^{\text{ref}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} \right]$$

Obtenido el tensor de deformaciones, es posible determinar las componentes del tensor de tensiones haciendo uso de la ley de comportamiento del material. Así, asumiendo que el suelo se comporta de manera elástica y lineal, con características de homogeneidad e isotropía, aplicando la ley de Hooke se tiene que el tensor de tensiones es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

donde las componentes no nulas son:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2 \mu \varepsilon_{1,2} = \mu \left[-d_1^{(0)} s_2^{(0)} A_{\text{sh}}^{\text{inc}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - d_1^{(1)} s_2^{(1)} A_{\text{sh}}^{\text{ref}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} \right]$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2 \mu \varepsilon_{1,3} = \mu \left[-d_1^{(0)} s_3^{(0)} A_{\text{sh}}^{\text{inc}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - d_1^{(1)} s_3^{(1)} A_{\text{sh}}^{\text{ref}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} \right]$$

4.3.3. Aplicación de las condiciones de contorno

Todas las expresiones anteriores son función de los parámetros definidos con anterioridad. Sin embargo, nada se ha dicho hasta el momento acerca de las amplitudes de las ondas incidente y reflejada. Como se verá en lo sucesivo, las condiciones de contorno en estos problemas se materializan en la obtención de relaciones entre las amplitudes de la onda incidente y la reflejada (o, para otras ondas incidentes, las reflejadas).

Las condiciones de contorno a aplicar son las de superficie libre, es decir, que la tensión en el contorno del semiespacio sea nula. Esto, traducido a las variables ya presentadas, implica que:

$$\text{En } x_3 = 0 \Rightarrow \sigma_{13} = 0 \quad (4.6)$$

Por lo tanto, recuperando las expresiones del tensor de tensiones en los puntos del semiespacio, se puede escribir:

$$\left. \begin{aligned} -d_1^{(0)} s_3^{(0)} A_{\text{sh}}^{\text{inc}} - d_1^{(1)} s_3^{(1)} A_{\text{sh}}^{\text{ref}} &= 0 \\ -\text{sen}(\theta_0) A_{\text{sh}}^{\text{inc}} + \text{sen}(\theta_0) A_{\text{sh}}^{\text{ref}} &= 0 \end{aligned} \right\} A_{\text{sh}}^{\text{inc}} = A_{\text{sh}}^{\text{ref}} \quad (4.7)$$

Así, las amplitudes de la onda incidente y reflejada coinciden cuando la onda que ataca al semiespacio es una de tipo SH. A pesar de ello, sigue siendo necesario valorar de algún modo, al menos, una de esas amplitudes. Por esta razón, se le asigna, a modo de condición de contorno adicional, un valor unitario a la amplitud de la onda incidente. Numéricamente se tiene:

$$A_{\text{sh}}^{\text{inc}} = A_{\text{sh}}^{\text{ref}} = 1 \quad (4.8)$$

4.4. Onda P incidente

4.4.1. Campo incidente

El caso de una onda SH incidente estudiado con anterioridad es, como se demostrará en el presente apartado, el caso menos complejo. La existencia de una única onda reflejada simplifica enormemente las expresiones. En esta línea, la formulación relativa a una onda P supone un paso adelante, incrementándose la complejidad de la misma. Esta tendencia alcanzará su culmen en el apartado siguiente con el estudio de la onda SV incidente.

Como se puede intuir del párrafo anterior, la reflexión producida por la llegada del frente de ondas a la superficie libre del semiespacio provoca la aparición, en este caso, de dos ondas, una de tipo P y otra de tipo SV. Los ángulos de interés son los que se pueden observar en la figura 4.4.

Los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} para este problema son:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(0)} &= [0, s_2^{(0)}, s_3^{(0)}] = [0, \cos(\theta_0), \text{sen}(\theta_0)] \\ \mathbf{s}^{(1)} &= [0, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}] = [0, \cos(\theta_1), -\text{sen}(\theta_1)] \\ \mathbf{s}^{(2)} &= [0, s_2^{(2)}, s_3^{(2)}] = [0, \cos(\theta_2), -\text{sen}(\theta_2)] \\ \mathbf{d}^{(0)} &= [0, d_2^{(0)}, d_3^{(0)}] = [0, \cos(\theta_0), \text{sen}(\theta_0)] \\ \mathbf{d}^{(1)} &= [0, d_2^{(1)}, d_3^{(1)}] = [0, \cos(\theta_1), -\text{sen}(\theta_1)] \\ \mathbf{d}^{(2)} &= [0, d_2^{(2)}, d_3^{(2)}] = [0, -\text{sen}(\theta_2), -\cos(\theta_2)] \end{aligned}$$

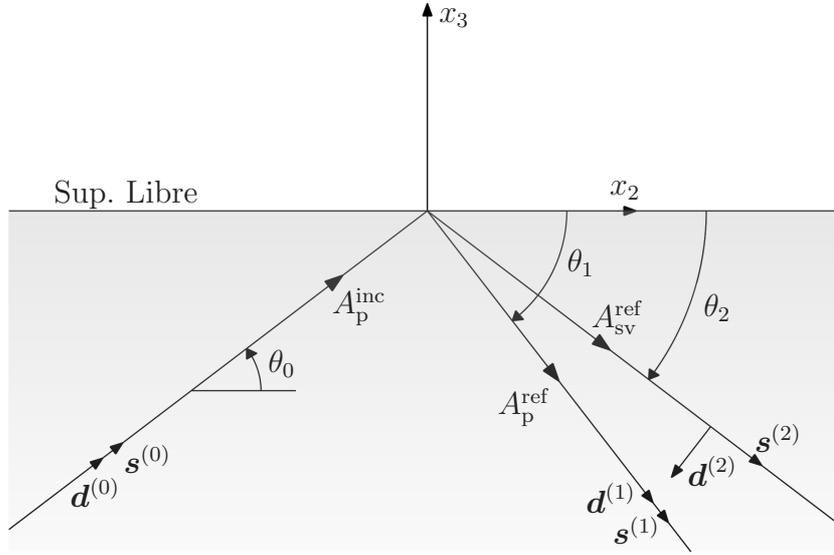


Figura 4.4: Ángulos de interés en el plano $x_2 x_3$ para una onda P incidente

La expresión analítica del campo de desplazamientos, en función de los vectores anteriores, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0 \\
 u_2 &= d_2^{(0)} A_p^{\text{inc}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(1)} A_p^{\text{ref}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(2)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \\
 u_3 &= d_3^{(0)} A_p^{\text{inc}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(1)} A_p^{\text{ref}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(2)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Aplicando el concepto de independencia de las expresiones respecto al eje x_2 se verifica que:

$$k_p s_2^{(0)} = k_p s_2^{(1)} = k_s s_2^{(2)} \Rightarrow \frac{\cos(\theta_0)}{c_p} = \frac{\cos(\theta_1)}{c_p} = \frac{\cos(\theta_2)}{c_s} \Rightarrow \theta_0 = \theta_1 \quad (4.10)$$

de donde, según la ecuación anterior se puede verificar, también en este caso, que el ángulo θ_1 es igual al ángulo θ_0 . Esta igualdad permite relacionar ciertas componentes de los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} entre sí.

$$\begin{aligned}
 s_2^{(1)} &= s_2^{(0)} = \cos(\theta_0) & d_2^{(1)} &= d_2^{(0)} = \cos(\theta_0) \\
 s_3^{(1)} &= -s_3^{(0)} = \text{sen}(\theta_0) & d_3^{(1)} &= -d_3^{(0)} = -\text{sen}(\theta_0)
 \end{aligned}$$

Paralelamente, de la primera y tercera igualdad de la ecuación (4.10) puede obtenerse la relación existente entre el ángulo de la onda P incidente y el de la SV reflejada. En efecto:

$$\frac{\cos(\theta_0)}{c_p} = \frac{\cos(\theta_2)}{c_s} \Rightarrow \cos(\theta_2) = \frac{c_s}{c_p} \cos(\theta_0) \quad (4.11)$$

En la ecuación (4.11) se establece que la relación entre el ángulo de incidencia de la onda P y el ángulo de la onda SV reflejada es proporcional al cociente entre la velocidad de propagación de la onda S y la velocidad de propagación de la onda P. Tal cociente, como se verá, depende sólo del coeficiente de Poisson del medio. A ese cociente se le denominará en lo sucesivo con el símbolo κ , tomando valores inferiores a la unidad. En resumen, se tiene:

$$\frac{c_s}{c_p} = \frac{k_p}{k_s} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} = \kappa < 1 \quad (4.12)$$

por lo que se relacionan los vectores de propagación y de desplazamientos de la onda SV reflejada con los de la onda P incidente, de modo similar al que ocurría entre las ondas P incidente y reflejada tras aplicar la ecuación (4.10). En esta ocasión:

$$\begin{aligned} s_2^{(2)} &= \cos(\theta_2) = \kappa \cos(\theta_0) & d_2^{(2)} &= -\text{sen}(\theta_2) = -\sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2(\theta_0)} \\ s_3^{(2)} &= -\text{sen}(\theta_2) = -\sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2(\theta_0)} & d_3^{(2)} &= -\cos(\theta_2) = -\kappa \cos(\theta_0) \end{aligned}$$

Resulta interesante en este punto estudiar qué ocurre con la relación entre los ángulos θ_0 y θ_2 en función del propio θ_0 . Así, el valor de κ varía entre $\sqrt{2}/2$ para un valor del coeficiente de Poisson de 0 y 0 para un valor del coeficiente de Poisson de 0,5. De esta manera, para un ángulo de incidencia de la onda P de entre 0 y 90 grados, es sencillo comprobar que el ángulo θ_2 varía entre 45 y 90 grados.

Existe un fenómeno asociado a la reflexión que se produce en la superficie libre cuando la onda que incide es una onda SV que, como se comprobará llegado el momento, tiene una gran importancia. Sin embargo, en virtud de lo expuesto anteriormente, el mencionado fenómeno no tiene lugar en estas circunstancias. Se emplaza al lector al apartado 4.5 a fin de complementar su conocimiento sobre la materia.

4.4.2. Tensores de deformación y tensión

Para una onda incidente de tipo P, el tensor de deformaciones es de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

cuyas componentes no nulas poseen las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} = u_{2,2} = & -d_2^{(0)} s_2^{(0)} A_p^{\text{inc}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -d_2^{(1)} s_2^{(1)} A_p^{\text{ref}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -d_2^{(2)} s_2^{(2)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{33} = u_{3,3} = & -d_3^{(0)} s_3^{(0)} A_p^{\text{inc}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -d_3^{(1)} s_3^{(1)} A_p^{\text{ref}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -d_3^{(2)} s_3^{(2)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} u_{2,3} = \frac{1}{2} \left[& -\left(d_2^{(0)} s_3^{(0)} + d_3^{(0)} s_2^{(0)}\right) A_p^{\text{inc}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -\left(d_2^{(1)} s_3^{(1)} + d_3^{(1)} s_2^{(1)}\right) A_p^{\text{ref}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -\left(d_2^{(2)} s_3^{(2)} + d_3^{(2)} s_2^{(2)}\right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \right]\end{aligned}$$

Además de las componentes del tensor de deformaciones, otra variable (de interés posterior) es la suma de los elementos de la diagonal principal del tensor de deformaciones. En esta ocasión tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = & -\left(d_2^{(0)} s_2^{(0)} + d_3^{(0)} s_3^{(0)}\right) A_p^{\text{inc}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -\left(d_2^{(1)} s_2^{(1)} + d_3^{(1)} s_3^{(1)}\right) A_p^{\text{ref}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -\left(d_2^{(2)} s_2^{(2)} + d_3^{(2)} s_3^{(2)}\right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

Conocidas estas componentes del tensor de deformaciones, se puede determinar el tensor de tensiones. En esta ocasión, el citado tensor tiene el siguiente aspecto:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

en el que las componentes distintas de cero son las que a continuación se muestran. Es conveniente resaltar la necesidad de la expresión de ε_{kk} en la determinación de las componentes σ_{11} , σ_{22} y σ_{33} . En efecto:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \lambda \varepsilon_{kk} = & -\lambda \left(d_2^{(0)} s_2^{(0)} + d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right) A_p^{\text{inc}}(\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -\lambda \left(d_2^{(1)} s_2^{(1)} + d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right) A_p^{\text{ref}}(\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -\lambda \left(d_2^{(2)} s_2^{(2)} + d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} = & -\left[(\lambda + 2\mu) d_2^{(0)} s_2^{(0)} + \lambda d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right] A_p^{\text{inc}}(\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -\left[(\lambda + 2\mu) d_2^{(1)} s_2^{(1)} + \lambda d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right] A_p^{\text{ref}}(\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -\left[(\lambda + 2\mu) d_2^{(2)} s_2^{(2)} + \lambda d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right] A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} = & -\left[\lambda d_2^{(0)} s_2^{(0)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right] A_p^{\text{inc}}(\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -\left[\lambda d_2^{(1)} s_2^{(1)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right] A_p^{\text{ref}}(\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -\left[\lambda d_2^{(2)} s_2^{(2)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right] A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu \varepsilon_{23} = & -\mu \left(d_2^{(0)} s_3^{(0)} + d_3^{(0)} s_2^{(0)} \right) A_p^{\text{inc}}(\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -\mu \left(d_2^{(1)} s_3^{(1)} + d_3^{(1)} s_2^{(1)} \right) A_p^{\text{ref}}(\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -\mu \left(d_2^{(2)} s_3^{(2)} + d_3^{(2)} s_2^{(2)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

4.4.3. Aplicación de las condiciones de contorno

Las condiciones de superficie libre son las siguientes:

$$\text{En } x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

De la primera igualdad se extrae que:

$$\begin{aligned}0 = & -\mu [\cos(\theta_0) \sin(\theta_0) + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)] A_p^{\text{inc}}(\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p [\cos(\theta_0) x_2]} - \\ & -\mu [-\cos(\theta_0) \sin(\theta_0) - \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)] A_p^{\text{ref}}(\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p [\cos(\theta_0) x_2]} - \\ & -\mu [(1 - \kappa^2 \cos^2(\theta_0)) - \kappa^2 \cos^2(\theta_0)] A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(\mathbf{i} k_s) e^{-i k_p [\cos(\theta_0) x_2]}\end{aligned}$$

como $\kappa = c_s/c_p = k_p/k_s$ y, además:

$$2 \operatorname{sen}(\theta_0) \cos(\theta_0) = \operatorname{sen}(2\theta_0) \quad (4.16)$$

σ_{23} se puede expresar como:

$$0 = -\mu \operatorname{sen}(2\theta_0) A_p^{\text{inc}} + \mu \operatorname{sen}(2\theta_0) A_p^{\text{ref}} - \mu [1 - 2\kappa^2 \cos^2(\theta_0)] \frac{1}{\kappa} A_{\text{sv}}^{\text{ref}}$$

Si se tiene en cuenta que $1 - 2\kappa^2 \cos^2(\theta_0) = 1 - 2\cos^2(\theta_2)$, se puede escribir:

$$1 - 2\cos^2(\theta_2) = 1 - \cos^2(\theta_2) - \cos^2(\theta_2) = \operatorname{sen}^2(\theta_2) - \cos^2(\theta_2) = -\cos(2\theta_2)$$

Por lo que, teniendo en cuenta lo anterior y dividiendo finalmente entre μ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\operatorname{sen}(2\theta_0) A_p^{\text{ref}} + \cos(2\theta_2) \frac{1}{\kappa} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} = \operatorname{sen}(2\theta_0) A_p^{\text{inc}} \quad (4.17)$$

Por otro lado, de la segunda de las igualdades ($\sigma_{33} = 0$), se tiene:

$$0 = -[\lambda + 2\mu \operatorname{sen}^2(\theta_0)] (i k_p) A_p^{\text{inc}} - [\lambda + 2\mu \operatorname{sen}^2(\theta_0)] (i k_p) A_p^{\text{ref}} - \\ - [-\lambda \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) + (\lambda + 2\mu) \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2)] (i k_s) A_{\text{sv}}^{\text{ref}}$$

de donde:

$$0 = -[\lambda + 2\mu \operatorname{sen}^2(\theta_0)] A_p^{\text{inc}} - [\lambda + 2\mu \operatorname{sen}^2(\theta_0)] A_p^{\text{ref}} - \\ - 2\mu \operatorname{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \frac{1}{\kappa} A_{\text{sv}}^{\text{ref}}$$

Dividiendo entre 2μ , se tiene:

$$0 = -\left[\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu} + \operatorname{sen}^2(\theta_0)\right] A_p^{\text{inc}} - \left[\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu} + \operatorname{sen}^2(\theta_0)\right] A_p^{\text{ref}} - \\ - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\theta_2) \frac{1}{\kappa} A_{\text{sv}}^{\text{ref}}$$

como existe la siguiente relación entre el coeficiente de Poisson y las constantes de Lamé:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (4.18)$$

Por ello, y según la definición antes dada para el valor de κ , éste puede escribirse del modo que se muestra a continuación:

$$\kappa = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}{2\left[1-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right]}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}{\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}} \quad (4.19)$$

por lo que, en virtud de lo anterior, λ/μ es equivalente a:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} + 2 - 2 = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} - 2 = \frac{1}{\kappa^2} - 2 \quad (4.20)$$

Así, retomando la expresión de σ_{33} , se puede poner:

$$0 = -\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\kappa^2} - 1 + \sin^2(\theta_0)\right] A_p^{\text{inc}} - \left[\frac{1}{2}\frac{1}{\kappa^2} - 1 + \sin^2(\theta_0)\right] A_p^{\text{ref}} - \frac{1}{2} \sin(2\theta_2) \frac{1}{\kappa} A_{\text{sv}}^{\text{ref}}$$

de donde, reordenando los términos de la expresión anterior, se obtiene, finalmente:

$$\left[\frac{1}{2\kappa^2} - \cos^2(\theta_0)\right] A_p^{\text{ref}} + \frac{1}{2\kappa} \sin(2\theta_2) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} = \left[-\frac{1}{2\kappa^2} + \cos^2(\theta_0)\right] A_p^{\text{inc}} \quad (4.21)$$

Las ecuaciones (4.17) y (4.21) constituyen un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Dándole, como en el caso de la onda SH, un valor unitario a la amplitud de la onda incidente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \sin(2\theta_0) A_p^{\text{ref}} + \cos(2\theta_2) \frac{1}{\kappa} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} &= \sin(2\theta_0) A_p^{\text{inc}} \\ \left[\frac{1}{2\kappa^2} - \cos^2(\theta_0)\right] A_p^{\text{ref}} + \frac{1}{2\kappa} \sin(2\theta_2) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} &= \left[-\frac{1}{2\kappa^2} + \cos^2(\theta_0)\right] A_p^{\text{inc}} \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

De la resolución del sistema de ecuaciones anterior se obtienen los siguientes valores para las amplitudes de las ondas reflejadas:

$$A_p^{\text{ref}} = \frac{\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) - \cos^2(2\theta_2)}{\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_2)} \quad (4.23)$$

para la onda P reflejada y

$$A_{\text{sv}}^{\text{ref}} = \frac{2\kappa \sin(2\theta_0) \cos(2\theta_2)}{\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_2)} \quad (4.24)$$

para la onda SV reflejada.

4.4.4. Cambios de modo

Si se analizan las expresiones de las amplitudes de las ondas reflejadas, es sencillo ver que existe un cierto ángulo θ_0 de incidencia que produce que la amplitud de la onda P reflejada se anule, produciéndose un fenómeno conocido como cambio de modo. De esta manera, una onda incidente de tipo P se refleja en forma de una única onda que, además, es de tipo SV (de ahí el nombre de cambio de modo). Así, para cada valor del coeficiente de Poisson existe, a priori, al menos un ángulo de incidencia para el que sólo se refleja una onda SV. La ecuación que permite obtener el ángulo (o los ángulos) para el que se produce el fenómeno explicado es la siguiente:

$$\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) - \cos^2(2\theta_2) = 0 \quad (4.25)$$

que puede expresarse en función únicamente del ángulo de incidencia mediante un conjunto de transformaciones sencillas, quedando, por tanto:

$$\begin{aligned} & -4\kappa^4 \cos^4(\theta_0) + 4\kappa^3 \cos^2(\theta_0) \sqrt{1 - \cos^2(\theta_0)} \sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2(\theta_0)} + \\ & + 4\kappa^2 \cos^2(\theta_0) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Así pues, la expresión anterior permite obtener el ángulo en el que se produce el cambio de modo en función de las propiedades del terreno, al estar la variable κ relacionada con el coeficiente de Poisson ν del mismo según la ecuación (4.12). Sin embargo, el comportamiento de la ecuación (4.26) presentada con anterioridad difiere según el valor del coeficiente de Poisson del terreno por el que se propagan las ondas.

Para ilustrar el fenómeno, la figura 4.5 presenta la variación de los valores de la amplitud de la onda P reflejada en función del ángulo θ_0 de incidencia y del coeficiente de Poisson del medio, pudiendo observarse que el cambio de modo sólo tiene lugar para valores comprendidos en un determinado rango de la última de las variables mencionadas. En concreto, la frontera a partir de la cual no se produce el fenómeno de cambio de modo se ubica en un valor del coeficiente de Poisson de 0,263

Nótese, también, que cuando el coeficiente de Poisson del terreno toma un valor de 0,5, la amplitud de la onda P reflejada pasa a valer -1 para cualquier ángulo θ_0 de incidencia.

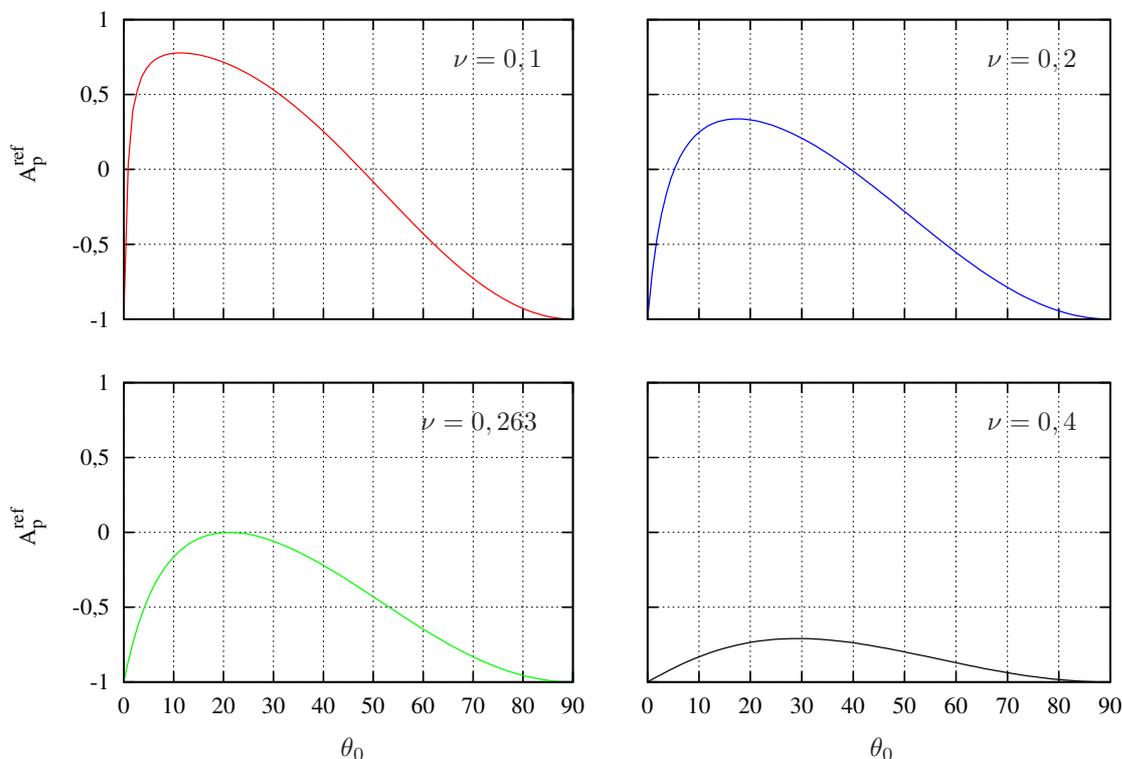


Figura 4.5: Variación de la amplitud de la onda P reflejada con el ángulo de incidencia θ_0 y el coeficiente de Poisson ν del terreno

Así pues, una vez se han comentado las particularidades que atañen al problema en estudio, es posible elaborar un cuadro que resuma los valores del ángulo de cambio de modo (θ_{cmodo}) para una cierta cantidad de coeficientes de Poisson del suelo.

ν	κ	θ_{cmodo}
0,1	0,667	0,803° y 47,618°
0,2	0,612	5,216° y 39,519°
0,3	0,535	-
0,4	0,408	-
0,5	0	-

Cuadro 4.1: Cuadro resumen de los ángulos de cambio de modo para una onda incidente tipo P y un conjunto de coeficientes de Poisson del terreno

4.5. Onda SV incidente

4.5.1. Campo incidente

En este apartado se estudiarán las características propias del campo incidente cuando la onda que incide es una de tipo SV. Las expresiones obtenidas en esta ocasión son particularmente especiales, precisando de ciertas aclaraciones y especificidades que, en los casos anteriores, no eran necesarias. Se completa, por tanto, el estudio, el cual ha seguido un orden creciente en complejidad.

Entrando en materia, la incidencia de una onda SV en el semiespacio genera, tras su reflexión, la aparición de una onda SV y una P reflejadas. En esta ocasión, la figura 4.6 siguiente presenta los parámetros de interés para el problema en análisis.

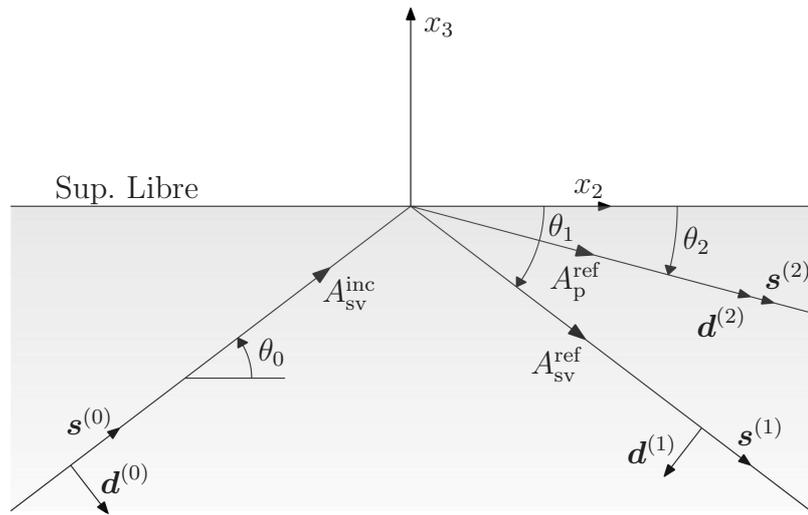


Figura 4.6: Ángulos de interés en el plano $x_2 x_3$ para una onda SV incidente

Bajo las suposiciones anteriores, los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} son los siguientes:

$$\mathbf{s}^{(0)} = [0, s_2^{(0)}, s_3^{(0)}] = [0, \cos(\theta_0), \text{sen}(\theta_0)]$$

$$\mathbf{s}^{(1)} = [0, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}] = [0, \cos(\theta_1), -\text{sen}(\theta_1)]$$

$$\mathbf{s}^{(2)} = [0, s_2^{(2)}, s_3^{(2)}] = [0, \cos(\theta_2), -\text{sen}(\theta_2)]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{(0)} &= [0, d_2^{(0)}, d_3^{(0)}] = [0, \text{sen}(\theta_0), -\text{cos}(\theta_0)] \\ \mathbf{d}^{(1)} &= [0, d_2^{(1)}, d_3^{(1)}] = [0, -\text{sen}(\theta_1), -\text{cos}(\theta_1)] \\ \mathbf{d}^{(2)} &= [0, d_2^{(2)}, d_3^{(2)}] = [0, \text{cos}(\theta_2), -\text{sen}(\theta_2)]\end{aligned}$$

La expresión analítica del campo de desplazamientos, en función de los vectores anteriores, es la siguiente:

$$\begin{aligned}u_1 &= 0 \\ u_2 &= d_2^{(0)} A_{\text{sv}}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(1)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(2)} A_{\text{p}}^{\text{ref}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \\ u_3 &= d_3^{(0)} A_{\text{sv}}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(1)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(2)} A_{\text{p}}^{\text{ref}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}\quad (4.27)$$

Si se tiene en cuenta la independencia de las expresiones con respecto al eje x_2 puede escribirse:

$$k_s s_2^{(0)} = k_s s_2^{(1)} = k_p s_2^{(2)} \Rightarrow \frac{\text{cos}(\theta_0)}{c_s} = \frac{\text{cos}(\theta_1)}{c_s} = \frac{\text{cos}(\theta_2)}{c_p} \Rightarrow \theta_0 = \theta_1 \quad (4.28)$$

donde los ángulos θ_0 y θ_1 son, también en esta ocasión, iguales. Sabiendo de esa igualdad, se puede comprobar que:

$$\begin{aligned}s_2^{(1)} = s_2^{(0)} &= \text{cos}(\theta_0) & d_2^{(1)} = -d_2^{(0)} &= -\text{sen}(\theta_0) \\ s_3^{(1)} = -s_3^{(0)} &= -\text{sen}(\theta_0) & d_3^{(1)} = d_3^{(0)} &= -\text{cos}(\theta_0)\end{aligned}$$

De igual modo, de la segunda y tercera igualdad de la ecuación (4.28) se obtiene la relación entre el ángulo de la onda incidente (θ_0) y el de la onda P reflejada (θ_2). En efecto:

$$\frac{\text{cos}(\theta_0)}{c_s} = \frac{\text{cos}(\theta_2)}{c_p} \Rightarrow \text{cos}(\theta_2) = \frac{c_p}{c_s} \text{cos}(\theta_0) \quad (4.29)$$

De modo distinto al que ocurría cuando la onda que incidía era una de tipo P, la relación que existe en esta ocasión entre el ángulo de incidencia de la onda SV y el de la onda P reflejada es proporcional al cociente entre la velocidad c_p y c_s , es decir, a $1/\kappa$. Dicho de otro modo:

$$\frac{c_p}{c_s} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} = \frac{1}{\kappa} > 1 \quad (4.30)$$

La expresión (4.29) permite relacionar los vectores de propagación y de desplazamientos de la onda P reflejada con los de la onda SV incidente, de modo similar al efectuado con anterioridad. Así pues:

$$\begin{aligned} s_2^{(2)} &= \frac{1}{\kappa} s_2^{(0)} & d_2^{(2)} &= s_2^{(2)} = \frac{1}{\kappa} s_2^{(0)} \\ s_3^{(2)} &= -\sqrt{1 - [s_2^{(2)}]^2} & d_3^{(2)} &= s_3^{(2)} = -\sqrt{1 - [s_2^{(2)}]^2} \end{aligned}$$

4.5.2. Ángulo crítico

Existe una particularidad para este tipo de ondas incidentes que puede observarse analizando la ecuación (4.30). De esta manera, tómesese un ángulo de incidencia θ_0 tal que el ángulo de la onda P reflejada se anule. En estas circunstancias, $\cos(\theta_0) = \kappa$. Llámese al ángulo que produce ese efecto θ_{cr} . A continuación, supóngase que el ángulo de incidencia sea superior a ese ángulo crítico θ_{cr} (ángulo supercrítico). De esa manera, el coseno del ángulo de incidencia será menor a κ y, por tanto, el coseno del ángulo reflejado será $\cos(\theta_2) = 1/\kappa \cos(\theta_0) < 1$

Ahora, imagínese el lector que el ángulo de incidencia resulte ser inferior al citado ángulo crítico (ángulo subcrítico). Bajo tal suposición, $\cos(\theta_0) > \kappa$, de modo que el coseno del ángulo reflejado será $\cos(\theta_2) = 1/\kappa \cos(\theta_0) > 1$. Se trata, pues, de una singularidad que implica que $\sin(\theta_2) \in \mathbb{I}$. Debido a esto, se hace necesaria una modificación de la formulación que permita tener en cuenta el hecho descrito.

A modo de información adicional, la siguiente tabla resume los ángulos críticos para algunos valores del coeficiente de Poisson del suelo.

ν	κ	θ_{cr}
0,1	0,667	48,16 °
0,2	0,612	52,24 °
0,3	0,535	57,69 °
0,4	0,408	65,91 °
0,5	0	90 °

Cuadro 4.2: Cuadro resumen de los ángulos críticos para una onda incidente tipo SV y un conjunto de coeficientes de Poisson del terreno

Como se dijo con anterioridad, es preciso modificar la formulación planteada hasta el momento para tener en cuenta el fenómeno asociado al ángulo crítico.

Para ello, pártase de las expresiones ya conocidas del campo de desplazamientos y analícense las componentes del mismo debidas a la contribución de la onda P reflejada.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^P &= \begin{bmatrix} d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix} A_p^{\text{ref}} e^{-i k_p [\cos(\theta_2) x_2 - \text{sen}(\theta_2) x_3]} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ -\text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} A_p^{\text{ref}} e^{-i k_p [\cos(\theta_2) x_2 - \text{sen}(\theta_2) x_3]} \end{aligned} \quad (4.31)$$

puesto que:

$$\cos(\theta_2) = \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0); \quad \text{sen}(\theta_2) = \pm i (-1) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \quad (4.32)$$

No es posible establecer, a priori, el signo de la unidad imaginaria. De cualquier modo, la expresión de los desplazamientos se puede poner del modo siguiente:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ \pm i (-1) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix} A_p^{\text{ref}} e^{-i k_p \left[\frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) x_2 - (\pm i) x_3 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \right]}$$

de donde, analizando la función exponencial, la solución adecuada será la que sirva para mantener la estructura de la misma. En esta ocasión, la estructura se mantiene si se toma $-i$. De esta manera se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^P &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix} A_p^{\text{ref}} e^{-i k_p \left[\frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) x_2 + i x_3 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \right]} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix} A_p^{\text{ref}} e^{k_p x_3 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1}} e^{-i k_p \left[\frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \right] x_2} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix} A_p^{\text{ref}} e^{\xi x_3} e^{-i k_s \cos(\theta_0) x_2} \end{aligned} \quad (4.33)$$

En la expresión anterior puede observarse que la componente de uno cualquiera de los desplazamientos es igual al producto de un cierto valor por una amplitud por el producto de dos exponenciales, ambas decrecientes al aumentar la variable de la que dependen (algo evidente para el caso de x_2 y fácilmente visualizable para el caso de la exponencial dependiente de x_3 , pues los puntos del semiespacio

poseen valores de la citada componente negativas). De este modo, la exponencial dependiente de x_3 es un término que modula la amplitud de la onda, decreciendo ésta con la profundidad. El valor de la constante real que acompaña a la variable x_3 es:

$$\xi = k_p \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \quad (4.34)$$

De esta manera, se trata de una onda que se propaga en la dirección x_2 (rasante), con desplazamientos en x_2 y x_3 , ambos desfasados 90° , con una amplitud A_p^{ref} aún indeterminada que, además, decrece con la profundidad (x_3 negativos) según ξ . Esta clase de ondas tiene similitudes más que notables con una tipología de ondas conocida como ondas de Rayleigh, un tipo de onda de superficie cuyo número de onda es $k_r = k_s \cos(\theta_0)$ y que produce movimientos en x_2 y x_3 desfasados entre sí 90° .

A nivel de implementación, se puede considerar que $\mathbf{s}^{(2)}$ y $\mathbf{d}^{(2)}$ son las siguientes expresiones complejas:

$$\mathbf{s}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_2) \\ -\text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_2) \\ -\text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix}$$

Así pues, las expresiones anteriores permiten implementar de modo relativamente sencillo un ángulo de incidencia inferior al crítico. Sin embargo, resulta instructivo obtener las ecuaciones del campo de desplazamientos para el caso en el que $\theta_0 = \theta_{cr}$. En este caso, los vectores de propagación y de desplazamientos de la onda P reflejada son los siguientes:

$$\begin{aligned} s_2^{(2)} &= 1 & d_2^{(2)} &= 1 \\ s_3^{(2)} &= 0 & d_3^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

siendo el campo de desplazamientos el siguiente:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0 \\
u_2 &= d_2^{(0)} A_{sv}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(1)} A_{sv}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + A_p^{\text{ref}} e^{-i k_p (x_2)} \\
x_3 &= d_3^{(0)} A_{sv}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(1)} A_{sv}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

donde puede observarse que los desplazamientos en las direcciones x_2 y x_3 son la suma de las contribuciones de las ondas SV incidente y reflejada y, en el caso de los desplazamientos en x_2 , también de la aportación de la onda P reflejada que, en este caso, es una onda P rasante.

4.5.3. Tensores de deformación y tensión

Si la onda incidente es de tipo SV, se puede observar de modo sencillo que se anulan las siguientes componentes del tensor de deformaciones:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= u_{1,1} = 0 \\
\varepsilon_{21} &= \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) = 0 \\
\varepsilon_{31} &= \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1}) = 0
\end{aligned}$$

Así, el tensor de deformaciones de un punto cualquiera del semiespacio tiene el siguiente aspecto:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

por lo que las componentes del tensor de deformaciones se obtienen como sigue:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22} = u_{2,2} &= -d_2^{(0)} s_2^{(0)} A_{sv}^{\text{inc}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad -d_2^{(1)} s_2^{(1)} A_{sv}^{\text{ref}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad -d_2^{(2)} s_2^{(2)} A_p^{\text{ref}} (i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \\
\varepsilon_{33} = u_{3,3} &= -d_3^{(0)} s_3^{(0)} A_{sv}^{\text{inc}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad -d_3^{(1)} s_3^{(1)} A_{sv}^{\text{ref}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad -d_3^{(2)} s_3^{(2)} A_p^{\text{ref}} (i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} u_{2,3} = \frac{1}{2} \left[- \left(d_2^{(0)} s_3^{(0)} + d_3^{(0)} s_2^{(0)} \right) A_{sv}^{inc} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \right. \\ \left. - \left(d_2^{(1)} s_3^{(1)} + d_3^{(1)} s_2^{(1)} \right) A_{sv}^{ref} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \right. \\ \left. - \left(d_2^{(2)} s_3^{(2)} + d_3^{(2)} s_2^{(2)} \right) A_p^{ref} (i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \right]$$

Al igual que ocurría en el caso de la onda P incidente, merece también la pena en esta ocasión determinar la suma de los elementos de la diagonal principal del tensor de deformaciones. Se tiene:

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = - \left(d_2^{(0)} s_2^{(0)} + d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right) A_{sv}^{inc} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ - \left(d_2^{(1)} s_2^{(1)} + d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right) A_{sv}^{ref} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ - \left(d_2^{(2)} s_2^{(2)} + d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right) A_p^{ref} (i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}$$

En lo que se refiere al tensor de tensiones, las componentes nulas son, en esta ocasión, las siguientes:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2 \mu \varepsilon_{12} = 0 \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = 2 \mu \varepsilon_{13} = 0$$

donde el tensor de tensiones de un punto cualquiera del semiespacio tiene el aspecto que se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

y las componentes distintas de cero son:

$$\sigma_{11} = \lambda \varepsilon_{kk} = - \lambda \left(d_2^{(0)} s_2^{(0)} + d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right) A_{sv}^{inc} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ - \lambda \left(d_2^{(1)} s_2^{(1)} + d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right) A_{sv}^{ref} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ - \lambda \left(d_2^{(2)} s_2^{(2)} + d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right) A_p^{ref} (i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22} &= - \left[(\lambda + 2\mu) d_2^{(0)} s_2^{(0)} + \lambda d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right] A_{\text{sv}}^{\text{inc}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad - \left[(\lambda + 2\mu) d_2^{(1)} s_2^{(1)} + \lambda d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right] A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad - \left[(\lambda + 2\mu) d_2^{(2)} s_2^{(2)} + \lambda d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right] A_{\text{p}}^{\text{ref}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \\
\sigma_{33} &= - \left[\lambda d_2^{(0)} s_2^{(0)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right] A_{\text{sv}}^{\text{inc}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad - \left[\lambda d_2^{(1)} s_2^{(1)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right] A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad - \left[\lambda d_2^{(2)} s_2^{(2)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right] A_{\text{p}}^{\text{ref}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \\
\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu \varepsilon_{23} &= -\mu \left(d_2^{(0)} s_3^{(0)} + d_3^{(0)} s_2^{(0)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{inc}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad -\mu \left(d_2^{(1)} s_3^{(1)} + d_3^{(1)} s_2^{(1)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad -\mu \left(d_2^{(2)} s_3^{(2)} + d_3^{(2)} s_2^{(2)} \right) A_{\text{p}}^{\text{ref}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}
\end{aligned}$$

4.5.4. Aplicación de las condiciones de contorno

Las condiciones de superficie libre son, en esta ocasión, las mismas que en el caso de la onda P incidente, es decir:

$$\text{En } x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

La componente x_2 de los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} en función de θ_0 es la siguiente:

$$\begin{aligned}
s_2^{(0)} &= \cos(\theta_0) & d_2^{(0)} &= \text{sen}(\theta_0) \\
s_2^{(1)} &= \cos(\theta_0) & d_2^{(1)} &= -\text{sen}(\theta_0) \\
s_2^{(2)} &= \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) & d_2^{(2)} &= \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0)
\end{aligned}$$

mientras que la componente x_3 es:

$$\begin{aligned}
s_3^{(0)} &= \text{sen}(\theta_0) & d_3^{(0)} &= -\cos(\theta_0) \\
s_3^{(1)} &= -\text{sen}(\theta_0) & d_3^{(1)} &= -\cos(\theta_0) \\
s_3^{(2)} &= -\sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0)} & d_3^{(2)} &= -\sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0)}
\end{aligned}$$

De la aplicación de la primera condición de contorno se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 = & -\mu [\text{sen}^2(\theta_0) - \cos^2(\theta_0)] (i k_s) A_{sv}^{\text{inc}} - \\ & -\mu [\text{sen}^2(\theta_0) - \cos^2(\theta_0)] (i k_s) A_{sv}^{\text{ref}} - \\ & -\mu [-\text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2)] (i k_p) A_p^{\text{ref}} \end{aligned}$$

de donde recordando las propiedades de los ángulos dobles y dividiendo entre μk_s se tiene, finalmente:

$$\cos(2\theta_0) A_{sv}^{\text{ref}} + \text{sen}(2\theta_2) \kappa A_p^{\text{ref}} = -\cos(2\theta_0) A_{sv}^{\text{inc}} \quad (4.39)$$

Por otro lado, de la otra condición de contorno ($\sigma_{33} = 0$) se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 = & -[\lambda \text{sen}(\theta_0) \cos(\theta_0) - (\lambda + 2\mu) \cos(\theta_0) \text{sen}(\theta_0)] A_{sv}^{\text{inc}} (i k_s) e^{-i k_s [\cos(\theta_0) x_2]} - \\ & -[-\lambda \text{sen}(\theta_0) \cos(\theta_0) + (\lambda + 2\mu) \cos(\theta_0) \text{sen}(\theta_0)] A_{sv}^{\text{ref}} (i k_s) e^{-i k_s [\cos(\theta_0) x_2]} - \\ & - \left[\lambda \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) + (\lambda + 2\mu) \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) \right) \right] A_p^{\text{ref}} (i k_p) e^{-i k_p \left[\frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) x_2 \right]} \end{aligned}$$

de donde, tras realizar algunas operaciones básicas, se llega a:

$$\begin{aligned} & 2\mu \cos(\theta_0) \text{sen}(\theta_0) (i k_s) A_{sv}^{\text{inc}} - \\ & -2\mu \cos(\theta_0) \text{sen}(\theta_0) (i k_s) A_{sv}^{\text{ref}} - \\ & - [\lambda \cos^2(\theta_2) + (\lambda + 2\mu) \text{sen}^2(\theta_2)] (i k_p) A_p^{\text{ref}} = 0 \end{aligned}$$

Si se divide entre $i k_s$ y se aplican las propiedades del ángulo doble se tiene:

$$\mu \text{sen}(2\theta_0) A_{sv}^{\text{inc}} - \mu \text{sen}(2\theta_0) A_{sv}^{\text{ref}} - [\lambda + 2\mu \text{sen}^2(\theta_2)] \kappa A_p^{\text{ref}} = 0$$

y, tras modificar ligeramente la expresión, se llega, finalmente, a:

$$\text{sen}(2\theta_0) A_{sv}^{\text{ref}} + \frac{1}{\kappa} [1 - 2\kappa^2 \cos^2(\theta_2)] A_p^{\text{ref}} = \text{sen}(2\theta_0) A_{sv}^{\text{inc}} \quad (4.40)$$

Las expresiones (4.39) y (4.40) forman un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Dándole un valor unitario a la amplitud de la onda SV incidente se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} & \cos(2\theta_0) A_{sv}^{\text{ref}} + \text{sen}(2\theta_2) \kappa A_p^{\text{ref}} = -\cos(2\theta_0) \\ & \text{sen}(2\theta_0) A_{sv}^{\text{ref}} + \frac{1}{\kappa} [1 - 2\kappa^2 \cos^2(\theta_2)] A_p^{\text{ref}} = \text{sen}(2\theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

de cuya resolución se obtienen los siguientes valores para las amplitudes de las ondas reflejadas:

$$A_{sv}^{\text{ref}} = \frac{\kappa^2 \operatorname{sen}(2\theta_0) \operatorname{sen}(2\theta_2) - \cos^2(2\theta_0)}{\kappa^2 \operatorname{sen}(2\theta_0) \operatorname{sen}(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_0)} \quad (4.42)$$

para la onda SV y:

$$A_{p}^{\text{ref}} = -\frac{\kappa \operatorname{sen}(4\theta_0)}{\kappa^2 \operatorname{sen}(2\theta_0) \operatorname{sen}(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_0)} \quad (4.43)$$

para la P.

Las expresiones obtenidas son de validez general sea cual sea el ángulo θ_0 incidente. Sin embargo, resulta interesante estudiar determinadas situaciones a fin de ver cómo se comportan las amplitudes de las ondas reflejadas según el ángulo incidente. Cuando $\theta_0 = \theta_{cr}$ se tiene:

$$\cos(\theta_2) = \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \Rightarrow \cos(\theta_2) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta_2) = 0 \quad (4.44)$$

por lo que, bajo estas circunstancias, las amplitudes toman los siguientes valores:

$$A_{sv}^{\text{ref}} = -\frac{\cos^2(2\theta_0)}{\cos^2(2\theta_0)} = -1 \quad (4.45)$$

para la onda SV reflejada y:

$$A_{p}^{\text{ref}} = -\frac{\kappa \operatorname{sen}(4\theta_0)}{\cos^2(2\theta_0)} = -\frac{4\kappa^2 \sqrt{1-\kappa^2} (2\kappa^2 - 1)}{(2\kappa^2 - 1)^2} = -\frac{4\kappa^2 \sqrt{1-\kappa^2}}{2\kappa^2 - 1} \quad (4.46)$$

para la P reflejada. Así pues, cuando una onda incide con un ángulo igual al crítico, la amplitud de la onda SV reflejada toma un valor igual a -1 y la amplitud de la onda P reflejada depende del coeficiente de Poisson del medio.

Por otra parte, es posible expresar la amplitud de la onda P reflejada del modo siguiente:

$$A_{p}^{\text{ref}} = \frac{R}{a - bi} = \frac{R(a + bi)}{a^2 + b^2} = M e^{i\alpha} \quad (4.47)$$

donde M y $\tan(\alpha)$ valen:

$$M = \frac{R}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \tan(\alpha) = \frac{b}{a} \quad (4.48)$$

por lo que A_{p}^{ref} se puede escribir:

$$A_p^{\text{ref}} = \frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{i\alpha} \quad (4.49)$$

Sustituyendo estos valores en las componentes del desplazamiento debidas a la contribución de la onda P reflejada se obtiene:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^P = \begin{bmatrix} d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix} \frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{i\alpha} e^{\xi x_3} e^{-i k_r x_2} = \begin{bmatrix} d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix} S e^{\xi x_3} e^{-i k_r x_2 + i\alpha} \quad (4.50)$$

donde S y α son expresiones análogas a las obtenidas por Achenbach en [11], es decir:

$$S = \frac{\kappa \sin(4\theta_0)}{\sqrt{4 [\cos^2(\theta_0) - \kappa^2] \sin^2(2\theta_0) \cos^2(\theta_0) + \cos^4(2\theta_0)}} \quad (4.51)$$

$$\alpha = \frac{2 \sin(2\theta_0) \cos(\theta_0) \sqrt{\cos^2(\theta_0) - \kappa^2}}{\cos^2(2\theta_0)} \quad (4.52)$$

Por otro lado, otro supuesto de interés es el que se produce cuando el ángulo de incidencia es inferior al crítico. Como se comentó anteriormente, cuando el ángulo es subcrítico, el seno del ángulo θ_2 toma un valor complejo. Así:

$$\cos(\theta_0) > \kappa \Rightarrow \cos(\theta_2) = \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) > 1 \Rightarrow \sin(\theta_2) = \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0)} \in \mathbb{I}$$

que se puede poner:

$$\sin(\theta_2) = -i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \quad (4.53)$$

y sustituyendo ese valor en las expresiones de las amplitudes de las ondas reflejadas se obtiene:

$$A_{\text{sv}}^{\text{ref}} = \frac{-\cos^2(2\theta_0) - 2i\kappa^2 \sin(2\theta_0) \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1}}{\cos^2(2\theta_0) - 2i\kappa^2 \sin(2\theta_0) \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1}} \quad (4.54)$$

Resulta interesante visualizar una propiedad de esa amplitud. Así pues, llamando $a = \cos^2(2\theta_0)$ y $b = -2\kappa \sin(2\theta_0) \cos(\theta_0) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1}$ se puede escribir:

$$A_{sv}^{\text{ref}} = -\frac{a + bi}{a - bi} = -\frac{(a + bi)(a + bi)}{(a - bi)(a + bi)} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ab}{a^2 + b^2}i \quad (4.55)$$

siendo el módulo de esa expresión:

$$|A_{sv}^{\text{ref}}| = \frac{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} = 1 \quad (4.56)$$

De esta manera, para un ángulo de incidencia inferior al ángulo crítico se cumple que $|A_{sv}^{\text{ref}}| = 1$.

En lo referente a la amplitud de la onda P se tiene:

$$A_p^{\text{ref}} = -\frac{\kappa \operatorname{sen}(4\theta_0)}{\cos^2(2\theta_0) - 2i \operatorname{sen}(2\theta_0) \cos(\theta_0) \sqrt{\cos^2(\theta_0) - \kappa^2}} \quad (4.57)$$

4.5.5. Cambios de modo

De modo análogo al que ocurría cuando la onda que incidía era de tipo P, existe, al menos, un ángulo θ_0 de incidencia que produce que la amplitud de la onda SV reflejada se anule. De esta manera, para cada valor del coeficiente de Poisson existe un ángulo de incidencia para el que sólo se refleja una onda P. Para este caso, la expresión es:

$$\kappa^2 \operatorname{sen}(2\theta_0) \operatorname{sen}(2\theta_2) - \cos^2(2\theta_0) = 0 \quad (4.58)$$

que, en función únicamente del ángulo de incidencia, se puede escribir:

$$4\kappa \cos^2(\theta_0) \sqrt{1 - \cos^2(\theta_0)} \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0)} - 4 \cos^4(\theta_0) + 4 \cos^2(\theta_0) - 1 = 0 \quad (4.59)$$

Resulta interesante analizar el comportamiento de la amplitud de la onda SV reflejada conforme varía el ángulo θ_0 de incidencia. De este modo, la amplitud de la onda SV reflejada es, en el caso general, un valor complejo, puesto que el radicando de la segunda raíz del primer miembro de la ecuación (4.59) $(1 - 1/\kappa^2 \cos^2(\theta_0))$ toma valores negativos cuando el ángulo de incidencia es subcrítico.

Profundizando un poco más en lo comentado en el párrafo anterior, existe una componente imaginaria distinta de cero en las amplitudes de las ondas SV reflejadas cuando el ángulo de incidencia es subcrítico, componente que se anula,

en todos los casos, al sobrepasar el ángulo crítico, momento a partir del cual la amplitud de la onda toma valores reales. Por otra parte, el cambio de modo se refleja en un cambio de signo en la parte real de la amplitud de la onda incidente, permaneciendo la parte imaginaria siempre con signo negativo.

La siguiente figura permite visualizar la situación descrita en los párrafos anteriores, mostrándose la variación de las partes real e imaginaria de la amplitud de la onda SV con ángulo θ_0 de incidencia para un conjunto de valores del coeficiente de Poisson del terreno.

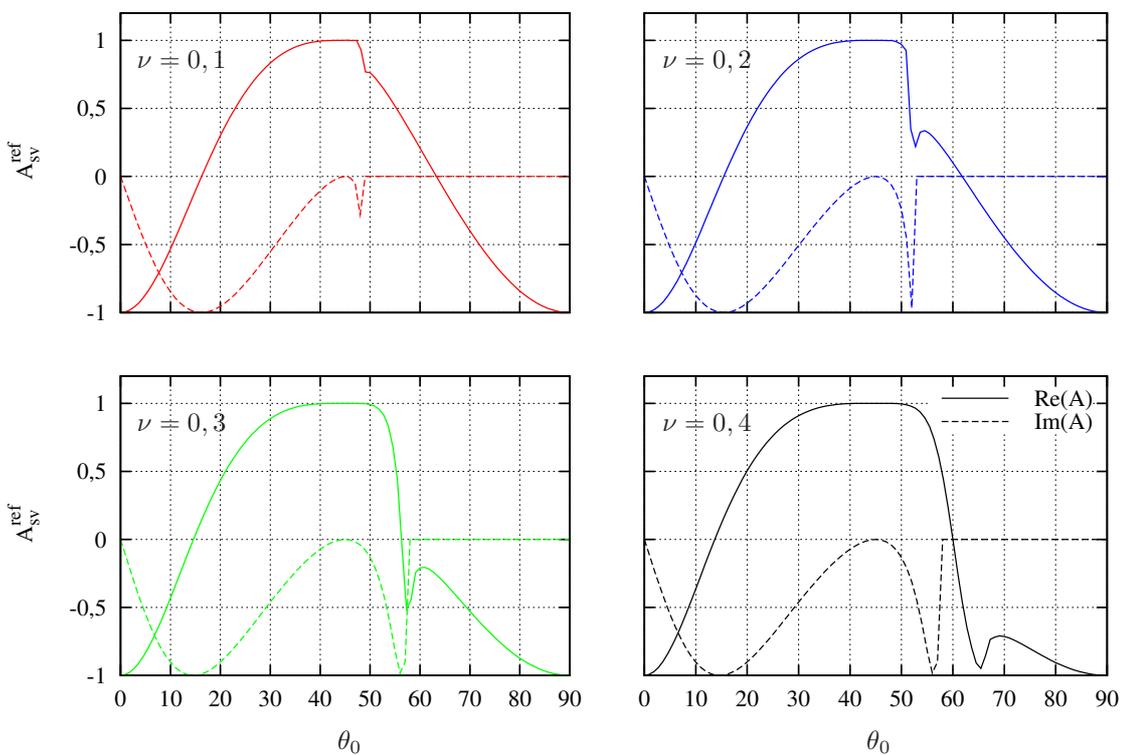


Figura 4.7: Variación de la amplitud de la onda SV reflejada con el ángulo de incidencia θ_0

Por último, el cuadro que se muestra a continuación presenta, de modo resumido, los valores del ángulo de cambio de modo (θ_{cmodo}) para una cierta cantidad de coeficientes de Poisson del suelo. Es destacable que, tal y como se puede verificar en la figura anterior, existen dos valores por coeficiente de Poisson para los que se anula la amplitud de la onda SV reflejada. Por su parte, cuando el coeficiente de Poisson toma un valor de 0,5, existe una singularidad en la formulación que impide la determinación de la amplitud de la onda SV reflejada.

ν	κ	θ_{cmodo}
0,1	0,667	16,229° y 63,206°
0,2	0,612	15,444° y 61,752°
0,3	0,535	14,608° y 56,353°
0,4	0,408	13,702° y 59,996°
0,5	0	-

Cuadro 4.3: Cuadro resumen de los ángulos de cambio de modo para una onda incidente tipo SV y un conjunto de coeficientes de Poisson del terreno

4.6. Implementación del ángulo ϕ_0 en la formulación

La formulación planteada hasta este momento permite tener en cuenta una onda con incidencia genérica en el plano $x_2 x_3$. Sin embargo, no se refleja en ella la posible incidencia genérica respecto a otro plano. Es implementar esa posibilidad el objetivo del presente epígrafe.

En la figura siguiente se puede observar una representación del sistema de ejes empleado y de la relación existente entre los ejes definidos anteriormente (\tilde{x}_2 y \tilde{x}_3) y los nuevos ejes genéricos ($x_2 x_3$).

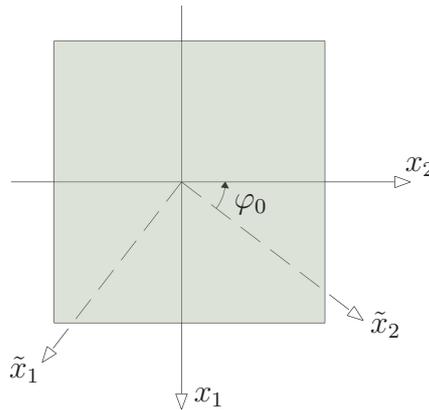


Figura 4.8: Ángulo φ_0

Definiendo un conjunto de vectores unitarios en la dirección de los tres ejes cartesianos del problema inicial (conjunto $\tilde{\mathbf{i}}_1, \tilde{\mathbf{i}}_2, \tilde{\mathbf{i}}_3$) y otro en la dirección de los

nuevos tres ejes cartesianos (conjunto $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$), se puede demostrar que existe entre ellos la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0) & \text{sen}(\varphi_0) & 0 \\ -\text{sen}(\varphi_0) & \cos(\varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{i}}_1 \\ \tilde{\mathbf{i}}_2 \\ \tilde{\mathbf{i}}_3 \end{bmatrix}$$

La matriz que relaciona el conjunto de vectores unitarios del sistema de ejes inicial con el del sistema $x_1 x_2 x_3$ se denomina matriz de rotación y se denotará en lo sucesivo mediante la letra \mathbf{R} .

A pesar de que las expresiones son de aplicación totalmente general, se emplearán, a modo de ejemplo, los parámetros relativos a la onda SV. Esto se hace únicamente con fines ilustrativos y ejemplificadores, siendo las expresiones y conclusiones, como se ha dicho, totalmente generales. En este sentido, el campo de desplazamientos en el sistema de ejes inicial ($\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$) se puede expresar como:

$$(0, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = \tilde{d}^{(0)} A_{\text{sv}}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\tilde{\mathbf{s}}^{(0)} \cdot \tilde{\mathbf{r}})} + \tilde{d}^{(1)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\tilde{\mathbf{s}}^{(1)} \cdot \tilde{\mathbf{r}})} + \tilde{d}^{(2)} A_{\text{p}}^{\text{ref}} e^{-i k_p (\tilde{\mathbf{s}}^{(2)} \cdot \tilde{\mathbf{r}})}$$

cuyos vectores de propagación y desplazamientos $\tilde{\mathbf{s}}$ y $\tilde{\mathbf{d}}$ son:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{s}}^{(0)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_0) \\ \text{sen}(\theta_0) \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{d}}^{(0)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen}(\theta_0) \\ -\cos(\theta_0) \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{s}}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_1) \\ -\text{sen}(\theta_1) \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{d}}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\text{sen}(\theta_1) \\ -\cos(\theta_1) \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{s}}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_2) \\ -\text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} & \tilde{\mathbf{d}}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_2) \\ -\text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y premultiplicando la expresión del campo de desplazamientos por \mathbf{R} se obtiene:

$$\mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{d}}^{(0)} A_{\text{sv}}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\tilde{\mathbf{s}}^{(0)} \cdot \tilde{\mathbf{r}})} + \mathbf{R} \tilde{\mathbf{d}}^{(1)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\tilde{\mathbf{s}}^{(1)} \cdot \tilde{\mathbf{r}})} + \mathbf{R} \tilde{\mathbf{d}}^{(2)} A_{\text{p}}^{\text{ref}} e^{-i k_p (\tilde{\mathbf{s}}^{(2)} \cdot \tilde{\mathbf{r}})}$$

La expresión del producto escalar $\tilde{\mathbf{s}}^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{r}}$ se puede poner como:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{s}}^{(j)} \cdot \tilde{\mathbf{r}} &= \langle \tilde{s}_1^{(j)} \quad \tilde{s}_2^{(j)} \quad \tilde{s}_3^{(j)} \rangle \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{s}_1^{(j)} \\ \tilde{s}_2^{(j)} \\ \tilde{s}_3^{(j)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \\
&= (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}^{(j)})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} = [\mathbf{s}^{(j)}]^T (\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} = \\
&= [\mathbf{s}^{(j)}]^T \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} = [\mathbf{s}^{(j)}]^T \cdot \mathbf{r} = \mathbf{s}^{(j)} \cdot \mathbf{r} \quad (4.60)
\end{aligned}$$

Según esa igualdad, se puede establecer que el producto de la matriz \mathbf{R} por el campo de desplazamientos toma el valor:

$$\mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{d}}^{(0)} A_{\text{sv}}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + \mathbf{R} \tilde{\mathbf{d}}^{(1)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + \mathbf{R} \tilde{\mathbf{d}}^{(2)} A_{\text{p}}^{\text{ref}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}$$

Teniendo en cuenta que se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}} \\
\mathbf{s}^{(0)} &= \mathbf{R} \tilde{\mathbf{s}}^{(0)} & \mathbf{d}^{(0)} &= \mathbf{R} \tilde{\mathbf{d}}^{(0)} \\
\mathbf{s}^{(1)} &= \mathbf{R} \tilde{\mathbf{s}}^{(1)} & \mathbf{d}^{(1)} &= \mathbf{R} \tilde{\mathbf{d}}^{(1)} \\
\mathbf{s}^{(2)} &= \mathbf{R} \tilde{\mathbf{s}}^{(2)} & \mathbf{d}^{(2)} &= \mathbf{R} \tilde{\mathbf{d}}^{(2)}
\end{aligned}$$

el campo de desplazamientos queda, finalmente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{d}^{(0)} A_{\text{sv}}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + \mathbf{d}^{(1)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + \mathbf{d}^{(2)} A_{\text{p}}^{\text{ref}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \quad (4.61)$$

Así, el problema se puede plantear de modo análogo al realizado para el plano $x_2 x_3$ con la salvedad de que, en esta ocasión, los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} deben de tener las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{s}}^{(0)} &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0) & \text{sen}(\varphi_0) & 0 \\ -\text{sen}(\varphi_0) & \cos(\varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_0) \\ \text{sen}(\theta_0) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \text{sen}(\varphi_0) \cos(\theta_0) \\ \cos(\varphi_0) \cos(\theta_0) \\ \text{sen}(\theta_0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{s}}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0) & \text{sen}(\varphi_0) & 0 \\ -\text{sen}(\varphi_0) & \cos(\varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_1) \\ -\text{sen}(\theta_1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \text{sen}(\varphi_0) \cos(\theta_1) \\ \cos(\varphi_0) \cos(\theta_1) \\ -\text{sen}(\theta_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{s}}^{(2)} &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0) & \text{sen}(\varphi_0) & 0 \\ -\text{sen}(\varphi_0) & \cos(\varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_2) \\ -\text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \text{sen}(\varphi_0) \cos(\theta_2) \\ \cos(\varphi_0) \cos(\theta_2) \\ -\text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{d}}^{(0)} &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0) & \text{sen}(\varphi_0) & 0 \\ -\text{sen}(\varphi_0) & \cos(\varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sen}(\theta_0) \\ -\cos(\theta_0) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \text{sen}(\varphi_0) \text{sen}(\theta_0) \\ \cos(\varphi_0) \text{sen}(\theta_0) \\ -\cos(\theta_0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{d}}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0) & \text{sen}(\varphi_0) & 0 \\ -\text{sen}(\varphi_0) & \cos(\varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\text{sen}(\theta_1) \\ -\cos(\theta_1) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\text{sen}(\varphi_0) \text{sen}(\theta_1) \\ -\cos(\varphi_0) \text{sen}(\theta_1) \\ -\cos(\theta_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{d}}^{(2)} &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0) & \sin(\varphi_0) & 0 \\ -\sin(\varphi_0) & \cos(\varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_2) \\ -\sin(\theta_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sin(\varphi_0) \cos(\theta_2) \\ \cos(\varphi_0) \cos(\theta_2) \\ -\sin(\theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.7. Implementación del campo incidente en la formulación

Una vez se han establecido las ecuaciones de gobierno del problema en estudio, es posible implementarlas en el código acoplado de elementos de contorno y elementos finitos preexistente. Para tal fin, es necesario expresar las ecuaciones del capítulo 3 en términos de las variables comentadas a lo largo del presente.

De esta manera, cuando inciden ondas sísmicas en el lugar bajo estudio, tienen lugar fenómenos de reflexión y refracción, de modo que el campo de ondas que surge modifica el tren de ondas incidente. El campo de ondas original se asume que proviene de una fuente lejana y, como se adelantó al comienzo del presente capítulo, recibe la denominación de *campo incidente* \mathbf{u}_I , mientras que el producido por los fenómenos de reflexión y refracción se conoce como *campo reflejado* \mathbf{u}_R . De esta manera, los campos de desplazamientos y tensiones resultantes (*campos totales*) pueden obtenerse por superposición siendo, respectivamente, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_R$ y $\mathbf{p} = \mathbf{p}_I + \mathbf{p}_R$.

Así pues, considérese una cimentación pilotada embebida en un semiespacio homogéneo sometida a un tren de ondas armónicas incidentes, tal y como se puede observar en la figura 4.9. Así, pues, que el dominio semiinfinito Ω está definido por el contorno Γ . Debe destacarse que la magnitud del campo reflejado disminuye con la distancia debido al amortiguamiento del material y de radiación del suelo y, en consecuencia, no es preciso discretizar el contorno alejado de la cimentación.

De esta manera, puede escribirse la ecuación (3.3) para Ω en términos del campo total como:

$$\mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{sp_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{s_j} F_{p_j} = 0 \quad (4.62)$$

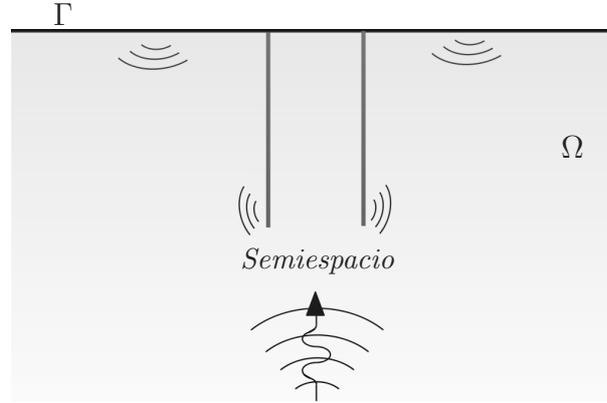


Figura 4.9: Campos incidente y reflejado para pilotes embebidos en un semiespacio

Por otro lado, como tanto el campo incidente, como el reflejado y el total satisfacen las ecuaciones de gobierno, la ecuación (3.3) puede escribirse, en términos del campo incidente, como:

$$\mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}_I^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}_I^s = 0 \quad (4.63)$$

donde las tensiones sobre la interfase pilote-suelo q^{sj} y las fuerzas en las puntas de los pilotes F_{p_j} no están presentes por existir únicamente en el campo reflejado. La sustracción de la ecuación (4.63) en (4.62) da:

$$\mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{sp_j} \mathbf{q}^{sj} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{sj} F_{p_j} = \mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}_I^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}_I^s \quad (4.64)$$

donde el vector del lado derecho se conoce ya que las expresiones analíticas de \mathbf{u}_I^s y \mathbf{p}_I^s se han obtenido a lo largo del presente capítulo para cada onda incidente. El mismo procedimiento puede seguirse para obtener las ecuaciones MEC (3.4) y (3.6) para las líneas de carga. Por el contrario, la ecuación de elementos finitos (3.23) contiene variables únicamente en el campo reflejado y, en consecuencia, no precisan ser reescritas.

De esta manera, los campos de desplazamientos y tensiones del campo incidente obtenidos en este capítulo se convierten en un dato más del problema, formando parte del vector del lado derecho del sistema global de ecuaciones del problema.

4.8. Implementación del modelo en el código

4.8.1. Tratamiento de la simetría

El código existente permite abordar la resolución de problemas mediante la discretización de tan solo un cuarto de la geometría, con el consiguiente ahorro en grados de libertad que ello implica. Sin embargo, a pesar de que la geometría de un problema particular pueda describirse mediante el conocimiento de un cuarto de la misma, el problema de propagación de ondas estudiado en el presente trabajo no puede resolverse mediante el análisis de un único caso. De esta manera, al ser la geometría simétrica pero no serlo la sollicitación, es necesario realizar un tratamiento especial del problema, de modo que la solución del mismo se obtenga como superposición de cuatro casos: uno simétrico-simétrico respecto a los planos $x_1 x_3$ y $x_2 x_3$, otro simétrico respecto a $x_1 x_3$ y antisimétrico respecto a $x_2 x_3$, otro antisimétrico respecto a $x_1 x_3$ y simétrico respecto a $x_2 x_3$ y un último caso antisimétrico respecto a $x_1 x_3$ y $x_2 x_3$.

La formulación debe, por tanto, adaptarse a las consideraciones expuestas en el párrafo anterior, de modo que las expresiones varíen en función del caso de simetría bajo análisis. Para tal fin es necesario adaptar las expresiones del campo incidente de forma que se tenga en cuenta la necesidad planteada. Recupérese, por tanto, la expresión genérica del campo de desplazamientos (ecuación (4.1)):

$$u_i = \sum_{j=1}^n d_i^j A_j e^{-i k_j (\mathbf{s}^{(j)} \cdot \mathbf{r})} \quad (4.1)$$

Los términos afectados por la simetría son los que contienen referencias a las coordenadas espaciales, es decir, los términos exponenciales. En efecto, para cada una de las j ondas del problema se tiene:

$$e^{-i k_j (\mathbf{s}^{(j)} \cdot \mathbf{r})} = e^{-i k_j (s_1^{(j)} x_1)} e^{-i k_j (s_2^{(j)} x_2)} e^{-i k_j (s_3^{(j)} x_3)} \quad (4.65)$$

De esta manera, los términos afectados por la simetría son los que contienen variables en x_1 y en x_2 . Esos términos pueden expresarse, aplicando ciertas consideraciones sencillas, como:

$$\begin{aligned} e^{-i k_j (s_1^{(j)} x_1)} &= \frac{1}{2} \left[e^{-i k_j (s_1^{(j)} x_1)} + e^{i k_j (s_1^{(j)} x_1)} \right] + \frac{1}{2} \left[e^{-i k_j (s_1^{(j)} x_1)} - e^{i k_j (s_1^{(j)} x_1)} \right] = \\ &= \cos \left(k_j s_1^{(j)} x_1 \right) + i \operatorname{sen} \left(k_j s_1^{(j)} x_1 \right) \end{aligned} \quad (4.66)$$

para la componente dependiente de x_1 y

$$\begin{aligned}
e^{-ik_j (s_2^{(j)} \cdot x_2)} &= \frac{1}{2} \left[e^{-ik_j (s_2^{(j)} x_2)} + e^{ik_j (s_2^{(j)} x_2)} \right] + \frac{1}{2} \left[e^{-ik_j (s_2^{(j)} x_2)} - e^{ik_j (s_2^{(j)} x_2)} \right] = \\
&= \cos \left(k_j s_2^{(j)} x_2 \right) + i \operatorname{sen} \left(k_j s_2^{(j)} x_2 \right) \quad (4.67)
\end{aligned}$$

para la componente que depende de x_2 . Por otra parte, la componente que depende de x_3 , como ya fue comentado, no se ve afectada por la simetría.

Con el fin de simplificar la nomenclatura posterior, las ecuaciones (4.66) y (4.67) anteriores se escribirán del modo siguiente:

$$e^{-ik_j (s_1^{(j)} \cdot x_1)} = \operatorname{exc}(j) + \operatorname{exs}(j) \quad (4.68)$$

$$e^{-ik_j (s_2^{(j)} \cdot x_2)} = \operatorname{eyc}(j) + \operatorname{eys}(j) \quad (4.69)$$

siendo:

$$\operatorname{exc}(j) = \cos \left(k_j s_1^{(j)} x_1 \right) \quad (4.70)$$

$$\operatorname{exs}(j) = i \operatorname{sen} \left(k_j s_1^{(j)} x_1 \right) \quad (4.71)$$

y:

$$\operatorname{eyc}(j) = \cos \left(k_j s_2^{(j)} x_2 \right) \quad (4.72)$$

$$\operatorname{eys}(j) = i \operatorname{sen} \left(k_j s_2^{(j)} x_2 \right) \quad (4.73)$$

Análoga consideración se realiza con la componente dependiente de x_3 , que si bien no se ve afectada por la simetría, se expresará del modo siguiente por razones de simplicidad:

$$e^{-ik_j (s_3^{(j)} x_3)} = \operatorname{ez}(j) \quad (4.74)$$

Por ello, la exponencial genérica presentada en la ecuación (4.65) puede escribirse:

$$\begin{aligned}
e^{-ik_j (s^{(j)} \cdot r)} &= [\operatorname{exc}(j) + \operatorname{exs}(j)] [\operatorname{eyc}(j) + \operatorname{eys}(j)] \operatorname{ez}(j) = \\
&= [\operatorname{exc}(j) \operatorname{eyc}(j) + \operatorname{exc}(j) \operatorname{eys}(j) + \\
&\quad + \operatorname{exs}(j) \operatorname{eyc}(j) + \operatorname{exs}(j) \operatorname{eys}(j)] \operatorname{ez}(j) \quad (4.75)
\end{aligned}$$

De este modo, el campo de desplazamientos puede expresarse como la suma de cuatro casos, cada uno de los cuales se corresponde con una configuración de simetría concreta. La expresión del campo de desplazamientos en dirección x_1 queda, por tanto:

$$u_1 = \sum_{j=1}^n d_1^j A_j \text{exs}(j) \text{eyc}(j) \text{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_1^j A_j \text{exc}(j) \text{eyc}(j) \text{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_1^j A_j \text{exs}(j) \text{eys}(j) \text{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_1^j A_j \text{exc}(j) \text{eys}(j) \text{ez}(j) \quad (4.76)$$

siendo la componente en dirección x_2 :

$$u_2 = \sum_{j=1}^n d_2^j A_j \text{exc}(j) \text{eys}(j) \text{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_2^j A_j \text{exs}(j) \text{eys}(j) \text{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_2^j A_j \text{exc}(j) \text{eyc}(j) \text{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_2^j A_j \text{exs}(j) \text{eyc}(j) \text{ez}(j) \quad (4.77)$$

y para la dirección x_3 :

$$u_3 = \sum_{j=1}^n d_3^j A_j \text{exc}(j) \text{eyc}(j) \text{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_3^j A_j \text{exs}(j) \text{eyc}(j) \text{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_3^j A_j \text{exc}(j) \text{eys}(j) \text{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_3^j A_j \text{exs}(j) \text{eys}(j) \text{ez}(j) \quad (4.78)$$

En las expresiones anteriores, los cuatro sumandos representan, respectivamente, las componentes del desplazamiento debidas al caso doblemente simétrico, al caso simétrico respecto a $x_1 x_3$ y antisimétrico respecto a $x_2 x_3$, al caso simétrico respecto a $x_2 x_3$ y antisimétrico respecto a $x_1 x_3$ y al caso doblemente antisimétrico.

Una vez se obtienen las distintas componentes del desplazamiento, la determinación del tensor de deformaciones para cada caso se realiza mediante aplicación directa de la ecuación (2.1) de compatibilidad de las deformaciones. A partir de ese punto, la obtención del tensor de tensiones es inmediata aplicando la ley de comportamiento del material (ecuación (2.3)).

Así pues, el procedimiento para el cálculo del campo de desplazamientos y tensiones del campo incidente pasa por obtener, mediante superposición, la respuesta del medio ante cada uno de los cuatro casos planteados, por determinación sucesiva del campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones, haciendo uso de las expresiones anteriores.

4.8.2. Implementación computacional

Llegado este punto, es momento de estudiar el modo de implementar la formulación expuesta a lo largo del capítulo en el programa existente en el seno de la División de Mecánica de Medio Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería. El código existente en el momento de comienzo del presente trabajo permitía la posibilidad de analizar problemas elastodinámicos en el dominio de la frecuencia multidominio mediante un modelo acoplado de elementos de contorno y elementos finitos. Sin embargo, los análisis que podían realizarse en el momento de comenzar el trabajo estaban limitados a la consideración de incidencia vertical para el tren de ondas incidente. Por ello, el objetivo principal consiste en generalizar el código a problemas en los que el tren de ondas incidente forma un ángulo genérico con la superficie libre del semiespacio.

La figura siguiente muestra el diagrama de flujo general del programa existente, con indicación del lugar de ubicación de la subrutina creada.

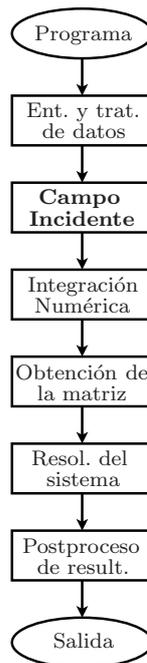


Figura 4.10: *Diagrama de flujo del programa principal*

El esquema general de la subrutina elaborada es el que puede observarse en la figura 4.11. En él, se establece que el primero de los pasos tras entrar en código consiste en la determinación de diversos parámetros genéricos aplicables a cualquier onda incidente, como son los números de onda o la variable κ . Finalizada esa fase,

es momento de entrar en el núcleo de cálculo, el cual se encarga de determinar, en primer lugar, el tipo de onda incidente. En función de ese parámetro, se calculan las amplitudes de las ondas que intervienen en el problema en estudio, así como los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} con la distinción entre ángulo subcrítico o supercrítico en el caso de que la onda incidente sea de tipo SV. A continuación, el programa recupera una estructura lineal para determinar, sucesivamente, los nuevos vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} una vez se ha tenido en cuenta el ángulo φ_0 y los parámetros exponenciales de las ecuaciones (4.66), (4.67) y (4.74). Llegado este punto, el programa vuelve a bifurcarse para determinar, en función del caso de simetría lanzado, las expresiones del campo de desplazamientos y de sus derivadas espaciales. Una última unión permite, nuevamente, recuperar la estructura única para determinar los tensores de deformaciones y tensión una vez obtenidos todos los datos necesarios. Por último, el programa determina si el nodo donde se han obtenido las variables de interés es el último por calcular, devolviendo el valor del campo de desplazamientos y del tensor de tensiones en caso afirmativo y retornando a la cabecera del mismo en caso de restar algún nodo por analizar.

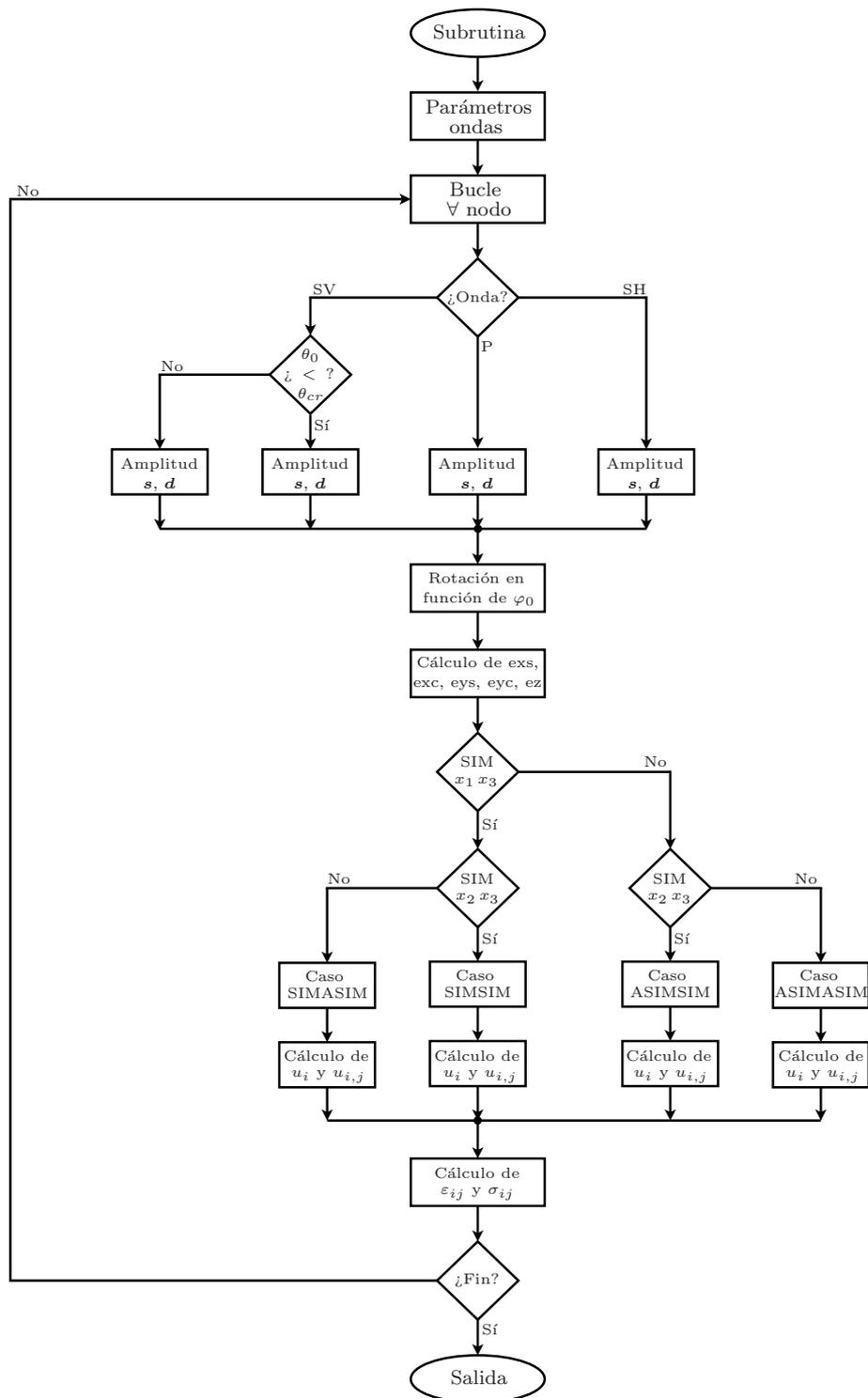


Figura 4.11: Diagrama de flujo de la subrutina programada

Capítulo 5

Resultados de comprobación

5.1. Introducción

En los capítulos anteriores se establecieron las bases de la elastodinámica, se formuló el método de elementos de contorno, se planteó el modelo acoplado de elementos de contorno y elementos finitos, se describieron las ecuaciones de gobierno del problema de propagación de ondas con ángulo de incidencia genérico y se implementaron en el modelo acoplado. Es momento, pues, de verificar la adecuación de la formulación y de la implementación de la misma mediante un proceso de comparación con resultados existentes en la bibliografía que posean una fiabilidad contrastada.

De este modo, en la sección 5.2 se comparan los resultados obtenidos por aplicación del modelo propuesto con los presentados por Maeso *et ál.* en [34] y por Padrón en [35]. El primero de ellos emplea un modelo exclusivo de elementos de contorno, mientras que el segundo establece las bases de la formulación empleada en el presente documento, formulando, de modo acoplado, un modelo de elementos de contorno y elementos finitos.

Por otra parte, en la sección 5.3 se efectúa un proceso de comparación con los resultados obtenidos por Kaynia y Novak en [36], referencia habitual en materia de propagación de ondas con ángulo genérico y que ha demostrado ser una publicación válida en el ámbito bajo estudio.

5.2. Comparación con Maeso *et ál.* [34] y Padrón [35]

A lo largo del presente apartado se obtendrán las funciones de transferencia para los desplazamientos horizontales de una determinada configuración estructural. La mencionada función de transferencia representa, en función de la frecuencia

de excitación, la respuesta del sistema en la variable de interés.

Es habitual en la bibliografía establecer un parámetro conocido como frecuencia adimensional que relaciona la frecuencia de excitación con parámetros relativos a la cimentación y a las propiedades del terreno. En concreto, se tiene:

$$a_o = \frac{\omega d}{c_s} \quad (5.1)$$

siendo c_s la velocidad de propagación de ondas de corte en el terreno, dada por la ecuación (2.8) obtenida anteriormente. La frecuencia adimensional establece, además, una relación entre el diámetro del pilote y la longitud de onda de la excitación ($a_o = 2\pi d/\lambda$, siendo λ la longitud de onda de la excitación).

Así pues, en la presente sección se obtendrá la interacción cinemática para un pilote simple embebido en un semiespacio. Los resultados se comparan con los obtenidos mediante el código de elementos de contorno multidominio de Maeso, Aznárez y García [34] y, a su vez, con los que se presentan en [35]. El problema en cuestión consiste en la propagación de una onda de tipo SH con incidencia vertical en un semiespacio. En concreto, el coeficiente de amortiguamiento del terreno es $\beta = 0,05$, siendo la relación entre el módulo de elasticidad del pilote y el del terreno $E_p/E_s = 1000$, el cociente entre la densidad del suelo y la del pilote $\rho_s/\rho_p = 0,7$, la esbeltez del pilote $L/d = 20$ y los coeficientes de Poisson del terreno y el pilote $\nu_s = 0,4$ para el suelo y $\nu_p = 0,25$ para el pilote. De esta manera, la figura 5.1 presenta las partes real e imaginaria de las funciones de transferencia dadas en términos de la relación entre el módulo del desplazamiento horizontal en la cabeza del pilote (u) y el correspondiente módulo del desplazamientos de campo libre (u_{ff}). Debe destacarse que, por usarse el mismo código que empleó Padrón en [35] sólo que con la posibilidad de tener un ángulo de incidencia genérico, las soluciones obtenidas para incidencia vertical resultan ser exactamente iguales, razón por la cual en la figura 5.1 la referencia al modelo presentado se puede hacer extensiva a los resultados presentados por Padrón.

Por otro lado, la figura 5.2 representa, para las mismas propiedades de los medios implicados que en el caso anterior, la función de transferencia en módulo de desplazamientos verticales cuando la onda que incide es una de tipo P. También en esta ocasión puede hacerse extensiva la referencia al modelo presentado a los resultados de Padrón.

En ambos casos puede observarse que la diferencia existente entre las curvas es muy reducida, con la ventaja añadida de que en el método propuesto en el presente trabajo no es preciso realizar una malla MEC para el pilote ni vaciar el terreno donde éste se encuentra colocado, pues el suelo se modela como un medio continuo y el pilote mediante elementos finitos unidimensionales. De esta manera, el problema formulado es equivalente pero con un considerable ahorro de nodos, elementos y, por ende, de grados de libertad y tiempos de computación.

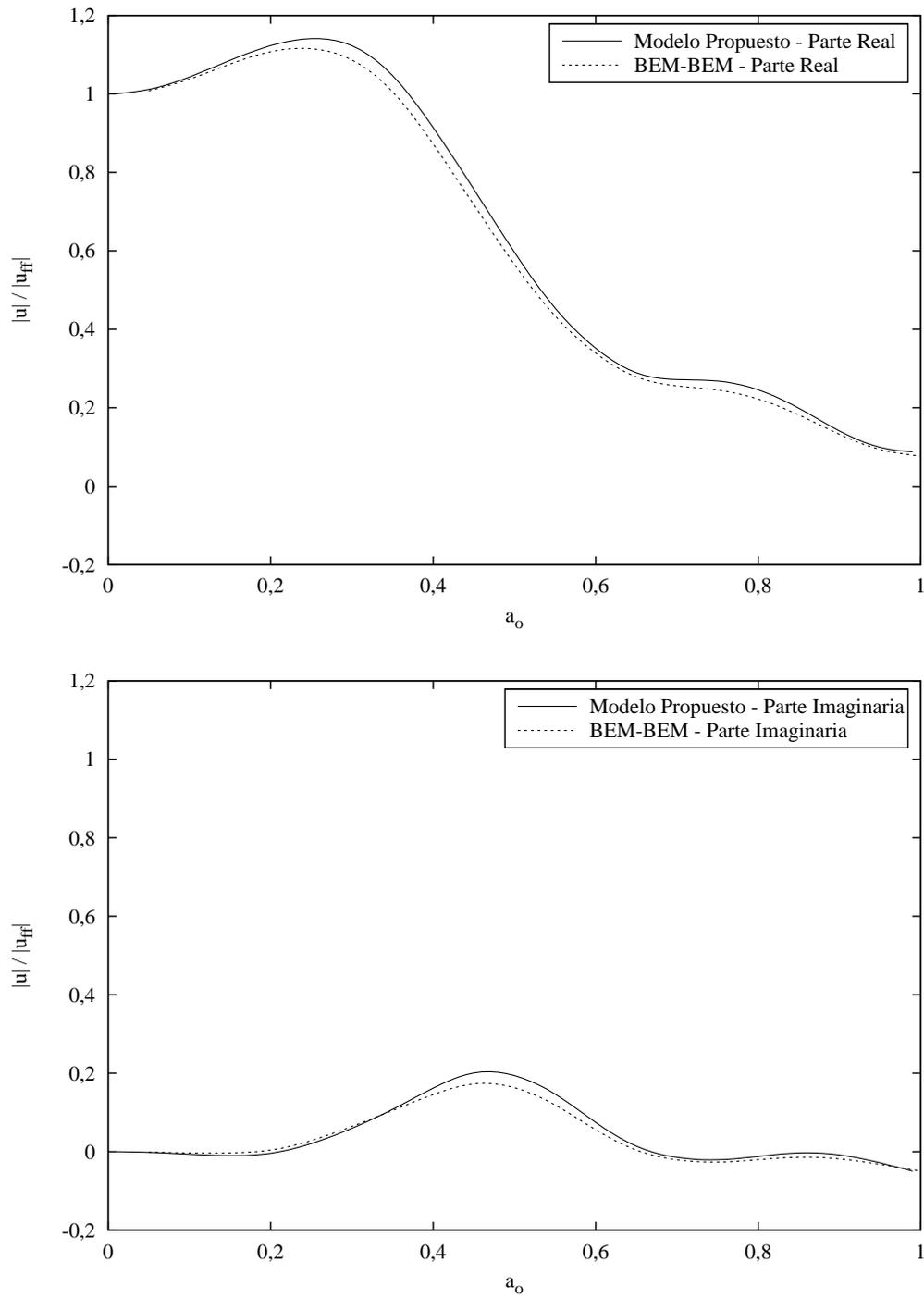


Figura 5.1: Factores de interacción cinemática para un pilote simple sometido a ondas SH de incidencia vertical. Comparación con Maeso et ál.

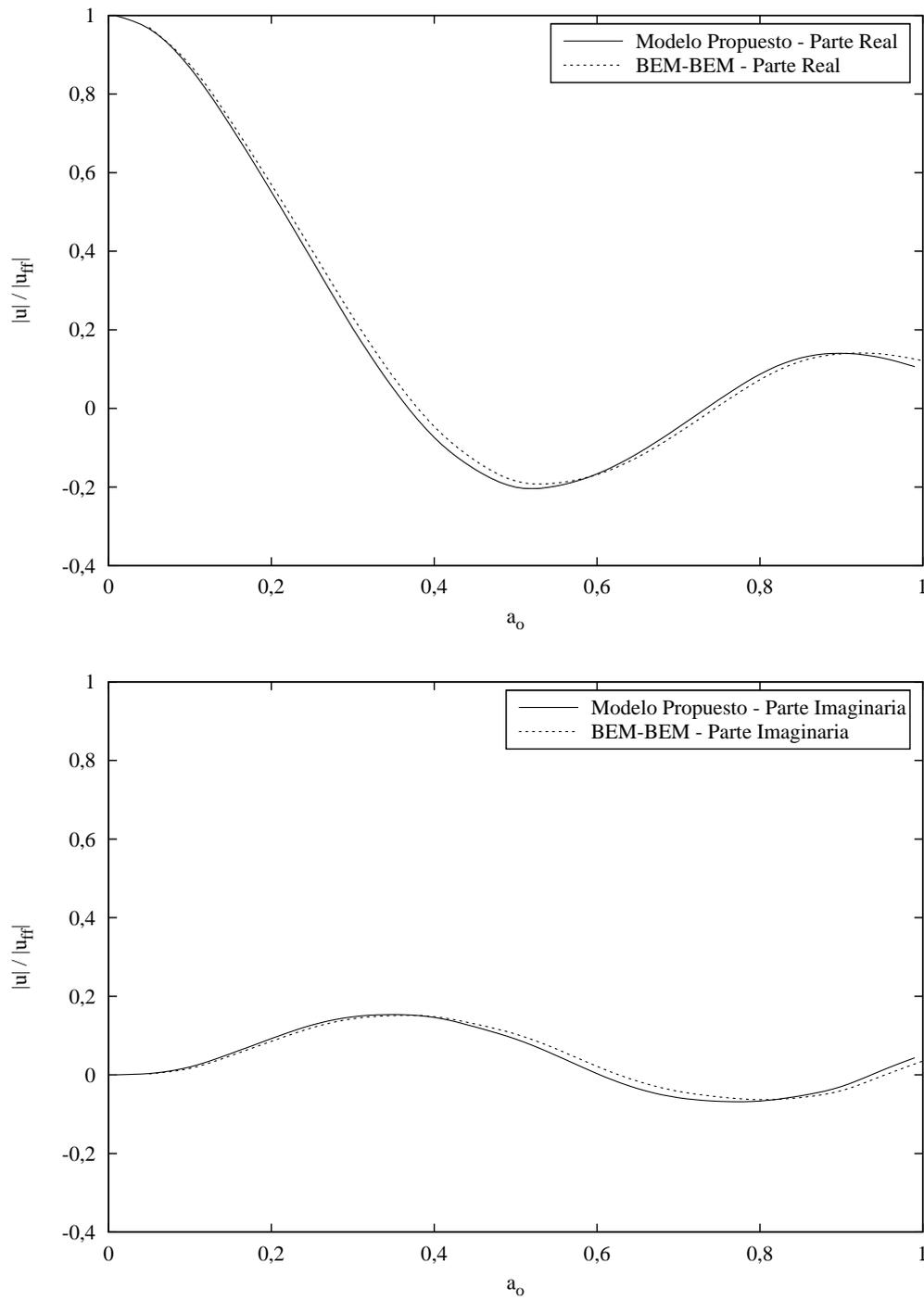


Figura 5.2: Factores de interacción cinemática para un pilote simple sometido a ondas P de incidencia vertical. Comparación con Maeso et ál.

5.3. Comparación con Kaynia y Novak [36]

En esta ocasión, se comparan los resultados obtenidos por aplicación del modelo del presente trabajo con los presentados por Kaynia y Novak en [36]. Kaynia y Novak emplean un modelo donde los pilotes se modelan como elementos prismáticos elásticos y lineales y el suelo como un medio viscoelástico semi-infinito, construyéndose las funciones de Green requeridas mediante una aproximación denominada por los autores “*discrete layer matrix*”.

Las variables de interés en esta ocasión son las componentes del movimiento que influyen en la respuesta horizontal del sistema estructura-cimentación, es decir, los desplazamientos horizontales y los giros en torno a un eje perpendicular al plano del movimiento. Tal y como ocurría en la sección anterior, los resultados se adimensionalizan en relación a los desplazamientos horizontales de campo libre en el punto de referencia ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$), definiendo, pues, las respuestas de la cimentación a ondas sísmicas que provocan un movimiento horizontal en la superficie libre unitario, es decir, las funciones de transferencia de la cimentación.

Las propiedades de los medios implicados en el análisis consisten en un coeficiente de amortiguamiento del terreno $\beta = 0,05$, una relación entre el módulo de elasticidad del pilote y del suelo de $E_p/E_s = 100$ en unos casos y $E_p/E_s = 1000$ en otros, un cociente entre las densidades de pilote y suelo de $\rho_p/\rho_s = 1,5$, una esbeltez de los pilotes de $L/d = 20$ y unos coeficientes de Poisson de pilote y suelo de $\nu_p = 0,25$ y $\nu_s = 1/3$, respectivamente. Se estudian problemas con pilotes simples y grupos de pilotes sometidos a ondas SH, SV y P para distintos ángulos de incidencia. La relación entre la separación de los pilotes y su diámetro para grupos es $s/d = 5$ salvo indicación expresa en sentido contrario. El ángulo φ_0 es nulo en todos los casos.

Las figuras 5.3 a 5.14 representan las funciones de transferencia en desplazamientos y giros para pilotes simples y grupos de 3×3 y 4×4 pilotes embebidos en un semiespacio. Se estudian los casos de ondas incidentes SH, SV y P cuya dirección de propagación se encuentra contenida en el plano $x_2 x_3$, formando un ángulo genérico con el eje x_2 .

Los rangos de error existentes son aceptables para esta clase de estudios numéricos, llegando a valores de en torno al 5% para los desplazamientos y al 6,5% en giros.

El estudio de las particularidades propias de cada uno de los problemas está fuera del alcance del presente trabajo, emplazando al lector interesado a la referencia [36] a fin de ahondar en la materia.

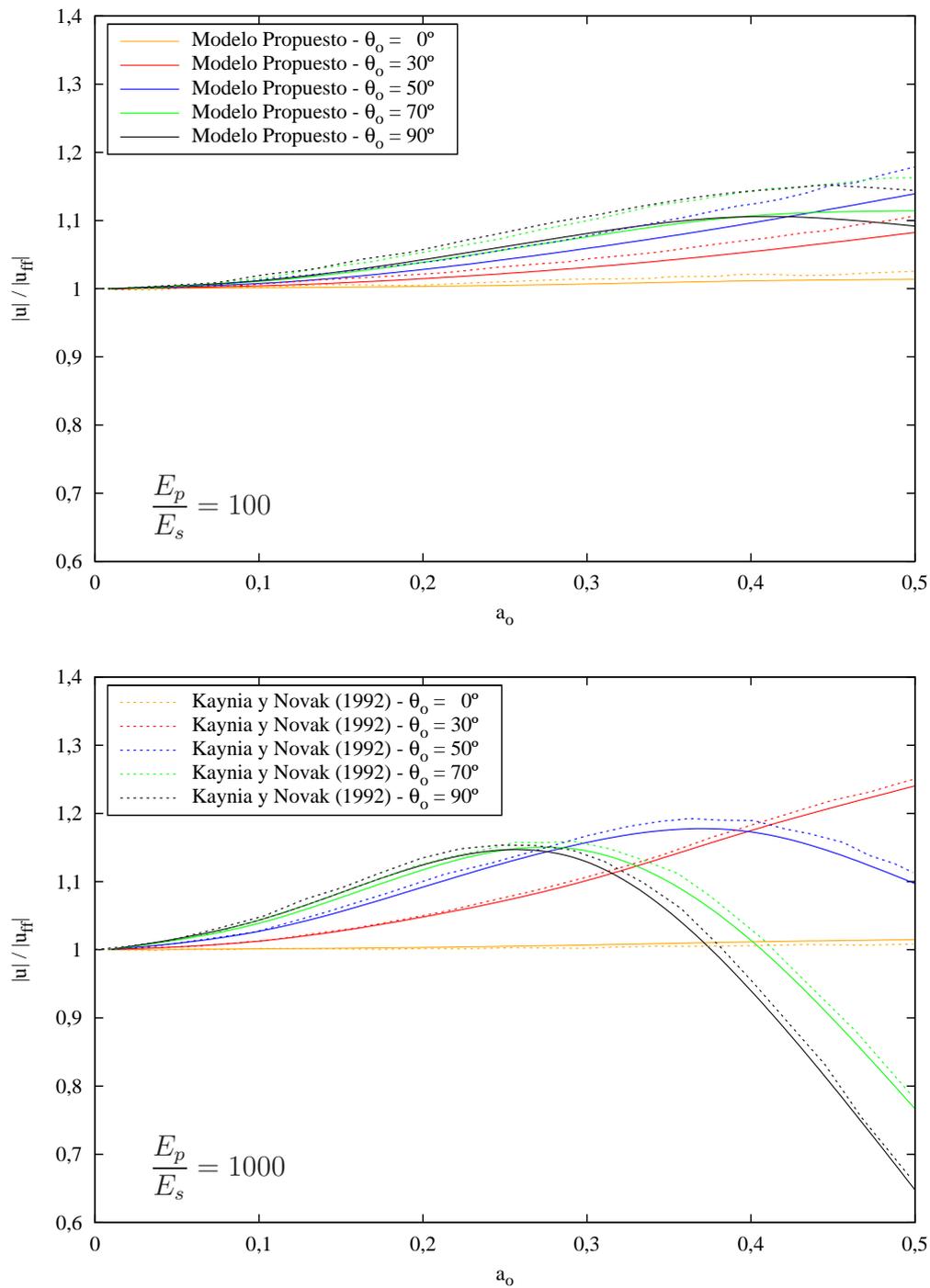


Figura 5.3: Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un pilote simple sometido a ondas SH con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak

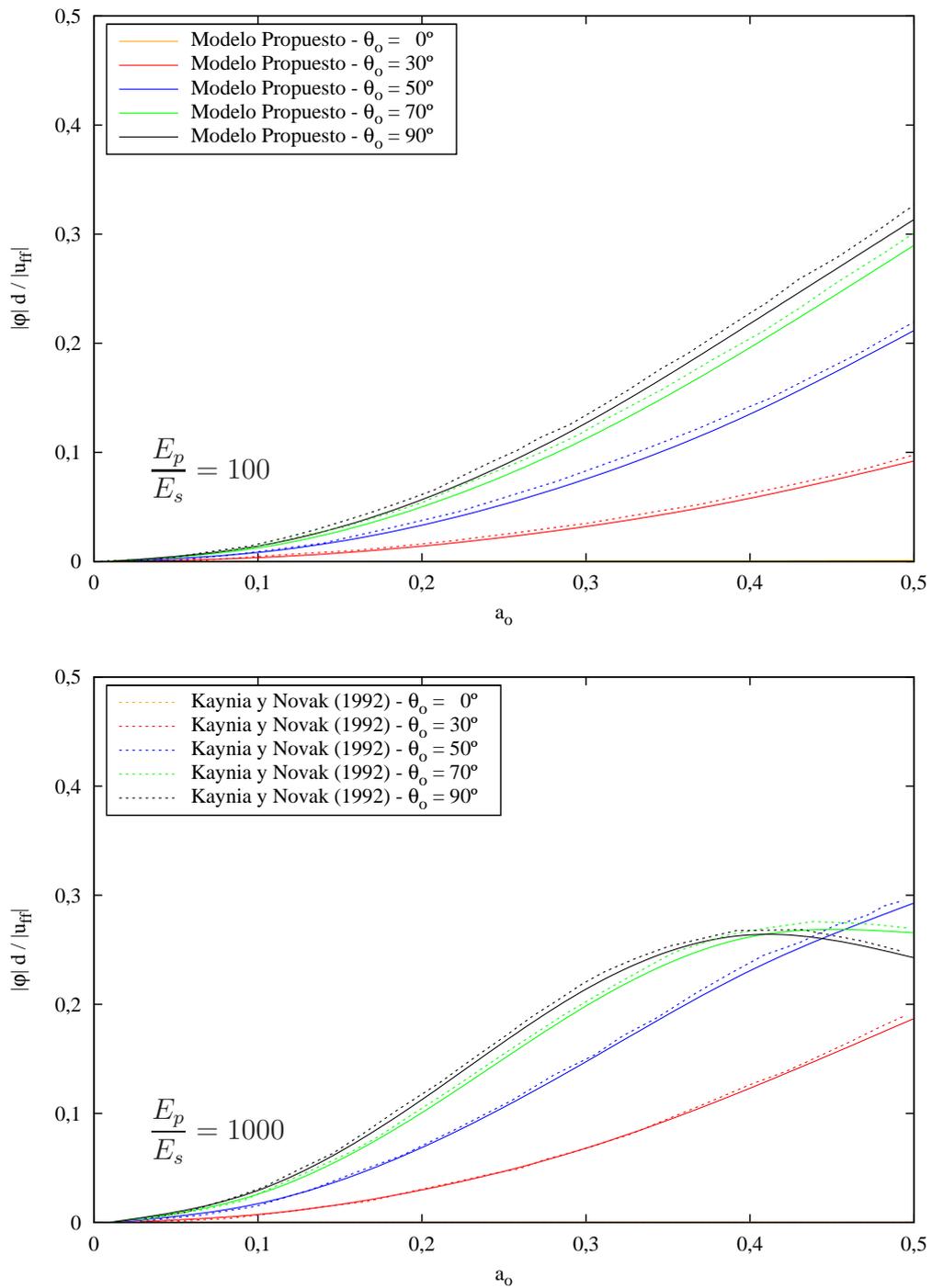


Figura 5.4: Factores de interacción cinemática en giros para un pilote simple sometido a ondas SH con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak

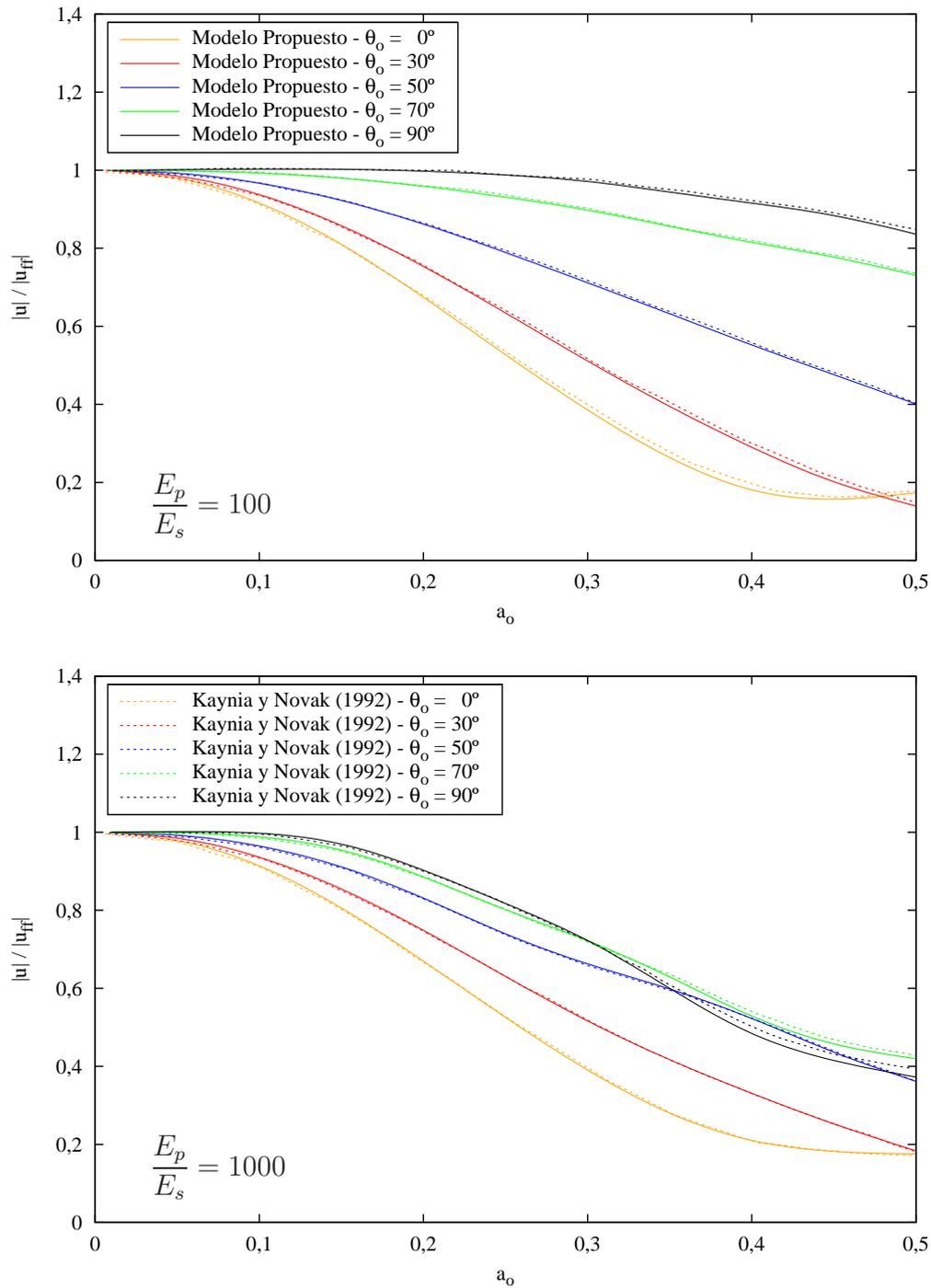


Figura 5.5: Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un grupo de 3×3 pilotes sometido a ondas SH con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak

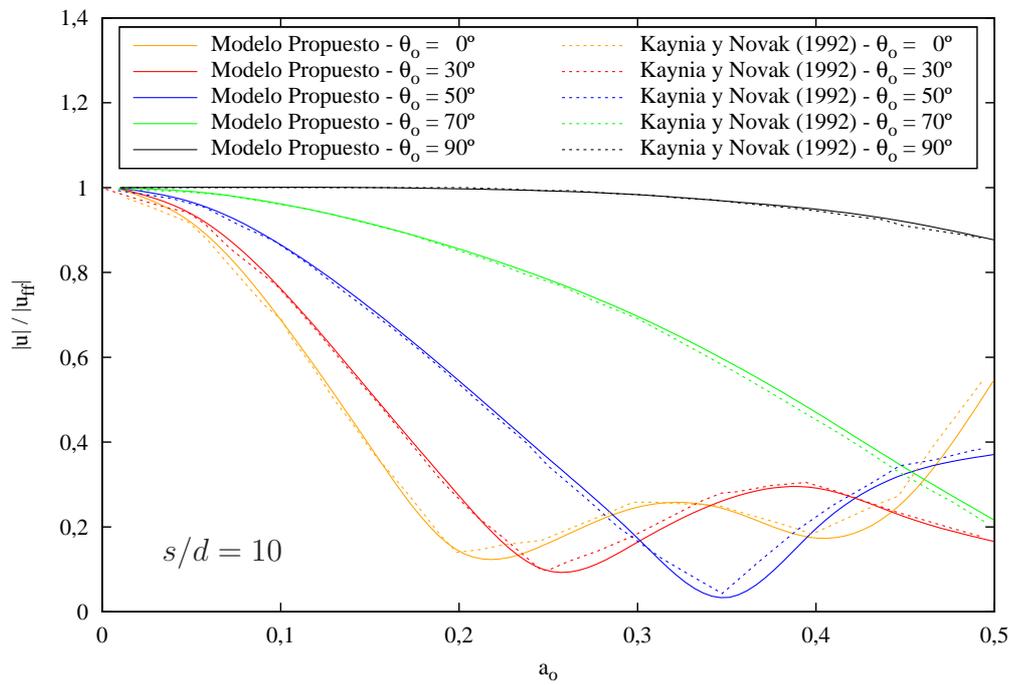


Figura 5.6: Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un grupo de 3×3 pilotes sometido a ondas SH con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak

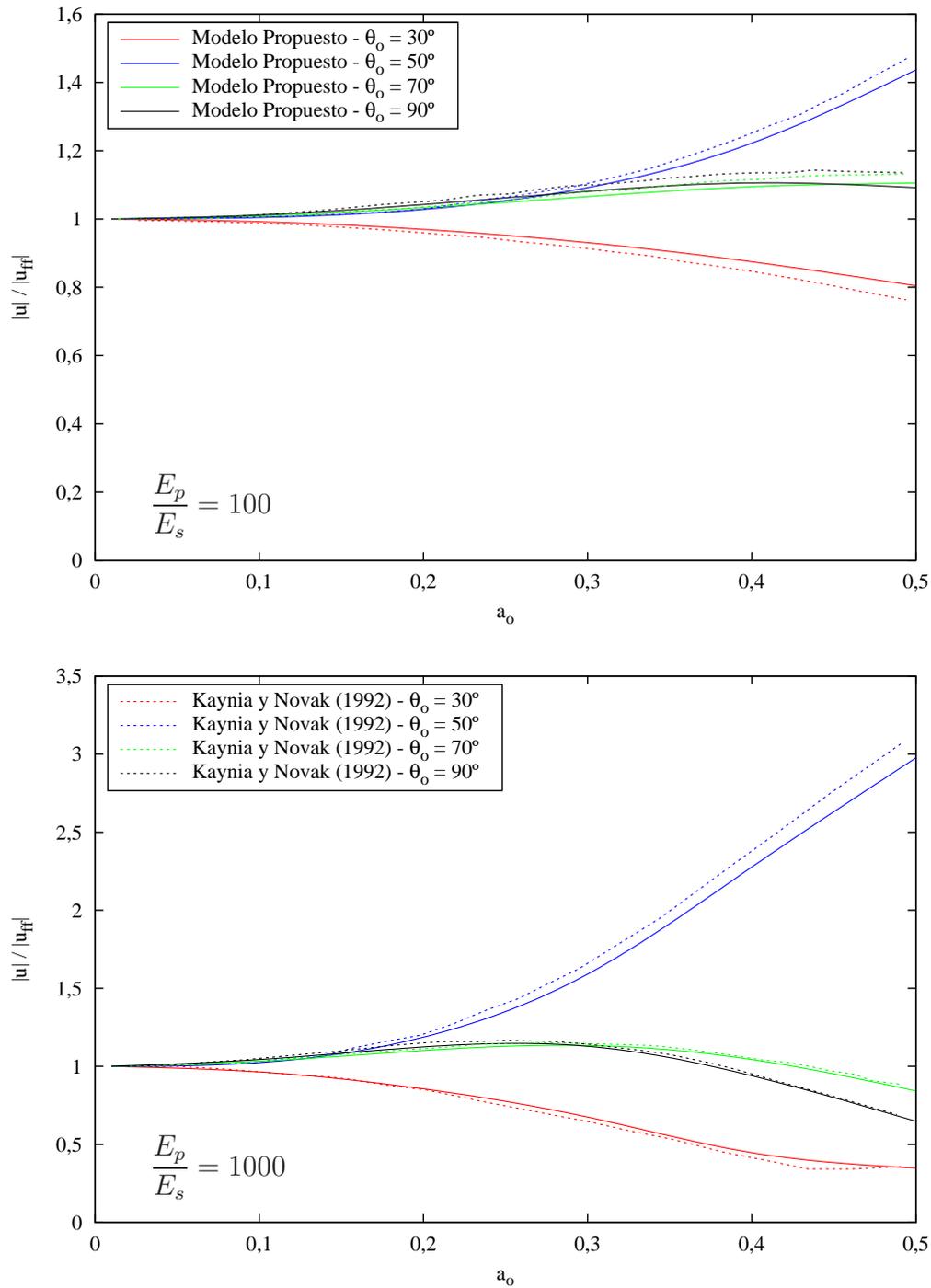


Figura 5.7: Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un pilote simple sometido a ondas SV con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak

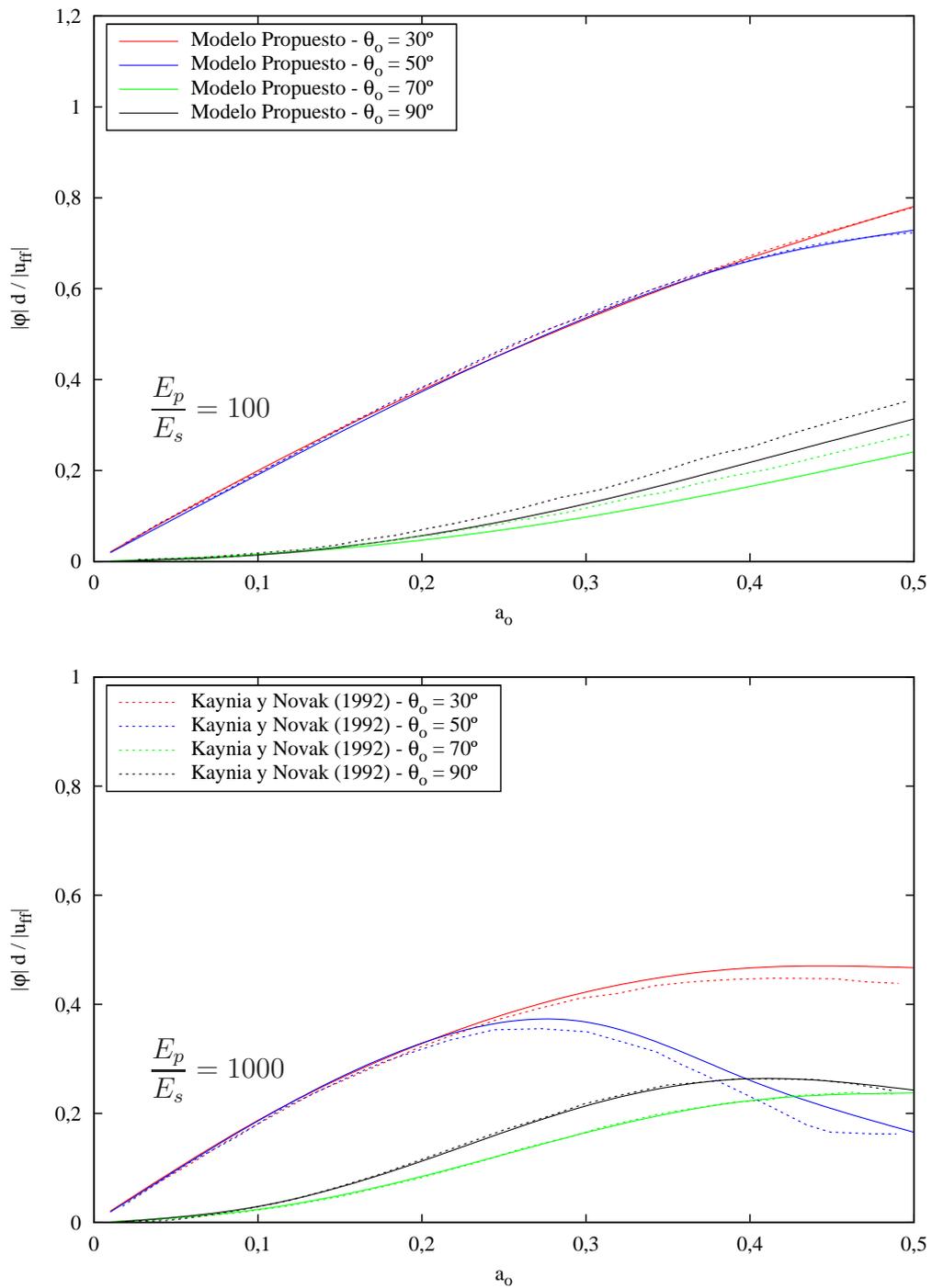


Figura 5.8: Factores de interacción cinemática en giros para un pilote simple sometido a ondas SV con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak

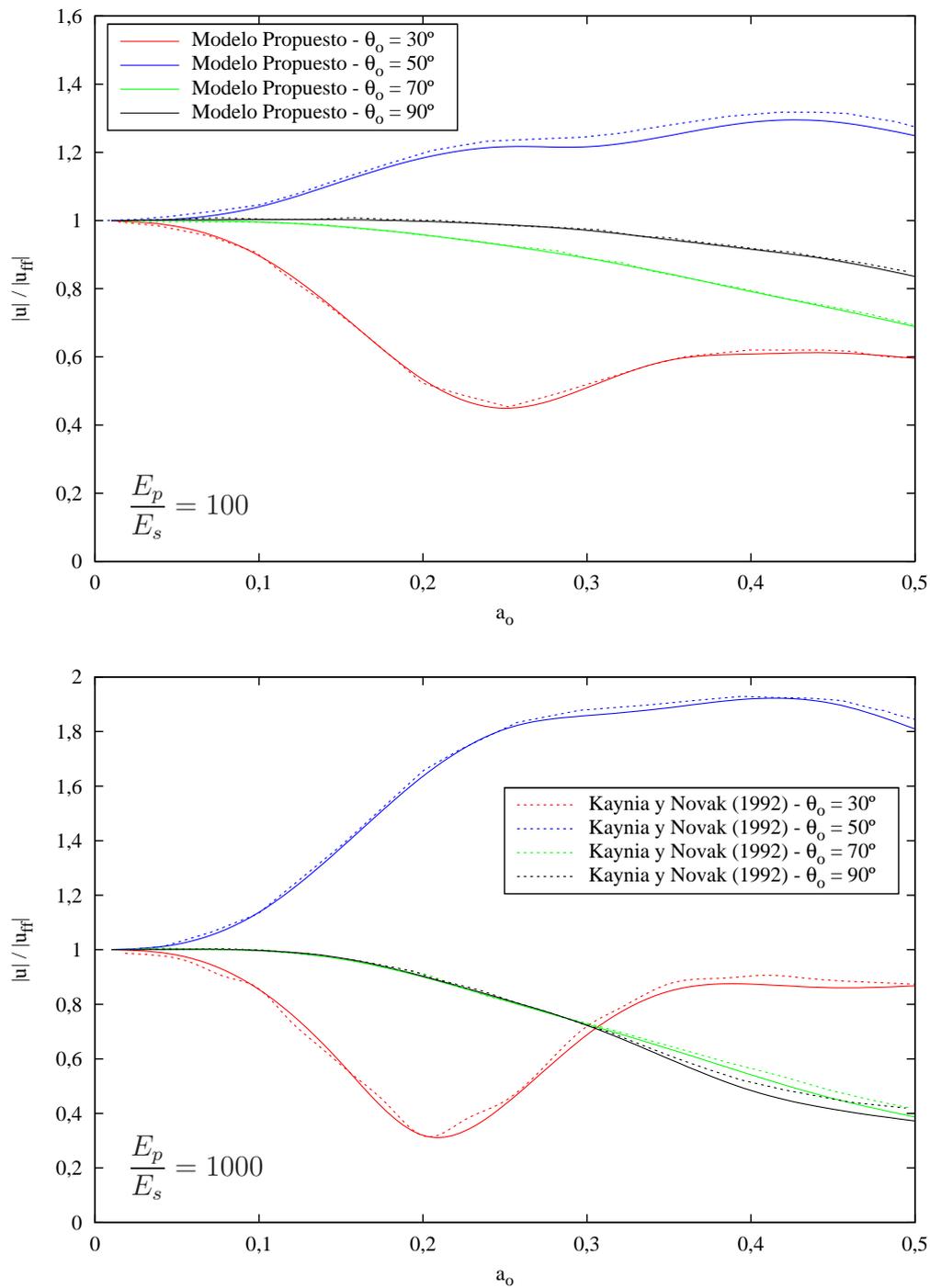


Figura 5.9: Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un grupo de 3×3 pilotes sometido a ondas SV con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak

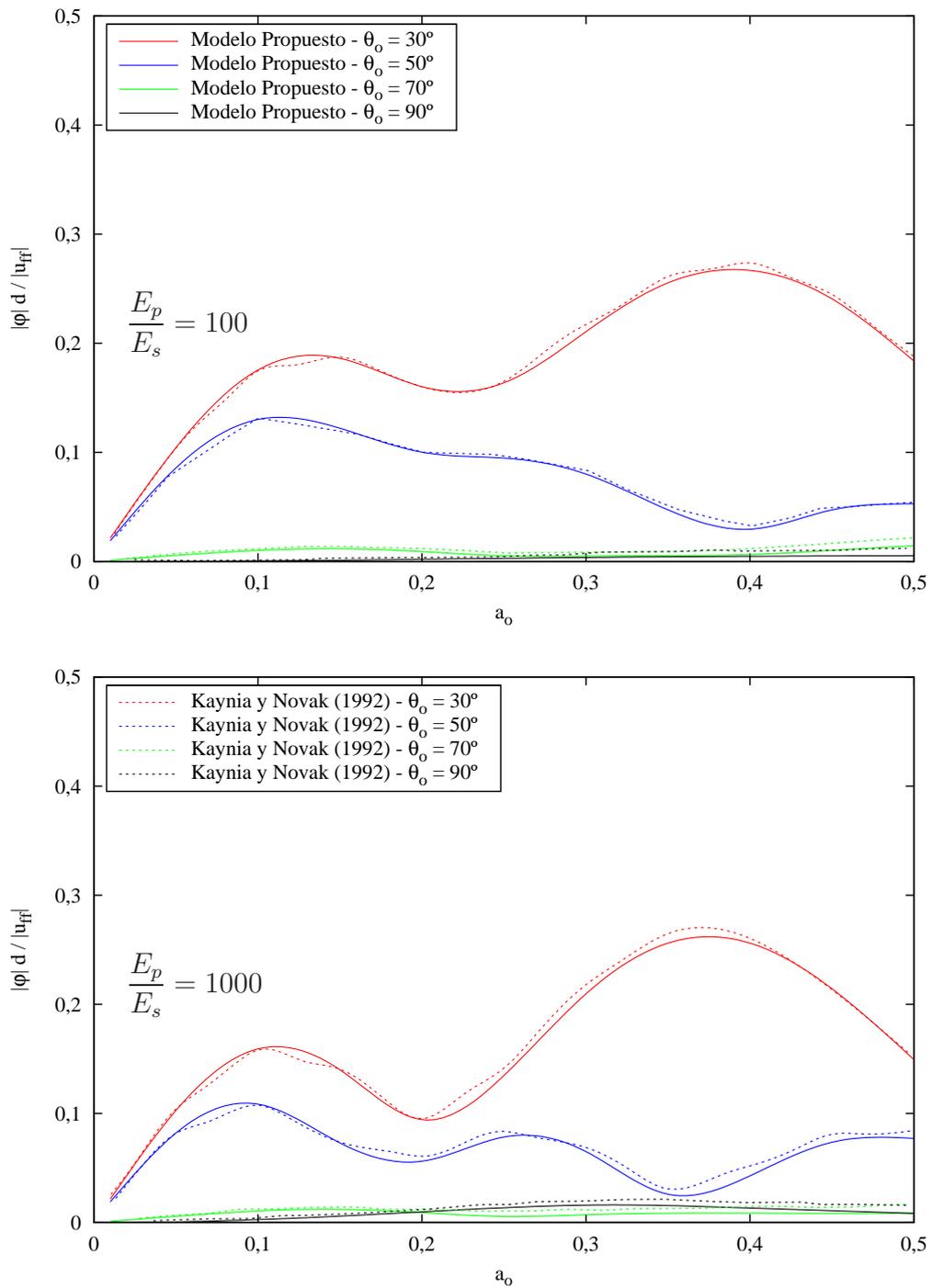


Figura 5.10: Factores de interacción cinemática en giros para un grupo de 3×3 pilotes sometido a ondas SV con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak

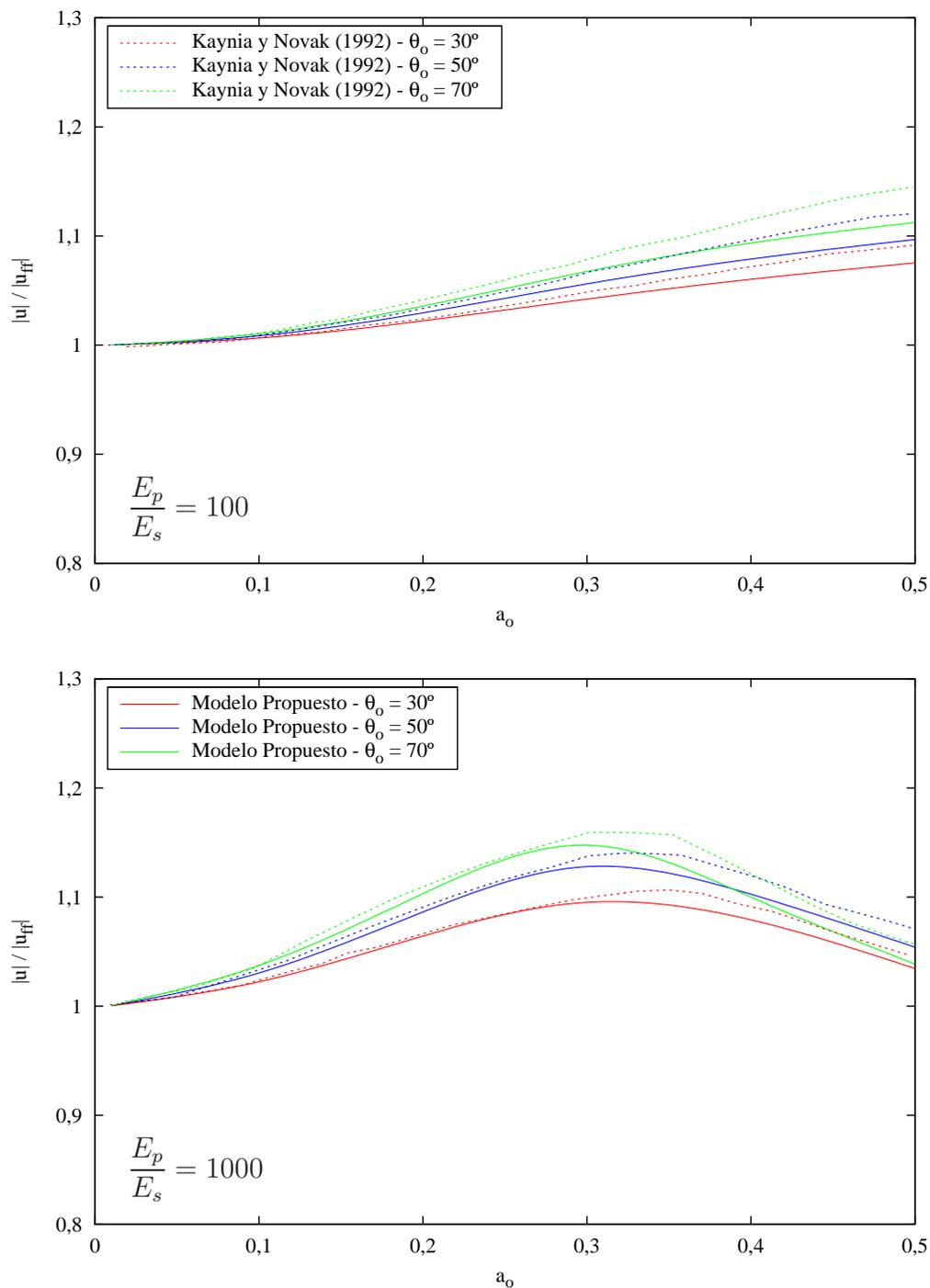


Figura 5.11: Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un pilote simple sometido a ondas P con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak

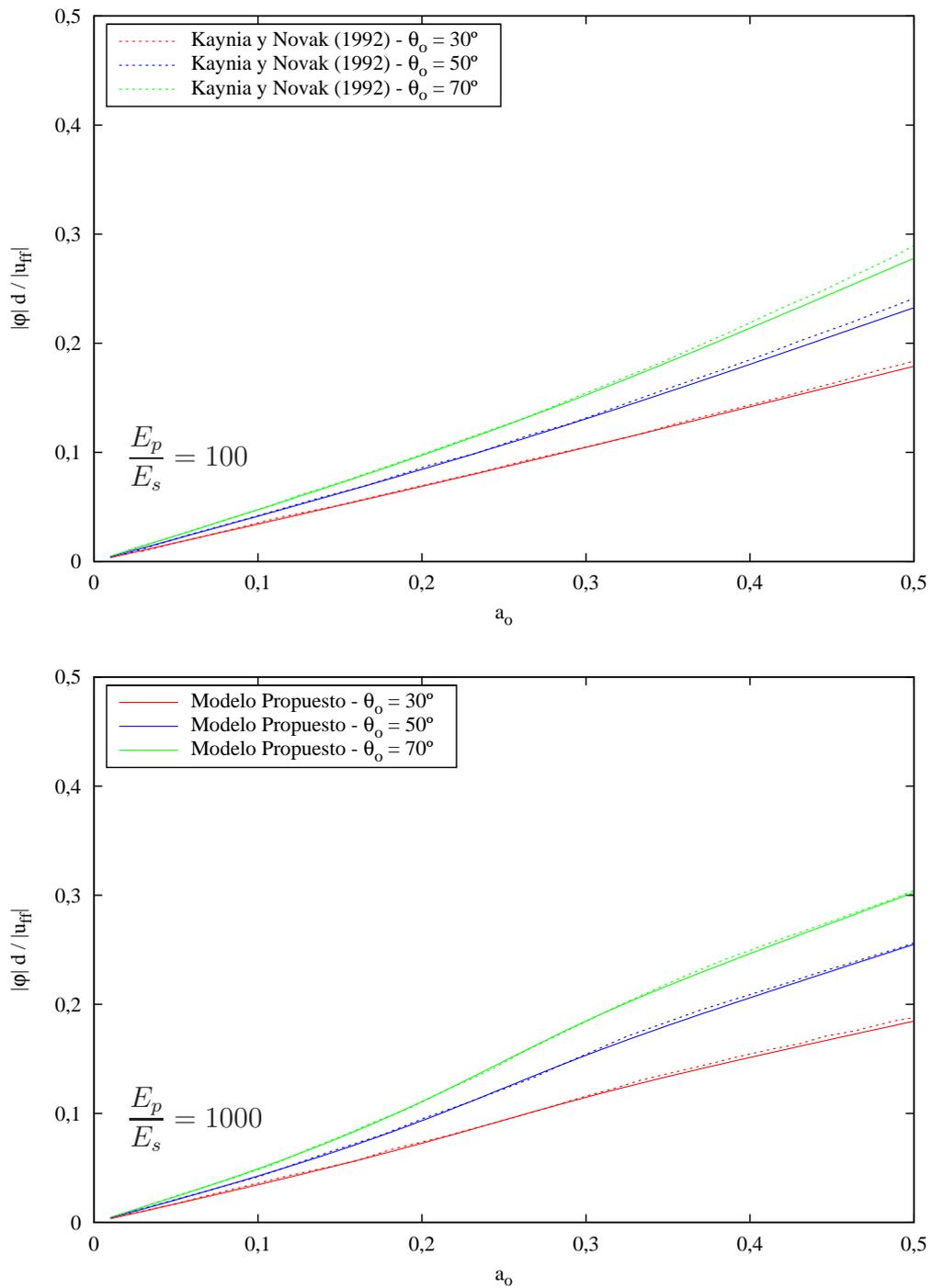


Figura 5.12: Factores de interacción cinemática en giros para un pilote simple sometido a ondas P con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak

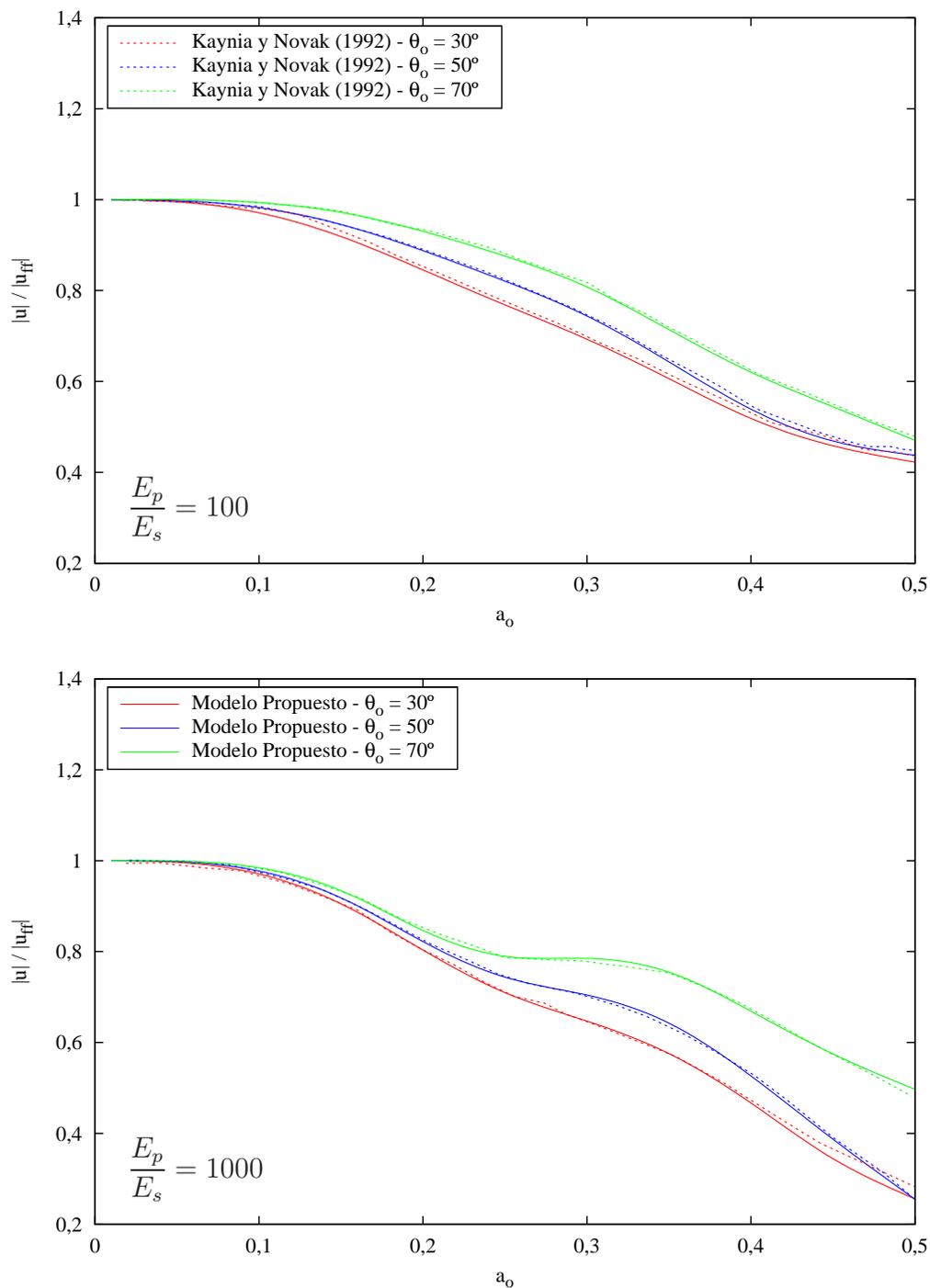


Figura 5.13: Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un grupo de 3×3 pilotes sometido a ondas P con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak

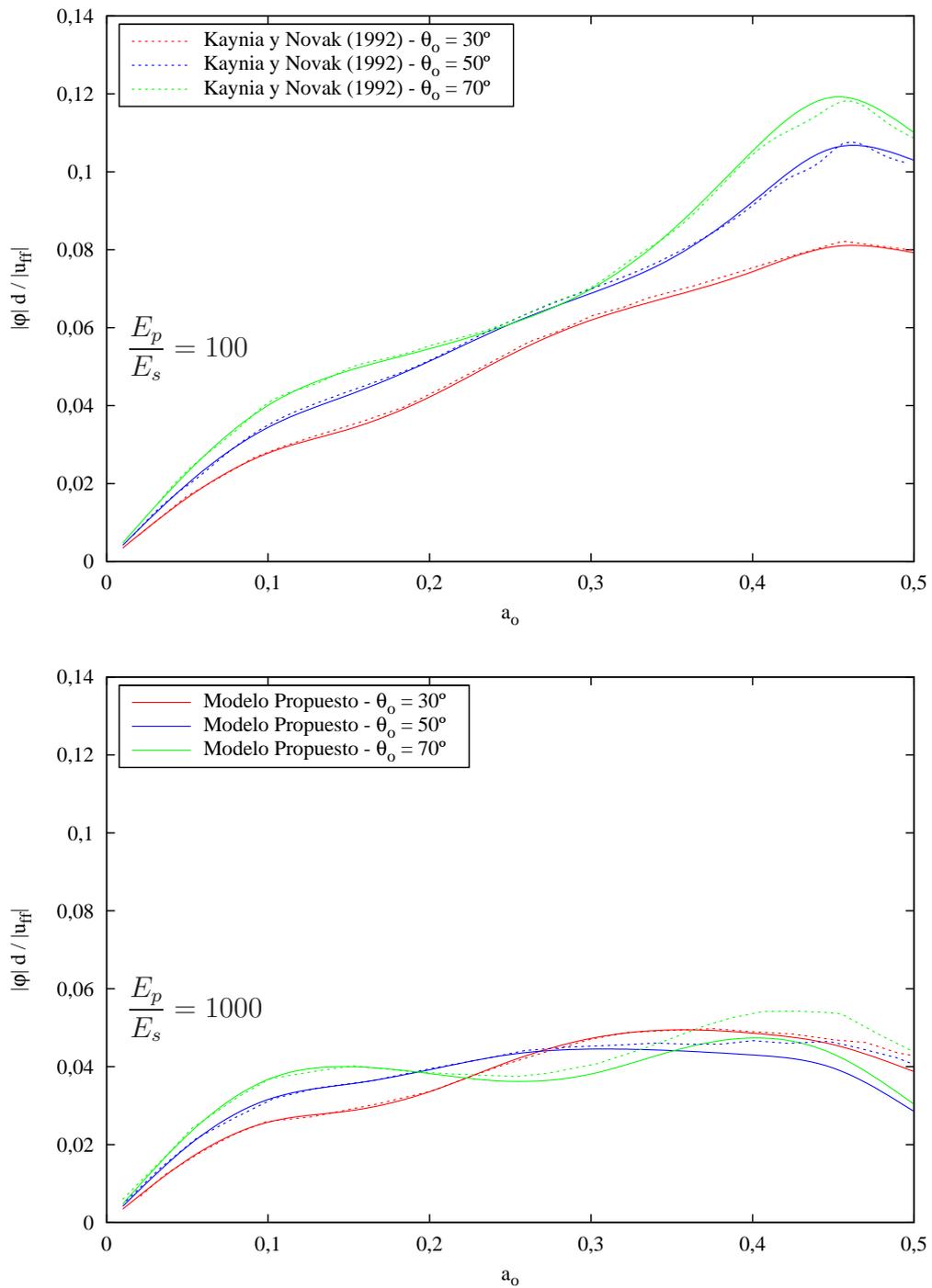


Figura 5.14: Factores de interacción cinemática en giros para un grupo de 3×3 pilotes sometido a ondas P con ángulo de incidencia variable. Comparación con Kaynia y Novak

Capítulo 6

Influencia del tipo de onda y ángulo de incidencia en la respuesta sísmica de estructuras de edificación pilotadas

6.1. Introducción

Es posible determinar el comportamiento dinámico de estructuras teniendo en cuenta los efectos de interacción suelo-estructura principalmente mediante dos metodologías diferentes. La primera de ellas se basa en la sustitución del suelo por un conjunto de resortes y amortiguadores que representen la rigidez y el amortiguamiento del terreno, denominándose *modelo de subestructuración* y constituyendo un método sencillo y computacionalmente menos exigente que la otra metodología. La segunda, denominada *método directo*, analiza la respuesta del sistema teniendo en cuenta los efectos de interacción suelo-estructura mediante una modelización más precisa, y de manera conjunta, de los aspectos principales del problema y de sus interacciones mutuas. Por ello, a pesar de constituir un modelo más complejo y exigente, es la metodología empleada a lo largo del presente capítulo.

Así pues, el capítulo presenta resultados divididos en dos bloques diferenciados. El primero de ellos se desarrolla a lo largo de la sección 6.2, analizando la influencia del ángulo de incidencia respecto al plano horizontal de la superficie libre del semiespacio (ángulo φ_0) en la respuesta de cimentaciones pilotadas. Por otra parte, en la sección 6.3 se estudia la influencia del ángulo de incidencia y del tipo de onda en la respuesta dinámica de estructuras de edificación cuya cimentación es pilotada, desde el punto de vista de la interacción cinemática y del análisis de los esfuerzos que se generan en los pilotes.

6.2. Influencia del ángulo de incidencia respecto al plano horizontal (φ_0)

6.2.1. Introducción

En la sección 5.3 se compararon los resultados obtenidos por aplicación del modelo propuesto con los obtenidos por Kaynia y Novak en [36]. En ella, los resultados se obtenían cuando un tren de ondas cuya dirección de propagación se encontraba contenida en el plano $x_2 x_3$ incidía en distintas configuraciones estructurales. Las variables de interés resultaban ser las funciones de transferencia en desplazamientos y giros de la cimentación para los casos analizados.

En la presente sección, por contra, se generalizan los resultados presentados por Kaynia y Novak al caso de una onda incidente con un ángulo genérico con respecto al plano de la superficie libre del semiespacio (plano $x_1 x_2$ en la figura 4.1). Para ello, y a fin de evitar la presentación de un número excesivamente elevado de resultados, se considera en todos los casos que la onda incide con un ángulo θ_0 de 50° en el plano $x_2 x_3$, con incidencia variable en el plano $x_1 x_2$. Esta consideración no resta generalidad a los resultados posteriores.

Las propiedades mecánicas y geométricas del problema son las mismas que se indicaron en la sección 5.3, es decir, coeficiente de amortiguamiento del terreno $\beta = 0,05$, relación de rigideces $E_p/E_s = 1000$, cociente entre densidades $\rho_s/\rho_p = 0,7$, esbeltez de los pilotes $L/d = 20$ y coeficientes de Poisson $\nu_s = 0,4$ para el suelo y $\nu_p = 0,25$ para el pilote.

La representación escogida para los resultados es análoga a la empleada en la sección 5.3, es decir, el cociente entre el módulo del desplazamiento horizontal ($|u|$) y el correspondiente módulo del desplazamiento de campo libre ($|u_{ff}|$) para las ordenadas frente a la frecuencia adimensional a_0 en abscisas. Es importante resaltar una particularidad de esta clase de problemas que no existía en ningún otro de los presentados hasta el momento. Si bien en el caso en el que $\varphi_0 = 0$ el movimiento horizontal producido por ondas P, SH o SV de incidencia genérica en el plano $x_2 x_3$ se encuentra restringido a un único eje (x_2 o x_3), cuando el ángulo φ_0 varía entre 0 y 90° se generan movimientos respecto a ambos ejes horizontales. Estos movimientos se encuentran, en general, desfasados entre sí. De este modo, el máximo desplazamiento horizontal que se produce no puede determinarse, como en el caso anterior, por simple obtención del módulo de un valor complejo.

Considérese el movimiento de un punto a lo largo del eje x_1 siguiendo un movimiento armónico simple de amplitud u_{x_1} , frecuencia circular ω y ángulo de fase ϕ_{x_1} en el instante inicial. Supóngase que el punto se mueve, también, en la dirección del eje x_2 siguiendo un movimiento armónico simple de amplitud u_{x_2} , frecuencia circular ω y ángulo de fase ϕ_{x_2} en $t = 0$. Se trata, por tanto, de un problema de composición de dos movimientos armónicos simples de direcciones

perpendiculares, frecuencias iguales y ángulos de fase inicial diferentes en el que se busca obtener la amplitud máxima del movimiento.

El movimiento del punto puede escribirse, respecto a cada uno de los ejes, como:

$$U_{x_1} = u_{x_1} e^{i(\omega t + \phi_{x_1})} = u_{x_1} \cos(\omega t + \phi_{x_1}) + i u_{x_1} \operatorname{sen}(\omega t + \phi_{x_1}) \quad (6.1)$$

$$U_{x_2} = u_{x_2} e^{i(\omega t + \phi_{x_2})} = u_{x_2} \cos(\omega t + \phi_{x_2}) + i u_{x_2} \operatorname{sen}(\omega t + \phi_{x_2}) \quad (6.2)$$

De este modo, la posición respecto a los ejes x_1 y x_2 en cualquier instante de tiempo vendrá dada por la parte real de las expresiones anteriores, es decir:

$$x_1 = \Re[U_{x_1}] = \Re[u_{x_1} e^{i(\omega t + \phi_{x_1})}] = u_{x_1} \cos(\omega t + \phi_{x_1}) \quad (6.3)$$

$$x_2 = \Re[U_{x_2}] = \Re[u_{x_2} e^{i(\omega t + \phi_{x_2})}] = u_{x_2} \cos(\omega t + \phi_{x_2}) \quad (6.4)$$

Es interesante mencionar que la representación temporal en el plano $x_1 x_2$ del movimiento del punto produce una figura conocida como curva de Lissajous (o curva de Bowditch) que, para el caso particular en el que las frecuencias circulares de los movimientos respecto a x_1 y x_2 son iguales, adquiere la forma de una elipse, pudiendo tomar forma circular si el ángulo de desfase entre ambos movimientos es de 90° y las amplitudes de ambos movimientos son iguales o forma de línea recta si el desfase es de 0° . De esta manera, la amplitud del movimiento en un instante t puede expresarse en el plano $x_1 x_2$ como la distancia euclídea entre el origen de coordenadas y la correspondiente posición del punto en ese instante de tiempo, es decir:

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{u_{x_1}^2 \cos^2(\omega t + \phi_{x_1}) + u_{x_2}^2 \cos^2(\omega t + \phi_{x_2})} \quad (6.5)$$

Por lo tanto, el problema de obtención de la máxima amplitud del desplazamiento puede resolverse maximizando la expresión anterior. Para ello, basta igualar la primera derivada respecto a t de la ecuación (6.5) a cero, obteniéndose el tiempo para el que se maximiza la distancia. Tras realizar algunas operaciones puede demostrarse que el producto del citado tiempo por la frecuencia circular vale:

$$\omega t = \frac{1}{2} \arctan \left[-\frac{u_{x_1}^2 \operatorname{sen}(2\phi_{x_1}) + u_{x_2}^2 \operatorname{sen}(2\phi_{x_2})}{u_{x_1}^2 \cos(2\phi_{x_1}) + u_{x_2}^2 \cos(2\phi_{x_2})} \right] \quad (6.6)$$

Así pues, el proceso de obtención de la máxima amplitud del movimiento consiste en la determinación del valor ωt que hace que el módulo sea el máximo a

partir de la expresión (6.6) para, posteriormente, sustituir el valor en la ecuación (6.5) y obtener el valor del máximo desplazamiento del punto.

Una vez se ha indicado el procedimiento de obtención del máximo desplazamiento horizontal de los puntos es posible mostrar las funciones de transferencia referidas con anterioridad.

6.2.2. Pilotes simples

El primer caso considerado consiste en el análisis de pilotes simples sometidos a ondas SV, SH y P con incidencia de $\theta_0 = 50^\circ$ y ángulos φ_0 de 30, 45 y 60° . Los resultados son los que se muestran en la figura 6.1.

El problema es simétrico respecto al eje x_3 . Sin embargo, la malla empleada no es axisimétrica, por lo que los resultados numéricos no son forzosamente independientes de φ_0 . No obstante, los resultados que se obtienen coinciden para cualquier ángulo φ_0 . Por ello, se puede concluir que la influencia de la malla en la respuesta es escasa para este caso en concreto.

6.2.3. Grupos de pilotes

Una vez se han analizado los pilotes simples, es turno de pasar a los grupos de pilotes sometidos, también, a ondas SV, SH y P con incidencia de $\theta_0 = 50^\circ$ y ángulos φ_0 de 30, 45 y 60° . Los resultados pueden visualizarse, en esta ocasión, en la figura 6.2.

En estas circunstancias sólo existen determinados planos de simetría. En concreto, dos planos $x_1 x_2$ y $\tilde{x}_1 \tilde{x}_2$ serán simétricos si los ángulos φ_1 y φ_2 medidos en sentido trigonométrico que forman respecto al eje x_2 de referencia cumplen:

$$\varphi_1 \pm \varphi_2 = k \frac{\pi}{2} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

La circunstancia descrita por la ecuación anterior se produce, en los casos analizados, cuando φ_0 toma por valores 30° y 60° , lo que justifica la igualdad entre los resultados para ambos ángulos de incidencia que puede observarse en la figura 6.2.

De esta manera, no existe, como sí ocurría para el caso de pilotes simples, simetría total respecto al eje x_3 en estas circunstancias. Sin embargo, las diferencias existentes entre los resultados de las distintas configuraciones no alcanzan el 8%, por lo que se justifica el hecho habitual de no tener en cuenta el ángulo φ_0 en la determinación de la respuesta dinámica de cimentaciones pilotadas. Además, pese a que el empleo de una malla no axisimétrica debe teóricamente influir en los resultados obtenidos, la sensibilidad práctica a este parámetro resulta ser muy escasa.

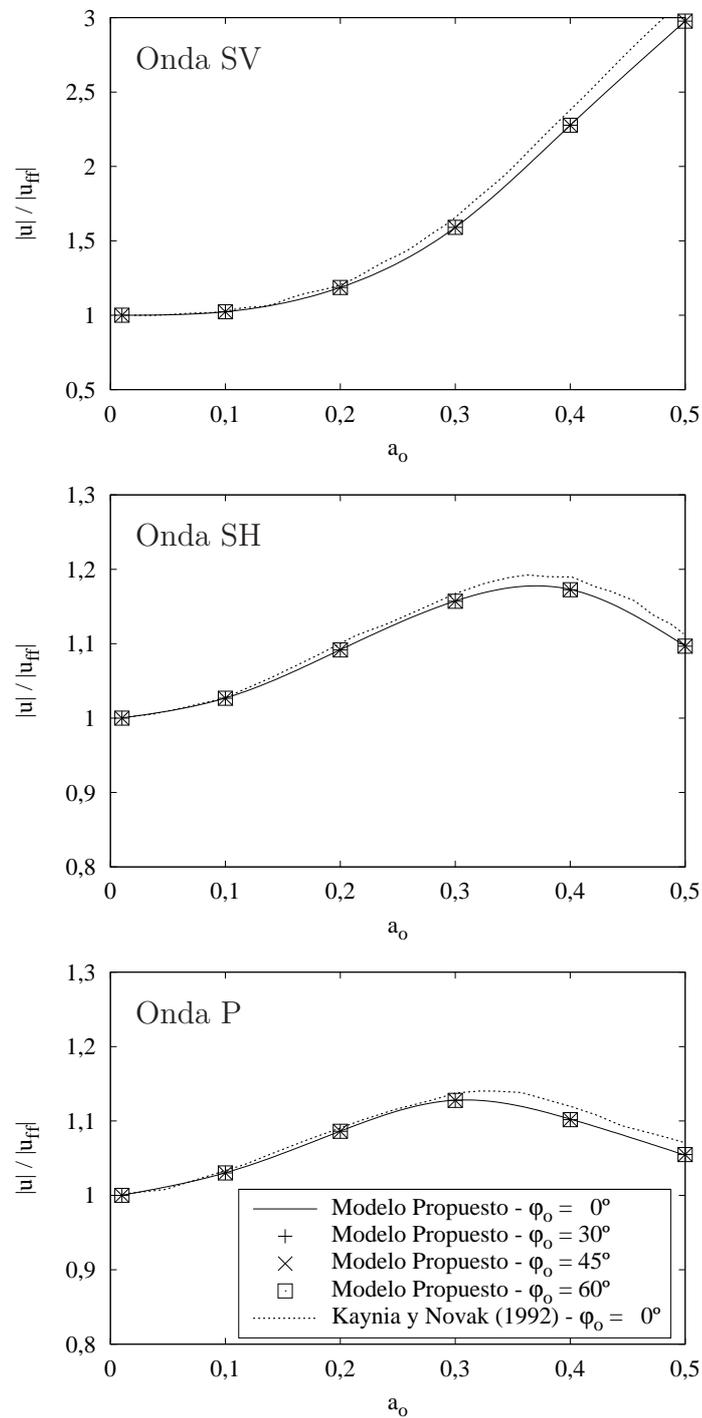


Figura 6.1: Influencia del ángulo φ_0 . Factores de interacción cinemática en desplazamientos para un pilote simple sometido a ondas SV, SH y P. Ángulo $\theta_0 = 50^\circ$

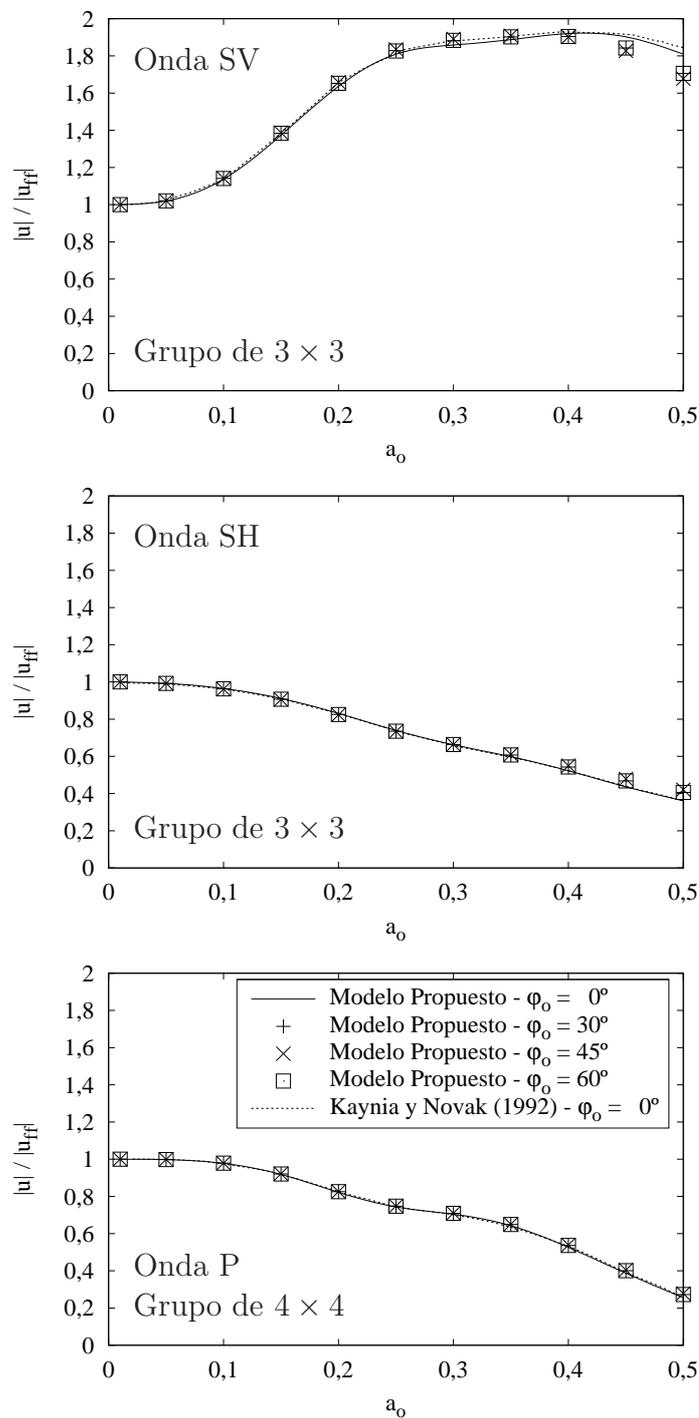


Figura 6.2: Influencia del ángulo φ_0 . Factores de interacción cinemática en desplazamientos para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Ángulo $\theta_0 = 50^\circ$

6.3. Influencia del ángulo de incidencia y tipo de onda en la respuesta sísmica de estructuras de edificación pilotadas

6.3.1. Definición del problema

Esta sección se centra en la respuesta dinámica de estructuras pilotadas ante trenes de ondas incidentes con un ángulo genérico. Para ello, se utilizan modelos de una única masa vibrante que, en el caso de encontrarse sobre base rígida, corresponderían a sistemas de un único grado de libertad. El modelo puede corresponder tanto a estructuras que pueden modelarse directamente como sistemas de un grado de libertad (edificios de una única planta, por ejemplo) como a sistemas equivalentes que aproximen el comportamiento de una estructura multimodal según un modo de vibración específico. Recuérdese que, de acuerdo a la teoría clásica de la Dinámica de Estructuras, el comportamiento de un sistema de n grados de libertad puede expresarse como la suma de n problemas equivalentes de un solo grado de libertad, cada uno de ellos con propiedades de masa, rigidez y amortiguamiento efectivos correspondientes a un modo de vibración concreto.

Sea como fuere, existen distintos autores [37, 38] que destacan el hecho de que la interacción suelo-estructura afecta principalmente al modo fundamental de vibración de estructuras de varias plantas, lo que justifica el empleo de esta aproximación. De esta manera, el comportamiento dinámico de la estructura puede definirse por el período fundamental en base rígida T , la altura h de la resultante de las fuerzas de inercia para el primer modo, la masa m que participa en ese modo y el correspondiente amortiguamiento estructural ζ (ver la figura 6.3). La rigidez horizontal de la estructura es $k = 4\pi^2 m/T^2$, considerándose amortiguamiento histerético del material, dado por una rigidez compleja del tipo $k = Re[k](1 + 2i\zeta)$.

Las estructuras se suponen cimentadas en grupos cuadrados de pilotes embebidos en semiespacios viscoelásticos, tal y como se muestra en la figura 6.3, estando el grupo de pilotes definido por la longitud L y el diámetro d de los pilotes, la distancia entre los centros de pilotes adyacentes s , la masa del encepado m_o y el momento de inercia del encepado respecto a un eje horizontal que pase por su centro de gravedad I_o . Además, b se toma igual a la mitad del ancho de la cimentación.

Si se tienen en cuenta los efectos de interacción suelo-estructura, el comportamiento del sistema puede aproximarse mediante un sistema de tres grados de libertad, definidos por el desplazamiento horizontal y el giro de la cimentación (u^c y ϕ , respectivamente), junto con la deflexión horizontal de la estructura u , habida cuenta de que el giro del encepado y de la estructura son iguales. Se desprecian los movimientos verticales en este estudio.

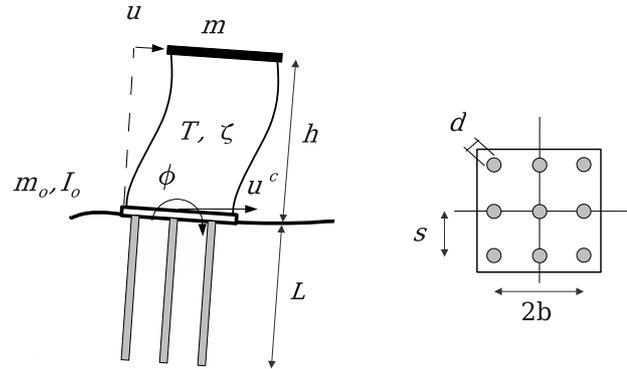


Figura 6.3: Definición del problema

6.3.2. Parámetros del problema

Las propiedades mecánicas y geométricas de cimentación y suelo se definen mediante el coeficiente de amortiguamiento del terreno $\beta = 0,05$, la relación entre el módulo de elasticidad del pilote y el suelo $E_p/E_s = 100$, el cociente entre las densidades del suelo y del pilote $\rho_s/\rho_p = 0,7$, la esbeltez de los pilotes $L/d = 15$, el coeficiente de Poisson del suelo $\nu_s = 0,4$ y la relación entre la separación de los pilotes y su diámetro $s/d = 5$.

Por otro lado, los parámetros de interés para definir el comportamiento dinámico de la superestructura son las relaciones de aspecto $h/b = 2, 3$ y 4 , el cociente entre las rigideces de la estructura y del suelo $h/(T c_s) = 0,3$, siendo c_s la velocidad de las ondas de corte en el suelo y el coeficiente de amortiguamiento de la estructura $\zeta = 0,05$. Otros parámetros de interés son el momento de inercia de la cimentación, que se toma como el 5% del factor $m h^2$, la relación entre las masas de la estructura y la masa vibrante del suelo, de valor $m/4\rho_s b^2 h = 0,2$ y la relación entre la masa de la cimentación y la de la estructura, que como se adelantó con anterioridad se toma igual a $m_o/m = 0,25$. Los valores tomados para estos tres últimos parámetros se consideran representativos de tipologías habituales, habiendo sido empleados por anterioridad por otros autores [38–40]. De cualquier modo, la interacción suelo-estructura no es significativamente sensible a su variación (ver [35]).

6.3.3. Variación del desplazamiento de campo libre con el ángulo de incidencia en el plano vertical (θ_0)

Resulta interesante analizar la variación del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre con el ángulo de incidencia en el plano $x_2 x_3$, pues los resultados posteriores dependerán en gran medida de este parámetro.

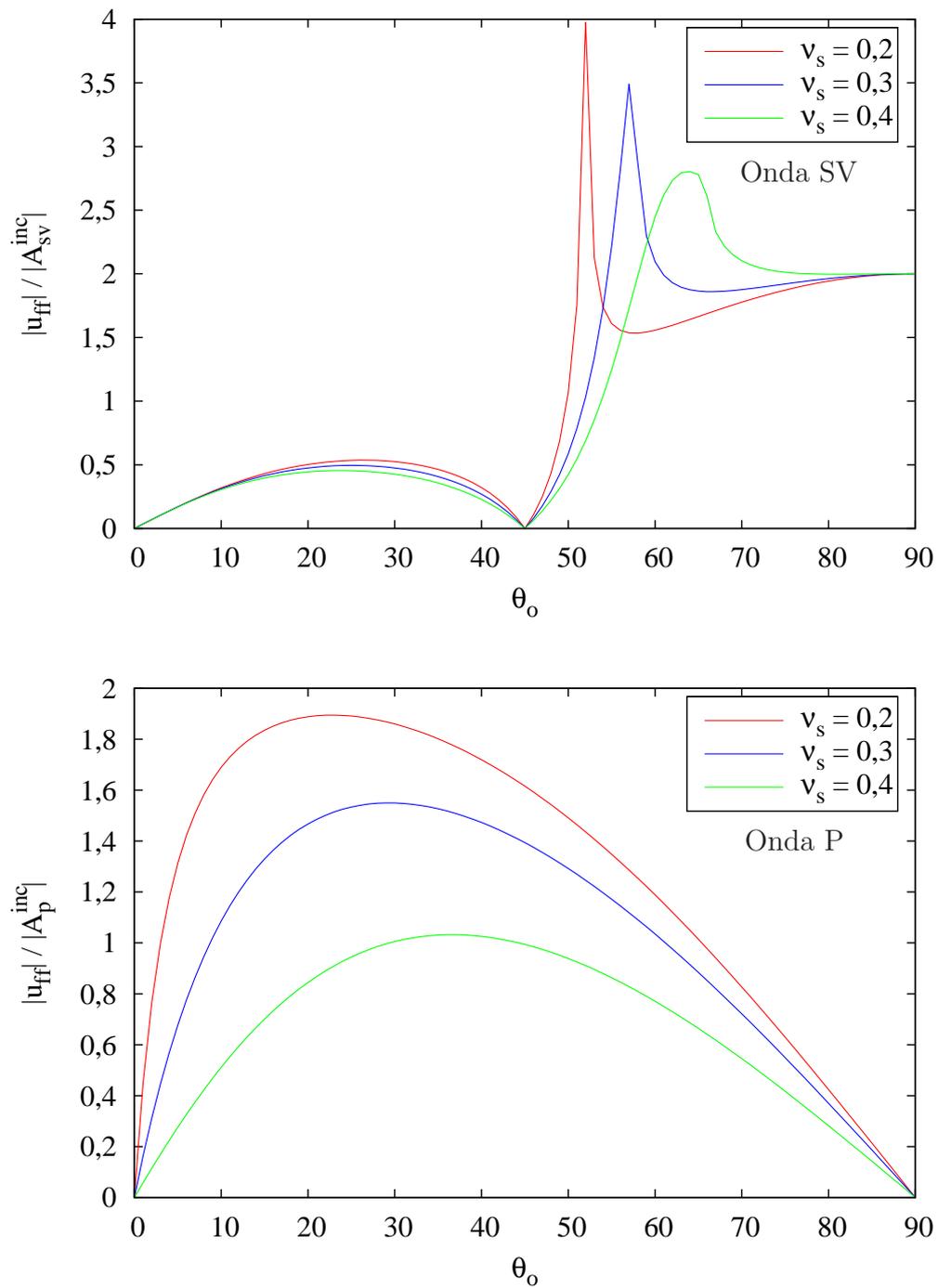


Figura 6.4: Variación del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre con el ángulo θ_0 y ν_s . Ondas SV y P incidentes

La figura 6.4 representa el módulo del desplazamiento horizontal de campo libre, dividido entre la amplitud de la correspondiente onda incidente, frente al ángulo θ_0 cuando inciden ondas SV y P.

La gráfica correspondiente a la onda SV incidente es particularmente ilustrativa, pues se observan variaciones moderadas del valor de los desplazamientos para ángulos de incidencia entre 0 y 45° , puntos donde los desplazamientos se hacen nulos. A continuación, los desplazamientos se incrementan súbitamente hasta alcanzar un máximo cuando el ángulo de incidencia coincide con el ángulo crítico, momento en el que descienden hasta estabilizarse en un valor igual a 2 cuando la incidencia de la onda es vertical.

Por otro lado, cuando la onda que incide es de tipo P, la variación es más suave que en el caso de la onda SV, variando de modo similar a una parábola entre los extremos de valor nulo en $\theta_0 = 0$ y $\theta_0 = 90^\circ$.

Para cuantificar lo comentado, los cuadros siguientes recogen los valores del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre (divididos entre la amplitud de la onda incidente correspondiente) cuando la onda que incide es de tipo SV o P.

θ_0	0°	30°	45°	50°	60°	70°	90°
$ u_{ff} / A_{sv}^{inc} $	0	0,426	0	0,423	2,449	2,102	2

Cuadro 6.1: Cuadro resumen de los valores del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre en el punto de referencia $(0,0,0)$ en función del ángulo θ_0 de incidencia. Onda SV incidente y $\nu_s = 0,4$

θ_0	0°	30°	45°	50°	60°	70°	90°
$ u_{ff} / A_p^{inc} $	0	1,005	0,994	0,939	0,771	0,545	0

Cuadro 6.2: Cuadro resumen de los valores del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre en el punto de referencia $(0,0,0)$ en función del ángulo θ_0 de incidencia. Onda P incidente y $\nu_s = 0,4$

Lo comentado para ondas SV y P no puede hacerse extensivo a ondas SH, pues el módulo de los desplazamientos horizontales de campo libre es independiente del ángulo θ_0 de incidencia, siendo la relación $|u_{ff}|/|A_{sh}^{inc}| = 2$ en todo caso. Esto puede comprobarse fácilmente particularizando la ecuación (4.2) al punto $(0,0,0)$ de referencia.

6.3.4. Factores de interacción cinemática de las cimentaciones empleadas

En este apartado se expondrán las funciones de transferencia en desplazamientos y giros del encepado cuando no existe edificio sobre él. Los resultados se presentan adimensionalizados entre el módulo desplazamiento horizontal de campo libre en el punto de referencia en la figura 6.5 para desplazamientos y en la 6.6 para los giros. La presentación de estos resultados responde a la necesidad posterior de disponer de datos que permitan evaluar las tendencias en las variables de análisis de la superestructura.

Puede extraerse una conclusión primera de los resultados, obtenida por comparación de los obtenidos para las funciones de transferencia con y sin masa. De este modo, las propiedades inerciales del encepado tienen poca influencia en la respuesta dinámica en desplazamientos y giros del mismo cuando se le somete a un tren de ondas sísmicas para la relación entre la masa m_o del encepado y la masa m de la estructura empleada (0,25). Habida cuenta de tal conclusión, se omite la reproducción de los resultados correspondientes al caso con masa por resultar redundantes y por poder obtenerse mediante subestructuración.

Por otra parte, en lo que respecta a los desplazamientos, los resultados cuando la onda incidente es de tipo SV se asemejan a los obtenidos en el capítulo 5 para un grupo de 3×3 sometido a ondas SV (figura 5.9). Así, los resultados para ángulos de 70° y 90° son similares, siendo de inferior valor para 30° y resultando superiores para 50° .

Cuando la onda que incide es de tipo SH, los resultados se ordenan de la misma manera en la que lo hacía en la figura 5.5, correspondiéndole valores mayores a las ondas de incidencia más vertical, valores que disminuyen conforme la onda se hace más rasante.

De igual manera, puede observarse una tendencia muy similar a la mostrada en la figura 5.13 cuando la onda que incide es de tipo P, de forma que los resultados son parecidos para cualquier ángulo de incidencia.

En lo que respecta a los giros, resulta interesante analizar el fenómeno que ocurre cuando la onda incidente es de tipo SV. En este caso, los giros para $\theta_0 = 30^\circ$ y $\theta_0 = 50^\circ$ (ángulos sensiblemente inferiores al crítico) son muy superiores a los que se obtienen para el resto de ángulos de incidencia. Ello se debe, en cierta medida, al menor valor del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre para tales ángulos de incidencia inferiores al crítico. Este fenómeno tendrá una importancia capital en el comportamiento del sistema cuando éste posea una superestructura, tal y como se podrá verificar en apartados posteriores del trabajo.

En lo tocante al caso de ondas SH incidentes, la tendencia observada se debe al hecho de que, cuando la onda tiene incidencia vertical, los pilotes son empujados de modo síncrono hacia una cierta dirección a unas profundidades y hacia

esa misma dirección solo que en sentido contrario a otras, lo que provoca el giro de la cimentación. Sin embargo, al hacerse la onda más rasante, el empuje sobre los pilotes pierde el mencionado sincronismo, de modo que se producen interferencias en los desplazamientos que provocan, a su vez, que el giro total en estas circunstancias se vea reducido frente al caso vertical.

Por último, cuando la onda incidente es una onda P, los giros toman valores muy parecidos para los ángulos de incidencia analizados, lo que coincide con lo que pudo observarse en la figura 5.14 de referencia.

6.3.5. Funciones de transferencia en los encepados

Si en el apartado anterior se mostraban los factores de interacción cinemática de las cimentaciones, es turno en esta ocasión de ocuparse de las funciones de transferencia en desplazamientos y giros cuando se considera el problema de la cimentación con la superestructura.

Los resultados se pueden encontrar, para las distintas relaciones de aspecto h/b , en las figuras 6.7, 6.9 y 6.11 para los desplazamientos y en 6.8, 6.10 y 6.12 para los giros.

Los resultados en desplazamientos presentan comportamientos similares para cualquier onda incidente, existiendo ciertas particularidades interesantes. En concreto, se incrementa ligeramente la respuesta a frecuencias bajas con la relación h/b hasta llegar a la frecuencia fundamental del edificio en base flexible. En ese momento, los desplazamientos decaen hasta un mínimo, el cual resulta tener valores muy similares para cualquier h/b , aumentando y acercándose entre sí a continuación para cualquier ángulo de incidencia para ondas SV y P y produciéndose un marcado fenómeno de separación cuando la onda incidente es de tipo SH.

Por otra parte, los giros son muy similares para una cierta relación de aspecto h/b a frecuencias bajas, incrementándose hasta llegar a un máximo en la frecuencia fundamental en base flexible del edificio. Ese máximo es tanto mayor cuanto mayor es la relación h/b del edificio. La tendencia una vez rebasado el máximo es la de decaer rápidamente hasta llegar a un valor mínimo cuando la onda que incide es de tipo P, momento a partir del cual se produce un incremento del giro con la frecuencia. Cuando la onda incidente es de tipo SV o SH, el decrecimiento de la función tras el máximo continúa a medias y altas frecuencias, llegando casi a anularse para valores de a_o de en torno a 0,5. En cualquier caso, las curvas se solapan para cualquier ángulo de incidencia, a excepción de los ya comentados ángulos subcríticos de 30° y 50° para onda SV incidente. En ese supuesto, los valores son superiores a los que se obtienen para el resto de casos, de modo análogo al que ocurría en los desplazamientos y en la figura 5.10.

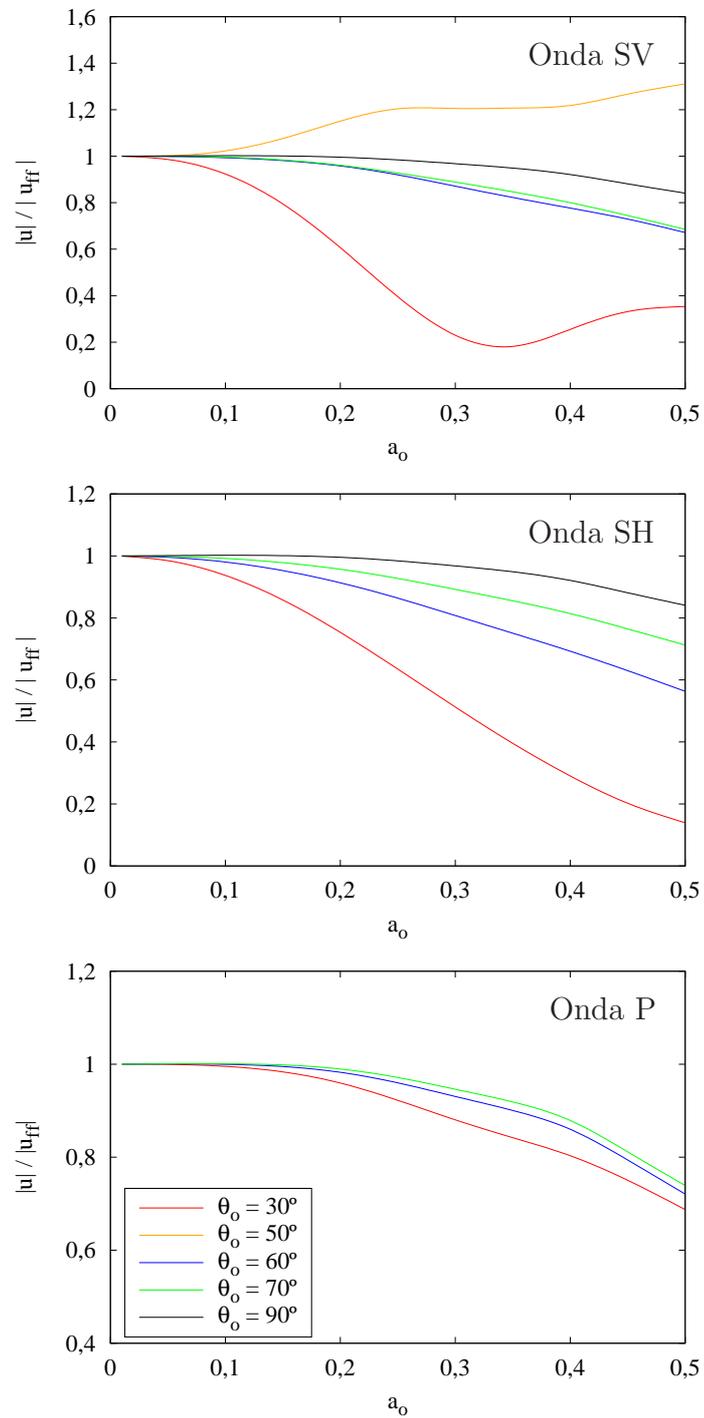


Figura 6.5: Factores de interacción cinemática en desplazamientos para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P

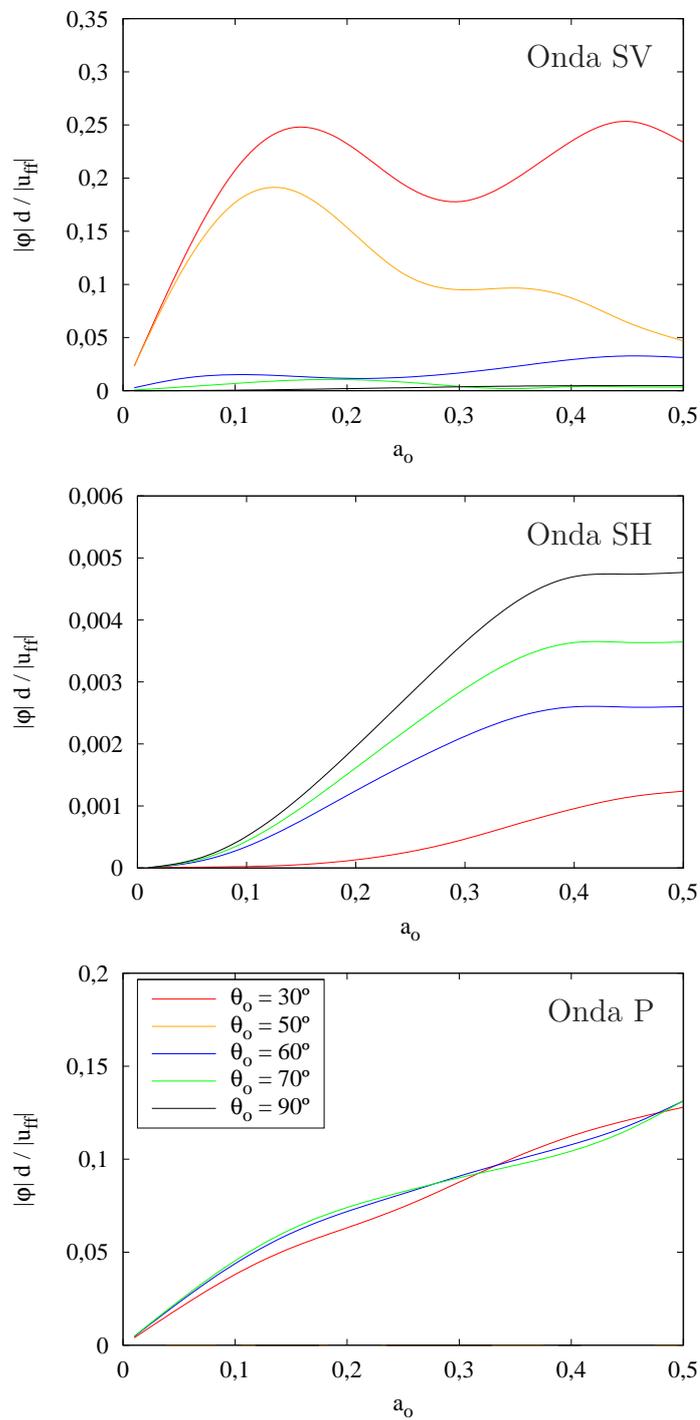


Figura 6.6: Factores de interacción cinemática en giros para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P

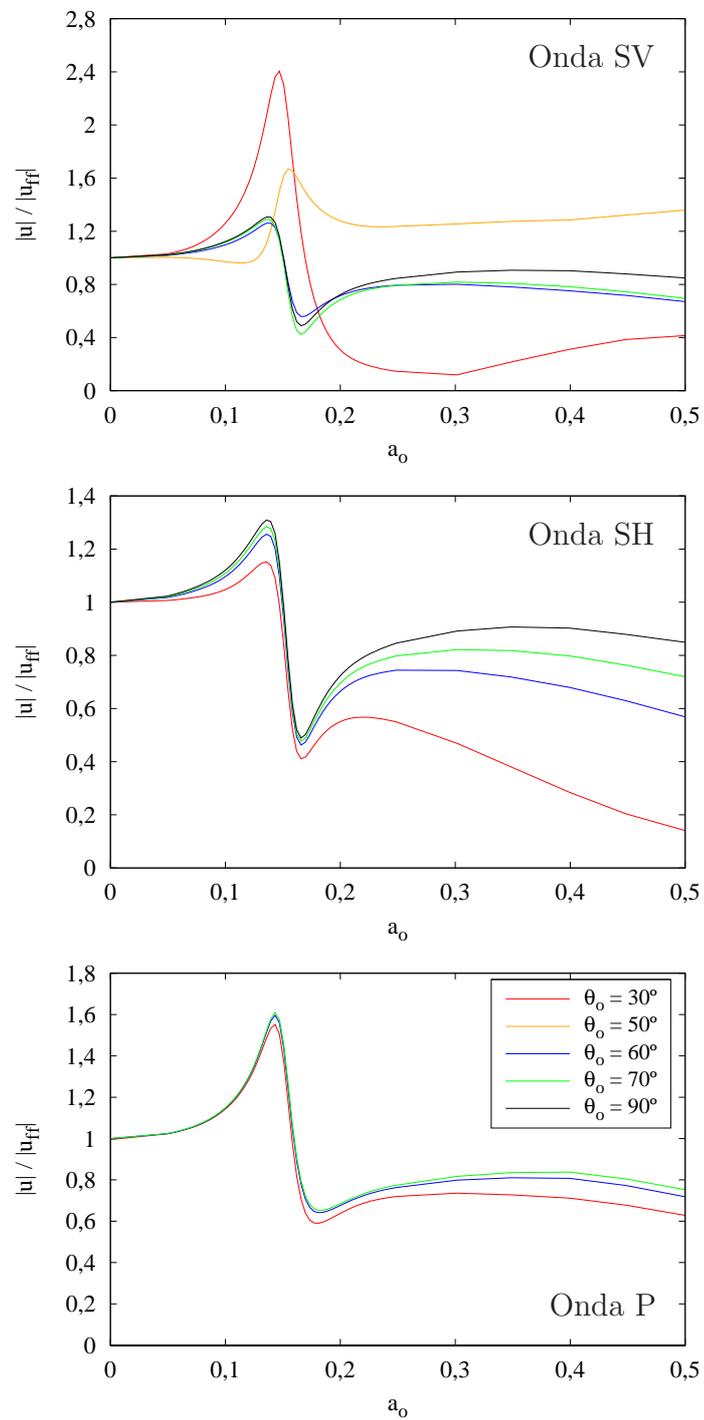


Figura 6.7: Factores de interacción cinemática en desplazamientos para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Caso con edificios. Relación de aspecto $h/b = 2$

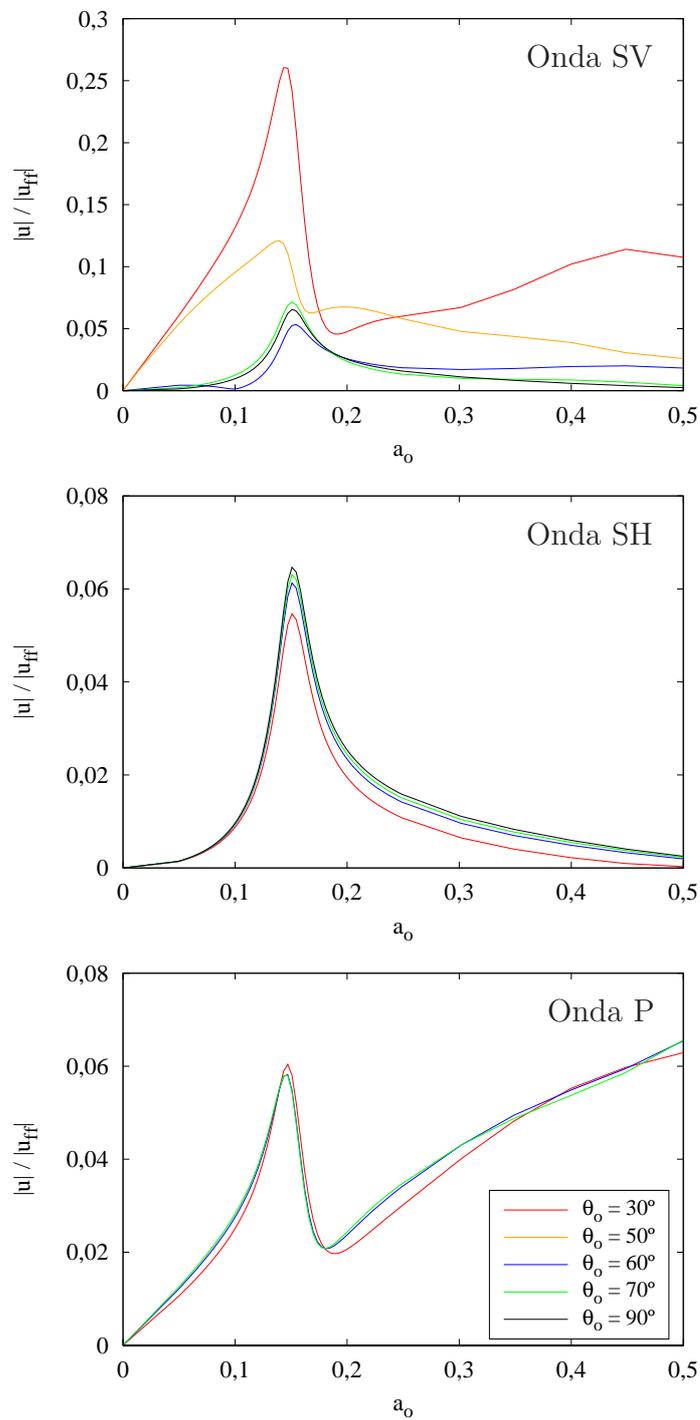


Figura 6.8: Factores de interacción cinemática en giros para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Caso con edificios. Relación de aspecto $h/b = 2$

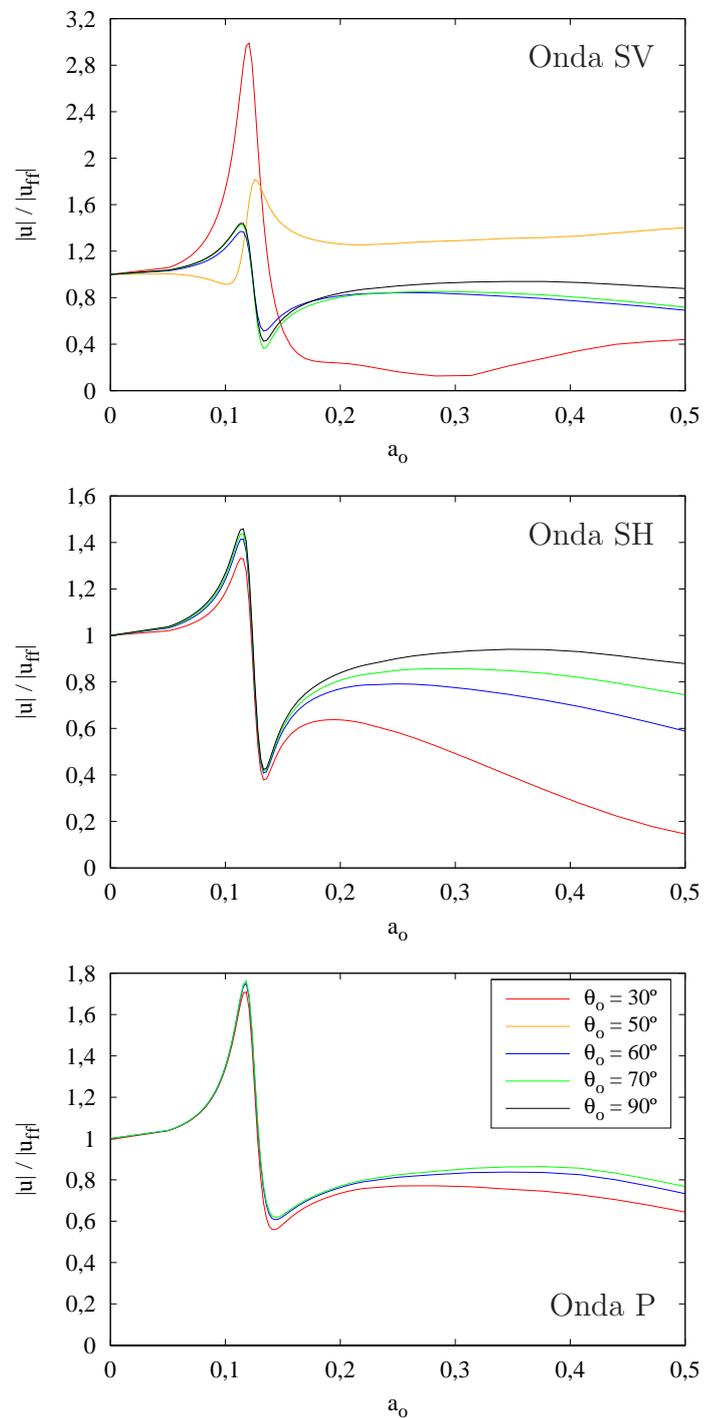


Figura 6.9: Factores de interacción cinemática en desplazamientos para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Caso con edificios. Relación de aspecto $h/b = 3$

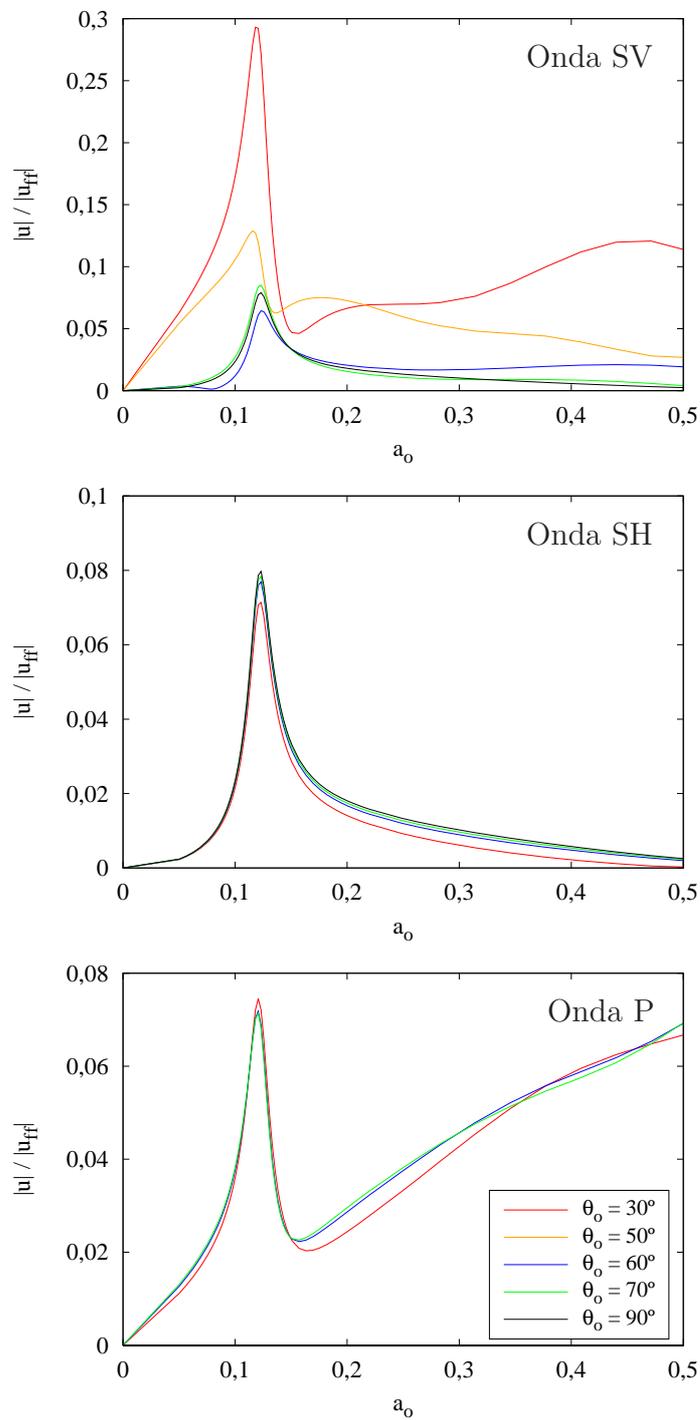


Figura 6.10: Factores de interacción cinemática en giros para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Caso con edificios. Relación de aspecto $h/b = 3$

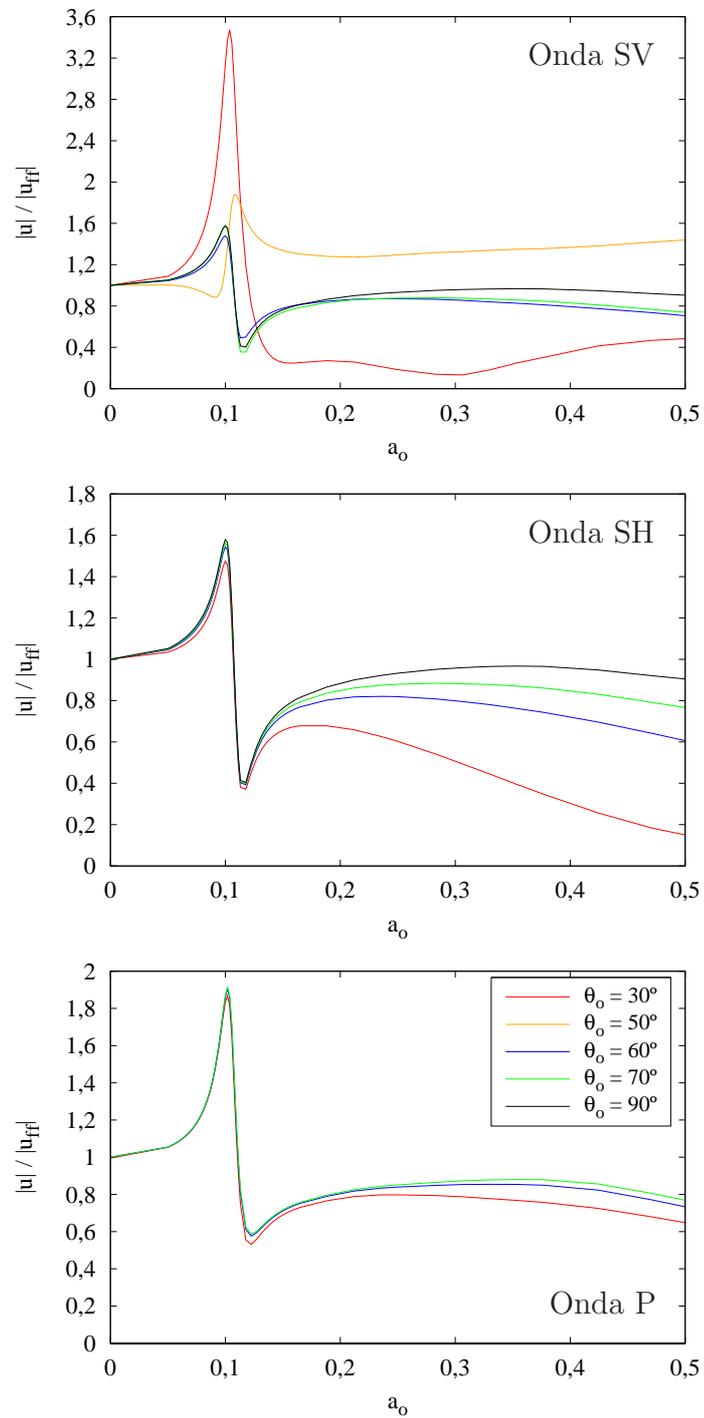


Figura 6.11: Factores de interacción cinemática en desplazamientos para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Caso con edificios. Relación de aspecto $h/b = 4$

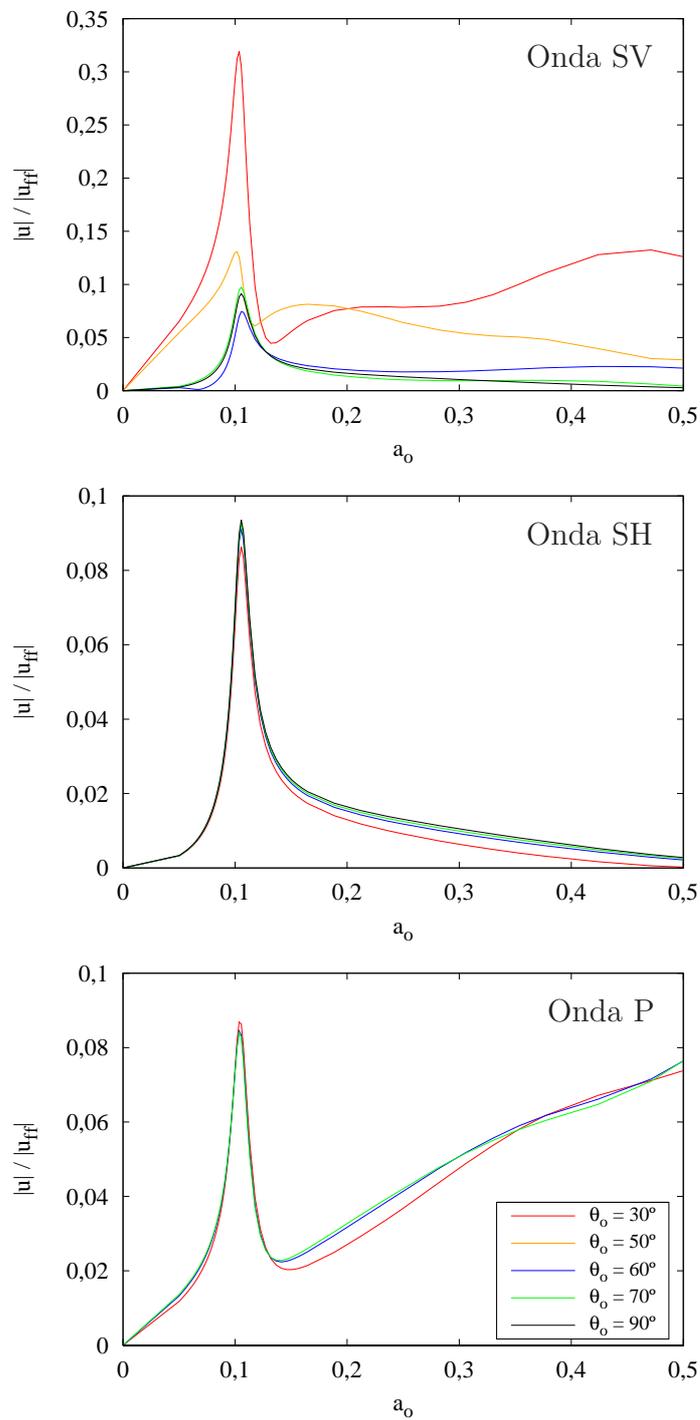


Figura 6.12: Factores de interacción cinemática en giros para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Caso con edificios. Relación de aspecto $h/b = 4$

6.3.6. Deflexión lateral del edificio

Existen diversas variables de interés a la hora de analizar la respuesta dinámica de la superestructura. Sin embargo, se verá que tomar la deflexión lateral del edificio permite establecer relaciones directas con magnitudes físicas de importancia de cara al diseño estructural del edificio. De esta manera, puede definirse la deflexión lateral del edificio en términos de las variables presentadas en la figura 6.3 como:

$$u_{deflex} = u - u_c - \phi h \quad (6.8)$$

Puede demostrarse que el producto de ese valor por la rigidez del sistema proporciona el cortante en la base:

$$F = k u_{deflex} \quad (6.9)$$

Por otra parte, puede definirse una variable denominada factor de amplificación dinámica como la relación entre el desplazamiento producido por una acción dinámica y su valor en el caso de una acción estática de la misma magnitud, de modo que:

$$D = \frac{u_{deflex}}{u_s} \quad (6.10)$$

siendo D el factor de amplificación dinámica y u_s el desplazamiento debido a la fuerza estática. El desplazamiento debido a la carga estática puede escribirse como $F_{equiv} = k u_s$, quedando el factor de amplificación dinámica:

$$D = \frac{u_{deflex}}{u_s} = \frac{u_{deflex}}{F_{equiv}/k} = \frac{k u_{deflex}}{F_{equiv}} \quad (6.11)$$

Si se recuerda la definición de la frecuencia natural de la estructura:

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad k = \Omega^2 m \quad (6.12)$$

y si se expresa la acción estática equivalente sobre la masa de un sistema de un grado de libertad como:

$$F_{equiv} = \omega^2 m u_{ff} \quad (6.13)$$

siendo u_{ff} el desplazamiento en la base, el factor de amplificación dinámica puede escribirse:

$$D = \frac{k u}{F} = \frac{\Omega^2 m u_{deflex}}{\omega^2 m u_{ff}} = \frac{\Omega^2 u_{deflex}}{\omega^2 u_{ff}} \quad (6.14)$$

De esta manera, el cociente adimensional entre u_{deflex} y el desplazamiento en la base u_{ff} toma el siguiente valor:

$$\frac{u_{deflex}}{u_{ff}} = \frac{\omega^2 D}{\Omega^2} \quad (6.15)$$

Por lo tanto, el conocimiento de u_{deflex} en relación al desplazamiento en la base (que se corresponde con el desplazamiento horizontal de campo libre) permite obtener tanto el cortante en la base de la estructura (dado por la ecuación (6.9)) como el factor de amplificación dinámica D , sin más que multiplicar en el primer caso por la rigidez k de la estructura y por el cuadrado del cociente entre la frecuencia natural de la estructura y la frecuencia de excitación en el segundo. El cortante en la base es un parámetro de aplicación inmediata de cara al cálculo y comprobación de una estructura de un grado de libertad, mientras que el factor de amplificación dinámica tiene un uso bastante frecuente a la hora de expresar cuán desfavorable es una determinada acción dinámica en relación a la misma acción solo que aplicada de modo estático.

Las figuras 6.13, 6.14 y 6.15 muestran las variaciones con la frecuencia del cociente entre los módulos de la deflexión lateral del edificio y el correspondiente módulo del desplazamiento horizontal de campo libre para las tres relaciones de aspecto h/b estudiadas.

Las conclusiones que pueden extraerse son de aplicación, para cada onda, a cualquiera de las tres relaciones de aspecto. Así, cuando la onda que incide es de tipo P, las gráficas presentan valores muy similares para frecuencias bajas e intermedias, incrementándose las diferencias a altas frecuencias. Se puede observar que las curvas presentan un máximo en torno a la frecuencia fundamental del edificio en base flexible, la cual varía, como no podía ser de otro modo, con la relación de aspecto h/b .

Las diferencias enumeradas son algo más notables cuando la onda incidente es una de tipo SH, aumentando la deflexión conforme la onda se vuelve más vertical. En esta ocasión se mantiene la tendencia presente cuando la onda incidente es de tipo P de existir gran similitud en los resultados para frecuencias bajas, comenzando a diferir, esta vez, en el entorno de la frecuencia fundamental en base flexible.

Mención especial merece el análisis de los resultados que se obtienen cuando la onda que incide es una SV. Si bien el comportamiento cuando θ_0 es superior a 50° sigue los patrones comentados hasta el momento, éste se vuelve mucho más variable cuando el ángulo de incidencia es inferior a ese valor, lo que indica la necesidad de un estudio más pormenorizado. Para ello, empléese como referencia la figura 6.4. En ella puede comprobarse que, para una amplitud de la onda incidente unitaria, el valor del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre para los ángulos subcríticos $\theta_0 = 30^\circ$ y $\theta_0 = 50^\circ$ es sustancialmente menor que para

los otros casos (del orden de la cuarta o la quinta parte). Esto hace que, pese a la tendencia observable en la figura 6.5 para el caso $\theta_0 = 30^\circ$, según la cual el desplazamiento horizontal relativo al de campo libre es menor que para otros ángulos de incidencia, tanto para $\theta_0 = 30^\circ$ como para $\theta_0 = 50^\circ$, el giro en relación al desplazamiento de campo libre (figura 6.5) resulta del orden de entre 10 y 12 veces superior, lo que hace que se incremente muy notablemente el valor de la deflexión lateral del edificio, por depender ésta del giro (ecuación (6.8)).

De modo paralelo a lo comentado hasta el momento, resulta interesante analizar dos casos de interés que se presentan por la manera de adimensionalizar los resultados escogida cuando la onda que incide es una de tipo SV. En concreto, se trata de los casos $\theta_0 = 45^\circ$ y $\theta_0 = \theta_{cr}$.

Tal y como se puede verificar en la figura 6.4, cuando θ_0 adquiere por valor 45° , el módulo del desplazamiento horizontal de campo libre se anula, lo que provoca que las variables que lo emplean como factor de adimensionalización presenten una singularidad. De este modo, si se desearan presentar resultados cuando θ_0 valiese 45° , debería buscarse otro modo de adimensionalizarlos, bien sea por división entre el módulo del desplazamiento horizontal de campo libre cuando la onda incide de modo vertical, bien mediante el empleo de cualquier otra variable de valor no nulo.

Por otro lado, cuando $\theta_0 = \theta_{cr}$, el módulo del desplazamiento horizontal de campo libre es máximo. Además, su variación es muy abrupta para ángulos sensiblemente subcríticos y sensiblemente supercríticos, lo que provoca que existan grandes diferencias en las respuestas para dos ángulos de incidencia muy próximos por encima y por debajo del ángulo crítico.

6.3.7. Esfuerzos en los pilotes

Otras variables de interés de cara a la cuantificación de la respuesta dinámica de estructuras de edificación pilotadas sometidas a ondas que inciden con un ángulo genérico son los esfuerzos que aparecen en los pilotes. De este modo, las figuras de 6.16 a 6.42 muestran los esfuerzos axiales, cortantes y momentos flectores en dos puntos a distintas profundidades de los cuatro pilotes de interés. En concreto, se estudia el punto de unión de los pilotes al encepado, punto de gran importancia para el diseño de los mismos, así como un punto situado a una distancia $L/5$ de su extremo superior. Existe una disminución de los esfuerzos con la profundidad, por lo que los resultados en el segundo de los puntos pueden emplearse para cuantificar la rapidez de esa disminución. Debe notarse que, en todos los casos, las escalas empleadas para la representación de los resultados en el punto inferior son inferiores a las usadas para la cabeza de los pilotes.

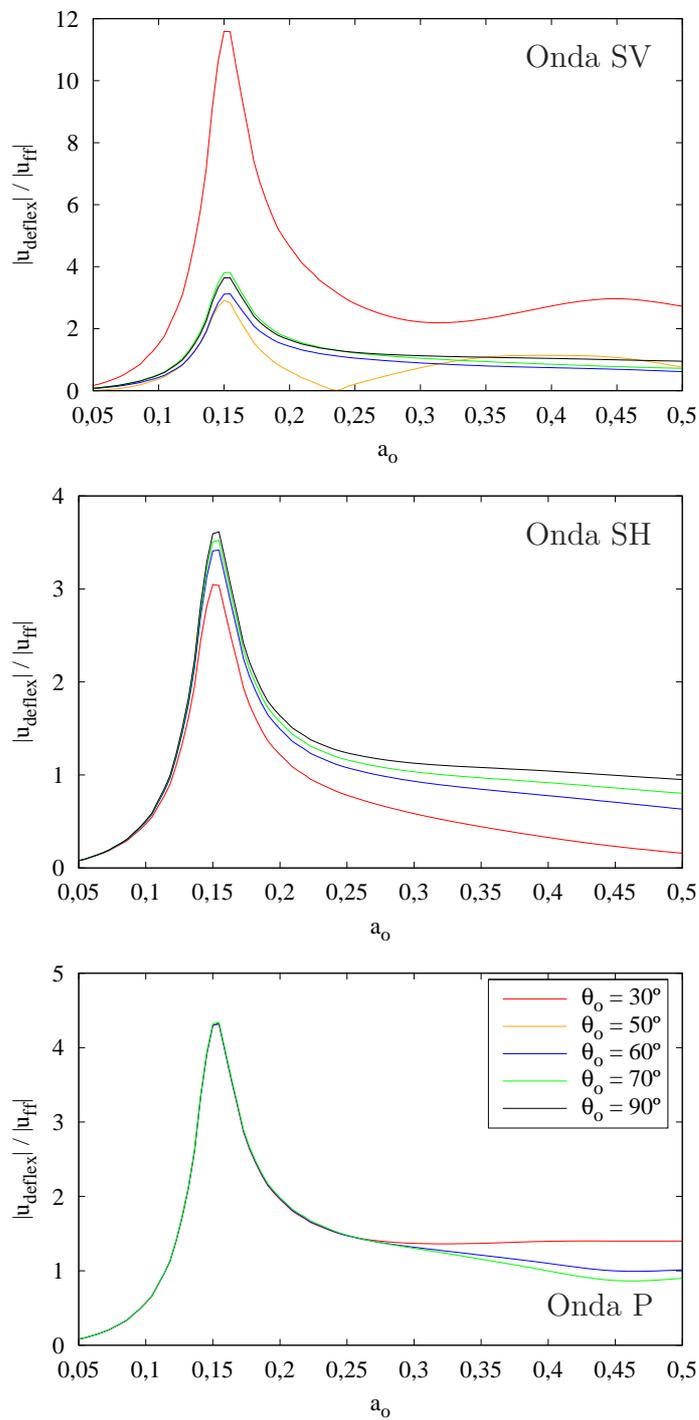


Figura 6.13: Deflexión lateral del edificio. Relación de aspecto $h/b = 2$

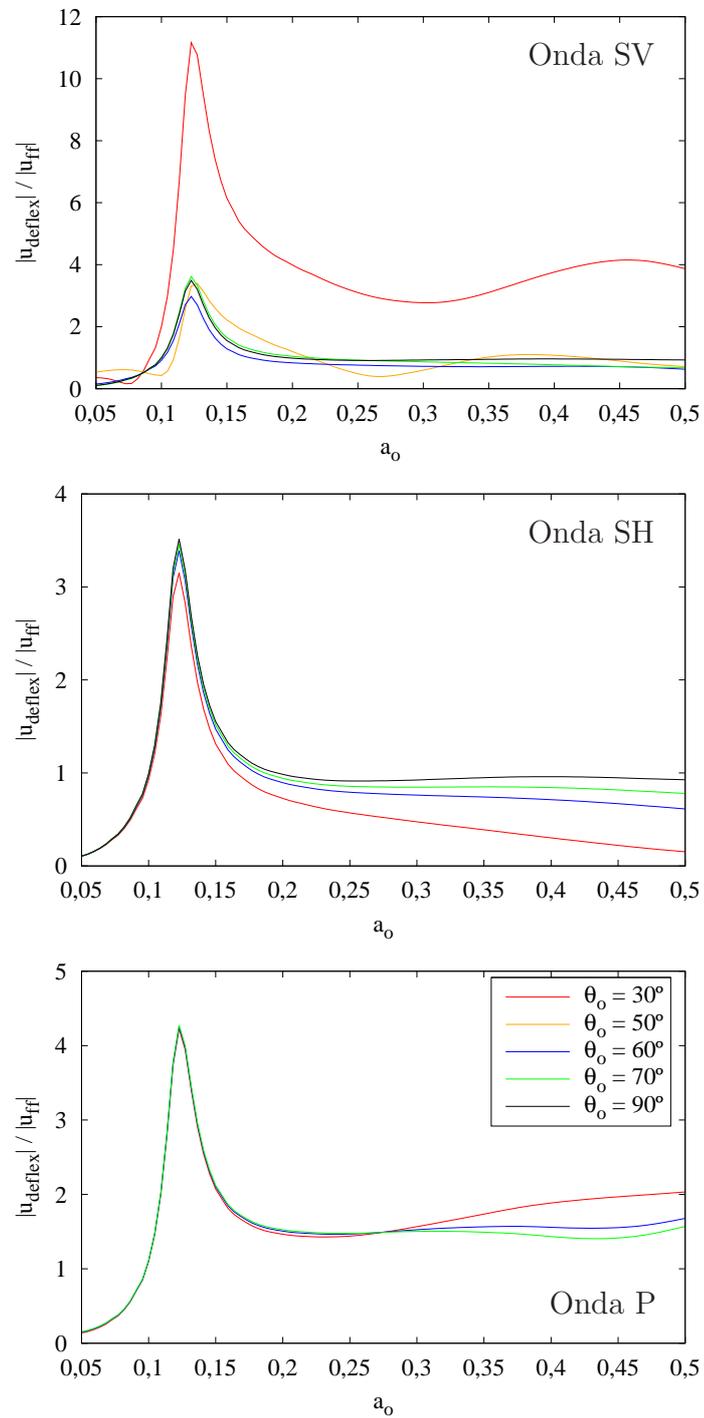


Figura 6.14: Deflexión lateral del edificio. Relación de aspecto $h/b = 3$

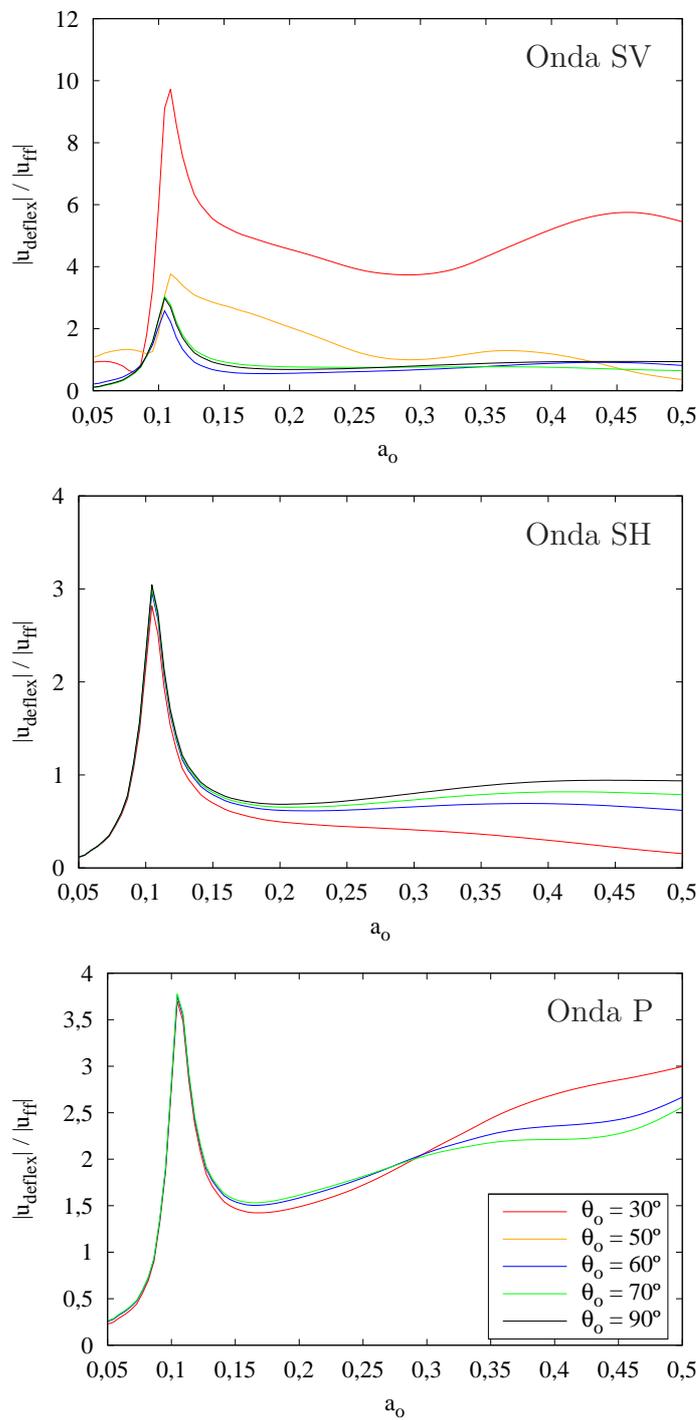


Figura 6.15: Deflexión lateral del edificio. Relación de aspecto $h/b = 4$

La tendencia general de los resultados es la de incrementar sus valores con la relación de aspecto h/b . En todos los casos, y de modo similar a como ocurría en los factores de interacción cinemática de los encepados, las gráficas presentan un máximo en el entorno de la frecuencia fundamental en base flexible del edificio, caracterizado por un drástico incremento de los esfuerzos en frecuencias cercanas e inferiores seguido de un brusco decremento pasada la citada frecuencia fundamental. Además, la tendencia a medias y altas frecuencias es la de aumentar los esfuerzos, salvo cuando la onda incidente es de tipo SH y se trata de esfuerzos axiales, en cuyo caso éstos tienden a anularse al aumentar la frecuencia.

Por otro lado, resulta interesante analizar los esfuerzos axiales en los pilotes cuando la onda que incide es una de tipo SH. En ese caso, los pilotes centrales se encuentran totalmente descargados, distribuyéndose el total de la carga entre los pilotes extremos. Esto se debe a que, en estas circunstancias, el desplazamiento vertical del centro de gravedad del encepado es nulo, y éste gira en torno al eje formado por los pilotes centrales, lo que provoca que éstos se encuentren descargados en cuanto a esfuerzos axiales, siendo los extremos los que interactúan con el suelo, generando los esfuerzos que pueden observarse en las correspondientes figuras.

Otro caso de interés consiste en el estudio del reparto de carga entre los pilotes. En concreto, a frecuencias bajas los pilotes extremos soportan un esfuerzo cortante mayor por ser los que encuentran mayor impedimento en su movimiento.

Como se adelantó anteriormente, los esfuerzos en el punto situado a $L/5$ del extremo superior de los pilotes son netamente inferiores a los que existen en el mencionado extremo. Padrón en [35] concluye que la variación de los esfuerzos a lo largo de los pilotes es prácticamente exponencial, conclusión que se confirma en el presente trabajo.

El fenómeno descrito para las ondas SV incidentes en factores de interacción cinemática en los encepados asociado a los ángulos subcríticos 30° y 50° también tiene lugar en los esfuerzos. La relación entre los esfuerzos y los desplazamientos horizontales de campo libre correspondientes a cada ángulo de incidencia se incrementa notablemente para ángulos sensiblemente subcríticos.

Por último, destacar el hecho evidente de que el ángulo de incidencia posee una gran influencia en la magnitud de los esfuerzos generados. De esta manera, la suposición de incidencia vertical no tiene por qué ser la que produzca los mayores esfuerzos en los elementos de la cimentación. Esto es particularmente cierto para altas frecuencias, donde la influencia del ángulo de incidencia es más patente en la gran mayoría de los casos analizados, con la única excepción notable de los esfuerzos axiales cuando la onda incidente es de tipo SH.

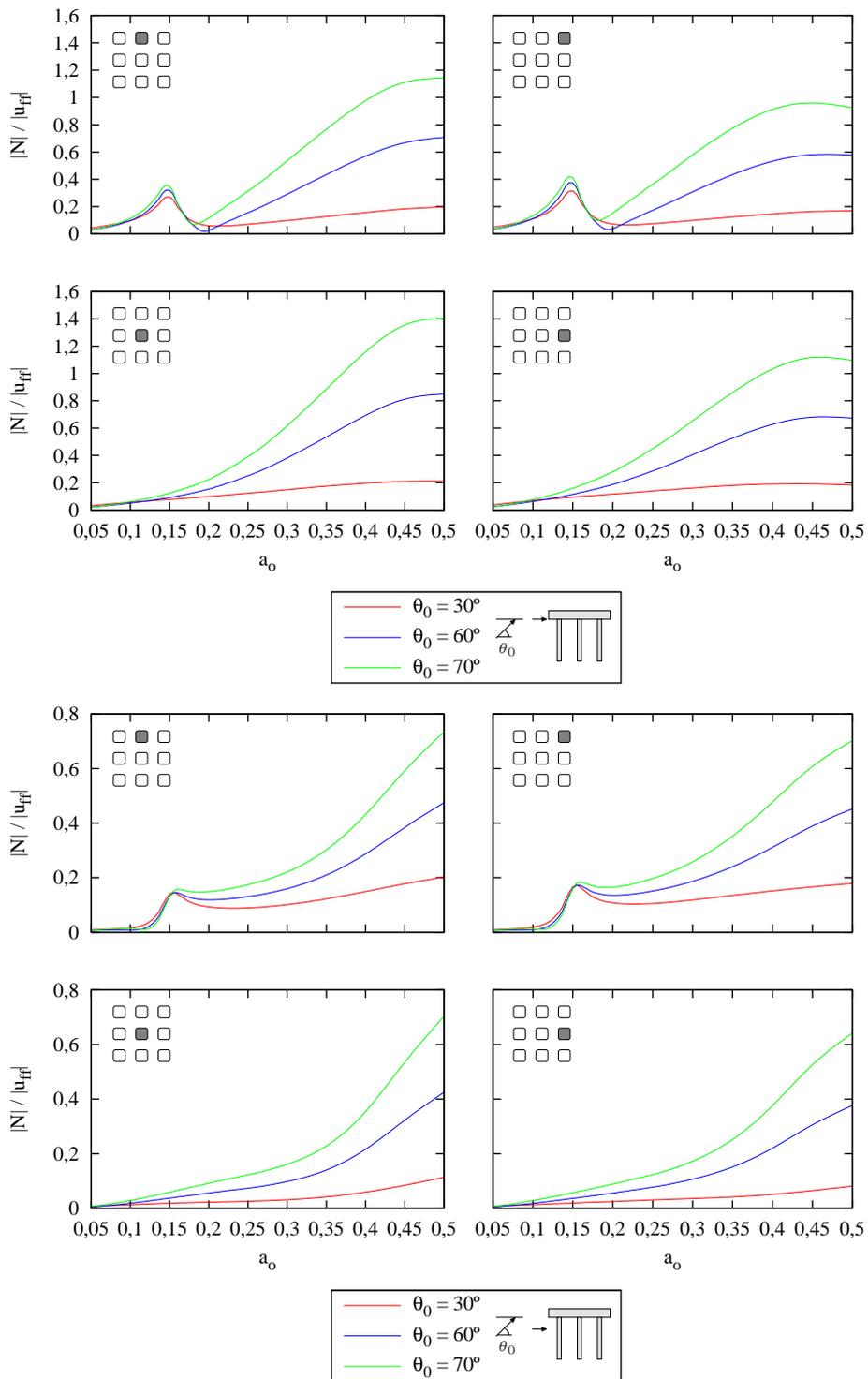


Figura 6.16: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda P , $h/b = 2$

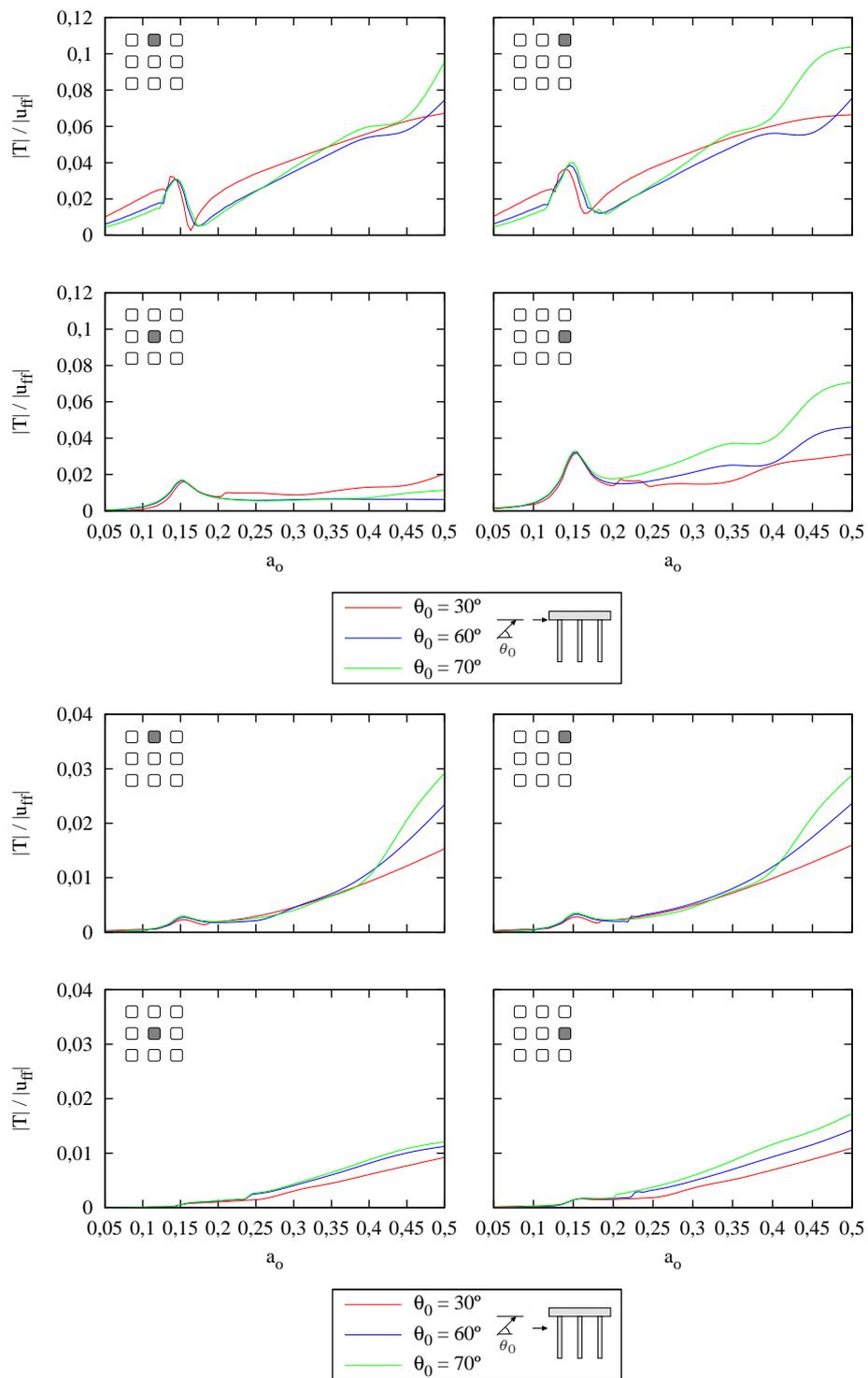


Figura 6.17: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda P, $h/b = 2$

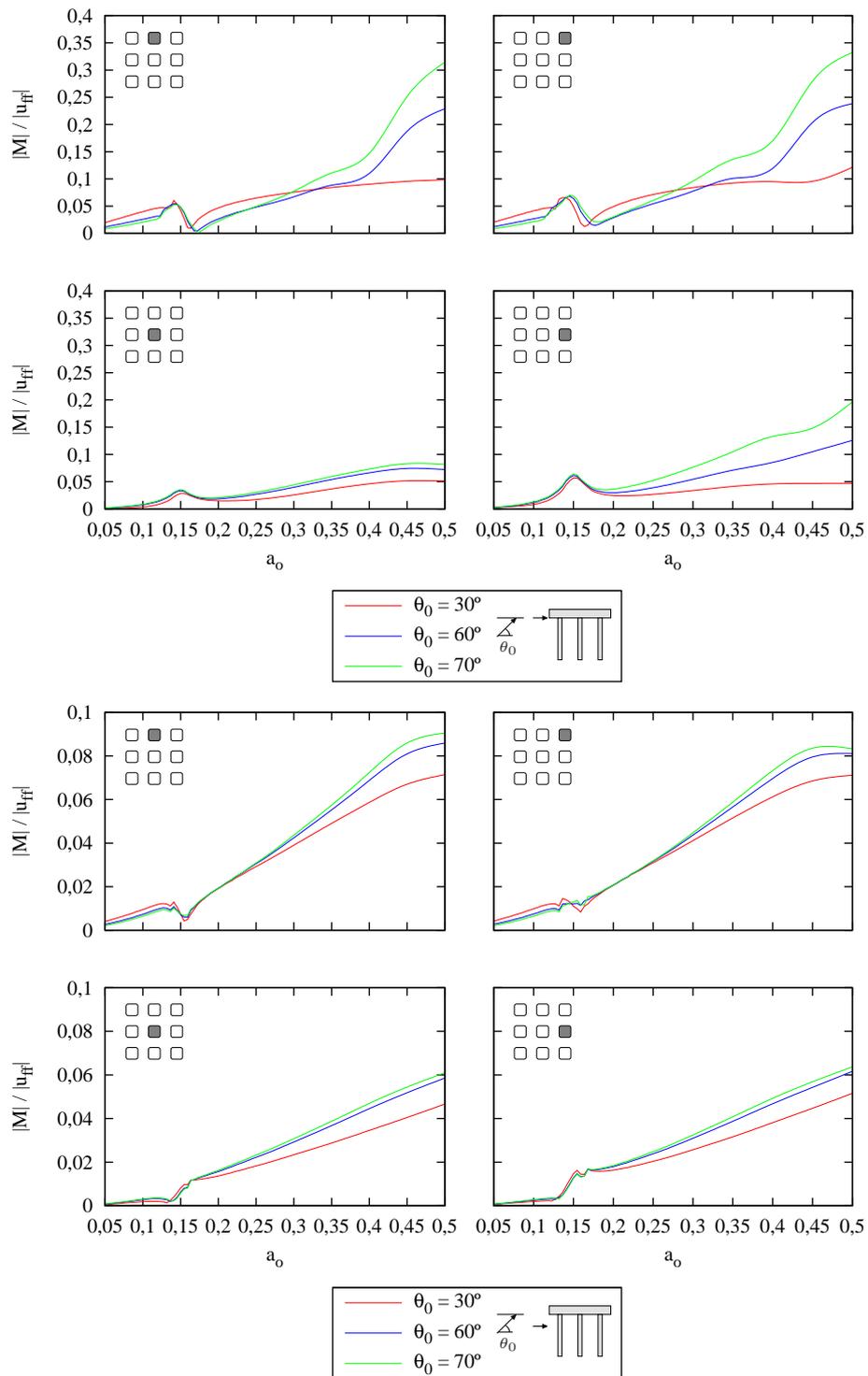


Figura 6.18: Momentos flectores en los pilotes. Onda P , $h/b = 2$

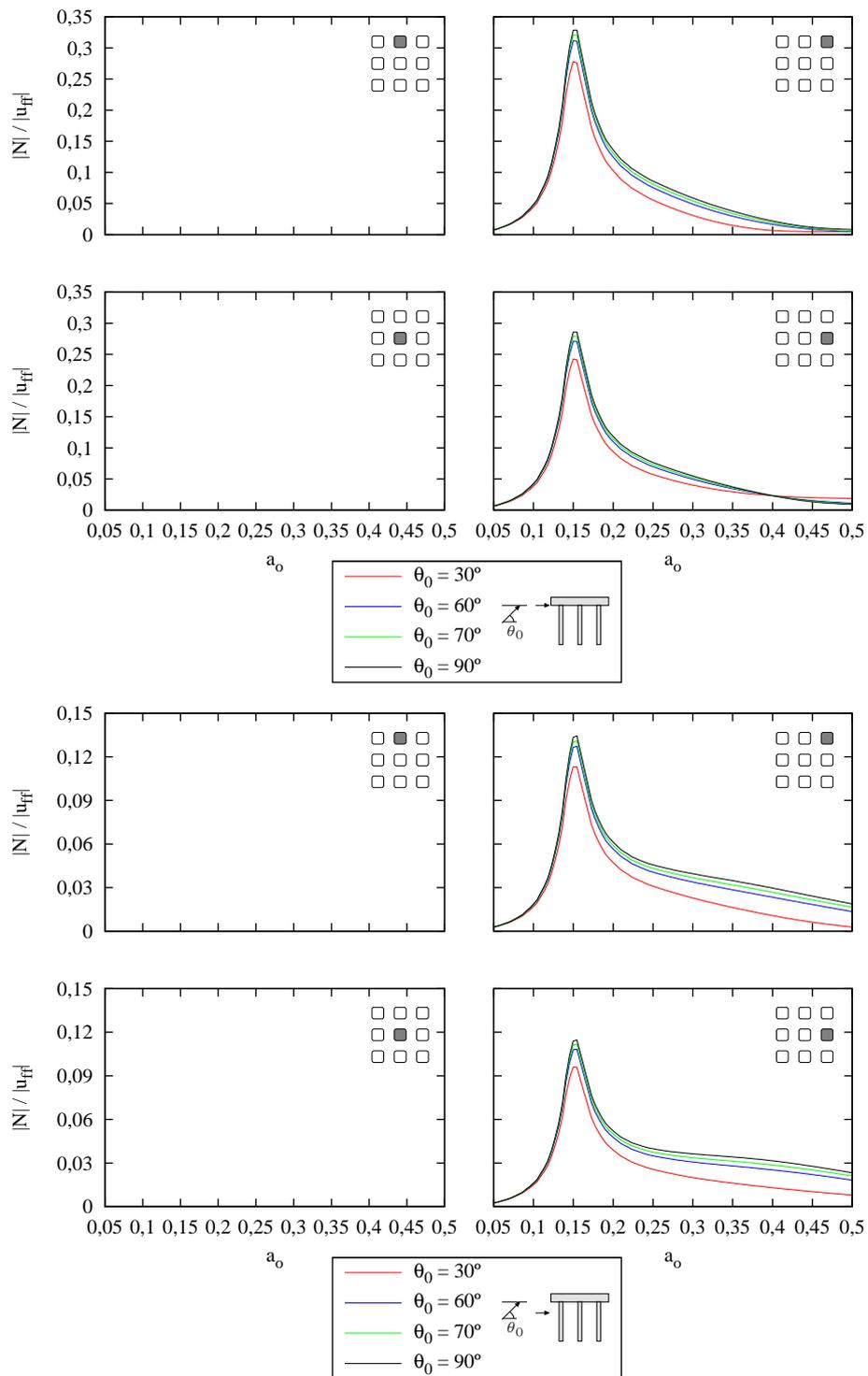


Figura 6.19: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda **SH**, $h/b = 2$

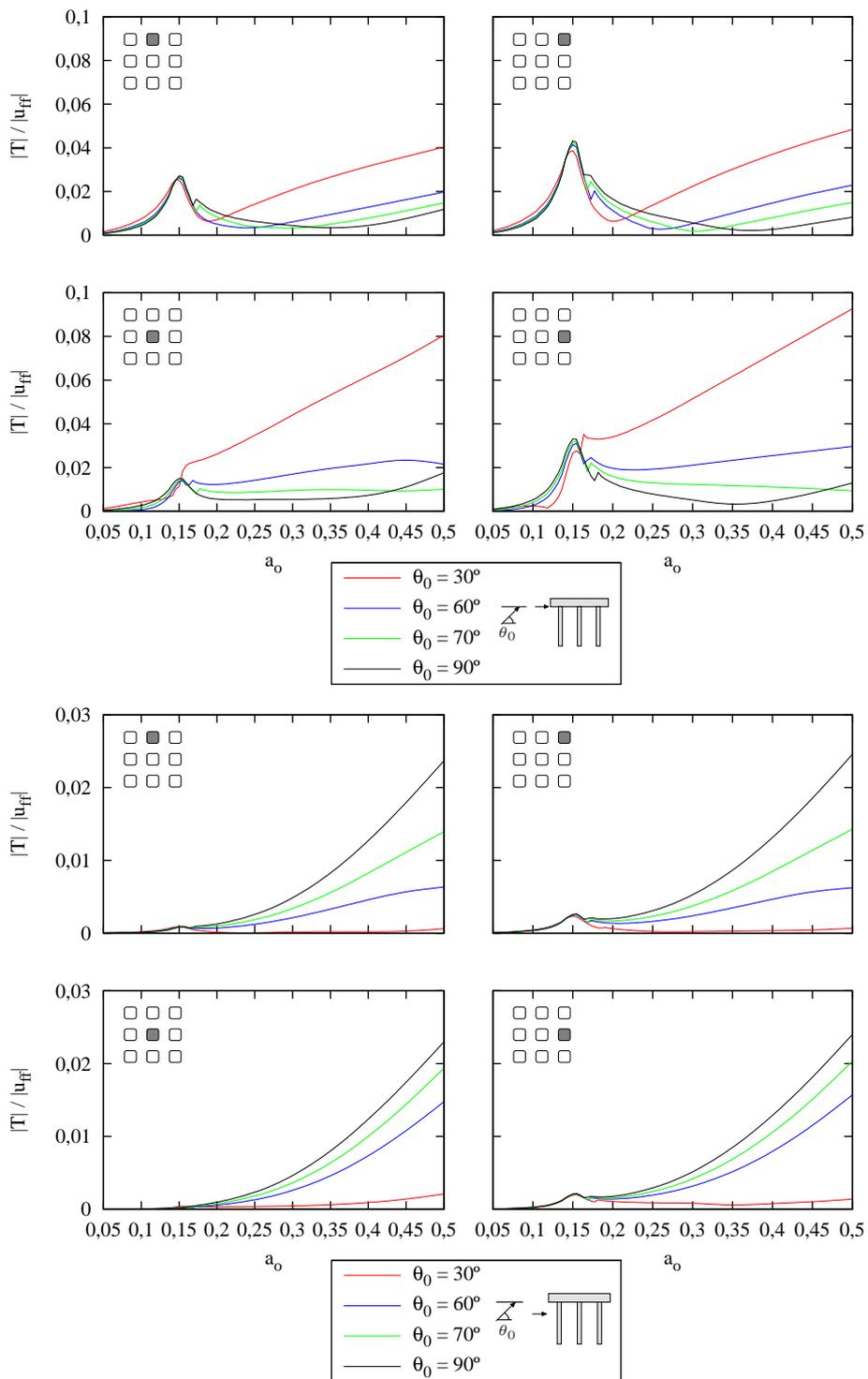


Figura 6.20: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda **SH**, $h/b = 2$

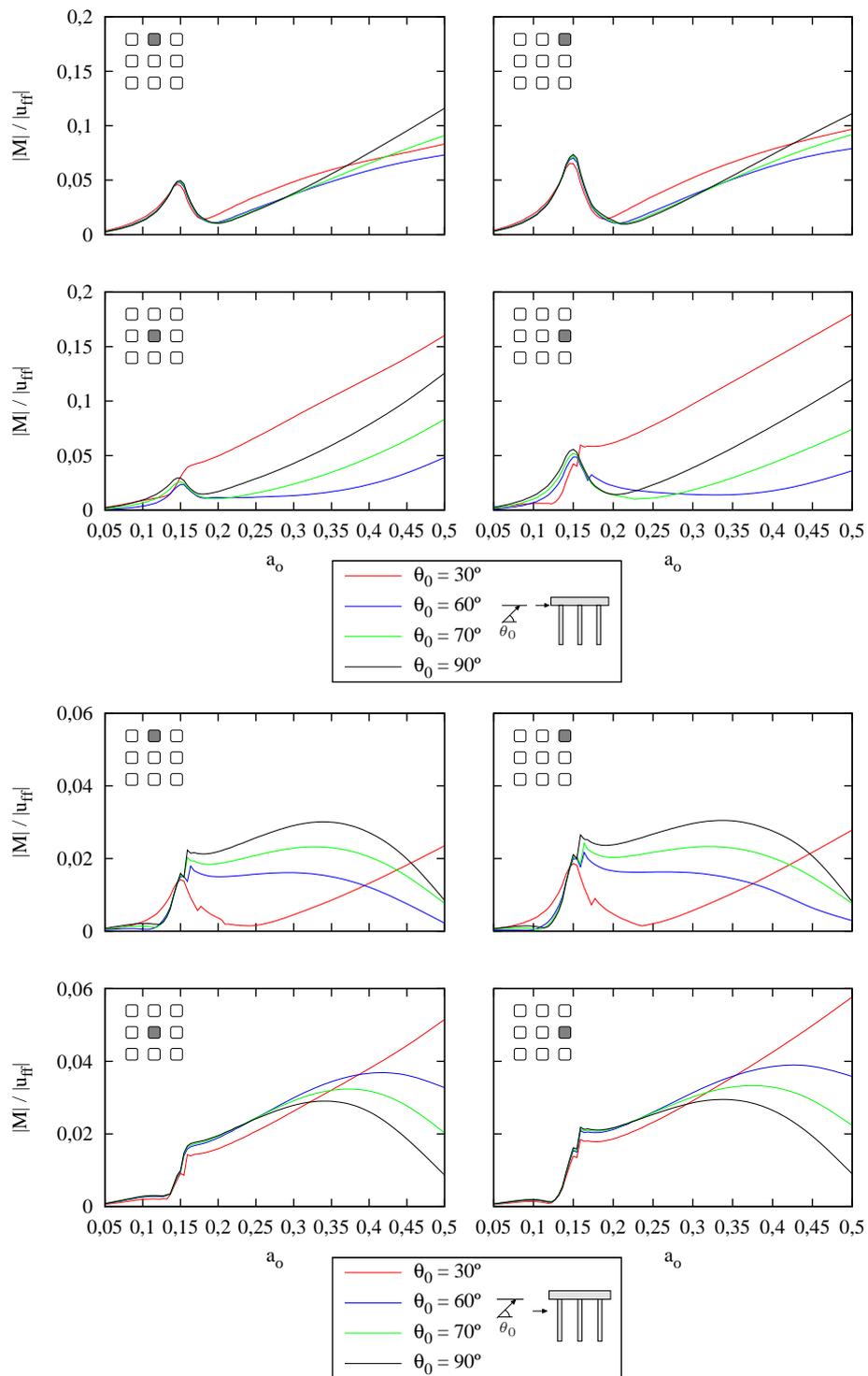


Figura 6.21: Momentos flectores en los pilotes. Onda **SH**, $h/b = 2$

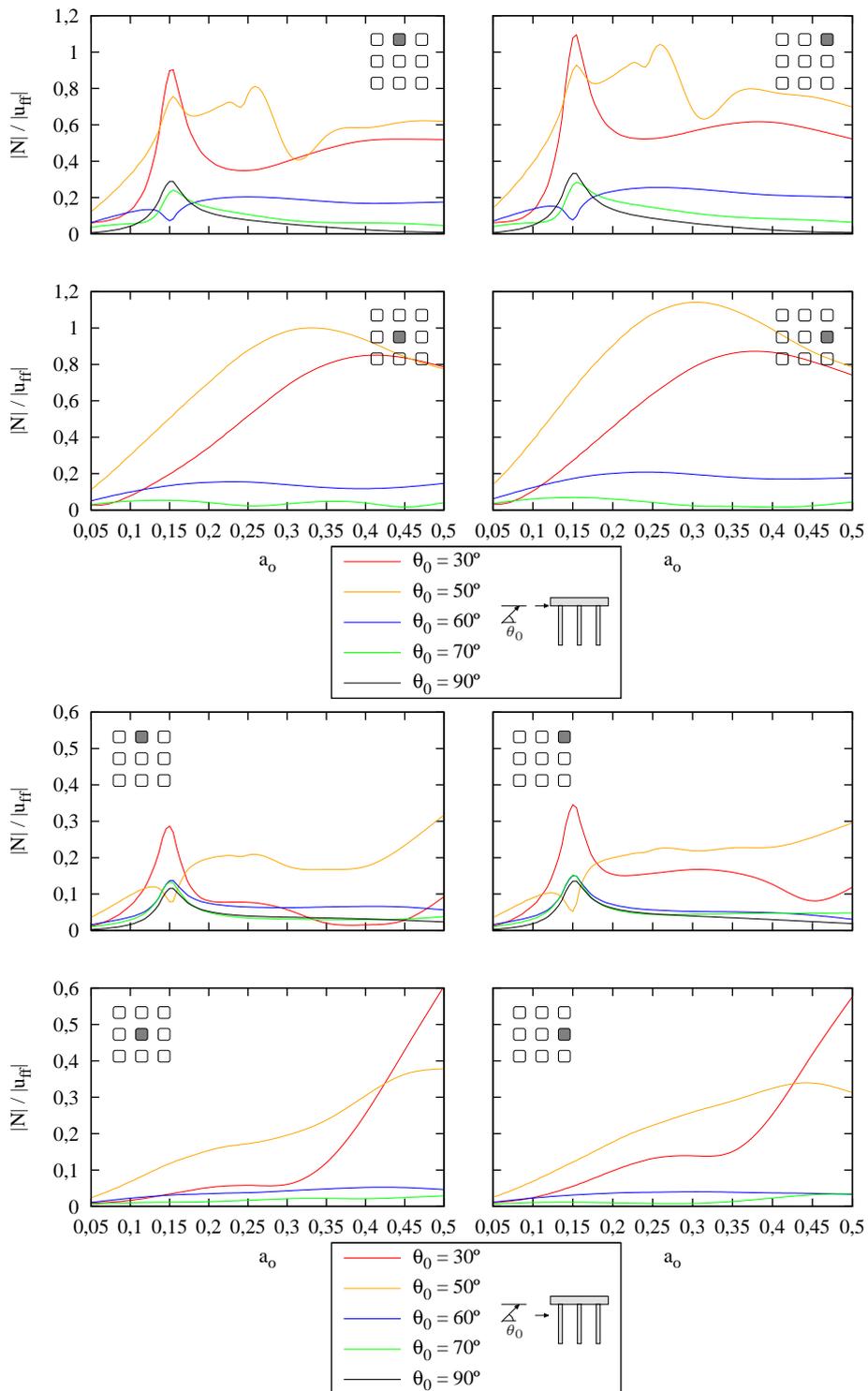


Figura 6.22: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SV, $h/b = 2$

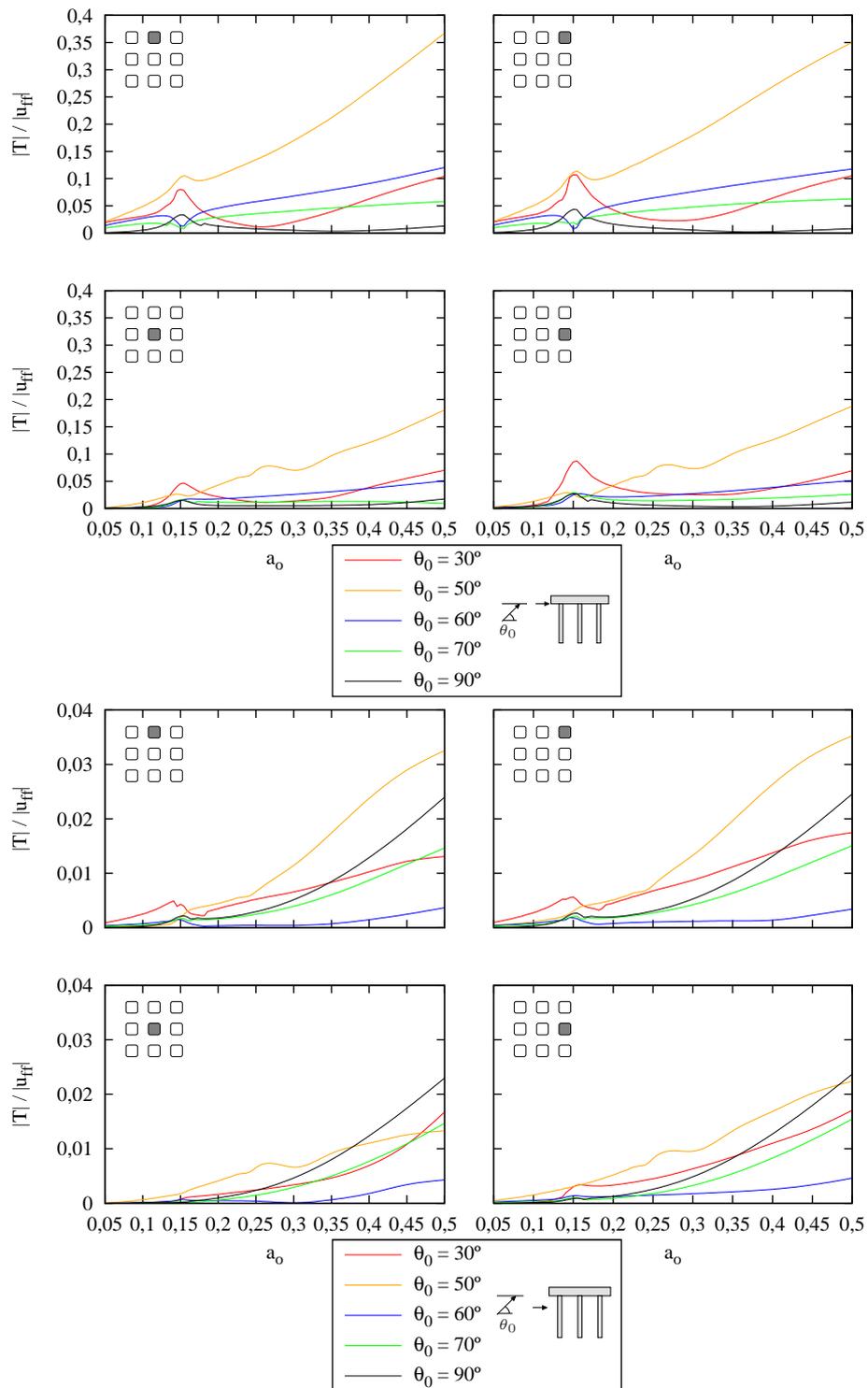


Figura 6.23: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV, $h/b = 2$

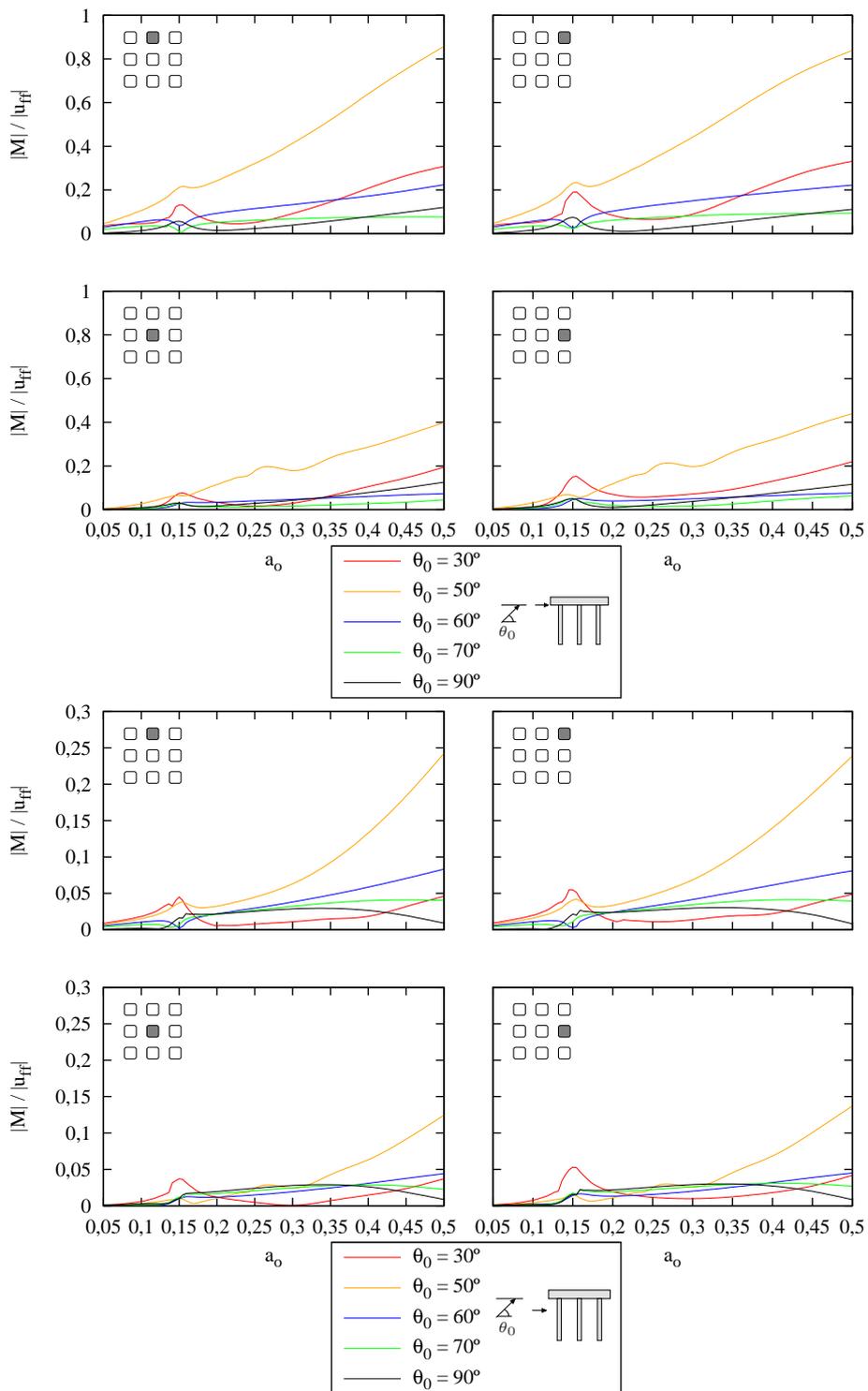


Figura 6.24: Momento flector en los pilotes. Onda SV, $h/b = 2$

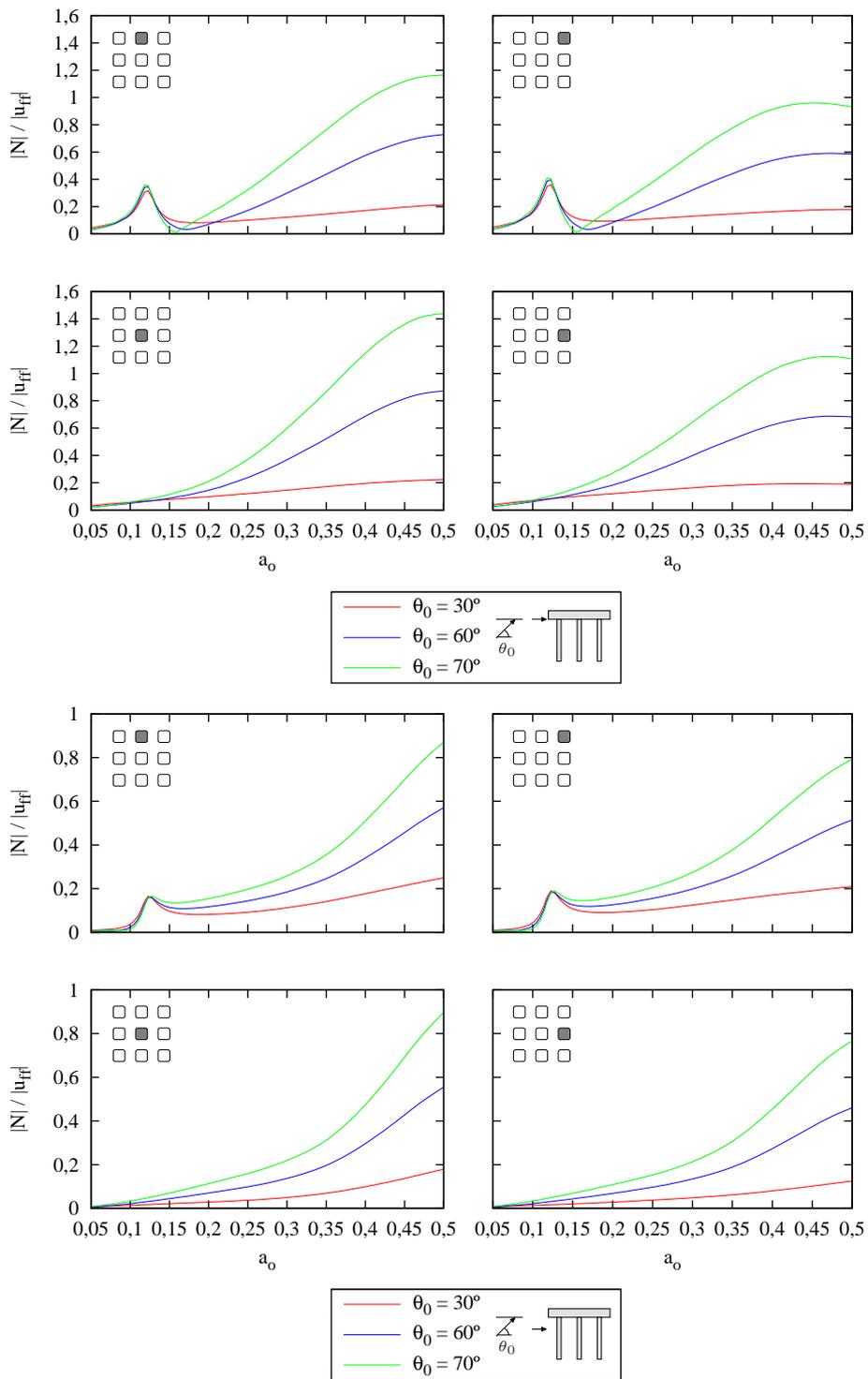


Figura 6.25: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda P, $h/b = 3$

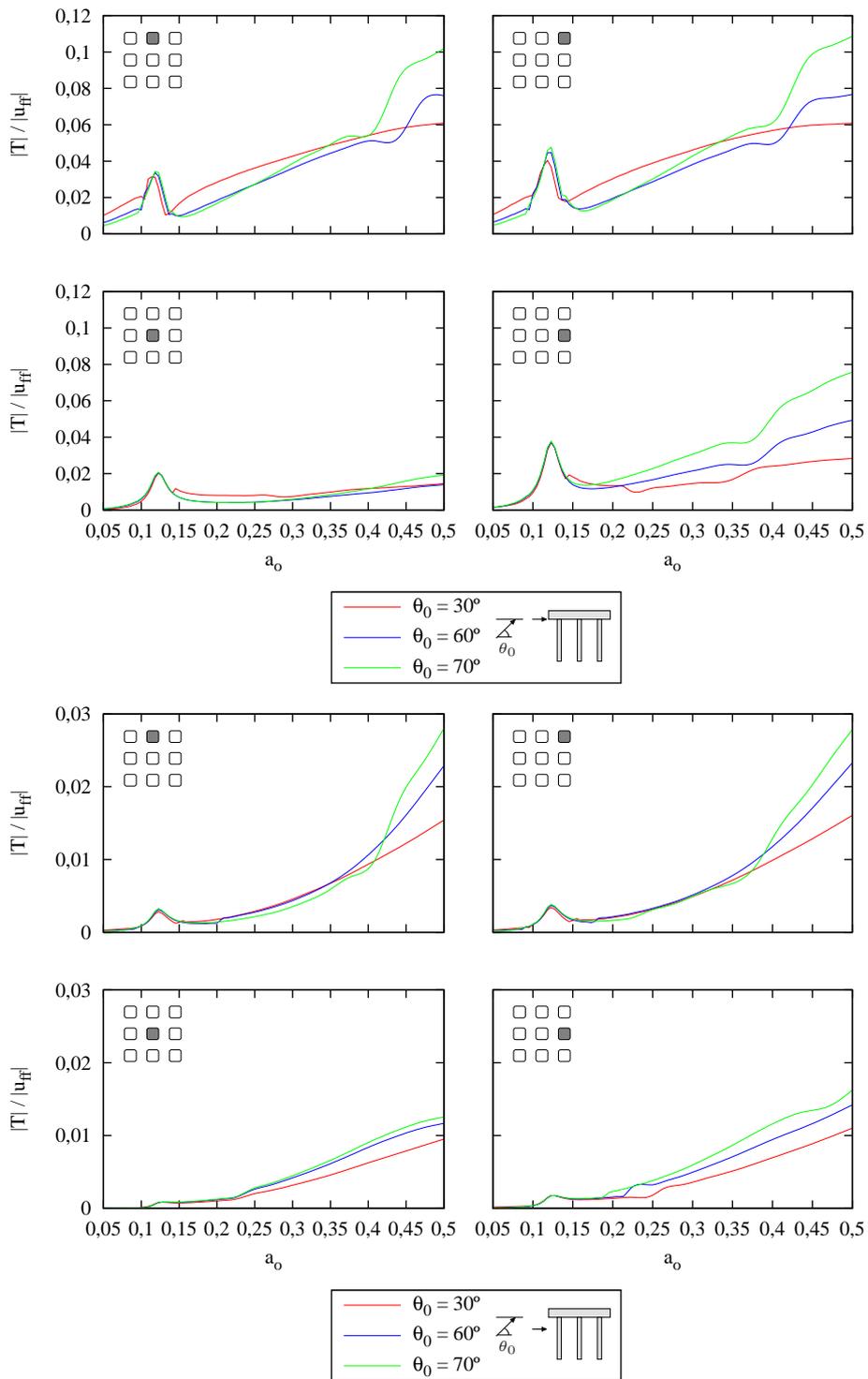


Figura 6.26: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda P , $h/b = 3$

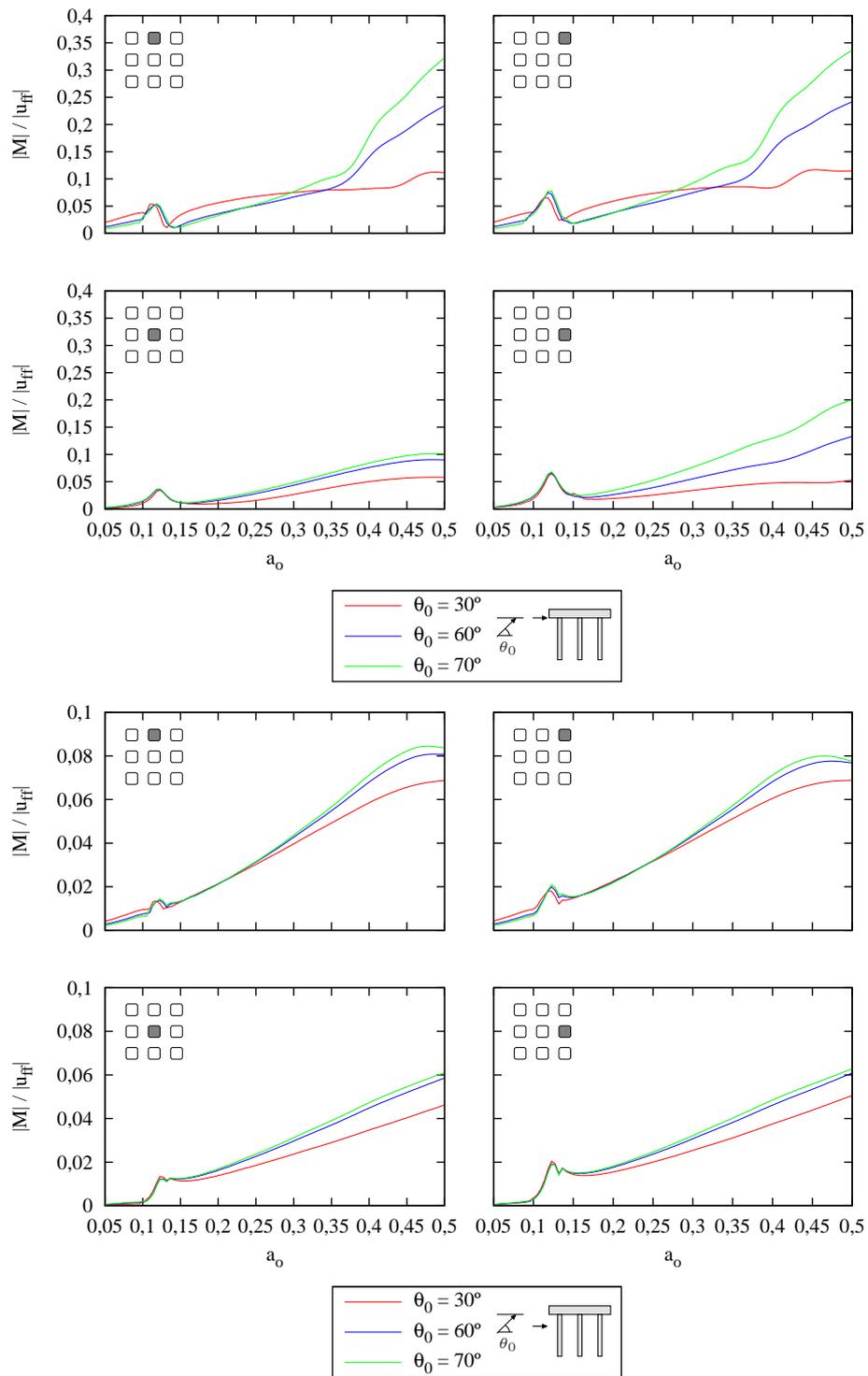


Figura 6.27: Momentos flectores en los pilotes. Onda P , $h/b = 3$

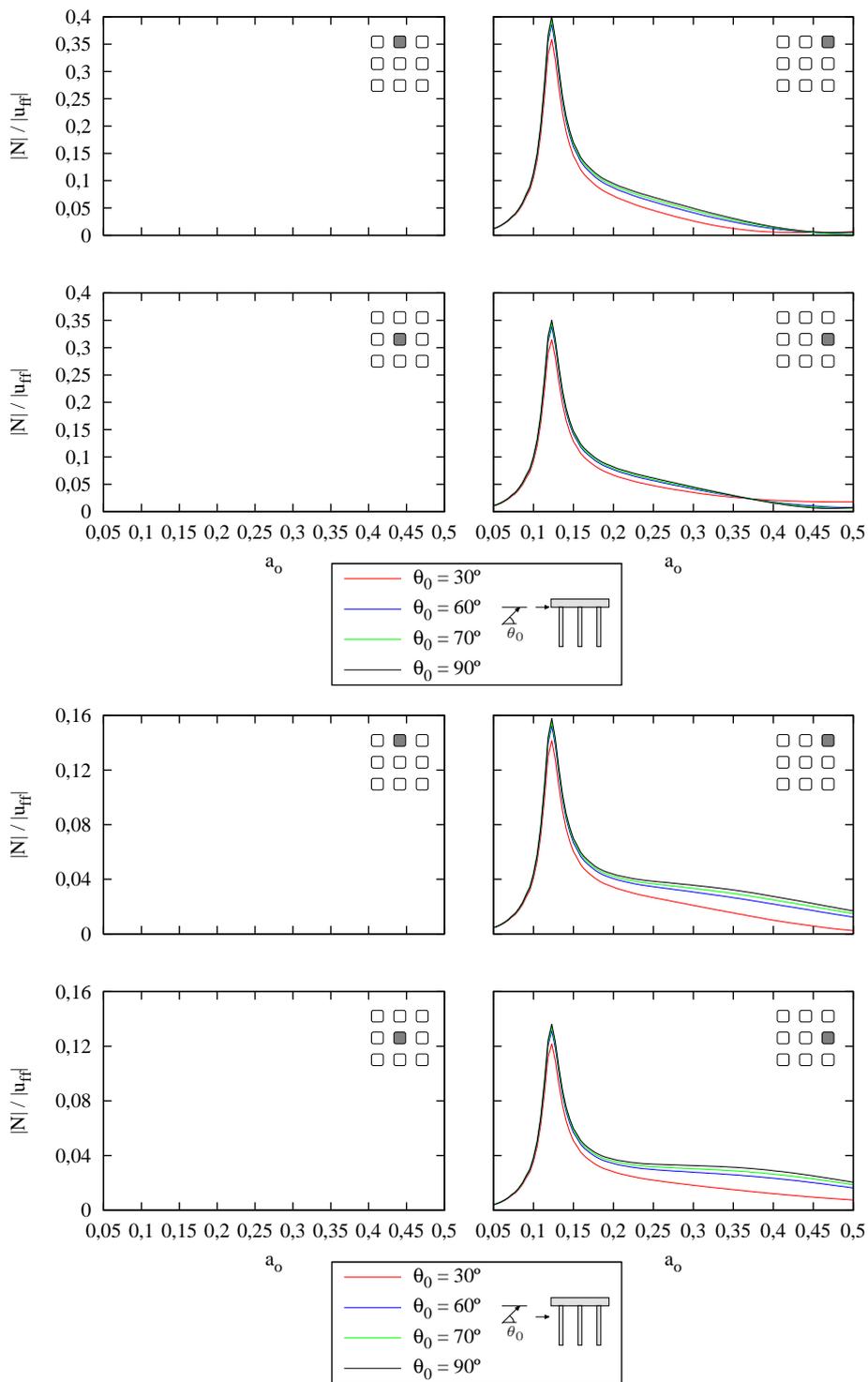


Figura 6.28: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda **SH**, $h/b = 3$

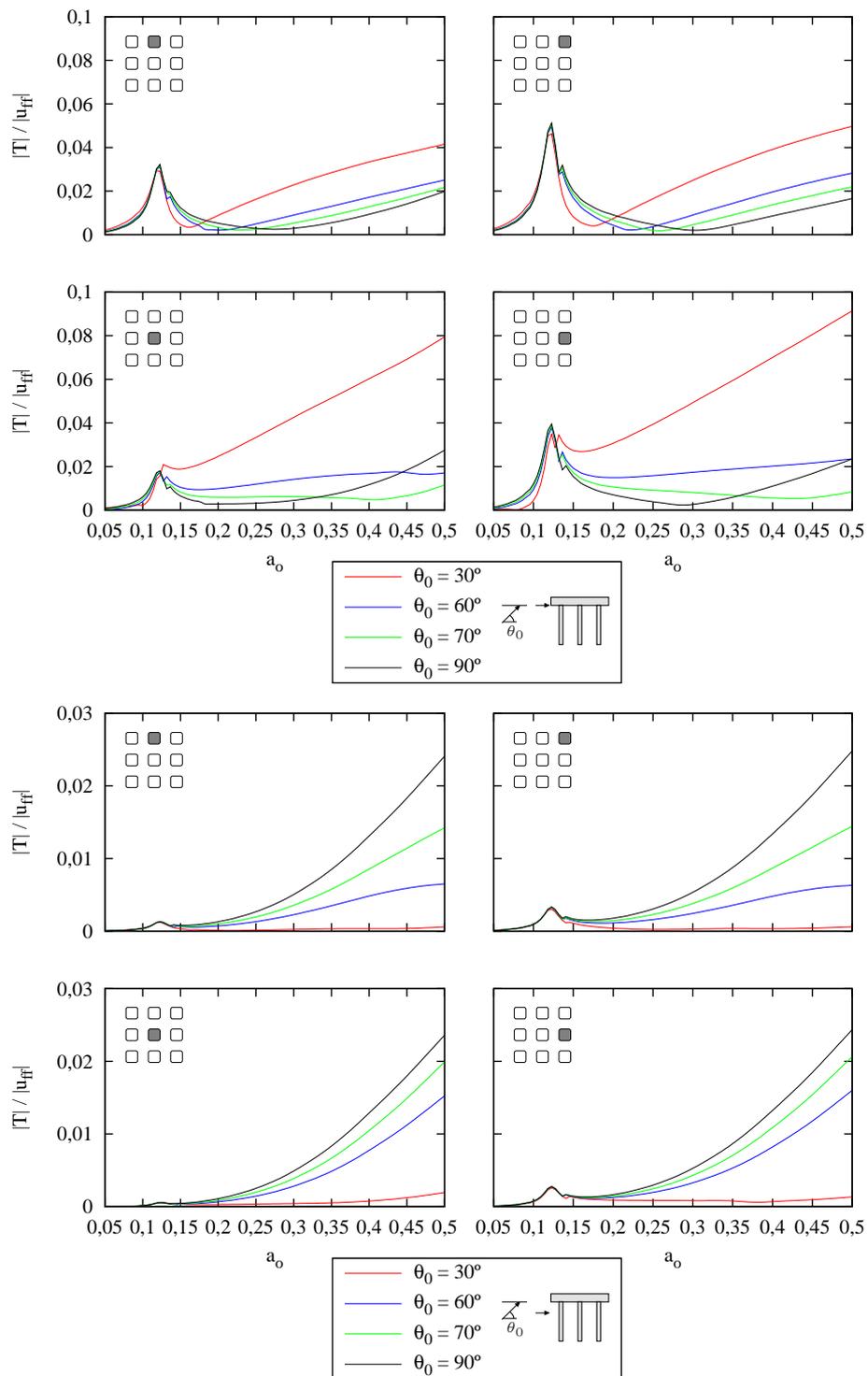


Figura 6.29: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda **SH**, $h/b = 3$

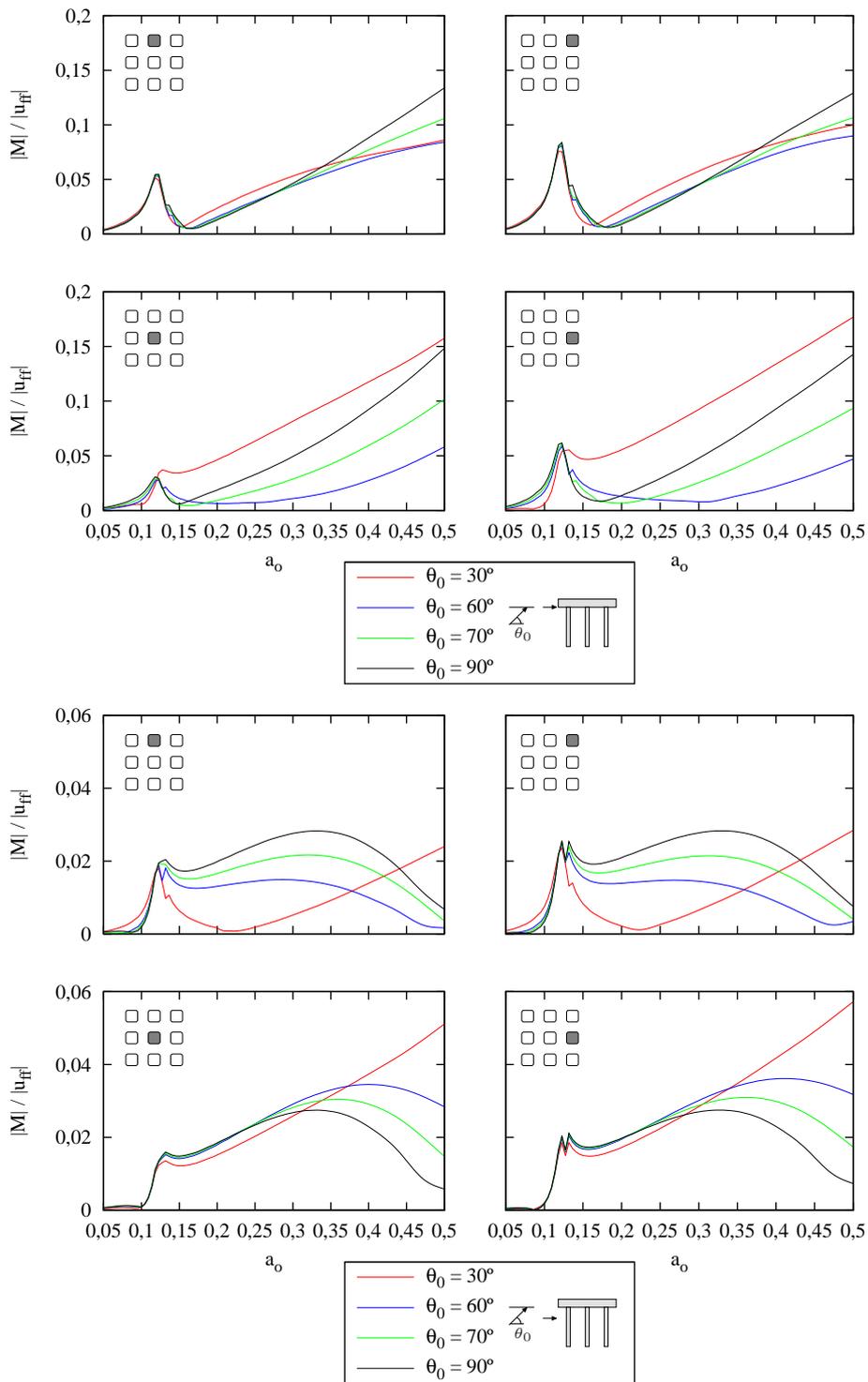


Figura 6.30: Momentos flectores en los pilotes. Onda **SH**, $h/b = 3$

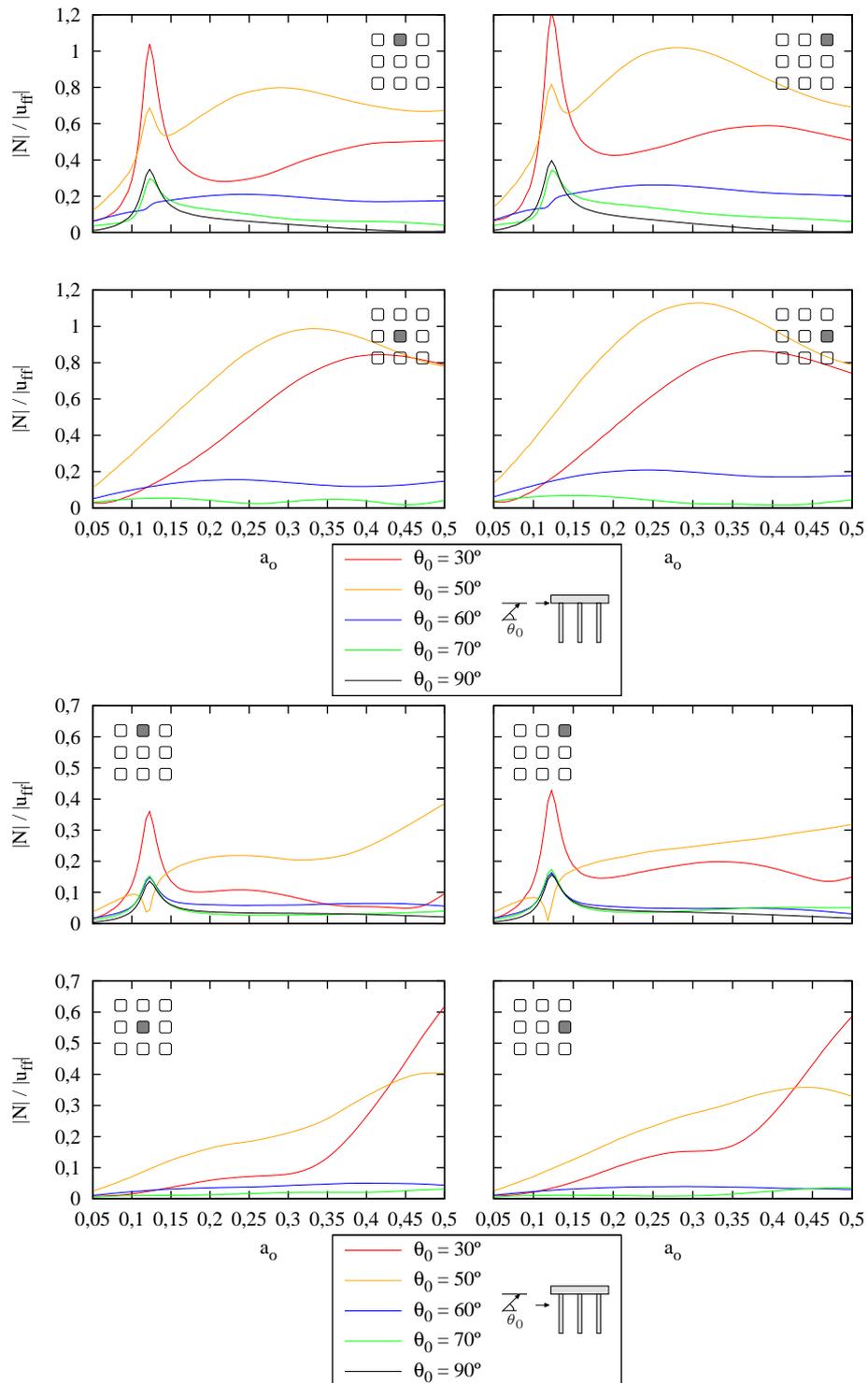


Figura 6.31: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda **SV**, $h/b = 3$

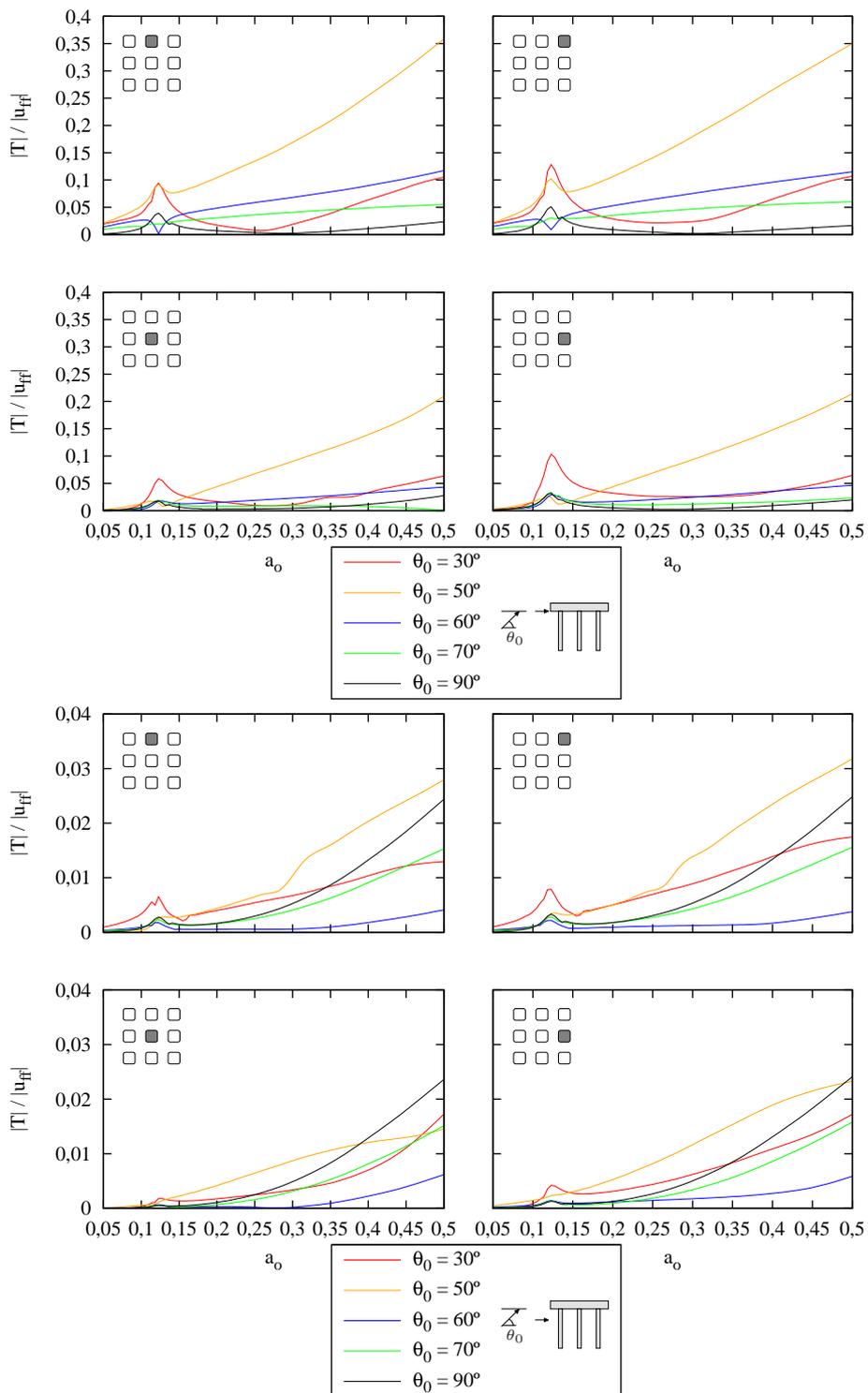


Figura 6.32: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV, $h/b = 3$

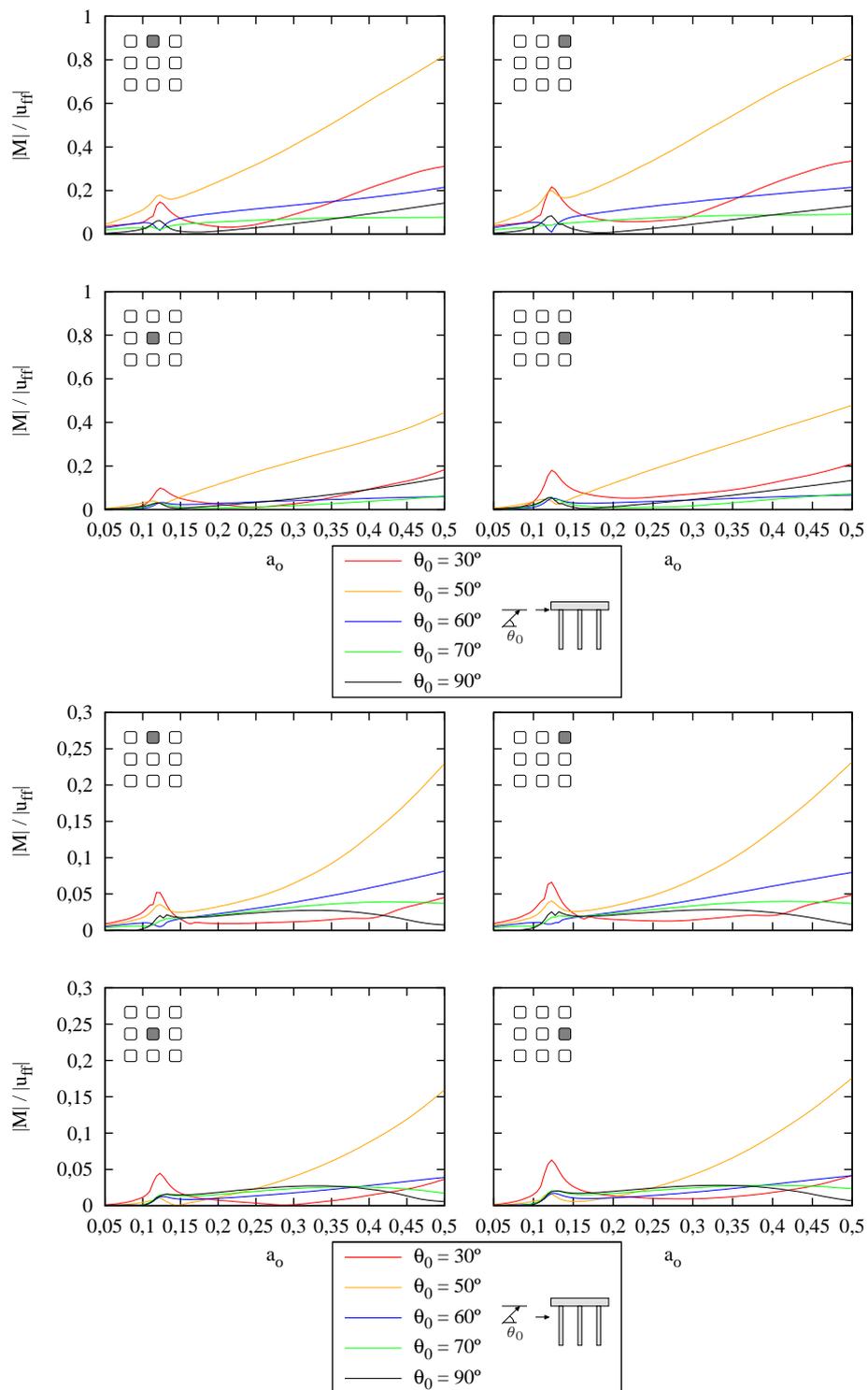


Figura 6.33: Momentos flectores en los pilotes. Onda SV, $h/b = 3$

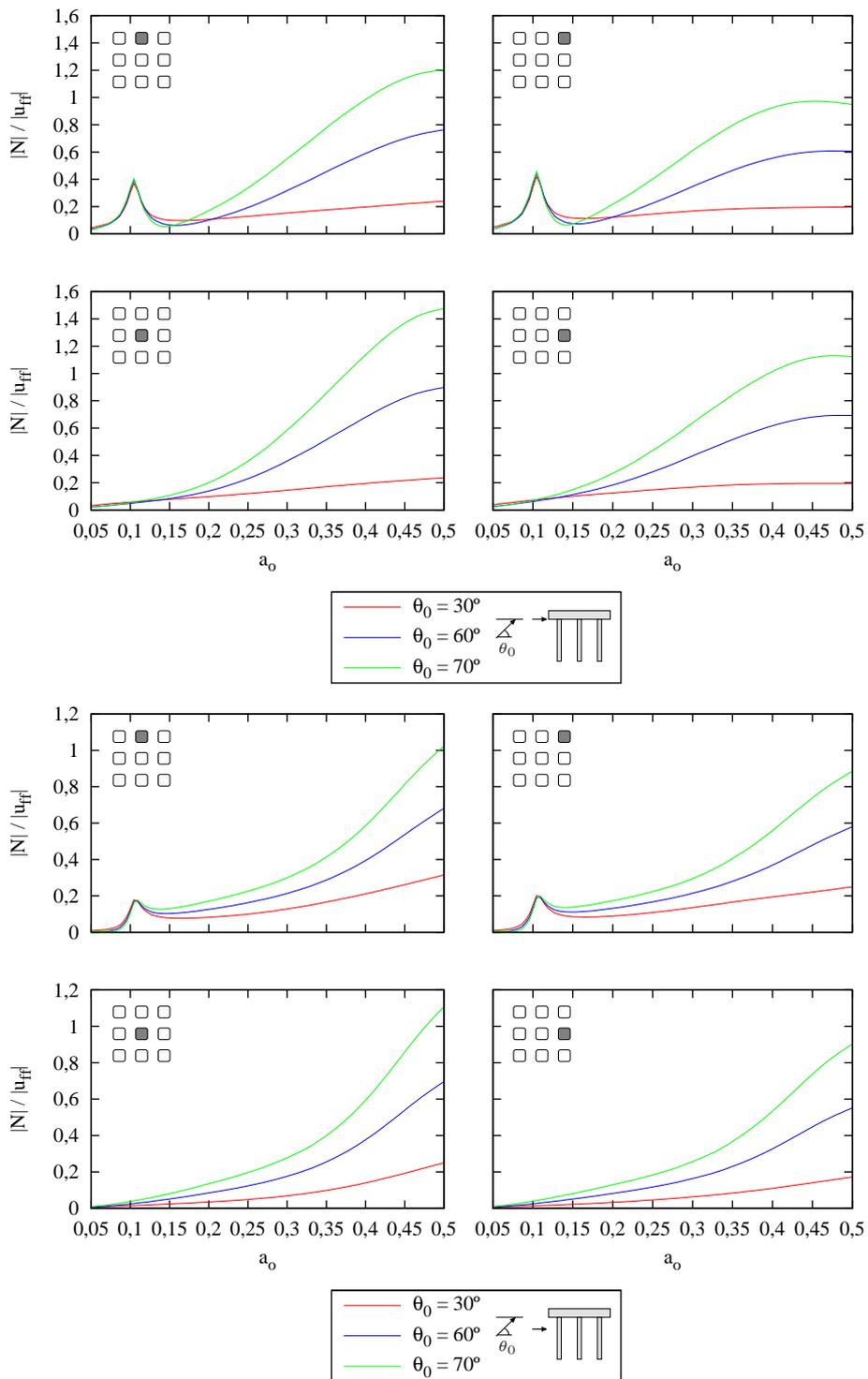


Figura 6.34: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda P , $h/b = 4$

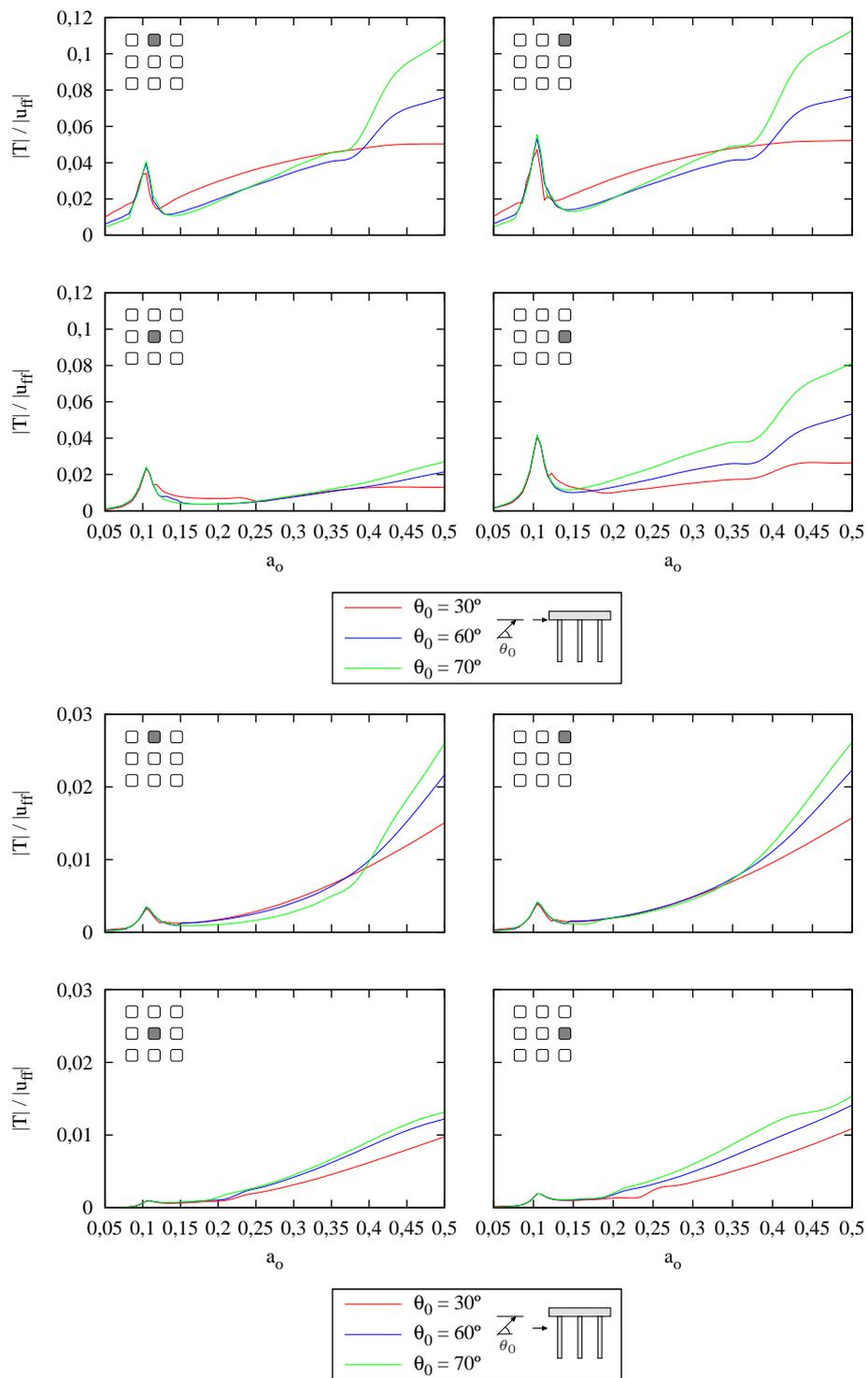


Figura 6.35: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda P, $h/b = 4$

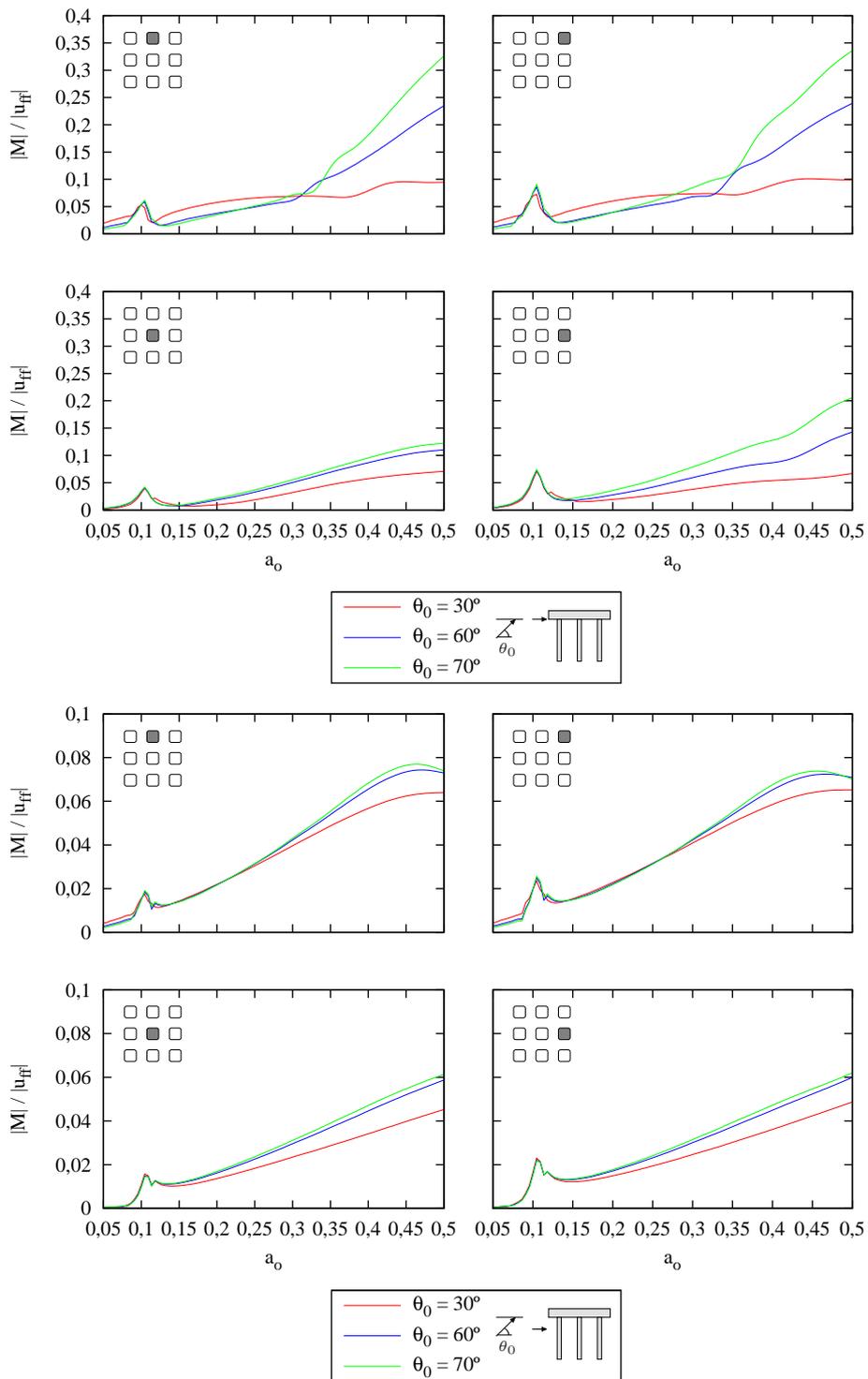


Figura 6.36: Momentos flectores en los pilotes. Onda P , $h/b = 4$

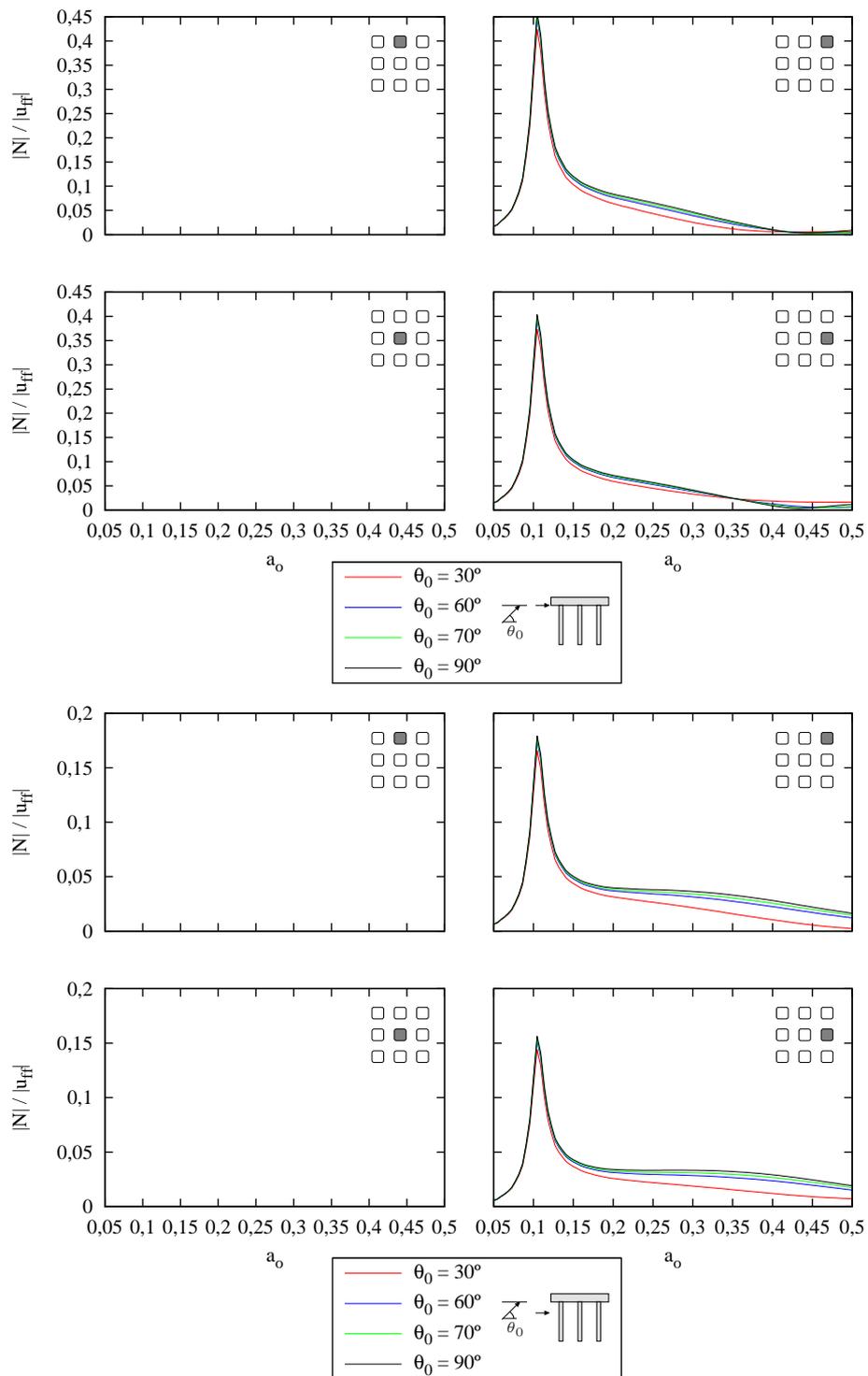


Figura 6.37: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda **SH**, $h/b = 4$

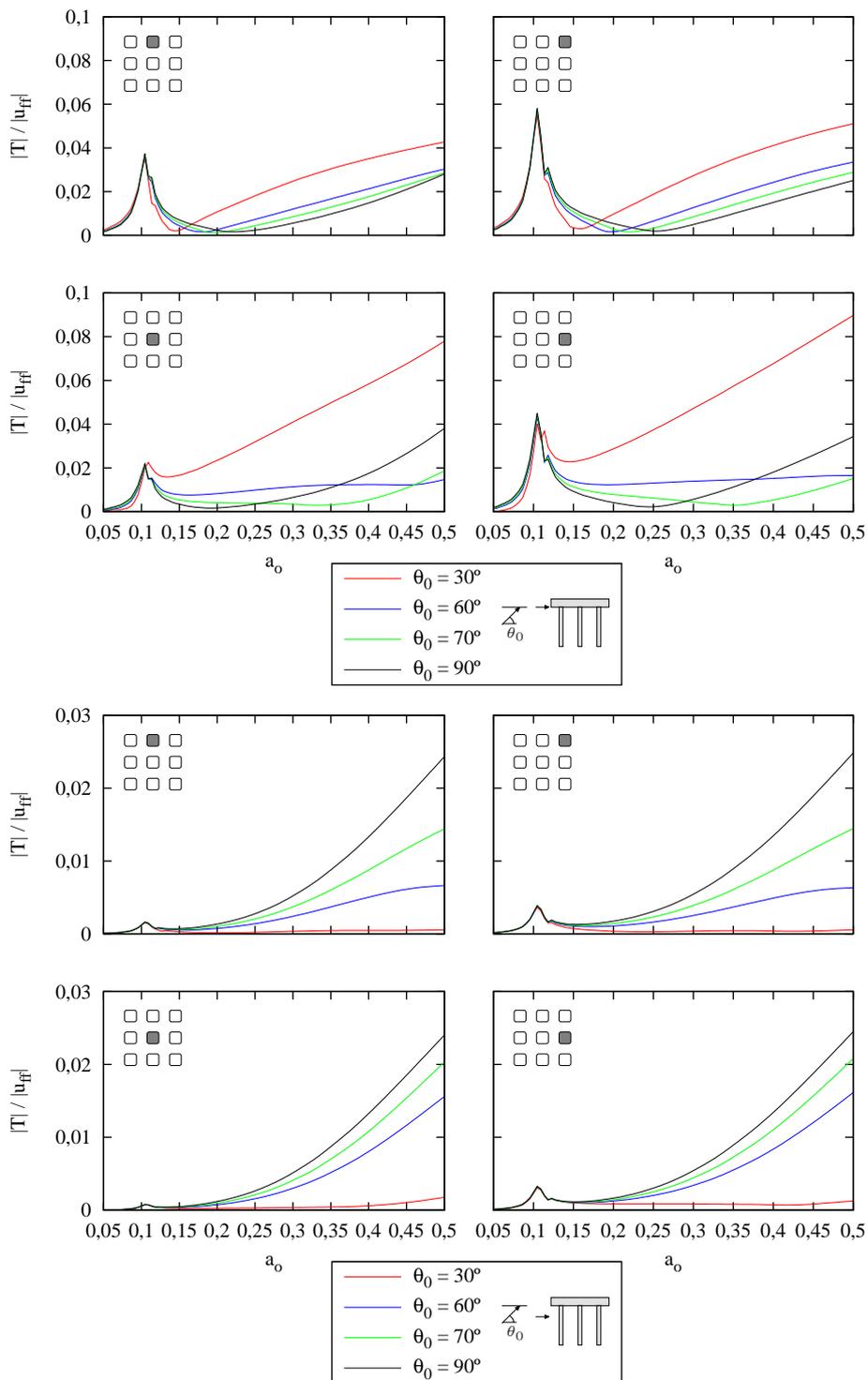


Figura 6.38: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda **SH**, $h/b = 4$

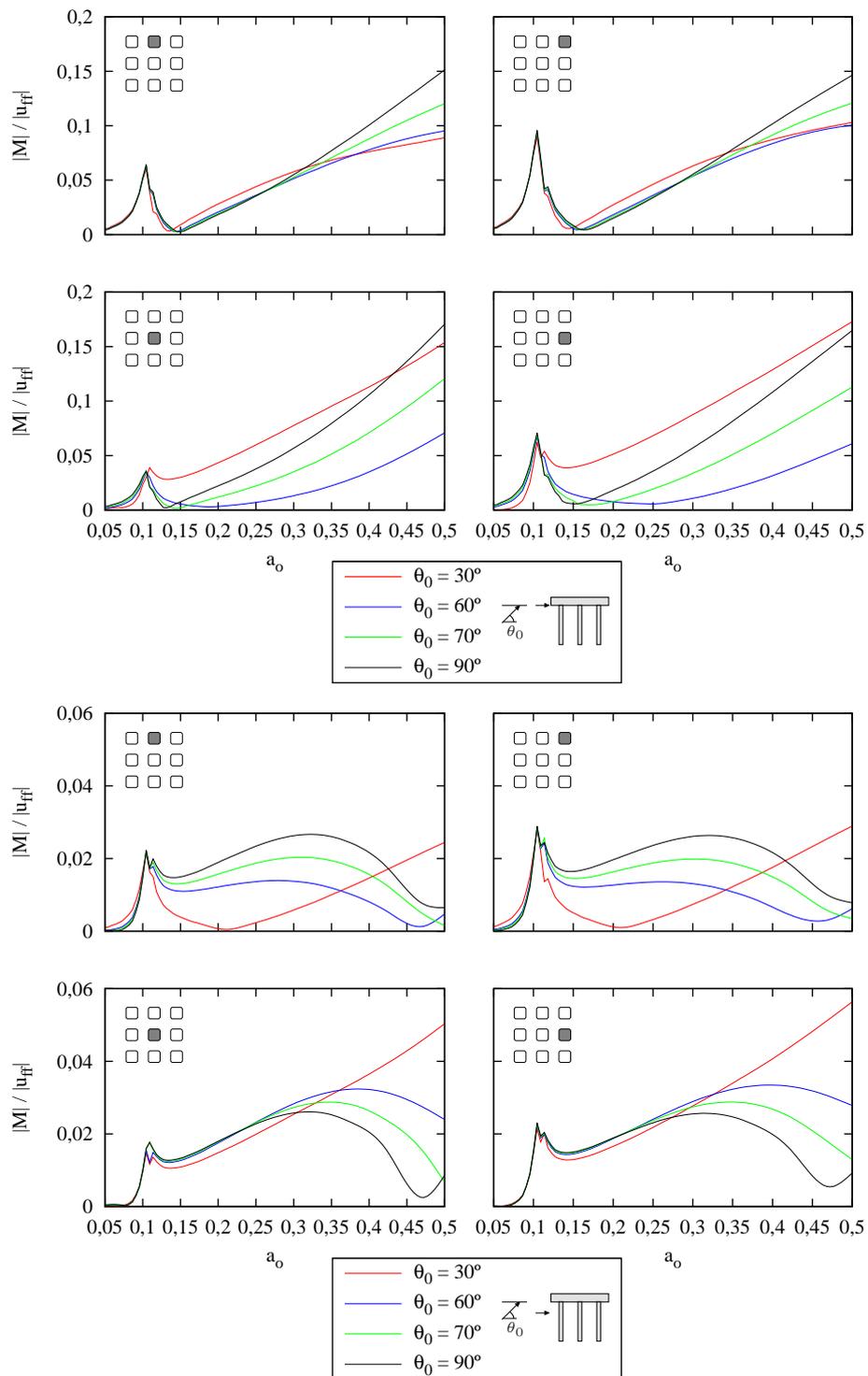


Figura 6.39: Momentos flectores en los pilotes. Onda **SH**, $h/b = 4$

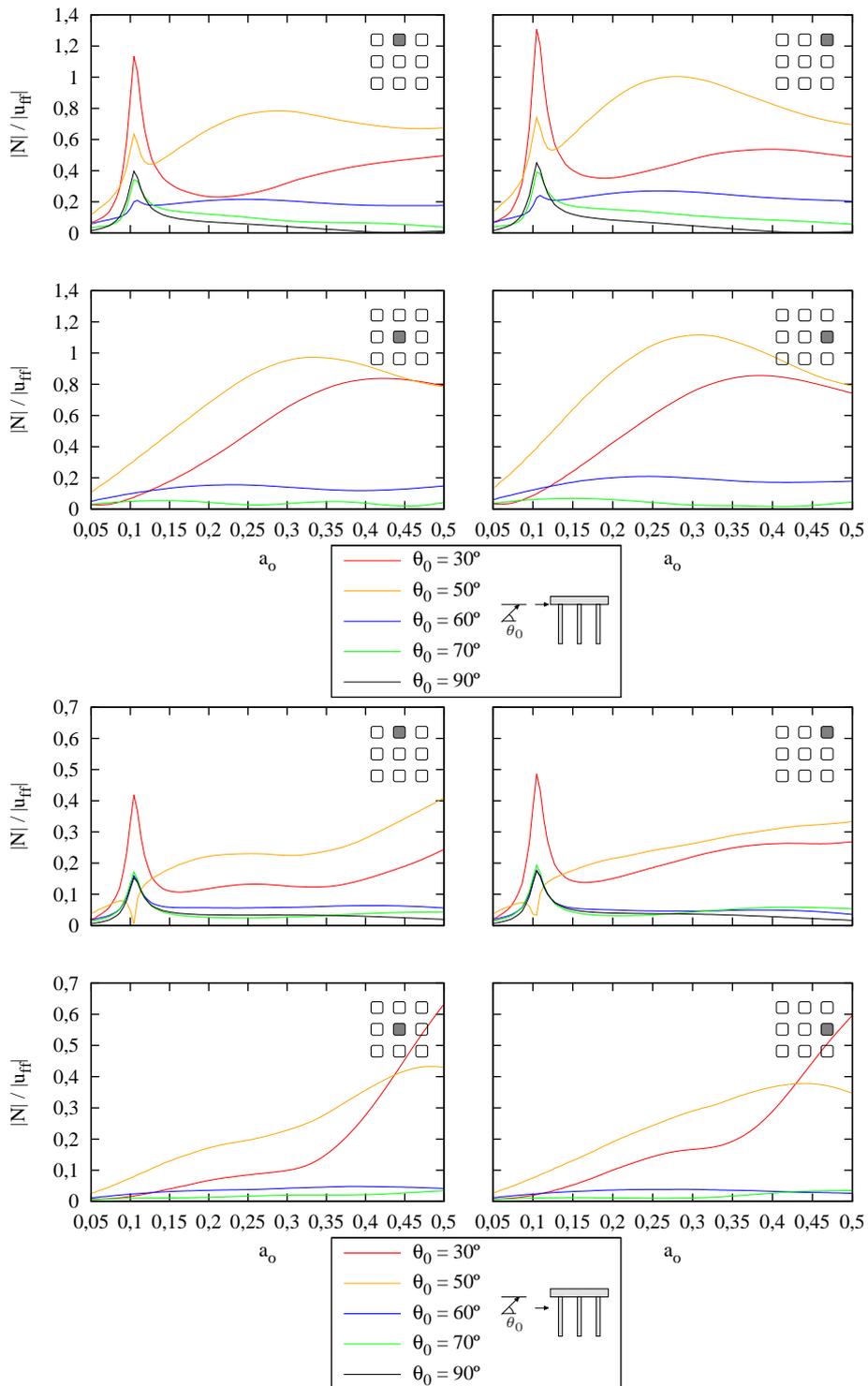


Figura 6.40: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SV, $h/b = 4$

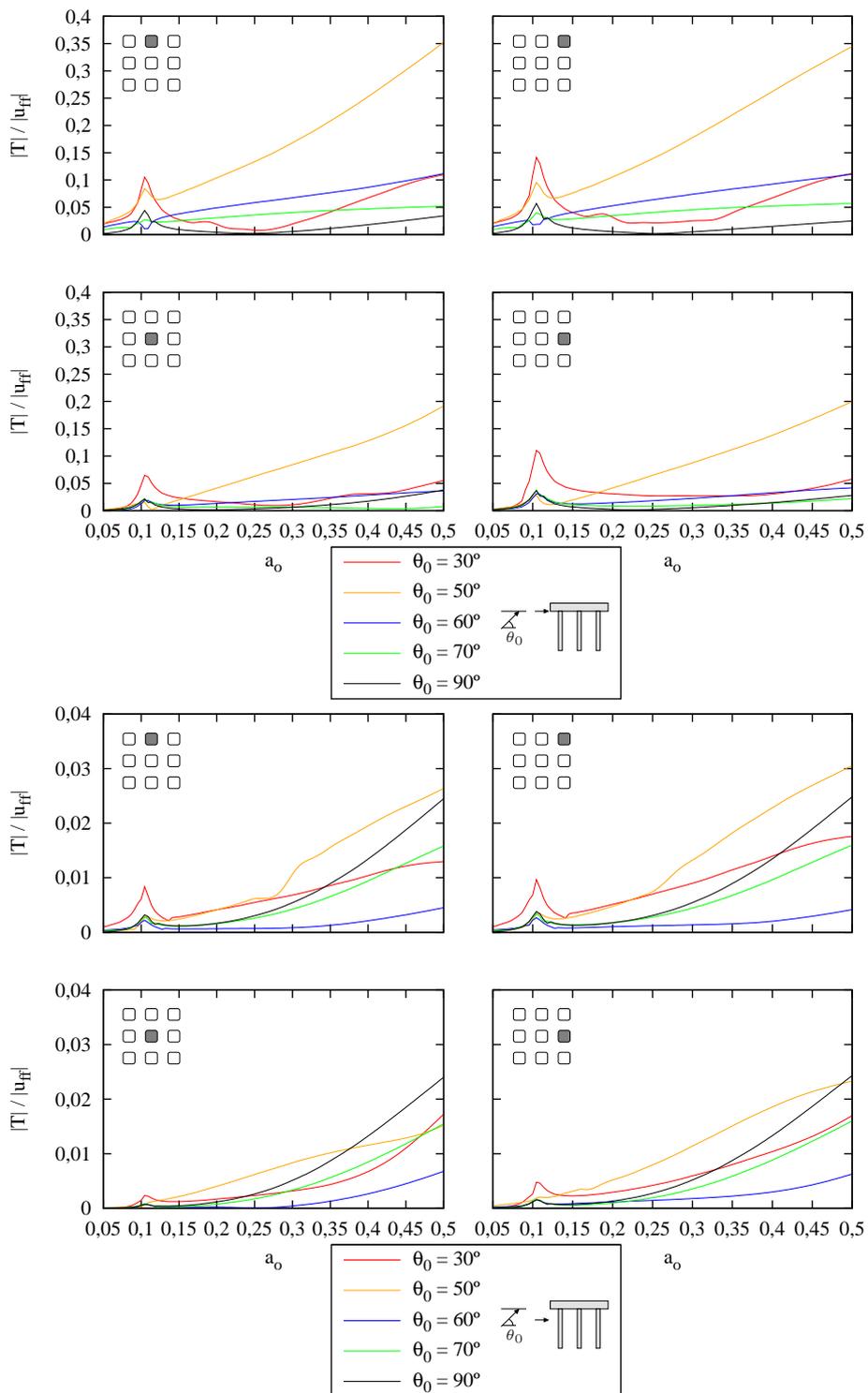


Figura 6.41: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV, $h/b = 4$

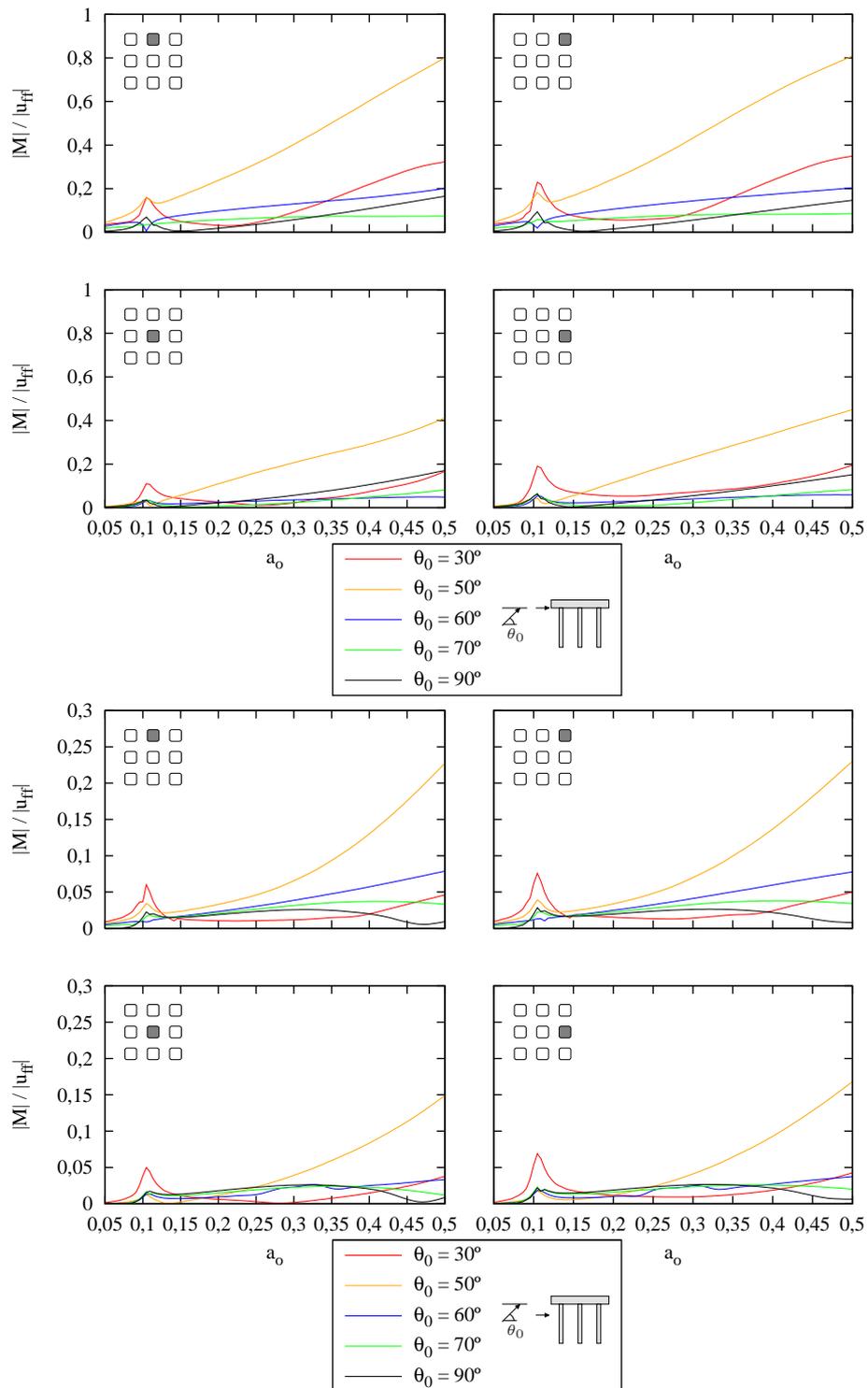


Figura 6.42: Momentos flectores en los pilotes. Onda *SV*, $h/b = 4$

Capítulo 7

Conclusiones y líneas futuras

7.1. Resumen y conclusiones

El presente trabajo emplea una formulación acoplada MEC-MEF para la obtención de la respuesta dinámica de estructuras de edificación pilotadas cuando éstas están sometidas a ondas sísmicas que inciden con un ángulo genérico. Para ello, se ha desarrollado una formulación que permite tener en cuenta la incidencia de ondas sísmicas en la obtención de los campos de desplazamientos y tensiones en el terreno por el cual se propagan. Esta formulación se ha implementado en una subrutina escrita en lenguaje FORTRAN, la cual se ha incluido en un programa preexistente en el seno de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

Con la subrutina implementada, se verificó la adecuación tanto de la formulación como de la correspondiente subrutina programada con resultados existentes en bibliografía de autores de reconocido prestigio y fiabilidad [34–36], proporcionando resultados satisfactorios en la totalidad de casos analizados. En este sentido, se estudiaron cimentaciones con diversas configuraciones sometidas a ondas SV, SH y P de incidencia genérica con distintas relaciones de rigidez E_p/E_s .

Una vez comprobada la precisión del modelo propuesto, se avanzó mediante la implementación del ángulo de incidencia respecto al plano horizontal (ángulo φ_0). Posteriormente, se compararon los factores de interacción cinemática correspondientes a distintas cimentaciones pilotadas para diferentes ángulos φ_0 . De esta manera, se alcanza el objetivo buscado de desarrollar una formulación y una subrutina que permita incluir ondas con ángulos de incidencia totalmente genéricos. Además, se muestra que la influencia del ángulo φ_0 es despreciable en el cálculo de los factores de interacción cinemática de grupos cuadrados de pilotes. Se justifica así la práctica habitual que, principalmente por simplicidad, asume generalmente en estos casos que las ondas inciden perpendicularmente a alguno de los lados del

encepado.

Así, estudiada la validez de la subrutina, se procedió a obtener resultados para un conjunto concreto de casos analizados. Se estudiaron los fenómenos de interacción cinemática existente para una cimentación pilotada con un grupo de 3×3 cuando ésta se somete a ondas SH, SV y P, concluyéndose que el ángulo de incidencia tiene una importancia muy grande en el comportamiento de esta clase de cimentaciones. También se estudiaron los factores de interacción cinemática de las mismas cimentaciones cuando un edificio con tres posibles relaciones de aspecto h/b se cimentaba en ellas, pudiendo observarse una gran influencia tanto de la relación de aspecto del edificio como del tipo de onda y de su ángulo de incidencia, siendo este efecto particularmente notable en ondas incidentes de tipo SV. Para explicar las diferencias que acontecen cuando la onda que incide es una SV, se procedió a realizar un estudio, concluyéndose que es preciso analizar la influencia del ángulo θ_0 en el desplazamiento horizontal de campo libre para poder comprender el comportamiento de las gráficas presentadas, por encontrarse éstas adimensionalizadas entre el mencionado desplazamiento horizontal de campo libre. De igual manera, otro fenómeno de interés que es preciso analizar es el que ocurre en las inmediaciones del ángulo crítico. Así, existe una gran diferencia entre los desplazamientos y esfuerzos producidos por ondas incidentes de igual magnitud pero con ángulos de incidencia cercanos o inferiores al crítico.

Presentados los resultados de la interacción cinemática en desplazamientos y giros de la cimentación, se realizó un estudio de la caracterización dinámica de una estructura de edificación con tres relaciones de aspecto h/b diferentes, analizando su deflexión lateral ante las acciones dinámicas de incidencia. Los resultados demuestran que la influencia del tipo de onda y ángulo de incidencia de la misma en la respuesta de los distintos tipos de estructura es muy notable, existiendo grandes disimilitudes según el caso, en particular para altas frecuencias y para ondas incidentes tipo SV, donde se produce un fenómeno análogo al descrito para los factores de interacción cinemática de las cimentaciones.

Por último, se analizan las respuestas de los pilotes ante los distintos casos estudiados, en términos de los esfuerzos axiales, cortantes y de los momentos flectores que aparecen en dos puntos característicos, situados en la unión de los pilotes a los encepados y a una distancia de $L/5$ del mismo. Las conclusiones que pueden extraerse en esta ocasión son semejantes a las comentadas con anterioridad, de modo tal que el tipo de onda y su ángulo de incidencia poseen una gran influencia sobre la magnitud de los esfuerzos. El grado de desconocimiento existente en cuanto al comportamiento de pilotes cuando un edificio reposa sobre ellos y un frente de ondas se propaga por el terreno, alcanzando su emplazamiento es aún hoy muy grande. Ello, unido a la importancia que tiene que los elementos de cimentación permanezcan dentro del rango elástico por ser elementos críticos cuya reparación es normalmente inviable tras un sismo y cuyo fallo puede provocar,

a su vez, el colapso de la superestructura, hace que estudios como el presentado en este Proyecto Fin de Carrera aporten algo de luz a un camino expedito hasta el momento. Aún tratándose de un análisis básico en el que se han tenido en cuenta un número limitado de parámetros, se puede verificar, desde este punto, que la hipótesis mayoritariamente empleada de incidencia vertical no tiene por qué ser la produzca situaciones más desfavorables tanto en cimentaciones como en superestructuras, de modo que el estado del arte actual debe evolucionar hacia modelos que consideren tanto el tipo de onda como el ángulo de incidencia de la misma como parámetros de importancia de cara a la cuantificación de la respuesta estructural real.

7.2. Líneas futuras

El código desarrollado en el presente trabajo se ha empleado para la determinación de un conjunto de resultados en términos de respuesta dinámica de estructuras de cimentación y de superestructuras. Empleando el código en su estado actual pueden desarrollarse una serie de análisis que, por un motivo u otro, no se han incluido en el presente trabajo. Así, puede destacarse:

- Obtención de resultados para ondas de superficie. Pese a haber sido incluidas en el código, no se ha analizado caso alguno por no extender en exceso el documento.
- Estudio de la influencia de un mayor número de parámetros, tales como la relación de rigideces de la cimentación y el suelo o la geometría de la cimentación.
- Realización de análisis en el dominio del tiempo para distintos grupos de sísmogramas, de modo que la magnitud de cada parámetro pueda ser estudiada en términos de las funciones de transferencia y de su variación temporal.
- Análisis de la influencia del ángulo de incidencia y tipo de onda en la respuesta sísmica de conjuntos de edificios, de modo que la interacción estructura-suelo-estructura se ponga en relieve.
- Determinación de expresiones de uso práctico para la determinación de los esfuerzos en pilotes y en miembros de la superestructura, función de parámetros tales como la relación de aspecto de la superestructura, la relación de rigideces suelo-estructura, la cantidad y tipo de cimentación pilotada, etc. Estas expresiones deben tener en cuenta no sólo las fuerzas que aparecen como consecuencia de la interacción inercial, sino también de la interacción cinemática. La obtención de esta clase de expresiones permitiría establecer

un paso adelante de cara al diseño sísmico de esta clase de elementos, cuyo estudio posee, en este momento, importantes lagunas de conocimiento.

- Desarrollo de expresiones que permitan tener en cuenta la posible estratificación del terreno sobre el que se cimienta e implementación del mismo en el código existente.
- Estudio de la respuesta de edificaciones de varias plantas ante ondas incidentes con ángulos genéricos.

En lo referente al propio código, existen distintas posibilidades de optimización, tales como:

- Desarrollo de un formato de almacenamiento en matrices dispersas, de modo que se reduzca el tiempo de computación.
- Paralelización completa del código, lo que reduciría sustancialmente los tiempos de computación.
- Implementación de métodos de refinamiento adaptativo de mallas para disminuir, en la medida de lo posible, los errores asociados al mallado del problema.

Bibliografía

- [1] Kausel, E. and Roesset, J. M. (1974) Soil-structure interaction for nuclear containment. *Power Div. ASCE Specialty Conf*, Boulder, Colorado, pp. 469–498.
- [2] Domínguez, J. (1993) *Boundary elements in dynamics*. Computational Mechanics Publications & Elsevier Applied Science, Southampton, NY.
- [3] Maeso, O., Aznárez, J. J., and Domínguez, J. (2002) Effects of space distribution of excitation on seismic response of arch dams. *J Eng Mech*, **128**, 759–768.
- [4] Maeso, O., Aznárez, J. J., and Domínguez, J. (2004) Three-dimensional models of reservoir sediment and effects on the seismic response of arch dams. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **33**, 1103–1123.
- [5] Aznárez, J. J., Maeso, O., and Domínguez, J. (2006) BE analysis of bottom sediments in dynamic fluid-structure interaction problems. *Eng Anal Bound Elem*, **30**, 124–136.
- [6] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2007) BEM-FEM coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups. *Eng Anal Bound Elem*, **31**, 473–484.
- [7] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2008) Dynamic analysis of piled foundations in stratified soils by a BEM-FEM model. *Soil Dyn Earthquake Eng*, **28**, 333–346.
- [8] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., Maeso, O., and Santana, A. (2010) Dynamic stiffness of deep foundations with inclined piles. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **39**(12), 1343–1367.
- [9] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2009) Dynamic structure-soil-structure interaction between nearby piled buildings under seismic excitation by BEM-FEM model. *Soil Dyn Earthquake Eng*, **29**, 1084–1096.

-
- [10] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2010) 3-D Boundary element - finite element method for the dynamic analysis of piled buildings. *Eng Anal Bound Elem*, p. in press.
- [11] Achenbach, J. D. (1973) *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland, Amsterdam.
- [12] Eringen, A. C. and Suhubi, E. S. (1975) *Elastodynamics*, vol. 2 - Linear Theory. Academic Press, NY.
- [13] Graffi, D. (1946) Sul teorema di reciprocità nella dinamica dei corpi elastici. *Mem Accad Sci, Bologna*, **4**, 103–111.
- [14] Wheeler, L. T. and Sternberg, E. (1968) Some theorems in classical elastodynamics. *Arch Rat Mech Anal*, **31**, 51–90.
- [15] Stokes, G. G. (1849) On the dynamical theory of diffraction. *Trans Cambridge Philos Soc*, **9**, 1–62.
- [16] Cruse, T. A. and Rizzo, F. J. (1968) A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. *J Math Anal Appl*, **22**, 244–259.
- [17] Kupradze, V. D. (1963) *Dynamical problems in elasticity*. Progress in solid mechanics, North-Holland, Amsterdam.
- [18] Aznárez, J. J. (2002) *Efectos de los fenómenos de interacción incluyendo los factores espaciales y sedimentos de fondo en la respuesta sísmica de presas bóveda*. Ph.D. thesis, University of Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de G.C., Spain.
- [19] Hartmann, F. (1981) *Elastostatics*. Progress in boundary element methods, Pentech Press, London.
- [20] Medina, F. (1987) *Análisis de la respuesta sísmica de presas incluyendo efectos de interacción suelo-fluido-estructura*. Ph.D. thesis, University of Seville, Spain.
- [21] Stroud, A. H. and Secrest, D. (1966) *Gaussian quadrature formulas*. Prentice-Hall, NY.
- [22] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, NY.

-
- [23] Telles, J. C. (1987) A selfadaptative coordinate transformation for efficient evaluation of general boundary element integrals. *Int J Numer Meth Eng*, **24**, 937–959.
- [24] Li, H. B., Han, G. M., and Mang, H. A. (1985) A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the direct boundary element method. *Int J Numer Meth Eng*, **21**, 2071–2098.
- [25] Cerrolaza, M. and Alarcón, E. (1989) A bicubic transformation for the numerical evaluation of the Cauchy principal value integrals in boundary elements. *Int J Numer Meth Eng*, **28**, 987–999.
- [26] Chirino, F., Maeso, O., and Aznárez, J. J. (2000) Una técnica simple para el cálculo de las integrales en el sentido del valor principal de Cauchy en el MEC 3D. *Rev Int Met Num para Cálculo y Diseño en Ing*, **16**, 77–95.
- [27] Cruse, T. A. (1969) Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *Int J Numer Meth Eng*, **5**, 1259–1274.
- [28] Christensen, R. M. (1982) *Theory of viscoelasticity*. Academic Press Inc., NY.
- [29] Matos Filho, R., Mendonça, A. V., and Paiva, J. B. (2005) Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads. *Eng Anal Boundary Elem*, **29**, 195–203.
- [30] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2006) A BEM-FEM model for studying dynamic impedances of piles in elastic soils. Topping, B. H. V., Montero, G., and Montenegro, R. (eds.), *Proc. of the Fifth Int Conf on Eng Comput Technology*, Stirlingshire, UK, no. 163, Civil-Comp Press.
- [31] Kaynia, A. M. (1982) Dynamic stiffness and seismic response of pile groups. Report R83-03, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- [32] Pak, R. S. Y. and Jennings, P. C. (1987) Elastodynamic response of the pile under transverse excitation. *J Eng Mech, ASCE*, **113**, 1101–1116.
- [33] Sen, R., Davies, T. G., and Banerjee, P. K. (1985) Dynamic analysis of piles and pile groups embedded in homogeneous soils. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **13**, 53–65.
- [34] Maeso, O., Aznárez, J. J., and García, F. (2005) Dynamic impedances of piles and groups of piles in saturated soils. *Comput Struct*, **83**, 769–782.
- [35] Padrón, L. A. (2008) *Numerical model for the dynamic analysis of pile foundations*. Ph.D. thesis, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

-
- [36] Kaynia, A. M. and Novak, M. (1992) Response of pile foundations to Rayleigh waves and obliquely incident body waves. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **21**, 303–318.
- [37] Jennings, P. C. and Bielak, J. (1973) Dynamics of building-soil interaction. *Bull Seism Soc Ame*, **63**, 9–48.
- [38] Avilés, J. and Pérez-Rocha, L. E. (1996) Evaluation of interaction effects on the system period and the system damping due to foundation embedment and layer depth. *Soil Dyn Earthquake Eng*, **15**, 11–27.
- [39] Veletsos, A. S. and Meek, J. W. (1974) Dynamic behaviour of building-foundation systems. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **3**, 121–138.
- [40] Bielak, J. (1975) Dynamic behavior of structures with embedded foundations. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **3**, 259–274.