Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES





PROYECTO FIN DE CARRERA

CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE BARRAS INCLUYENDO EFECTOS DINÁMICOS DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA. MODELO MIXTO DE ELEMENTOS FINITOS Y ELEMENTOS DE CONTORNO

AUTOR: LUIS ALBERTO PADRÓN HERNÁNDEZ

TUTORES: ORLANDO MAESO FORTUNY JUAN JOSÉ AZNÁREZ GONZÁLEZ

FEBRERO, 2004

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a toda mi familia, en especial a mi madre y a mi hermano, sin quienes este final nunca habría sido posible, a mis amigos, que siempre me han animado y a mis tutores, Orlando Maeso y Juan José Aznárez por su paciencia y ayuda constantes.

A mi padre.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos	4
CAPÍTULO 2. ECUACIONES BÁSICAS Y FUNDAMENTOS DE LA	
PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS ELÁSTICOS	
2.1. Introducción	7
2.2. ECUACIONES BÁSICAS DE LA ELASTODINÁMICA LINEAL	7
2.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ELASTODINÁMICO EN TÉRMINOS DE LA DILATACIÓN	
Y ROTACIÓN	9
2.4. Ondas armónicas	10
2.5. PROBLEMAS BIDIMENSIONALES	11
2.6. Ondas planas	12
2.7. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS ARMÓNICAS PLANAS	15
2.7.1. Ondas P	15
2.7.2. Ondas SV	19
CAPÍTULO 3. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTO FINITOS PARA	
EL ESTUDIO DE ESTRUCTURAS BIDIMENSIONALES	
DE BARRAS.	
3.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE CÁLCULO MATRICIAL	21
3.1.1. Introducción	21
3.1.2. Discretización: Elementos y nudos	22
3.1.3. Grados de libertad y coordenadas	22
3.1.4. Método del equilibrio	22
3.1.5. Concepto de matriz de rigidez	23

3.2. EL ELEMENTO BARRA, MATRICES ELEMENTALES	24
3.2.1. El elemento barra sometido a carga axil	24
3.2.2. El elemento barra sometido a flexión	25
3.2.3. Obtención de la matriz de rigidez de un elemento finito	
tipo barra sometido a esfuerzo axil	28
3.2.4. Obtención de la matriz de rigidez de un elemento finito	
tipo barra sometido a flexión	30
3.2.5. Matriz de rigidez elemental del pórtico plano	33
3.2.6. Transformación de coordenadas	33
3.3. EL MONTAJE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL	37
3.3.1. Introducción	37
3.3.2. El método directo de la rigidez	38
3.3.3. Imposición de las condiciones de contorno	39
3.3.4. Condensación estática de grados de libertad en barras	40
3.4. Análisis dinámico de estructuras de barras a través de	L MÉTODO
DE LOS ELEMENTOS FINITOS	42
3.4.1. Introducción	42
3.4.2. Ecuación matricial para estructuras lineales	42
3.4.3. Matriz de masa	44
3.4.4. Condensación de la matriz de masa	46
3.4.5. Matriz de amortiguamiento	49
CAPÍTULO 4. EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CO	ONTORNO
4.1. EL TEOREMA DE RECIPROCIDAD EN EL PROBLEMA ARMÓNICO .	51
4.2. SOLUCIONES FUNDAMENTALES Y FORMULACIÓN INTEGRAL DE	CONTORNO
PARA EL PROBLEMA ELÁSTICO ARMÓNICO	52
4.2.1. Soluciones fundamentales	52
4.2.2. Representación integral	53
4.2.3. Formulación integral de contorno	53
4.3. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO UTILIZANDO ELE	MENTOS
CUADRÁTICOS PARA PROBLEMAS PLANOS	55

CAPÍTULO 5. FORMULACIÓN DEL ACOPLAMIENTO M.E.F.-M.E.C.

5.1. Introducción	63
5.2. FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA UN ÚNICO ELEMENTO	64
5.2.1. Expresión del momento resultante	64
5.2.2. Expresión de las resultantes F _x y F _y	66
5.2.3. Matriz de ecuaciones de equilibrio	67
5.3. FORMULACIÓN GENÉRICA DE LA MATRIZ DE EQUILIBRIO PARA	
UN CONJUNTO DE ELEMENTOS	67
5.4. FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD CINEMÁTICA	69
5.5. ESTUDIO DEL NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD DEL SISTEMA	71
5.6. FORMULACIONES M.E.F. Y M.E.C.	72
5.6.1. Modelo de estructuras de barras con el M.E.F.	72
5.6.2. Modelo del suelo con el M.E.C.	72
5.7. ESTUDIO DEL MONTAJE DEL SISTEMA DE ECUACIONES	73
CAPÍTULO 6. EXCITACIÓN DEL SISTEMA CON ONDAS	
ARMÓNICAS PLANAS	
6.1. Introducción	75
6.2. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE UN SEMIESPACIO ELÁSTICO EXCITADO	
CON ONDAS TIPO P	75
6.3. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE UN SEMIESPACIO ELÁSTICO EXCITADO	
CON ONDAS TIPO SV	78
6.4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE UN SEMIESPACIO DE GEOMETRÍA ARBITRARIA	
ACOPLADO A UNA ESTRUCTURA Y CON ONDAS TIPO P Y SV	80
6.5. Obtención del vector P_1 en cada punto a partir del tensor de tensiones $$	81

CAPÍTULO 7. DESCRIPCIÓN DEL CÓDIGO DESARROLLADO

	97
7.2. RUTINA PRINCIPAL	87
7.3. SUBRUTINA DE TOMA DE DATOS	90
7.4. SUBRUTINA DE MAPEO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES	96
7.5. SUBRUTINA PRINCIPAL DE LOS CÁLCULOS DEL M.E.F.	99
7.6. SUBRUTINA PARA EL CÁLCULO DE LAS SUBMATRICES DE RIGIDEZ	102
7.7. SUBRUTINA PARA EL CÁLCULO DE LAS SUBMATRICES DE MASA	104
7.8. SUBRUTINA PARA EL CÁLCULO DE LAS SUBMATRICES DE AMORTIGUAMIE	ENTO 107
7.9. SUBRUTINA PARA EL MONTAJE DE LAS SUBMATRICES M.E.F.	
EN LA MATRIZ DEL SISTEMA	107
7.10. SUBRUTINA PARA OBTENER Y CALCULAR LOS ELEMENTOS DEL	
VECTOR INDEPENDIENTE ASOCIADOS AL M.E.F.	108
7.11. SUBRUTINA PARA EL CÁLCULO DE LA SUBMATRIZ C	109
7.12. SUBRUTINA PARA EL CÁLCULO DE LOS CAMPOS DE TENSIONES Y DESPLA	AZAMIENTOS
DEBIDOS A UNA ONDA INCIDENTE P O SV	111
7.13. SUBRUTINA PRINCIPAL DE LOS CÁLCULOS DEL M.E.C	114
7.14. SUBRUTINA PARA EL CÁLCULO DE LAS SUBMATRICES HD	116
7.15. SUBRUTINA PARA EL MONTAJE DE LAS SUBMATRICES H, G Y HD	118
	ENTES
.16. SUBRUTINA PARA LA HOMOGENEIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS COEFICIE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA	ENTES122
7.15. SUBRUTINA PARA EL MONTAJE DE LAS SUBMATRICES H, G Y HD	ENTES122
7.16. SUBRUTINA PARA LA HOMOGENEIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS COEFICIE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA 7.17. SUBRUTINA PARA LA NORMALIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS ELEMENTOS DEL VECTOR SOLUCIÓN	122 125
7.16. SUBRUTINA PARA LA HOMOGENEIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS COEFICIE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA	
7.16. SUBRUTINA PARA LA HOMOGENEIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS COEFICIE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA	
7.16. SUBRUTINA PARA LA HOMOGENEIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS COEFICIE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA 7.17. SUBRUTINA PARA LA NORMALIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS ELEMENTOS DEL VECTOR SOLUCIÓN TULO 8. VALIDACIÓN DEL CÓDIGO DE CÁLCULO 8.1. INTRODUCCIÓN 8.2. BARRA VERTICAL ACOPLADA A UN SUELO RÍGIDO O FLEXIBLE Y SOMETIDA A CARGAS ESTÁTICAS 8.2.1. Comprobación del desplazamiento del nodo 1	122125127130
7.16. SUBRUTINA PARA LA HOMOGENEIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS COEFICIE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA 7.17. SUBRUTINA PARA LA NORMALIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS ELEMENTOS DEL VECTOR SOLUCIÓN TULO 8. VALIDACIÓN DEL CÓDIGO DE CÁLCULO 8.1. INTRODUCCIÓN 8.2. BARRA VERTICAL ACOPLADA A UN SUELO RÍGIDO O FLEXIBLE Y SOMETIDA A CARGAS ESTÁTICAS 8.2.1. Comprobación del desplazamiento del nodo 1 8.2.2. Comprobación del valor de las reacciones en el acoplamiento	122125125130131
7.16. SUBRUTINA PARA LA HOMOGENEIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS COEFICIE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA 7.17. SUBRUTINA PARA LA NORMALIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS ELEMENTOS DEL VECTOR SOLUCIÓN TULO 8. VALIDACIÓN DEL CÓDIGO DE CÁLCULO 8.1. INTRODUCCIÓN 8.2. BARRA VERTICAL ACOPLADA A UN SUELO RÍGIDO O FLEXIBLE Y SOMETIDA A CARGAS ESTÁTICAS 8.2.1. Comprobación del desplazamiento del nodo 1	122125125130131
7.16. SUBRUTINA PARA LA HOMOGENEIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS COEFICIE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA 7.17. SUBRUTINA PARA LA NORMALIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS ELEMENTOS DEL VECTOR SOLUCIÓN TULO 8. VALIDACIÓN DEL CÓDIGO DE CÁLCULO 8.1. INTRODUCCIÓN 8.2. BARRA VERTICAL ACOPLADA A UN SUELO RÍGIDO O FLEXIBLE Y SOMETIDA A CARGAS ESTÁTICAS 8.2.1. Comprobación del desplazamiento del nodo 1 8.2.2. Comprobación del valor de las reacciones en el acoplamiento 8.2.3. Análisis de la distribución de tensiones bajo el acoplamiento 8.3. CONTORNO RECTANGULAR CERRADO CON CARGA ESTÁTICA	122125125130131132
7.16. SUBRUTINA PARA LA HOMOGENEIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS COEFICIE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA 7.17. SUBRUTINA PARA LA NORMALIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS ELEMENTOS DEL VECTOR SOLUCIÓN 8.1. INTRODUCCIÓN 8.2. BARRA VERTICAL ACOPLADA A UN SUELO RÍGIDO O FLEXIBLE Y SOMETIDA A CARGAS ESTÁTICAS 8.2.1. Comprobación del desplazamiento del nodo 1 8.2.2. Comprobación del valor de las reacciones en el acoplamiento 8.2.3. Análisis de la distribución de tensiones bajo el acoplamiento 8.3. CONTORNO RECTANGULAR CERRADO CON CARGA ESTÁTICA DISTRIBUIDA Y BARRA ACOPLADA CON CARGA ESTÁTICA PUNTUAL	122125125130131132
7.16. SUBRUTINA PARA LA HOMOGENEIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS COEFICIE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA 7.17. SUBRUTINA PARA LA NORMALIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS ELEMENTOS DEL VECTOR SOLUCIÓN 8.1. INTRODUCCIÓN 8.2. BARRA VERTICAL ACOPLADA A UN SUELO RÍGIDO O FLEXIBLE Y SOMETIDA A CARGAS ESTÁTICAS 8.2.1. Comprobación del desplazamiento del nodo 1 8.2.2. Comprobación del valor de las reacciones en el acoplamiento 8.2.3. Análisis de la distribución de tensiones bajo el acoplamiento 8.3. CONTORNO RECTANGULAR CERRADO CON CARGA ESTÁTICA DISTRIBUIDA Y BARRA ACOPLADA CON CARGA ESTÁTICA PUNTUAL 8.4. EDIFICIO DE CUATRO ALTURAS	122125125127130131132134138
7.16. SUBRUTINA PARA LA HOMOGENEIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS COEFICIE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA 7.17. SUBRUTINA PARA LA NORMALIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS ELEMENTOS DEL VECTOR SOLUCIÓN	122125125125130130131132134138138

CAPÍTULO 9. ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LOS EFECTOS DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA. EJEMPLOS DE CÁLCULO

	9.1. Introducción	149
	9.2. EDIFICIO DE CUATRO ALTURAS	151
	9.2.1. Presentación del problema	151
	9.2.2. Presentación de resultados	152
	9.2.2.1. Influencia de la rigidez de los pilares y su modelo de masa	152
	9.2.2.2. Influencia de la rigidez del suelo	153
	9.3. PUENTE DE HORMIGÓN ARMADO	156
	9.3.1. Presentación del problema	156
	9.3.2. Presentación de resultados	158
	9.3.2.1. Influencia del modelo del puente	158
	9.3.2.2. Influencia de la rigidez del suelo y del modelo de excitación	160
	9.3.2.3. Estudio del campo de desplazamientos.	
	Efecto local e interacción dinámica	161
	9.4. PUENTE DE ACERO	165
	9.4.1. Presentación del problema	165
	9.4.2. Presentación de resultados	167
	9.4.2.1. Espectros de respuesta en frecuencia	167
	9.4.2.2. Estudio del campo de desplazamientos.	
	Efecto local e interacción dinámica	169
CA	PÍTULO 10. REVISIÓN, CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTU	JROS
	10.1. REVISIÓN Y CONCLUSIONES	173
	10.1. REVISION Y CONCLUSIONES	1/3

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

1.1. ANTECEDENTES.

La necesidad de diseñar y construir de forma óptima estructuras que van a estar sometidas a acciones dinámicas, como pueden ser el paso de un tren sobre un puente, la acción del viento sobre un edificio o la excitación que produce un terremoto sobre cualquier tipo de construcción, pone de manifiesto la importancia del estudio de la Dinámica de las Estructuras.

Esta disciplina forma parte del temario de las asignaturas sobre la Teoría de Estructuras que son impartidas en las Escuelas de Ingeniería Industrial, y dentro de él destaca el estudio del comportamiento dinámico de estructuras de barras sometidas a acciones variables en el tiempo. Este estudio es realizado a través de modelos de medio continuo (infinitos grados de libertad) o a través de modelos discretos con un número finito de grados de libertad.

El estudio de la respuesta sísmica de estructuras es un caso que destaca por su importancia y que tradicionalmente se aborda con planteamientos clásicos que incorporan importantes simplificaciones y que están recogidos en las normativas de construcción de los diferentes países. El estudio dinámico de estructuras ante este tipo de excitaciones queda reducido, cuando se ataca desde este tipo de planteamientos, a suponer que todos y cada uno de los puntos del suelo tiene un mismo valor de desplazamiento, velocidad y aceleración en un instante determinado, es decir, que el suelo se comporta como un sólido rígido.

Sin embargo, es bien sabido que el comportamiento real de los suelos no se ajusta por lo general a esta hipótesis y, además, que la flexibilidad característica del suelo en combinación con su topografía o la presencia de estratos, embalses o estructuras, puede ser determinante en la respuesta sísmica que se produce en la superficie y en las estructuras.

2 CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE BARRAS INCLUYENDO EFECTOS DINÁMICOS DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA. MODELO MIXTO MEF-MEC

Por otro lado, si las longitudes de onda de los armónicos más representativos del terremoto son de magnitud comparable a las dimensiones de la estructura en la dirección de propagación de la onda, diferentes apoyos de la misma en contacto con el suelo tendrán, en general, diferentes valores de desplazamiento, velocidad y aceleración en un mismo instante de tiempo, lo cual endurece de manera considerable respecto al planteamiento tradicional las solicitaciones a las que se ve sometida la estructura.

Este fenómeno, denominado 'Influencia del Carácter Espacial de la Excitación', cobra especial importancia en el análisis de estructuras de gran longitud, como es el caso de puentes, hasta tal punto que un análisis basado en un movimiento uniforme del suelo en los apoyos no debe considerarse adecuado.

Por tanto, y debido también a la rigidez aportada al sistema por la propia estructura ('Efecto de la Interacción Dinámica Suelo-Estructura'), puede afirmarse que la respuesta dinámica de las estructuras no puede ser estudiada de forma correcta desacoplándola del suelo que la soporta.

El estudio de la respuesta sísmica de las estructuras es un importante campo de trabajo e investigación al que se han dedicado numerosos trabajos en las últimas décadas y que continúa siendo un tema completamente abierto. Son muchos los aspectos del problema, desde la propia definición de la excitación sísmica hasta el comportamiento acoplado de la estructura con el suelo de cimentación, que son objeto de aportaciones científicas constantes en numerosas publicaciones dedicadas al tema.

En el departamento de Ingeniería civil de la ULPGC se trabaja desde hace más de una década en el desarrollo de modelos que permitan abordar el problema de la respuesta sísmica de estructuras salvando algunas de las deficiencias de otros ya existentes. En concreto se han estudiado los fenómenos de acoplamiento dinámico suelo-estructura, centrándose principalmente en el estudio de la respuesta de presas Bóveda y de cimentaciones a base de pilotes.

Éstos son los temas de estudio que abarcan gran parte de las publicaciones en este sentido. Sin embargo, el estudio del acoplamiento de estructuras de barras con suelos flexibles es un asunto sobre el que no existe mucho trabajo realizado.

De aquí surge el interés por desarrollar un modelo matemático que comprenda la interacción suelo-estructura y por implementarlo en una herramienta matemática capaz de modelizar problemas con cierta complejidad y con características cercanas a la realidad, de modo que puedan estudiarse problemas genéricos, enclavados dentro del

ámbito de la Dinámica de Estructuras, y que sirva para extraer conclusiones generales o para obtener soluciones a casos concretos.

La dificultad que entraña la resolución de las ecuaciones que definen el comportamiento sísmico de las estructuras conduce a la necesidad de abordar el problema a través de métodos numéricos. Para la modelización y estudio de las estructuras, el Método de los Elementos Finitos (MEF) es el método más apropiado. También sería posible utilizarlo para estudiar el comportamiento de un medio infinito, pero en el caso del terreno que propaga la perturbación sísmica, la necesidad de truncar la discretización implica introducir, en los contornos de la propia discretización del modelo numérico, rebotes ficticios de las ondas elásticas que definen la excitación sísmica. Otro método numérico, el Método de los Elementos de Contorno (MEC), se revela más apropiado para el estudio de problemas elastodinámicos que involucran medios infinitos, pues por sus propias características no requiere cerrar la discretización de los medios infinitos, incorporando de forma automática las condiciones de radiación que deben cumplir las ondas difractadas en el suelo que aparecen cuando las ondas sísmicas alcanzan la estructura.

1.2. OBJETIVOS

El objetivo central de este proyecto es el desarrollo de una herramienta de cálculo dinámico en régimen armónico para el estudio dinámico en general, y sísmico en particular, de estructuras de barras cimentadas sobre suelos elásticos en problemas bidimensionales. Se pretende desarrollar el software de cálculo haciendo uso de una técnica mixta que aproveche las ventajas que ofrece cada uno de los dos métodos citados anteriormente. Así, se desarrollará un modelo acoplado M.E.F-M.E.C en el que la estructura de barras se modele de acuerdo con el Método de los Elementos Finitos, como es usual, incorporando además el suelo como una región de Elementos de Contorno, en la cual se producen los fenómenos de incidencia, reflexión y difracción de las ondas sísmicas. El acoplamiento se conseguirá imponiendo en los elementos comunes las condiciones de equilibrio dinámico y continuidad cinemática, fase ésta, junto con la programación del código, que supone la principal aportación del trabajo. Finalmente se pretende hacer uso de este software para la obtención de resultados que permitan estudiar la influencia de distintos aspectos del problema. Más detalladamente, los objetivos a cumplir son:

- a) Estudio de las bases de la Elastodinámica lineal, haciendo hincapié en la comprensión de los fenómenos de propagación de ondas elásticas y la formulación matemática asociada.
- b) Estudio del fenómeno de propagación de ondas elásticas en el suelo. Compresión de la naturaleza propagatoria del sismo, lo que conlleva que puntos del suelo separados entre sí estén sometidos en un instante determinado a desplazamientos de diferente valor, e incluso en desfase.
- c) Estudio de las bases de los métodos numéricos que han servido para el desarrollo de software aplicable al análisis de la propagación de ondas en medios elásticos y al cálculo sísmico de estructuras. Dicho software, que está basado en el MEC, ha sido previamente desarrollado en el Departamento de Ingeniería Civil de la ULPGC. En su estado inicial permitía el estudio acoplado del problema suelo-estructura para estructuras que pueden ser modeladas de acuerdo a una geometría general de medio continuo (muros, presas, depósitos,

- cimentaciones...) pero no resultaba aplicable a estructuras típicas de edificación como son las estructuras de barras.
- d) Desarrollo de un modelo bidimensional de acoplamiento entre Elementos de Contorno y Elementos Finitos basado en la implementación de un elemento de contorno capaz de garantizar las condiciones de acoplamiento entre el extremo de las barras que descansan en el suelo y éste mismo. La estrategia consistirá en garantizar la continuidad de las variables dinámicas y cinemáticas del extremo de cada barra con las de los elementos de contorno en que se acoplan, para lo cual se utilizará un modelo de elemento de contorno rígido (esto equivale a visualizar el acoplamiento como la situación que existe cuando el encuentro entre pilar y suelo se resuelve de acuerdo a una placa de anclaje rígida).
- e) Desarrollo de software de cálculo de estructuras de barras útil para el análisis de problemas bidimensionales de interacción suelo-estructura, basado en el modelo de acoplamiento MEF-MEC del punto anterior.
- f) Utilizando el programa anterior se analizarán algunas estructuras bajo acción sísmica. Se evaluará la influencia de los efectos de interacción suelo-estructura y se obtendrán conclusiones relativas a las diferencias encontradas frente al uso de las hipótesis de cálculo de los planteamientos tradicionales.
- g) La batería de resultados generada servirá de material didáctico para ilustrar la influencia de los efectos estudiados. Este material tendrá utilidad docente fundamentalmente en la asignatura de Teoría de Estructuras.

CAPÍTULO 2

ECUACIONES BÁSICAS Y FUNDAMENTOS DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS ELÁSTICOS

2.1 Introducción

En el presente capítulo teórico se desarrollan las ecuaciones básicas que gobiernan el comportamiento dinámico de los sólidos elásticos. Se comienza con las ecuaciones básicas de la elastodinámica lineal, para luego plantear las ideas fundamentales relacionadas con la propagación de ondas en sólidos elásticos.

2.2 ECUACIONES BÁSICAS DE LA ELASTODINÁMICA LINEAL

Al igual que en problemas estáticos, las ecuaciones de equilibrio en las tres direcciones y la ley de comportamiento del material constituyen las relaciones básicas que gobiernan el comportamiento de sólidos elásticos en régimen dinámico. En este problema, sin embargo, las variables del problema serán funciones con dependencia temporal además de espacial y será necesario incluir las fuerzas de inercia y disipación en las ecuaciones de equilibrio del mismo.

Con todo ello, las relaciones cinemáticas básicas se establecen de igual forma que en elastostática. Así, si x representa el vector posición de cualquier punto del sólido Ω en relación al sistema de referencia cartesiano fijo y t la variable tiempo, a partir de las componentes del vector desplazamiento $u_i(x, t)$ en cada punto del sólido Ω , se define el tensor de pequeñas deformaciones ε_{ij} como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.1}$$

obviamente simétrico ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$). Por otro lado, las ecuaciones de equilibrio a nivel diferencial responden a la ecuación:

$$\sigma_{ii.i} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{u}_i \tag{2.2}$$

donde σ_{ij} representa el tensor de tensiones (simétrico, si se establece el equilibrio de momentos $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)$ las componentes de las fuerzas de volumen por unidad de masa y ρ la densidad del material.

Por último, la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones se establece a través de la ley de comportamiento. Esta relación, también llamada ecuación constitutiva, viene dada por la ley de Hooke, que para materiales homogéneos, isótropos con comportamiento elástico y lineal tiene la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \tag{2.3}$$

o bien, en forma inversa:

$$\sigma_{ii} = \lambda \delta_{ii} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ii} \tag{2.4}$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker. Así, para la hipótesis de partida, la relación tensión-deformación puede expresarse en función de sólo dos constantes (ver p.e. París, 1998). En (2.3) el módulo de elasticidad (*E*) y el coeficiente de Poisson (v), mientras en (2.4) el módulo de elasticidad transversal ($\mu = E/(2(1-v))$) y la constante de Lamé ($\lambda = 2\mu v/(1-2v)$). En esta última, ε_{kk} representa la dilatación volumétrica del medio.

En algunos casos puede resultar interesante la utilización del módulo de rigidez volumétrica o módulo de compresibilidad (K) como una de las constantes características del medio. Esta constante representa la rigidez de un sólido al cambio de volumen de la misma forma que μ representa la rigidez al cambio de forma. Ambas pueden adoptarse como constantes del medio, la primera relacionada con la componente esférica y la segunda con la desviadora de la ley de comportamiento. Haciendo uso de (2.4) en un problema hidrostático, K será la relación entre la presión y el cambio unitario de volumen provocado por ésta:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$
 (2.5)

Las relaciones cinemáticas (2.1), las ecuaciones de equilibrio en tensiones (2.2) y la ley de Hooke (2.4) constituyen un sistema de ecuaciones completo que gobierna el campo de desplazamientos de un dominio lineal, homogéneo e isotrópico. Todas estas ecuaciones presentan una dependencia espacio-temporal que representa físicamente el carácter ondulatorio de la solución del problema. Así, ante una solicitación genérica variable en el tiempo, la respuesta del sistema en desplazamientos, tensión o deformación serán ondas que se propagan en el interior del dominio en estudio.

Con todo, este sistema de ecuaciones planteado puede ser condensado y formular el comportamiento del medio en término de las tres componentes del vector desplazamiento. Así, sustituyendo (2.1) y (2.4) en (2.2) podemos expresar las ecuaciones de equilibrio de forma vectorial como sigue (ecuación de Navier):

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{b} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}$$
 (2.6)

expresión que ha de satisfacerse en todos los puntos del dominio en estudio para cada instante de tiempo. La integración de (2.6) y la obtención del campo de desplazamientos en el dominio Ω , requiere la imposición de las restricciones en el contorno Γ de Ω en forma de tensiones y desplazamientos conocidos además de establecer condiciones iniciales en t=0 para las tres componentes del desplazamiento y la velocidad en cada punto del medio. Conocido ya el campo de desplazamientos, el tensor de deformaciones $\varepsilon_{ij}(x, t)$ puede obtenerse de (2.1) de forma sencilla, y con él el tensor de tensiones $\sigma_{ij}(x, t)$ a partir de la ley de comportamiento (2.4).

2.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ELASTODINÁMICO EN TÉRMINOS DE DILATACIÓN Y ROTACIÓN.

La integración de las ecuaciones de equilibrio dinámico en desplazamientos (2.6) para diferentes dominios, condiciones de contorno y condiciones iniciales constituye el objetivo principal de la teoría de la elastodinámica. En este sentido, los procedimientos que permiten desacoplar este sistema de ecuaciones arrancan de los trabajos de

Poisson, si bien es Stokes (Stokes, 1849) el primero que presenta una formulación en términos de la dilatación volumétrica θ y el vector rotación ω que permiten desacoplar estas ecuaciones de modo simple.

$$\theta = \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u} \tag{2.8}$$

Aplicando los operadores divergencia y rotacional a la ecuación de Navier (2.6) obtenemos las siguientes expresiones:

$$c_p^2 \nabla^2 \theta + \nabla \cdot \boldsymbol{b} = \ddot{\theta} \tag{2.9}$$

$$c_s^2 \nabla^2 \boldsymbol{w} + \nabla \times \boldsymbol{b} = \ddot{\boldsymbol{w}} \tag{2.10}$$

donde:

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad y \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$
 (2.11)

Estas dos constantes tienen dimensión de velocidad y dependen de la densidad y de la constante elástica del sólido. El cociente de ambas está definido por:

$$\frac{c_p^2}{c_*^2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \tag{2.12}$$

Dado que la ecuación (2.9) está referida a la dilatación y la ecuación (2.10) a la rotación, c_p y c_s son denominadas velocidades de onda irrotacional y equivolumial respectivamente.

2.4 ONDAS ARMÓNICAS.

Las ondas armónicas son aquellas cuya dependencia con el tiempo es del tipo cos(wt), sin(wt); donde w es la frecuencia. Usando notación compleja, la dependencia

con el tiempo puede ser escrita como e^{iwt} o e^{-iwt} . En este caso, sólo la parte real o la parte imaginaria de la función tiene sentido físico.

El estudio de las ondas armónicas en medios lineales es muy interesante porque debido al principio de superposición, otras perturbaciones más complicadas pueden ser escritas en térmicos de ondas armónicas dado que a través de las series de Fourier pueden representarse ondas periódicas como una serie de ondas armónicas.

2.5 PROBLEMAS BIDIMENSIONALES.

Las ecuaciones de campo anteriormente definidas permiten ser simplificadas en el caso de problemas bidimensionales, que son aquellos en los cuales las fuerzas de volumen, la geometría y las condiciones de contorno son independientes de una coordenada, digamos, x_3 . En este caso, todas las variables son independientes de x_3 y las ecuaciones de gobierno quedan desacopladas en dos sistemas independientes. De este modo, las ecuaciones de equilibrio pueden ser escritas como:

$$\sigma_{3\beta,\beta} + \rho b_3 = \rho \ddot{u}_3 \tag{2.13}$$

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_{\alpha} = \rho \ddot{u}_{\alpha} \tag{2.14}$$

donde los subíndices α y β toman los valores 1 y 2.

De la ecuación (2.13) obtenemos la ecuación de propagación de onda del problema antiplano:

$$c_s^2 u_{3,\beta\beta} + b_3 = \ddot{u}_3 \tag{2.15}$$

El otro problema, desacoplado del anterior, corresponde al problema plano donde los desplazamientos $u_1(x_1,x_2,t)$ y $u_2(x_1,x_2,t)$ existen y $u_3=0$, y nos lleva a la ecuación de Navier en dos dimensiones:

$$\mu u_{\alpha\beta\beta} + (\lambda + \mu)u_{\beta\beta\alpha} + \rho b_{\alpha} = \rho \ddot{u}_{\alpha} \tag{2.16}$$

Debe ponerse de manifiesto que estos dos problemas son muy diferentes en cuanto que en el primero los desplazamientos están directamente gobernados por la ecuación de onda y sólo existen las ondas equivolumiales y en el segundo las ecuaciones de Navier permanecen en su forma original, de modo que deberán ser transformadas para obtener las ecuaciones de ondas equivolumiales e irrotacionales.

2.6 ONDAS PLANAS.

El desplazamiento de una onda plana propagándose en una dirección definida por el vector $\mathbf{s} = (l, m, n)$ es una perturbación para la cual todos los puntos de cualquier plano perpendicular a \mathbf{s} tienen el mismo desplazamiento en el mismo instante. Para fuerzas de volumen y condiciones de contorno armónicas, el vector desplazamiento resultante es también armónico y, en el caso de ondas planas, puede ser escrito como:

$$\boldsymbol{u} = A e^{i\frac{w}{c}(ct - s\mathbf{x})} \boldsymbol{d} \tag{2.17}$$

donde d es el vector unitario que define la dirección del desplazamiento, sólo la parte real o la parte imaginaria tiene sentido físico y A es la amplitud que, en general, puede ser real o compleja, pero que es siempre independiente de x y de t.

Las características del movimiento de estos puntos puede ser analizada utilizando las ecuaciones de campo en términos de dilataciones θ y rotaciones ω . Estas variables tienen que satisfacer las ecuaciones (2.9) y (2.10) respectivamente, que para fuerzas de volumen nulas quedan de la siguiente forma:

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{c_p^2} \ddot{\theta} \tag{2.18}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{c_s^2} \ddot{\boldsymbol{\omega}} \tag{2.19}$$

Tal y como vimos anteriormente, estas ecuaciones representan una versión desacoplada de las ecuaciones de Navier en términos de la dilatación y las tres componentes del vector rotación. Se trata de ecuaciones de onda, la primera escalar y la segunda vectorial (c_p y c_s tienen dimensiones de velocidad). Así, la componente dilatacional o irrotacional de la perturbación (asociada a cambios de

volumen) se propaga con velocidad c_p mientras que la componente rotacional o equivoluminal (asociada a distorsiones en la forma) viaja con velocidad c_s . En un medio homogéneo e isótropo infinito ambas componentes coexisten y se propagan independientemente siendo $c_p > c_s$, razón por la cual en sismología se denomina a las ondas irrotacionales *ondas primarias* (ondas P) y a las equivoluminales *ondas secundarias* (ondas S), ya que las primeras alcanzan la estación en menor tiempo desde el epicentro del sismo. Esto último justifica la notación utilizada desde el comienzo para ambas.

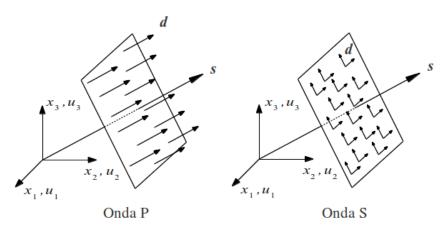


Fig. 2.1. Desplazamientos y dirección de propagación. Ondas planas P y S

Utilizando c_p y c_s como constantes características del medio, podemos escribir la ecuación de gobierno del problema (2.6) para fuerzas de volumen nulas como sigue:

$$c_s^2 \nabla^2 \mathbf{u} + (c_p^2 - c_s^2) \nabla \nabla \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}}$$
 (2.20)

expresión algo más conveniente para estudiar las características del movimiento de los puntos del sólido bajo el efecto de estas ondas. Para ello, se supone un problema de propagación plana armónica de carácter genérico con velocidad c y dirección determinada por el vector unitario s (ver p.e. Domínguez, 1993). Sustituyendo (2.17) en (2.20) se obtiene

$$(c_s^2 - c^2)\mathbf{d} + (c_p^2 - c_s^2)(\mathbf{s} \cdot \mathbf{d})\mathbf{s} = 0$$
 (2.21)

Dado que *d* y *s* son vectores independientes, esta ecuación sólo puede ser satisfecha si:

$$s = \pm d \qquad \text{y entonces} \qquad c^2 = c_p^2 \tag{2.22}$$

0

$$sd = 0 y entonces c^2 = c_s^2 (2.23)$$

lo cual significa que los desplazamientos siguen una dirección d la cual es bien la dirección de propagación s, en cuyo caso la velocidad de propagación de la onda es c_p , o bien la dirección perpendicular a s en cuyo caso la velocidad de propagación es c_s .

Tal y como ha sido ya mencionado con anterioridad, el primer tipo de ondas es conocido como dilatacional, irrotacional, longitudinal o ondas tipo P, y el segundo como equivolumial, transversal u ondas tipo S (figura 2.1).

Si los ejes cartesianos son seleccionados de tal manera que la dirección de propagación s se encuentre contenida en el plano x_1 - x_2 (n = 0), entonces todos los desplazamientos y sus variables derivadas serán independientes de la coordenada x_3 , y de este modo será considerado en lo sucesivo.

Los desplazamientos correspondientes a las ondas tipo P siguen la dirección s y, por lo tanto, en este caso, sólo tienen componentes u_1 y u_2 . El problema es un problema bidimensional en el plano. En el caso de las ondas tipo S, el desplazamiento es perpendicular a la dirección de propagación s. Este vector puede ser descompuesto en dos componentes normales: uno en la dirección x_3 y otro en la intersección de los planos x_1 - x_2 y el plano perpendicular a s. Los desplazamientos a lo largo de la dirección x_3 y sus variables derivadas constituyen un problema antiplano independiente.

Dado que los problemas plano y anti-plano están desacoplados, puede hablarse de dos tipos diferentes de ondas S: las ondas SH (horizontalmente polarizadas) que producen el desplazamiento u_3 y las ondas SV (verticalmente polarizadas) que sólo producen desplazamientos en el plano x_1 - x_2 . Las primeras generan un campo de desplazamientos antiplano (denominado habitualmente anteroposterior), mientras que las segundas generan un campo plano. Éste último puede a su vez dividirse en dos: movimiento transversal y movimiento vertical (figura 2.2):

Un tratamiento en profundidad de la teoría de la elastodinámica puede estudiarse en Achenbach (1973), Eringen y Suhubi (1975) o Miklowitz (1977).

2.7 REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS ARMÓNICAS PLANAS

Dado que las ondas SH producen solamente movimiento anteroposterior, cuando el frente de onda encuentra un cambio de material o un contorno exterior no serán reflejadas o refractadas sino ondas SH. En cambio, cuando una onda SV o P propagándose en el plano encuentra un cambio de material o un contorno exterior, pueden aparecer ambos tipos de onda, SV y P, después de la reflexión y refracción.

Para simplificar el tratamiento matemático, se analizará el problema plano en el que tanto las propiedades del material como las condiciones de contorno dependen exclusivamente de una de las coordenadas cartesianas, por ejemplo, x_2 .

2.7.1 Ondas P

Se supondrá un semiplano elástico ($x_2 \le 0$), con propiedades físicas ρ_1 , μ_1 , λ_1 , bajo los efectos de un tren ondas planas P, armónicas, procedentes del infinito y propagándose en la dirección $q_1 = (l_1, m_1)$. Se divide el estudio en dos partes: en la primera se considera que el semiplano $x_2 \ge 0$ no está constituido por ningún material, y en la segunda, será otra región elástica de propiedades ρ_2 , μ_2 , λ_2 . Cuando el tren de ondas incidente se encuentra con el contorno $x_2 = 0$, tanto ondas P como SV se reflejan en la región $x_2 \le 0$, como se muestra en la figura 2.2:

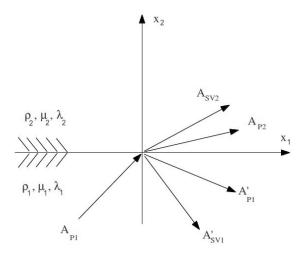


Fig. 2.2. Reflexión y refracción de ondas P

El desplazamiento u_1 en la región $x_2 \le 0$ presenta la siguiente expresión:

$$u_{1} = l_{1} A_{p_{1}} e^{i\frac{w}{c_{p_{1}}}(c_{p_{1}}t - l_{1}x_{1} - m_{1}x_{2})} + l'_{1} A'_{p_{1}} e^{i\frac{w}{c_{p_{1}}}(c_{p_{1}}t - l'_{1}x_{1} - m'_{1}x_{2})} - m''_{1} A'_{SVI} e^{i\frac{w}{c_{s_{1}}}(c_{s_{1}}t - l''_{1}x_{1} - m''_{1}x_{2})}$$

$$(2.24)$$

donde $q'_1 = (l'_1, -m'_1)$ y $q''_1 = (l'_1, -m''_1)$ son las direcciones de propagación de las ondas P y SV reflejadas, respectivamente, A'_{p1} y A'_{SV1} las correspondientes amplitudes de onda y c_{p1} y c_{s1} las velocidades de propagación. Para satisfacer cualquier condición de contorno a lo largo de la dirección x_1 , la variación de las ondas tiene que ser la misma, esto es:

$$\frac{l_1}{c_{p1}} = \frac{l'_1}{c_{p1}} = \frac{l''_1}{c_{s1}} \tag{2.25}$$

y, por tanto:

$$m'_{1} = m_{1}$$

$$m''_{1} = \sqrt{1 - (\frac{c_{s1}}{c_{p1}})^{2} l_{1}^{2}}$$
(2.26)

Llamando

$$f(x_1,t) = e^{i\frac{w}{c_{p1}}(c_{p1}t - l_1x_1)}$$
(2.27)

se pueden simplificar las expresiones que proporcionan el campo de desplazamientos:

$$u_{1} = (l_{1}A_{p1}e^{-i\frac{w}{c_{p1}}m_{1}x_{2}} + l_{1}A'_{p1}e^{i\frac{w}{c_{p1}}m_{1}x_{2}} - m''_{1}A'_{SV1}e^{i\frac{w}{c_{S1}}m''_{1}x_{2}})f(x_{1},t)$$

$$u_{2} = (m_{1}A_{p1}e^{-i\frac{w}{c_{p1}}m_{1}x_{2}} - m_{1}A'_{p1}e^{i\frac{w}{c_{p1}}m_{1}x_{2}} - l''_{1}A'_{SV1}e^{i\frac{w}{c_{S1}}m''_{1}x_{2}})f(x_{1},t)$$

$$(2.28)$$

y los campos de tensiones:

$$\sigma_{11} = \lambda_{1}(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu_{1}u_{1,1} =$$

$$= -i\frac{w}{c_{p_{1}}} \left[(\lambda_{1} + 2\mu_{1}l_{1}^{2})A_{p_{1}}e^{-i\frac{w}{c_{p_{1}}}m_{1}x_{2}} + (\lambda_{1} + 2\mu_{1}l_{1}^{2})A_{p_{1}}e^{i\frac{w}{c_{p_{1}}}m_{1}x_{2}} - 2\mu_{1}l_{1}m_{1} A_{sv_{1}}e^{i\frac{w}{c_{s_{1}}}m_{1}x_{2}} \right] f(x_{1}, t)$$

$$(2.29)$$

$$\sigma_{22} = \lambda_{1}(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu_{1}u_{2,2} =$$

$$= -i\frac{w}{c_{p1}} \left[(\lambda_{1} + 2\mu_{1}m_{1}^{2})A_{p1}e^{-i\frac{w}{c_{p1}}m_{1}x_{2}} + (\lambda_{1} + 2\mu_{1}m_{1}^{2})A'_{p1}e^{i\frac{w}{c_{p1}}m_{1}x_{2}} + 2\mu_{1}m''_{1}l_{1}A_{SV1}e^{i\frac{w}{c_{s1}}m''_{1}x_{2}} \right] f(x_{1}, t)$$

$$(2.30)$$

$$\sigma_{21} = \mu_{1}(u_{1,2} + u_{2,1}) =$$

$$= -i \frac{w}{c_{s1}} \left[2\mu_{1}l_{1}^{"} m_{1}A_{p1}e^{-i\frac{w}{c_{p1}}m_{1}x_{2}} - 2\mu_{1}l_{1}^{"} m_{1}A'_{p1}e^{i\frac{w}{c_{p1}}m_{1}x_{2}} - \mu_{1}(l_{1}^{"}^{2} - m_{1}^{"}^{2})A'_{SV1}e^{i\frac{w}{c_{s1}}m_{1}x_{2}} \right] f(x_{1},t)$$

$$(2.31)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} A_{p1} \\ A'_{p1} \\ A'_{SV1} \end{bmatrix}$$

$$(2.32)$$

donde:

$$T = \begin{bmatrix} l_{1} & l_{1} & -m''_{1} \\ m_{1} & -m_{1} & -l''_{1} \\ -i\frac{w}{c_{p1}}(\lambda_{1} + 2\mu_{1}m_{1}^{2}) & -i\frac{w}{c_{p1}}(\lambda_{1} + 2\mu_{1}m_{1}^{2}) & -i\frac{w}{c_{p1}}2\mu_{1}m''_{1}l_{1} \\ -i\frac{w}{c_{s1}}2\mu_{1}m_{1}l''_{1} & i\frac{w}{c_{s1}}2\mu_{1}m_{1}l''_{1} & i\frac{w}{c_{s1}}\mu_{1}(l''_{1}^{2} - m''_{1}^{2}) \end{bmatrix}$$

$$(2.33)$$

Para condiciones de contorno libre, esto es, $\sigma_{22} = \sigma_{21} = 0$, es posible determinar A_{p1} y A_{SV1} , en función de A_{p1} . Si se estuviese ante otras condiciones de contorno bastaría sustituirlas en la expresión (2.32) para obtener dichas amplitudes en función de la incidente.

Cuando la región $x_2 \ge 0$ es otro sólido elástico con propiedades ρ_2 , μ_2 , λ_2 , aparece de nuevo la difracción de ondas en dicho medio. En general, se denotará como A_{p2} la amplitud de la onda P refractada, $q_2 = (l_2, m_2)$ su dirección de propagación, A_{SV2} la amplitud de la onda SV refractada y $q_2 = (l_2, m_2)$ su dirección de propagación.

Para satisfacer las condiciones de equilibrio y compatibilidad a lo largo del contorno $x_2 = 0$, todos los desplazamientos deben presentar la misma variación a lo largo del eje x_1 . Por ello:

$$\frac{l_1}{c_{p1}} = \frac{l'_1}{c_{p1}} = \frac{l''_1}{c_{s1}} = \frac{l_2}{c_{p2}} = \frac{l'_2}{c_{s2}}$$
(2.34)

Siguiendo el mismo proceso matemático que en los anteriores casos, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} u_{1} \\ u_{2} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_{2} = \begin{bmatrix} l_{2} & m'_{2} \\ m_{2} & -l'_{2} \\ -i\frac{w}{c_{p^{2}}}(\lambda_{2} + 2\mu_{2}m_{2}^{2}) & -2\mu_{2}m'_{2}l_{2} \\ -2\mu_{2}m_{2}l'_{2} & \mu_{2}(l"_{2}^{2} - m"_{2}^{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{p2} \\ A_{SV2} \end{bmatrix}$$
(2.35)

Utilizando las expresiones (2.34) y (2.35), además de la condición de continuidad a lo largo del contorno $x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_2$$
 (2.36)

es posible determinar las amplitudes de las ondas reflejadas A_{p1} y A_{SV1} , además de las refractadas A_{p2} y A_{SV2} , en términos de la amplitud de la onda incidente A_{p1} .

2.7.2. Ondas SV

Por último, considérese que el tren de ondas que procede del infinito es del tipo SV, con amplitud A_{SV1} y dirección de propagación $q_1 = (l_1, m_1)$. Cuando encuentra el contorno $x_2 = 0$, se generan dos ondas reflejadas, una del tipo P y otra SV, como indica la figura 2.3:

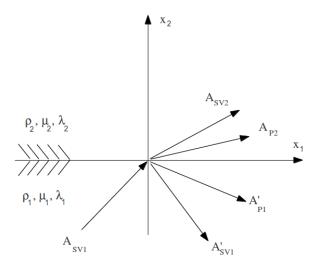


Fig. 2.3. Reflexión y refracción de ondas SV

Si la región $x_2 \ge 0$ no contiene material, sólo habrá ondas reflejadas. Empleando la misma nomenclatura para denotar las características de dichas ondas, para la onda P, A_{p1} es la amplitud, $q_1 = (l_1, m_1)$ la dirección de propagación, mientras que para la SV, A_{SV1} representa la amplitud y $q_1 = (l_1, -m_1)$ su correspondiente dirección de propagación. Para satisfacer las condiciones de contorno, todas las ondas deben presentar la misma variación en x_1 :

$$\frac{l_1}{c_{s1}} = \frac{l'_1}{c_{p1}} = \frac{l''_1}{c_{s1}}$$

$$m''_1 = m_1$$

$$m'_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{c_{p1}}{c_{s1}}\right)^2 l_1^2}$$
(2.37)

En forma matricial, queda:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix}_1 = T \begin{bmatrix} A_{SV1} \\ A'_{SV1} \\ A'_{P1} \end{bmatrix}$$

$$(2.38)$$

donde

$$T = \begin{bmatrix} m_{1} & -m_{1} & l'_{1} \\ -l'_{1} & -l_{1} & -m'_{1} \\ i\frac{w}{c_{p1}} 2\mu_{1}l'_{1}m_{1} & -i\frac{w}{c_{p1}} 2\mu_{1}l'_{1}m_{1} & -i\frac{w}{c_{p1}} (\lambda_{1} + 2\mu_{1}m'_{1}^{2}) \\ i\frac{w}{c_{s1}} \mu_{1}(l'_{1}^{2} - m_{1}^{2}) & i\frac{w}{c_{s1}} \mu_{1}(l_{1}^{2} - m_{1}^{2}) & i\frac{w}{c_{s1}} 2\mu_{1}l_{1}m'_{1} \end{bmatrix}$$

$$(2.39)$$

en la que se ha omitido el término: $f(x_1,t) = e^{i\frac{w}{c_{s1}}(c_{s1}t - l_1x_1)}$

Las amplitudes de las ondas reflejadas pueden ser halladas utilizando la ecuación (2.38) y las condiciones en el contorno $x_2 = 0$.

Cuando la región $x_2 \ge 0$ es otro sólido elástico de propiedades ρ_2 , μ_2 , λ_2 , aparece nuevamente la refracción de ondas en dicho medio. En general, se denotará como A_{p2} la amplitud de la onda P refractada, $q_2 = (l_2, m_2)$ su dirección de propagación, A_{SV2} la amplitud de la onda SV refractada y $q'_2 = (l'_2, m'_2)$ su dirección de propagación.

Para satisfacer las condiciones de equilibrio y compatibilidad a lo largo del contorno $x_2 = 0$, todos los desplazamientos deben presentar la misma variación a lo largo del eje x_1 . Por ello:

$$\frac{l_1}{c_{s1}} = \frac{l'_1}{c_{p1}} = \frac{l''_1}{c_{s1}} = \frac{l_2}{c_{p2}} = \frac{l'_2}{c_{s2}}$$
(2.40)

El procedimiento matemático es idéntico al de los casos anteriores. Se obtendría una expresión similar a (2.35). Las amplitudes de las ondas reflejadas y refractadas se hallaría con la expresión matricial deducida y aplicando condiciones de contorno a lo largo de x_2 =0.

CAPÍTULO 3

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS PARA EL ESTUDIO DE ESTRUCTURAS BIDIMENSIONALES DE BARRAS

3.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE CÁLCULO MATRICIAL

3.1.1. Introducción

La estructura es la parte de una construcción que tiene como función mantener la forma de ésta ante la acción de cargas y otros agentes externos. Con ellos nos referimos no sólo a las construcciones civiles, sino en general a todas las construcciones mecánicas.

Las estructuras pueden estar formadas exclusivamente por elementos prismáticos o bien incluir otros elementos de forma laminar o cuerpos de dimensiones semejantes según las tres direcciones ortogonales. Según esto se podrían clasificar las estructuras en tres grandes grupos: estructuras de barras, estructuras laminares y estructuras continuas tridimensionales.

En este proyecto nos vamos a ocupar únicamente de las estructuras bidimensionales de barras.

Los métodos clásicos de cálculo de estructuras llegaron a ser muy específicos a un tipo concreto de estructura en los tiempos en los que no se disponía de ordenadores para resolver las ecuaciones, aprovechando las peculiaridades de ésta para realizar simplificaciones. En este capítulo estudiaremos la resolución de estructuras bidimensionales de barras por el método de los Elementos Finitos particularizado a elementos tipo Barra, análogos en su forma a los conocidos métodos matriciales.

3.1.2. DISCRETIZACIÓN: ELEMENTOS Y NUDOS.

Para el análisis, la estructura se supone que está compuesta por una serie de barras prismáticas que admiten la idealización de la *Resistencia de materiales*. Estas barras o elementos se unen en una serie de puntos a los que llamamos nudos.

Las ecuaciones de la *Resistencia de Materiales* se aplicarán a cada uno de los elementos, llegando a expresarse el comportamiento de cada punto o sección de éstos en función del comportamiento de los extremos del elemento: ello permitirá, a través de los nudos, relacionar unos elementos con otros y finalmente simular toda la estructura.

De esta forma se pasa de una *Solución continua* (desplazamientos y esfuerzos en todos los puntos de la estructura) a una *solución discreta* (desplazamientos y esfuerzos en los nudos extremos de cada elemento).

3.1.3. GRADOS DE LIBERTAD Y COORDENADAS.

La idea de discretización anterior puede formalizarse diciendo que se ha pasado del número infinito de grados de libertad (gdl) de los puntos de la estructura a un número finito, entendiendo por gdl de un punto el número de coordenadas que es preciso fijar para que su movimiento quede determinado. En las ecuaciones se tendrán en cuenta los gdl de los nudos únicamente, expresándose a partir de ellos lo que ocurre en otro punto cualquiera de la estructura.

Los gdl podrán asociarse no sólo a un punto sino a una estructura y/o elemento, dependiendo en todo caso de las hipótesis de cálculo consideradas. Existirán tantos desplazamientos/giros y fuerzas externas posibles como gdl, pudiéndose hablar en general del gdl de un nudo o de los gdl de un elemento, de una estructura o de parte de ella.

3.1.4. MÉTODO DEL EQUILIBRIO.

En todo problema de estructuras existen tres tipos de relaciones que se han de cumplir. Las ecuaciones de equilibrio, dentro de la estructura y con las cargas externas; las ecuaciones de compatibilidad, entre los elementos de la estructura y con las condiciones de contorno; y, por último, la ley de comportamiento.

Del orden y manera en que se aplican estas ecuaciones se pueden clasificar los métodos de resolución de estructuras en dos grandes grupos: Los *Métodos de la compatibilidad* y los *métodos del equilibrio*, también llamado *método de la rigidez*, por dar lugar a una matriz de rigidez del sistema.

En la actualidad, con el desarrollo de la informática, los *Métodos del Equilibrio* son los más extendidos, dado que, aunque a veces implican un número mayor de ecuaciones en el sistema a resolver, son más fácilmente programables que los *métodos de la compatibilidad*, al poseer éstos últimos ecuaciones dependientes de la estructura particular en estudio.

En el *Método del Equilibrio*, las incógnitas básicas son los desplazamientos de los nudos. En primer lugar se expresan mediante la ley de comportamiento los esfuerzos en función de las deformaciones. Estas, mediante las ecuaciones de compatibilidad, se relacionan con los desplazamientos de los nudos de unión entre elementos. De esta forma se tienen los esfuerzos en función de los desplazamientos. Por último se utilizan las ecuaciones de equilibrio de cada nudo obteniéndose una relación entre las fuerzas externas y los esfuerzos, y por tanto entre las fuerzas externas y los desplazamientos de los nudos. Este sistema de tantas ecuaciones como incógnitas, permite conocer los desplazamientos en todos los nudos, y usando las relaciones de compatibilidad y ley de comportamiento, las deformaciones y esfuerzos.

3.1.5. CONCEPTO DE MATRIZ DE RIGIDEZ.

El concepto intuitivo de rigidez nos dice que los desplazamientos que se producen en una estructura ante una carga serán menores si la estructura es más rígida.

El ejemplo más fácil es un muelle sometido a una fuerza P que produce un alargamiento δ , siendo:

$$P = K\delta \tag{3.1}$$

donde *K* es la constante de rigidez del muelle, o la fuerza necesaria para producir un movimiento unidad.

Esta idea puede extenderse a una estructura con sólo generalizar los conceptos de fuerza y desplazamiento. Para ellos los desplazamientos se representan por el vector

 \boldsymbol{u} y las fuerzas mediante el \boldsymbol{F} , cada uno con n componentes. De este modo tendríamos la relación:

$$F = Ku \tag{3.2}$$

donde cada elemento k_{ij} de la matriz K representa la fuerza que aparece en la coordenada i al dar un desplazamiento unidad a la coordenada j, manteniendo a cero todas las demás.

3.2. EL ELEMENTO BARRA, MATRICES ELEMENTALES

3.2.1 EL ELEMENTO BARRA SOMETIDO A CARGA AXIL

Sea una barra de longitud L de material homogéneo y lineal con un módulo de elasticidad E, y sección constante A, y sometida a una carga axil N en los extremos y a una carga repartida b en la dirección axial.

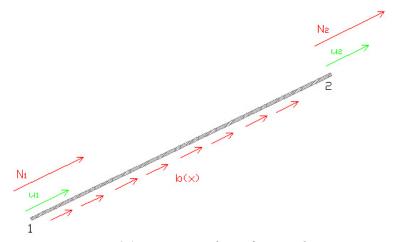


Fig. 3.1. Barra sometida a esfuerzo axil

La ecuación diferencial que rige el campo de desplazamientos en dirección axial es:

$$EA\frac{d^2u}{dx^2} + b = 0 {(3.3)}$$

Si consideramos nula la carga repartida queda la ecuación:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0\tag{3.4}$$

cuya solución es de la forma u = ax + b. Aplicando las condiciones de contorno

$$u = u_1$$
 para $x = 0$
 $u = u_2$ para $x = L$ (3.5)

a esta ecuación para obtener el valor de los parámetros a y b, donde L representa la longitud del elemento barra, llegamos a una solución de la forma:

$$u(x) = \phi_1(x)u_1 + \phi_2(x)u_2 \tag{3.6}$$

donde $\phi_i(x)$, denominadas funciones de forma, representan el campo de desplazamientos de una barra sometida a axil para un desplazamiento unitario del nodo i y nulo del nodo j, de tal modo que la función (3.6) representa la superposición ponderada de ambos estados. Estas funciones tienen la forma siguiente:

$$\phi_{1}(x) = 1 - \frac{x}{L}$$

$$\phi_{2}(x) = \frac{x}{L}$$
(3.7)

y su representación gráfica es:

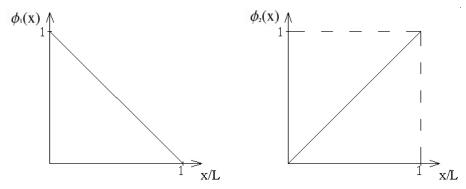


Fig 3.2. Representación gráfica de las funciones de forma de la barra a axil

3.2.2. EL ELEMENTO BARRA SOMETIDO A FLEXIÓN

Sea una barra de longitud L de material homogéneo y lineal con un módulo de elasticidad E, e inercia constante I, y sometida a cargas cortantes V y momentos M en los extremos y a una carga repartida q en la dirección transversal.

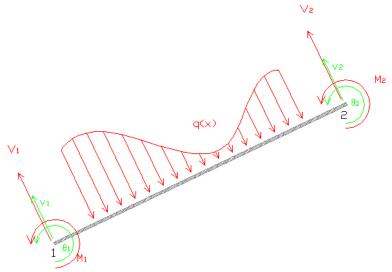


Fig 3.3. Barra sometido a esfuerzos flectores

La ecuación diferencial que rige el campo de desplazamientos en dirección transversal es:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \tag{3.8}$$

Derivando dos veces ésta ecuación nos queda:

$$\frac{d}{dx} \left[EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right] = \frac{dM(x)}{dx} = V$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right] = \frac{dV(x)}{dx} = q$$
(3.9)

Si consideramos nula la carga repartida queda la ecuación:

$$\frac{d^4v}{dx^4} = 0\tag{3.10}$$

cuya solución es de la forma $v = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$. Aplicando las condiciones de contorno

$$v(0) = v_1 para x = 0$$

$$v(L) = v_2 para x = L$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = \theta_1 para x = 0$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=L} = \theta_2 para x = L$$
(3.11)

a esta ecuación para obtener el valor de los parámetros a_i , donde L representa la longitud del elemento barra, llegamos a una solución de la forma:

$$v(x) = \phi_1(x)v_1 + \phi_2(x)\theta_1 + \phi_3(x)v_2 + \phi_4(x)\theta_2 \tag{3.12}$$

donde $\phi_i(x)$, denominados polinomios de Hermite, representan la deformada del elemento barra cuando se aplica un desplazamiento unitario de la variable considerada, manteniéndose el resto nulas (figura 3.4.), de tal modo que la función (3.12) representa la superposición ponderada de ambos estados. Estas funciones tienen la forma siguiente:

$$\phi_{1}(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^{2} + 2\left(\frac{x}{L}\right)^{3}$$

$$\phi_{2}(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^{2}$$

$$\phi_{3}(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^{2} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^{3}$$

$$\phi_{4}(x) = x\left(\left(\frac{x}{L}\right)^{2} - \frac{x}{L}\right)$$
(3.13)

y su representación gráfica es:

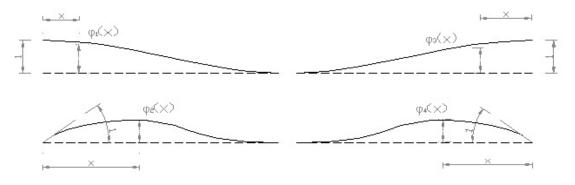


Fig 3.4. Representación gráfica de los polinomios de Hermite

3.2.3. OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO FINITO TIPO BARRA SOMETIDO A ESFUERZO AXIL.

Sea el elemento finito tipo barra descrito en el apartado 3.1,

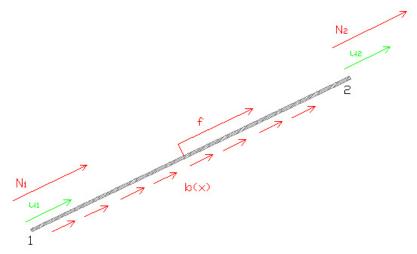


Fig. 3.5. Barra sometida a esfuerzo axil

cuyo campo de desplazamiento queda definido, según vimos, a través de la expresión

$$u(x) = \phi_1(x)u_1 + \phi_2(x)u_2 \tag{3.14}$$

y sobre el que podemos aplicar el Principio de los Trabajos Virtuales entre el conjunto de cargas reales y un campo de desplazamiento virtuales u^* .

$$\int_{0}^{L} \sigma \varepsilon^* A dx = N_1 u_1^* + N_2 u_2^* + \int_{0}^{L} b(x) u^* A dx + f \cdot u_f^*$$
(3.15)

donde, aplicando la ley de comportamiento $\sigma = E \cdot \varepsilon$, tenemos:

$$\varepsilon^*(x) = \frac{d\phi_1}{dx} u_1^* + \frac{d\phi_2}{dx} u_2^*$$

$$\sigma(x) = E \left[\frac{d\phi_1}{dx} u_1 + \frac{d\phi_2}{dx} u_2 \right]$$
(3.16)

Sustituyendo estas expresiones en (3.15) y reordenando tenemos:

$$u_{1}^{*} \left[\int_{0}^{L} \left(\frac{d\phi_{1}}{dx} EA \frac{d\phi_{1}}{dx} \right) dx \cdot u_{1} + \int_{0}^{L} \left(\frac{d\phi_{1}}{dx} EA \frac{d\phi_{2}}{dx} \right) dx \cdot u_{2} \right] +$$

$$+ u_{2}^{*} \left[\int_{0}^{L} \left(\frac{d\phi_{2}}{dx} EA \frac{d\phi_{1}}{dx} \right) dx \cdot u_{1} + \int_{0}^{L} \left(\frac{d\phi_{2}}{dx} EA \frac{d\phi_{2}}{dx} \right) dx \cdot u_{2} \right] =$$

$$= N_{1} u_{1}^{*} + N_{2} u_{2}^{*} + u_{1}^{*} \int_{0}^{L} b(x) \phi_{1}(x) dx + u_{2}^{*} \int_{0}^{L} b(x) \phi_{2}(x) dx +$$

$$+ u_{1}^{*} f \phi_{1}(x_{f}) + u_{2}^{*} f \phi_{2}(x_{f})$$

$$(3.17)$$

Dado que esta ecuación es cierta cualesquiera que sean los campos virtuales de desplazamientos, podemos escribir a igualar términos:

$$\int_{0}^{L} \left(\frac{d\phi_{1}}{dx} EA \frac{d\phi_{1}}{dx} \right) dx \cdot u_{1} + \int_{0}^{L} \left(\frac{d\phi_{1}}{dx} EA \frac{d\phi_{2}}{dx} \right) dx \cdot u_{2} =$$

$$= N_{1} + \int_{0}^{L} b(x)\phi_{1}(x) dx + f\phi_{1}(x_{f})$$

$$\int_{0}^{L} \left(\frac{d\phi_{2}}{dx} EA \frac{d\phi_{1}}{dx} \right) dx \cdot u_{1} + \int_{0}^{L} \left(\frac{d\phi_{2}}{dx} EA \frac{d\phi_{2}}{dx} \right) dx \cdot u_{2} =$$

$$= N_{2} + \int_{0}^{L} b(x)\phi_{2}(x) dx + f\phi_{2}(x_{f})$$
(3.18)

que expresado en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix}
\int_{0}^{L} \left(\frac{d\phi_{1}}{dx} EA \frac{d\phi_{1}}{dx}\right) dx & \int_{0}^{L} \left(\frac{d\phi_{1}}{dx} EA \frac{d\phi_{2}}{dx}\right) dx \\
\int_{0}^{L} \left(\frac{d\phi_{2}}{dx} EA \frac{d\phi_{1}}{dx}\right) dx & \int_{0}^{L} \left(\frac{d\phi_{2}}{dx} EA \frac{d\phi_{2}}{dx}\right) dx
\end{bmatrix} \begin{cases} u_{1} \\ u_{2} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases}
N_{1} \\ N_{2}
\end{cases} + \begin{cases}
\int_{0}^{L} b(x)\phi_{1}(x) dx \\
\int_{0}^{L} b(x)\phi_{2}(x) dx
\end{cases} + \begin{cases}
f\phi_{1}(x_{f}) \\
f\phi_{2}(x_{f})
\end{cases}$$
(3.19)

donde la matriz del miembro izquierdo es la matriz de rigidez del elemento finito tipo barra sometido a axil, que tras realizar las integrales queda de la forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$
(3.20)

donde K_{ij} representa la fuerza que aparece según la coordenada i al dar un movimiento unidad según la coordenada j, manteniendo a cero todas las demás.

3.2.4. OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO FINITO TIPO BARRA SOMETIDO A FLEXIÓN.

Sea el elemento finito tipo barra descrito en el apartado 3.2,

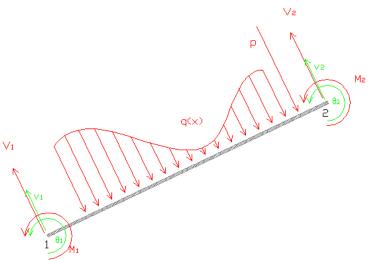


Fig. 3.6. Barra sometida a esfuerzos flectores

cuyo campo de desplazamiento queda definido, según vimos, a través de la expresión

$$v(x) = \phi_1(x)v_1 + \phi_2(x)\theta_1 + \phi_3(x)v_2 + \phi_4(x)\theta_2$$
(3.21)

y sobre el que podemos aplicar el Principio de los Trabajos Virtuales entre el conjunto de cargas reales y un campo de desplazamiento virtuales v*.

$$\int_{V} \varepsilon^* \sigma dV = V_1 v_1^* + M_1 \theta_1^* + V_2 v_2^* + M_2 \theta_2^* + \int_{0}^{L} q(x) v^*(x) dx + p v^*(x_p)$$
(3.22)

A partir de la ecuación diferencial que rige el campo de desplazamientos en dirección transversal

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \tag{3.23}$$

y la relación entre las tensiones en una sección y el momento externo al que está sometida

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_y}{I_{yy}} z \tag{3.24}$$

podemos obtener el campo de tensiones reales y el campo virtual de deformaciones como

$$\sigma = -zE \frac{d^2v}{dx^2} \; ; \; \varepsilon^* = -z \frac{d^2v^*}{dx^2}$$
 (3.25)

que sustituidos en la integral del primer miembro de la ecuación (3.22) nos queda:

$$\int_{V} \varepsilon^* \sigma dV = \int_{0}^{L} \left[\int_{S} z^2 dA \right] \frac{d^2 v^*}{dx^2} E \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \int_{0}^{L} \frac{d^2 v^*}{dx^2} E I \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$
(3.26)

donde a partir de (3.21) podemos decir que:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2\phi_1(x)}{dx^2}v_1 + \frac{d^2\phi_2(x)}{dx^2}\theta_1 + \frac{d^2\phi_3(x)}{dx^2}v_2 + \frac{d^2\phi_4(x)}{dx^2}\theta_2$$
(3.27)

con lo que la ecuación (3.22) queda de la siguiente forma:

$$\int_{0}^{L} \left(\frac{d^{2}\phi_{1}}{dx^{2}} v_{1}^{*} + \frac{d^{2}\phi_{2}}{dx^{2}} \theta_{1}^{*} + \frac{d^{2}\phi_{3}}{dx^{2}} v_{2}^{*} + \frac{d^{2}\phi_{4}}{dx^{2}} \theta_{2}^{*} \right) EI \left(\frac{d^{2}\phi_{1}}{dx^{2}} v_{1} + \frac{d^{2}\phi_{2}}{dx^{2}} \theta_{1} + \frac{d^{2}\phi_{3}}{dx^{2}} v_{2} + \frac{d^{2}\phi_{4}}{dx^{2}} \theta_{2} \right) dx = V_{1}v_{1}^{*} + M_{1}\theta_{1}^{*} + V_{2}v_{2}^{*} + M_{2}\theta_{2}^{*} + \int_{0}^{L} q(x) \left(\phi_{1}(x)v_{1}^{*} + \phi_{2}(x)\theta_{1}^{*} + \phi_{3}(x)v_{2}^{*} + \phi_{4}(x)\theta_{2}^{*} \right) dx + P \left(\phi_{1}(x_{p})v_{1}^{*} + \phi_{2}(x_{p})\theta_{1}^{*} + \phi_{3}(x_{p})v_{2}^{*} + \phi_{4}(x_{p})\theta_{2}^{*} \right) \tag{3.28}$$

que escrito en forma matricial queda:

$$\int_{0}^{L} \left[\frac{d^{2}\phi_{1}}{dx^{2}} \right]_{0}^{L} EI \left[\frac{d^{2}\phi_{1}}{dx^{2}} \quad \frac{d^{2}\phi_{2}}{dx^{2}} \quad \frac{d^{2}\phi_{3}}{dx^{2}} \quad \frac{d^{2}\phi_{4}}{dx^{2}} \right] \left\{ V_{1} \atop V_{2} \atop \theta_{2} \right\} dx = \left[V_{1} \atop W_{1} \atop V_{2} \atop W_{2} \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{4}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{4}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{4}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{4}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{4}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{4}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{4}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{4}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{4}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{4}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{4}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{3}(x)dx \right] + \left[\int_{0}^{L} q\phi_{1}(x)dx \atop \int_{0}^{L} q\phi_{2}(x)dx \right] +$$

donde de la multiplicación de los dos primeros vectores del miembro izquierdo se obtiene la matriz de rigidez del elemento finito tipo barra sometido a flexión, que tras realizar las multiplicaciones e integrales queda de la forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$
(3.30)

donde K_{ij} representa la fuerza que aparece según la coordenada i al dar un movimiento unidad según la coordenada j, manteniendo a cero todas las demás.

3.2.5. MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL DEL PÓRTICO PLANO.

Combinando las matrices de rigidez para un elemento barra sometido a axil y a flexión obtenemos la siguiente matriz de rigidez elemental:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\
0 & 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\
0 & 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L}
\end{bmatrix}$$
(3.31)

3.2.6. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.

Las matrices obtenidas en los apartados anteriores están definidas en un sistema local de coordenadas asociado al elemento y que nos permite definir las ecuaciones matriciales en todos ellos del mismo modo. Para ello definimos un sistema de coordenadas en cada extremo que sea capaz de reflejar los movimientos posibles en cada tipo de elemento, y de tal forma que sea independiente de su posición.

Los sistemas locales en los distintos tipos de elementos serán:

- a) Barra articulada bidimensional: un desplazamiento en cada extremo en la dirección de la barra.
- *b) Barra de pórtico plano:* dos desplazamientos, longitudinal y transversal, y un giro en cada extremo.

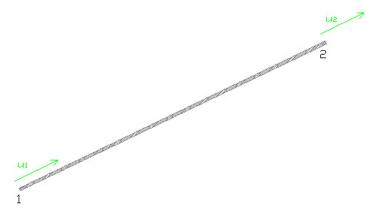


Fig 3.7. Grados de libertad en la barra articulada bidimensional

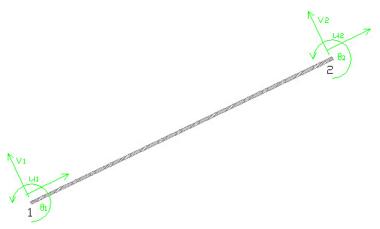


Fig 3.8. Grados de libertad del pórtico plano

Sin embargo, el montaje de la matriz de rigidez del sistema completo necesita de la definición de un sistema global de coordenadas que nos permita definir los grados de libertad de la estructura, mediante su descripción en cada nudo, y en forma coherente con el sistema de referencia global.

Por tanto, la imposición de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad a los extremos de barra coincidente en un nudo se realizará en coordenadas globales de dicho nudo, por lo que es preciso conocer previamente la transformación desde el sistema local al global de forma que las ecuaciones de los distintos elementos puedan ser expresadas de forma común. Por otra parte, una vez conocidos los desplazamientos, giros y fuerzas en cada nudo, será preciso realizar el paso de coordenadas globales a locales de modo que se puedan determinar los esfuerzos en coordenadas locales y a partir de ellos las tensiones.

Para ello, comenzaremos estudiando la relación existente entre dos ejes cartesianos planos al dar giro a uno de ellos respecto al otro:

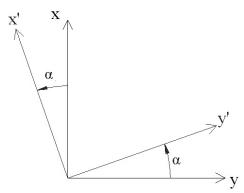


Fig 3.9. Transformación de coordenadas

$$P_{x}^{'} = P_{x} \cos \alpha + P_{y} \sin \alpha$$

$$P_{y}^{'} = -P_{x} \sin \alpha + P_{y} \cos \alpha$$
(3.32)

o en forma matricial

$$\begin{cases}
P_x' \\
P_y'
\end{cases} = \begin{bmatrix}
\cos \alpha & \sin \alpha \\
-\sin \alpha & \cos \alpha
\end{bmatrix} \begin{cases}
P_x \\
P_y
\end{cases}$$
(3.33)

Si se llama \boldsymbol{L}_{D}^{T} a:

$$\boldsymbol{L}_{D}^{T} = \begin{bmatrix} l_{1} & l_{2} \\ m_{1} & m_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$
(3.34)

donde (l_1,m_1) son los cosenos directores de x respecto a (x,y) y (l_2,m_2) los de y, se tendrá:

$$\mathbf{P'} = \mathbf{L}_D^T \mathbf{P} \; ; \; \boldsymbol{\delta'} = \mathbf{L}_D^T \boldsymbol{\delta}$$
 (3.35)

donde δ representa el vector de desplazamientos en el nudo considerado. Al ser \mathbf{L}_D^T una matriz ortogonal, su inversa es igual a su traspuesta, y por lo tanto las relaciones inversas serán:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{L}_{D} \boldsymbol{P}' \; ; \; \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{L}_{D} \boldsymbol{\delta}' \tag{3.36}$$

Si la barra es un pórtico plano, esta matriz de transformación de coordenadas toma la forma:

$$\boldsymbol{L}_{D} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 (3.37)

Ahora, una vez establecidas las transformaciones entre coordenadas en una forma común, las ecuaciones elementales, definidas en coordenadas locales podrán ser expresadas de forma simple en coordenadas globales, lo que va a dar lugar al cálculo de la matriz de rigidez en dichas coordenadas.

$$P' = K'\delta' \tag{3.38}$$

luego en globales será:

$$\mathbf{L}^{T} \mathbf{P} = \mathbf{K}' \mathbf{L}^{T} \delta \Rightarrow \mathbf{P} = (\mathbf{L} \mathbf{K}' \mathbf{L}^{T}) \delta \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{K} \delta$$
(3.39)

Esta expresión relaciona P y δ en coordenadas globales a través de la matriz de rigidez en dichas coordenadas, cuya expresión es:

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{K}'\mathbf{L}^T \tag{3.40}$$

obteniéndose pues una ecuación análoga en ambos sistemas coordenados.

3.3. EL MONTAJE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

3.3.1. Introducción

La estructura puede idealizarse mediante un conjunto de elementos con una cierta distribución y propiedades, unidos entre sí mediante nudos. Esta división en elementos y nudos es fruto de un proceso de discretización que podrá dar lugar, sobre una misma estructura, a distintas divisiones en elementos. Para definir una estructura será preciso establecer:

- 1. Tipo estructural (Pórtico plano, estructura articulada...)
- 2. Coordenadas de los nudos (Relativas a unos ejes de referencia)
- 3. Conectividades de los elementos de los nudos (Nudos que definen cada barra)
- 4. Propiedades del material y de las secciones de sus elementos
- 5. Condiciones de apoyo
- 6. Fuerzas que actúan.

El problema se va a abordar mediante el *Método del Equilibrio o Rigidez*, por tanto el objetivo es establecer un sistema de ecuaciones de la forma:

$$F = Ku \tag{3.41}$$

donde K es la matriz de rigidez de la estructura, F el vector de fuerzas, y u el de desplazamientos, todos ellos en coordenadas globales.

En general, un elemento definido del nodo *i* al nodo *j* llevará asociada una ecuación matricial del tipo:

$$\begin{cases}
\mathbf{P}_{i} \\
\mathbf{P}_{j}
\end{cases} = \begin{cases}
\mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\
\mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj}
\end{cases} \begin{cases}
\boldsymbol{\delta}_{i} \\
\boldsymbol{\delta}_{j}
\end{cases}$$
(3.42)

donde cada subíndice indica el grupo de coordenadas correspondientes a un extremo.

En estos sistemas se van a establecer las siguientes relaciones: equilibrio de fuerzas en los nudos, la suma de las fuerzas P en los extremos de las barras en cada nudo es igual a las fuerzas F aplicadas exteriormente en él; compatibilidad, los movimiento δ de los extremos de barras serán los mismos que los del nudo a que

concurren u; y ley de comportamiento, que relaciona las fuerzas y desplazamientos en los extremos del elemento: $P = K\delta$.

Con estas tres relaciones se va a sintetizar la ecuación matricial de la estructura.

$$F = Ku \tag{3.43}$$

3.3.2. EL MÉTODO DIRECTO DE LA RIGIDEZ.

El cálculo de la matriz de rigidez de la estructura, supuesto ésta última perfectamente definida, puede llevarse a cabo mediante los siguientes pasos:

a) Cálculo de las ecuaciones matriciales elementales en coordenadas elementales o locales:

$$\mathbf{P'}^{i} = \mathbf{K'}^{i} \delta^{i} \tag{3.44}$$

b) Expresión de dicha ecuación en coordenadas de la estructura o globales:

$$\mathbf{P}^{i} = \mathbf{K}^{i} \delta^{i} \quad ; \quad \mathbf{K}^{i} = \mathbf{L}^{i} \mathbf{K}^{i} \mathbf{L}^{i^{T}}$$
 (3.45)

c) Ecuación de compatibilidad de los extremos de las barras en los nudos:

$$\boldsymbol{u}_{i} = \boldsymbol{\delta}_{i}^{k} = \boldsymbol{\delta}_{i}^{l} = \dots \tag{3.46}$$

d) Ecuación de equilibrio entre las fuerzas de los extremos de las barras y las cargas aplicadas externamente en los nudos:

$$\boldsymbol{F}_{j} = \sum_{\text{extremos}} \boldsymbol{P}_{j}^{e} \tag{3.47}$$

e) Sustitución de la ley de comportamiento en la forma particionada de la ecuación (3.42)

$$\mathbf{P}_{j}^{e} = \mathbf{K}_{ji}^{e} \delta_{i}^{e} + \mathbf{K}_{jj}^{e} \delta_{j}^{e}
\mathbf{F}_{j} = \sum_{\text{extremos}} (\mathbf{K}_{ji}^{e} \delta_{i}^{e} + \mathbf{K}_{jj}^{e} \delta_{j}^{e})$$
(3.48)

que una vez tenidas en cuenta las relaciones anteriores de compatibilidad y equilibrio se convierte en:

$$\boldsymbol{F}_{j} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{K}_{ji} \boldsymbol{u}_{i} \tag{3.49}$$

siendo *n* el número de nudos.

Este proceso es denominada montaje o ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura, que se realiza sumando sobre una matriz nula las submatrices correspondientes a cada elemento en la posición adecuada, de tal manera que las submatrices de la diagonal de la matriz global de rigidez están formadas de tantos sumandos como barras llegan al nudo asociado al grupo de filas y columnas correspondientes, mientras que las otras submatrices sólo tienen un sumando que será distinto de cero si existe conexión mediante algún elemento entre los nudos indicados por fila o columna, o bien cero si no existe dicha conexión.

3.3.3. IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO.

La matriz de rigidez de la estructura es singular si no se aplican las condiciones de contorno, ya que serían posibles movimientos como sólido rígido.

La imposición de las condiciones de contorno evita esta singularidad y consiste en fijar los movimientos de una serie de grados de libertad que unen a la estructura con su entorno.

Si se particiona el sistema de ecuaciones como:

donde se han reagrupado las ecuaciones de tal modo que las *M* primeras corresponden a los g.d.l. cuyos movimientos se desean calcular, y por lo tanto con fuerzas aplicadas conocidas, y las *N* últimas son las ecuaciones correspondientes a los g.d.l. cuyos movimientos son conocidos, normalmente nulos, y cuyas reacciones se quieren también conocer.

Desarrollando el sistema de ecuaciones anterior, dado el valor de u_N , el sistema de ecuaciones a resolver será:

$$\boldsymbol{F}_{M} - \boldsymbol{K}_{MN} \boldsymbol{u}_{N} = \boldsymbol{K}_{MM} \boldsymbol{u}_{M} \tag{3.51}$$

3.3.4. CONDENSACIÓN ESTÁTICA DE GRADOS DE LIBERTAD EN BARRAS.

Puede darse el caso de la existencia de nudos con diferente número de grados de libertad en una misma estructura, tal y como ocurre con aquellos nudos en los que confluye alguna barra con una cierta libertad, como puede ser un giro o un desplazamiento.

Es el caso de, por ejemplo, una barra cuyo extremo está articulado en una rótula, de manera que, además, el momento en ese extremo es nulo. En estos elementos el giro de su extremo es independiente del giro del nudo de la estructura a que está unido, no efectuándose transmisión de fuerzas según el grado de libertad liberado, y por lo tanto el elemento no contribuye a la rigidez del nudo en esa dirección.

La solución a este problema puede llevarse a cabo mediante la condensación de uno de los dos grados de libertad de idéntico carácter existentes en el nudo, de tal manera que no estén ligados. En el caso de la barra cuyo extremo confluye en una rótula, debe condensarse el giro en su extremo antes de proceder al montaje de las ecuaciones del nodo.

Supónganse las ecuaciones de un elemento, o incluso un conjunto de ellos o una estructura genérica en forma particionada:

$$\begin{cases}
\mathbf{F}_{A} \\
\mathbf{F}_{B}
\end{cases} = \begin{bmatrix}
\mathbf{K}_{AA} & \mathbf{K}_{AB} \\
\mathbf{K}_{BA} & \mathbf{K}_{BB}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
\mathbf{u}_{A} \\
\mathbf{u}_{B}
\end{cases}$$
(3.52)

a partir de las cuales es posible plantear una ecuación que implique únicamente a los g.d.l. agrupados en A:

$$\boldsymbol{F}_{A} = \boldsymbol{K}_{AA_{couiv}} \boldsymbol{u}_{A} \tag{3.53}$$

donde:

$$\boldsymbol{K}_{AA_{\text{equiv.}}} = \boldsymbol{K}_{AA} - \boldsymbol{K}_{AB} \boldsymbol{K}_{BB}^{-1} \boldsymbol{K}_{BA}$$
 (3.54)

Esta matriz puede ser obtenida directamente aplicando movimientos unidad, según los diferentes grados de libertad y dejando libre los que se van a condensar.

De cualquier modo, las matrices que se obtienen para una barra con el giro condensado en algún extremo son las que se presentan a continuación:

a) Pórtico plano con libertad de giro en el extremo inicial:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0\\ 0 & 3\frac{EI}{L^3} & 0 & -3\frac{EI}{L^3} & 3\frac{EI}{L^2}\\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0\\ 0 & -3\frac{EI}{L^3} & 0 & 3\frac{EI}{L^3} & -3\frac{EI}{L^2}\\ 0 & 3\frac{EI}{L^2} & 0 & -3\frac{EI}{L^2} & 3\frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$
(3.55)

b) Pórtico plano con libertad de giro en el extremo final:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0\\ 0 & 3\frac{EI}{L^3} & 3\frac{EI}{L^2} & 0 & -3\frac{EI}{L^3}\\ 0 & 3\frac{EI}{L^2} & 3\frac{EI}{L} & 0 & -3\frac{EI}{L^2}\\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0\\ 0 & -3\frac{EI}{L^3} & -3\frac{EI}{L^2} & 0 & 3\frac{EI}{L^3} \end{bmatrix}$$
(3.56)

3.4. ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS DE BARRAS A TRAVÉS DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

3.4.1. Introducción

En los apartados anteriores nos hemos centrado en el cálculo estático de estructuras de barras utilizando el Método de los Elementos Finitos. A continuación, y dado que el objetivo de este proyecto es el análisis dinámico de las mismas, vamos a generalizar el análisis al comportamiento de las estructuras de barras frente a cargas armónicas.

3.4.2. ECUACIÓN MATRICIAL PARA ESTRUCTURAS LINEALES.

El modelo por elementos finitos para la respuesta dinámica de una estructura elástica lineal es representado por la ecuación matricial

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f(t) \tag{3.57}$$

donde u(t) es el vector de los desplazamientos nodales; M, C y K son las matrices cuadradas y simétricas para la masa, amortiguamiento y rigidez de la estructura; y f(t) es el vector de las fuerzas de excitación generalizadas correspondientes a los desplazamientos nodales. Los vectores \dot{u} y \ddot{u} , derivadas primera y segunda respectivamente del vector desplazamiento frente al tiempo, representan los vectores velocidad y aceleración en los nodos.

La forma de la ecuación no se altera si la excitación consiste en aceleraciones o desplazamientos prescritos de la base de la estructura en lugar de en las fuerzas aplicadas.

Para una estructura particular la matriz de rigidez K es la misma independientemente de que el problema considerado sea estático o dinámico, pero resulta obvio que en el primer caso no resulta necesario definir las matrices de masa y amortiguamiento.

La ecuación (3.57) determina el comportamiento dinámico de la estructura en el dominio del tiempo, es decir, los valores de desplazamiento, velocidades y aceleraciones de cada uno de los nodos del sistema en cada instante de tiempo t. Sin

embargo, el objeto de este proyecto es el análisis dinámico de estructuras en el dominio de la frecuencia, es decir, ante excitaciones armónicas. Las ondas armónicas son aquellas cuya dependencia con el tiempo es del tipo cos(wt), sin(wt); donde w es la frecuencia. Usando notación compleja, la dependencia con el tiempo puede ser escrita como e^{iwt} o e^{-iwt} . En este caso, sólo la parte real o la parte imaginaria de la función tiene sentido físico. Su estudio, como ha sido indicado anteriormente, permite el análisis de otras perturbaciones más complicadas gracias al principio de superposición y a las series de Fourier.

De este modo, vamos a expresar los vectores excitación y desplazamiento de los nodos de la estructura en notación armónica y compleja, de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{iwt} \quad ; \quad \mathbf{f} = \mathbf{F}e^{iwt} \tag{3.58}$$

donde U y F representan los vectores amplitud del movimiento y la excitación respectivamente. Derivando respecto al tiempo la expresión de u para obtener los vectores velocidad y aceleración obtenemos:

$$\dot{\mathbf{u}} = iw\mathbf{U}e^{iwt}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -w^2\mathbf{U}e^{iwt}$$
(3.59)

Sustituyendo las expresiones (3.58) y (3.59) en (3.57) obtenemos:

$$\left(\mathbf{K} + i\mathbf{w}\mathbf{C} - \mathbf{w}^2\mathbf{M}\right) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{3.60}$$

donde el factor e^{iwt} se anula al aparecer en ambos miembros. De este modo tenemos una ecuación matricial en el dominio de la frecuencia, que es de la forma

$$K'U = F \tag{3.61}$$

donde **K'** es una matriz de coeficientes complejos pero que deja un sistema de ecuaciones de forma análoga al que obtenemos del problema estático.

En los apartados siguientes vamos a analizar la obtención de las matrices de masa y amortiguamiento.

3.4.3. MATRIZ DE MASA

La forma más simple de definir las propiedades másicas de cualquier estructura es suponer que toda la masa de la estructura está concentrada en los nodos. Se obtiene de esta forma una matriz diagonal denominada *matriz de masas concentradas*. Es un caso típico el análisis de edificios de varios niveles con las masas de cada piso concentradas a la altura del forjado del mismo, considerando que éste es muy rígido y que posee la mayor parte de la masa del sistema.

Sin embargo, y haciendo uso del concepto de elemento finito, podemos definir otro tipo de matriz de masa más cercano a la realidad haciendo uso de un procedimiento similar al utilizado para el análisis de los coeficientes de la matriz de rigidez de la estructura. De este modo obtendremos la denominada *matriz de masa consistente* de la estructura.

Comencemos por analizar los elementos de la matriz que definen el comportamiento a flexión de una barra, cuya deformada puede ser estudiada, como hemos visto en el apartado 3.2.2., haciendo uso de los polinomios de Hermite $\varphi_i(x)$.

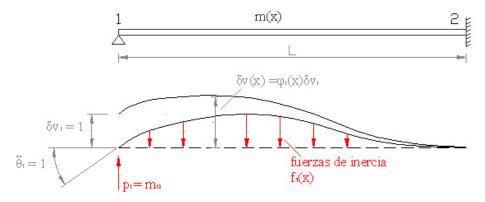


Fig 3.10. Obtención de los coeficientes de la matriz de masa

Consideremos, por ejemplo, una viga como la representada en la figura 3.10, donde m(x) representa la masa distribuida a lo largo de la barra, sometida a una aceleración angular unidad en el extremo izquierdo $\ddot{\theta}_1 = 1$ que dará lugar a aceleraciones verticales a lo largo de la barra según la expresión:

$$\ddot{v}(x) = \phi_2(x)\ddot{\theta}_1 \tag{3.62}$$

obtenida de la derivación de la expresión (3.12) teniendo en cuenta que el resto de los grados de libertad tienen valor nulo.

Por otro lado, la fuerza inercial que se opone a esta aceleración, según el principio de d'Alambert, es:

$$f_{\iota}(x) = m(x)\ddot{v}(x) = m(x)\phi_{2}(x)\ddot{\theta}_{1}$$
(3.63)

El coeficiente másico de influencia asociado con esta aceleración se define como la fuerza nodal de inercia que produce, que puede ser evaluada a través de la fuerza de inercia distribuida de la ecuación (3.63) utilizando el principio de los trabajos virtuales. Por ejemplo, la fuerza de inercia vertical en el extremo izquierdo de la barra puede ser evaluada introduciendo un desplazamiento vertical virtual e igualando el trabajo realizado por las fuerzas nodales externas p_I al trabajo realizado por las fuerzas de inercia distribuidas. Por lo tanto:

$$p_1 \delta v_1 = \int_0^L f_I(x) \delta v(x) dx \tag{3.64}$$

Expresando el desplazamiento vertical virtual en términos de la función de interpolación y sustituyendo la ecuación (3.63) obtenemos:

$$p_1 \delta v_1 = \int_0^L m(x) \phi_2(x) \ddot{\theta}_1 \phi_1(x) \delta v_1 dx \tag{3.65}$$

Simplificando y sabiendo que la aceleración angular en el extremo es de valor unidad tenemos:

$$m_{12} = \int_0^L \phi_1(x) m(x) \phi_2(x) dx$$
 (3.66)

Obviamente, el coeficiente m_{ij} correspondiente a los grados de libertad de una viga a flexión pueden ser calculados con la expresión genérica:

$$m_{ij} = \int_{0}^{L} \phi_{i}(x) m(x) \phi_{j}(x) dx$$
 (3.67)

Del mismo modo, si analizamos el comportamiento de una barra sometida a axil, y utilizando las funciones de forma $\phi_i(x)$ vistas en el apartado 3.2.1., los coeficientes de

influencia correspondientes a los grados de libertad longitudinales a la barra pueden ser obtenidos mediante la expresión:

$$m_{ij} = \int_0^L \phi_i(x) m(x) \phi_j(x) dx$$
 (3.68)

Estas ecuaciones muestran que la matriz de masa, al igual que la de rigidez, es simétrica. Cuando los coeficientes son obtenidos de esta forma, a través de las funciones de forma de una barra, la matriz es denominada *matriz de masa consistente*. En el caso particular de una barra con masa uniformemente distribuida, esta matriz tiene la expresión siguiente:

$$\begin{cases}
f_{I_{x_1}} \\
f_{I_{y_1}} \\
M_{I_1} \\
f_{I_{x_2}} \\
f_{I_{y_2}} \\
M_{I_2}
\end{cases} = \frac{\overline{m}L}{420} \begin{bmatrix}
140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\
0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\
0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\
70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\
0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\
0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
\ddot{u}_1 \\
\ddot{v}_1 \\
\ddot{\theta}_1 \\
\ddot{v}_2 \\
\ddot{v}_2 \\
\ddot{\theta}_2
\end{bmatrix} \tag{3.69}$$

Cuando todas las matrices elementales de las barras de una estructura han sido evaluadas, la matriz global de la estructura puede ser ensamblada utilizando la misma estrategia que es aplicada en el montaje de la matriz de rigidez.

3.4.3. CONDENSACIÓN DE LA MATRIZ DE MASA

Para la obtención de matrices de rigidez de elementos barra con alguna libertad se recurrió al procedimiento de la condensación estática de la matriz elemental de rigidez para el pórtico plano. La obtención de las matrices de masa para estos mismos elementos no puede llevarse a cabo a través de este procedimiento debido a que las fuerzas que aparecen en la formulación hacen referencia a las fuerzas de inercia que aparecen a lo largo del elemento y que no se hacen nulas cuando el elemento tiene algún grado de libertad liberado.

En esta ocasión, deben volverse a integrar los elementos de la matriz a partir de unas nuevas funciones de forma que respondan al nuevo elemento con un grado de libertad libre.

Para obtener estas nuevas funciones de forma partimos de la ecuación que rige el campo de desplazamientos en dirección transversal, que tal y como se vio en el apartado 3.2.2, es de la forma $v = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$. Suponiendo que, por ejemplo, el giro del extremo final de la barra está desacoplado del giro del nudo de la estructura, la condición de contorno en dicho extremo será de momento nulo. De este modo, el conjunto de condiciones de contorno a partir del cual pueden obtenerse los valores de los parámetros a_i de esta ecuación es:

$$v(0) = v_1 para x = 0$$

$$v(L) = v_2 para x = L$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = \theta_1 para x = 0$$

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{x=L} = 0 para x = L$$
(3.70)

de donde, operando, se obtiene una solución de la forma:

$$v(x) = \phi_1(x)v_1 + \phi_2(x)\theta_1 + \phi_3(x)v_2$$
(3.71)

donde $\phi_i(x)$ representa la deformada del elemento barra cuando se aplica un desplazamiento unitario de la variable considerada, manteniéndose el resto nulas, de tal modo que la función (3.71) representa la superposición ponderada de tales estados. Estas funciones tienen la forma siguiente:

$$\phi_{1}(x) = 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^{3}$$

$$\phi_{2}(x) = x - \frac{3}{2} \frac{x^{2}}{L} + \frac{1}{2} \frac{x^{3}}{L^{2}}$$

$$\phi_{3}(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^{3}$$
(3.72)

Integrando estas nuevas funciones de forma según la expresión (3.67) se obtiene la matriz de masa para un pórtico plano con el giro condensado en su extremo final:

$$\mathbf{M} = \frac{\overline{m}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0\\ 0 & 204 & 36L & 0 & 58.5\\ 0 & 36L & 8L^2 & 0 & 16.5L\\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0\\ 0 & 58.5 & 16.5L & 0 & 99 \end{bmatrix}$$
(3.73)

Operando del mismo modo puede obtenerse la ecuación que rige el campo de desplazamientos transversal de una barra con el giro condensado en su extremo inicial, lo que da lugar a una solución de la forma:

$$v(x) = \phi_1(x)v_1 + \phi_2(x)v_2 + \phi_3(x)\theta_2$$
 (3.74)

donde

$$\phi_{1}(x) = 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^{3}$$

$$\phi_{2}(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^{3}$$

$$\phi_{3}(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \frac{x^{3}}{L^{2}}$$
(3.75)

Integrando estas nuevas funciones de forma según la expresión (3.67) se obtiene la matriz de masa para un pórtico plano con el giro condensado en su extremo inicial:

$$\mathbf{M} = \frac{\overline{m}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 70 & 0 & 0\\ 0 & 99 & 0 & 58.5 & -16.5L\\ 70 & 0 & 140 & 0 & 0\\ 0 & 58.5 & 0 & 204 & -36L\\ 0 & -16.5L & 0 & -36L & 8L^2 \end{bmatrix}$$
(3.76)

3.4.4. MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO

La generación de la matriz de amortiguamiento presenta serias dificultades debido a la carencia de información relacionada con los mecanismos de amortiguamiento y niveles de amortiguamiento en las estructuras. Si los mecanismos de amortiguamiento están limitados a amortiguamientos internos y la estructura está hecha de un solo material homogéneo la matriz de amortiguamiento puede considerarse proporcional a la matriz de rigidez. Para estructuras construidas de dos o más materiales homogéneos cada componente de la matriz de amortiguamiento puede ser proporcional a la correspondiente matriz de rigidez, pero las constantes de proporcionalidad son diferentes, de forma que la matriz de amortiguamiento del sistema no será proporcional a la matriz de rigidez del sistema. Las matrices para estructuras que tienen deslizamientos, articulaciones o restricciones, o que incorporan mecanismos de absorción para limitar las vibraciones también presentan no-proporcionalidad. Sistemas amortiguados no proporcionales requieren, sin embargo, una consideración especial. Además, la cantidad de masa del sistema también presenta una influencia sobre la cantidad de energía disipada: a mayor masa, mayor amortiguamiento.

Por todo esto, y bajo la hipótesis de comportamiento proporcional del amortiguamiento de las estructuras, la matriz de amortiguamiento del sistema va a ser obtenida en este proyecto de forma proporcional a las matrices de rigidez y masa anteriormente calculadas a través de los coeficientes de proporcionalidad α_1 y α_2 , de la siguiente forma:

$$c_{ii} = \alpha_1 k_{ii} + \alpha_2 m_{ii} \tag{3.77}$$

CAPÍTULO 4

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS

DE CONTORNO

4.1. EL TEOREMA DE LA RECIPROCIDAD EN EL PROBLEMA ELÁSTICO ARMÓNICO

Sea Ω una región elástica con contorno Γ , sobre la que se definen dos estados elastodinámicos. Los desplazamientos, tracciones, fuerzas de volumen, condiciones iniciales y densidad del primer estado son representados por u, p, b, u_o , v_o y ρ , y los correspondientes al segundo estado por u^* , p^* , b^* , u^*_o , v^*_o y ρ^* . Aplicando el teorema de la reciprocidad entre estos dos estados (ver J. Domínguez, 1993), podemos escribir:

$$\int_{\Gamma} (p_{i} * u_{i}^{*}) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho(b_{i} * u_{i}^{*} + u_{oi} \dot{u}_{i}^{*} + v_{oi} u_{i}^{*}) d\Omega =
\int_{\Gamma} (p_{i}^{*} * u_{i}) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho(b_{i}^{*} * u_{i} + u_{oi}^{*} \dot{u}_{i} + v_{oi}^{*} u_{i}) d\Omega$$
(4.1)

Si ambos estados son armónicos con la misma frecuencia w, los productos de convolución se transforman en productos escalares y, si los valores de las condiciones iniciales de contorno son las del estado estacionario, los términos de condiciones iniciales en ambos miembros son idénticos. De este modo, la relación de reciprocidad entre dos estados elastodinámicos armónicos con la misma frecuencia puede expresarse como:

$$\int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_i^* u_i d\Omega$$
 (4.2)

donde todas las variables pueden ser reales o complejas y dependientes de la posición x y de la frecuencia w.

4.2. SOLUCIONES FUNDAMENTALES Y FORMULACIÓN INTEGRAL DE CONTORNO PARA EL PROBLEMA ELÁSTICO ARMÓNICO.

4.2.1 SOLUCIONES FUNDAMENTALES

La solución general correspondiente al problema de una carga concentrada variable en el tiempo aplicada sobre un punto de un medio elástico que ocupa todo el espacio fue obtenida por Stokes (1849). Para obtener las expresiones mostradas en este apartado se descompone el desplazamiento es sus partes irrotacional y equivolumial a partir de la ecuación general de la elastodinámica que puede ser escrita como se muestra a continuación:

$$c_p^2 \nabla \nabla \boldsymbol{u} - c_s^2 \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = -\boldsymbol{b}$$
(4.3)

que para problemas armónicos se convierte en:

$$c_p^2 \nabla \nabla \boldsymbol{u} - c_s^2 \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} - w^2 \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{b}$$
(4.4)

La respuesta de un medio elástico infinito a una carga armónica concentrada de frecuencia w se obtiene a partir de esta expresión, y para el caso bidimensional, es de la forma:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} [(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{kl} + r_{,k} r_{,l}]$$
 (4.5)

$$p_{lk}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{kl} + 2r_{,k}r_{,l} \right] + (1-2\nu)(n_l r_k - n_k r_{,l}) \right]$$
(4.6)

donde δ_{kl} representa la función delta de Kronecker, l es la dirección en la que es aplicada la carga concentrada y k es la componente de la respuesta en estudio. Las componentes de desplazamientos y tracciones pertenecientes a la solución fundamental para una carga unitaria aplicada en una dirección definida por un vector unitario e de componentes e_l es:

$$u_{k}^{*} = u_{lk}^{*} e_{l}$$

$$p_{k}^{*} = p_{lk}^{*} e_{l}$$
(4.7)

4.2.2 REPRESENTACIÓN INTEGRAL

Sea Ω una región elástica con contorno Γ . La representación integral del desplazamiento \boldsymbol{u} en el punto "i" de un estado elastodinámico armónico es obtenido a partir de la relación de reciprocidad (4.2), y puede ser escrito como:

$$u_l^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* \rho b_k d\Omega$$
 (4.8)

Esta ecuación es la representación integral del desplazamiento en cualquier punto interno en términos de los valores de contorno u_k y p_k , la fuerzas de dominio y las soluciones fundamentales, y es válida para cualquier punto de aplicación de la carga puntual.

Sin embargo, en adelante se supondrán nulas las fuerzas de dominio, en cuyo caso la representación integral del desplazamiento de cualquier punto interno del dominio queda de la siguiente forma:

$$u_l^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma \tag{4.9}$$

4.2.3. FORMULACIÓN INTEGRAL DE CONTORNO

La ecuación (4.9) da el desplazamiento en cualquier punto interno una vez conocidos los campos de tensiones y desplazamientos en el contorno. Sin embargo, dado que esta ecuación es válida para cualquier punto perteneciente a Ω incluyendo Γ , una expresión integral de contorno puede ser obtenida llevando (4.9) al contorno. Esta expresión será aplicada en diferentes puntos del contorno para producir un sistema de ecuaciones que, una vez resuelto, ofrezca dichos campos de contorno.

Sin embargo, cuando "i" es llevado al contorno las integrales pasan a contener una singularidad, y es necesario analizar su comportamiento. Considerando que el

contorno es suave en "i" es posible sustituirlo por un semicírculo, tal y como se muestra en la figura 4.1, de centro en "i" y un radio infinitesimal ϵ .

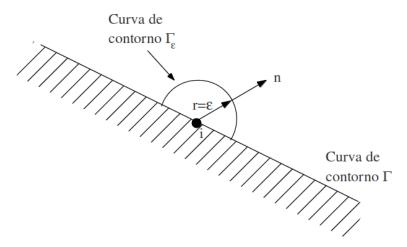


Fig 4.1. Contornos aumentados para la integración de singularidades

Hay dos tipos de ecuaciones de contorno en la ecuación (4.9). Consideremos primero la del miembro derecho y escribámosla en función de la superficie Γ_{ϵ} :

$$\int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} u_{lk}^* p_k d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u_{lk}^* p_k d\Gamma \right\}$$
(4.10)

De estas dos integrales, la primera de ellas será considerada como una integral de Valor Principal de Cauchy sobre el contorno completo Γ cuando ε tiende a 0, y el valor de la segunda integral tiende a cero cuando lo hace ε debido a que la solución fundamental es del orden de $\ln(1/\varepsilon)$. Por lo tanto, la integral investigada no está afectada por la singularidad en el punto "i".

Sin embargo, la integral del miembro izquierdo se comporta de manera diferente. Si la rescribimos como:

$$\int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\}$$
(4.11)

teniendo en cuenta que p_{lk}^* es del orden de $1/\epsilon$, podemos llegar después de operar a la siguiente expresión :

$$\int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma - \frac{1}{2} u_l^i$$

$$\tag{4.12}$$

donde la integral sobre Γ es entendida en el sentido del Valor Principal de Cauchy, quedando la ecuación (4.9) de la forma siguiente:

$$c_{lk}^{i}u_{k}^{i} + \int_{\Gamma} p_{lk}^{*}u_{k}d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^{*}p_{k}d\Gamma \tag{4.13}$$

donde las integrales son en el sentido del Valor Principal de Cauchy y cuando el contorno es suave en "i", $c_{lk}^i = 1/2\delta_{lk}$. Cuando se trata de una esquina, el valor de las integrales da resultados diferentes dependiendo de la geometría de la misma. Algunas expresiones explícitas pueden encontrarse en el trabajo de Hartman (1989). Sin embargo, éste cálculo explícito no es necesario debido a que los términos c_{lk}^i pueden ser obtenidos a través de otro tipo de procedimientos numéricos.

4.3. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO UTILIZANDO ELEMENTOS CUADRÁTICOS PARA PROBLEMAS PLANOS.

La ecuación (4.13) puede ser escrita en forma matricial definiendo las variables de contorno en forma vectorial y escribiendo las soluciones fundamentales como matrices. Para los problemas bidimensionales los vectores de tensiones y desplazamiento son:

$$\boldsymbol{u} = \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases} \quad ; \quad \boldsymbol{p} = \begin{cases} p_1 \\ p_2 \end{cases} \tag{4.14}$$

y los tensores de las soluciones fundamentales:

$$\boldsymbol{u}^* = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{p}^* = \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

De esta manera, la ecuación básica puede escribirse como:

$$c^{i}u^{i} + \int_{\Gamma} p^{*}ud\Gamma = \int_{\Gamma} u^{*}pd\Gamma \tag{4.16}$$

donde u^i representa el desplazamiento de un punto interno o del contorno "i" donde la carga concentrada es aplicada, y c^i es un matriz de dimensión 2x2 y cuyos elementos son constantes que dependen del tipo de punto considerado. Si "i" es un punto interno:

$$\boldsymbol{c}^{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

Si "i" es un punto de un contorno suave:

$$c^{i} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

y si se trata de una esquina:

$$\mathbf{c}^{i} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

donde el valor de c_{lk} depende del tipo de esquina considerado.

Consideremos ahora que el contorno está dividido en N segmentos o elementos como muestra la figura 4.2. Los puntos donde las incógnitas del problema son consideradas son denominados "nodos". Los tipos de elementos comúnmente utilizados son los elementos constantes (a), lineales (b) y cuadráticos (c), con uno, dos y tres nodos por elemento respectivamente. En los primeros, los valores de u y p, así como la aproximación de la geometría del contorno, son constantes a lo largo del elemento; en los segundos varían linealmente y en los terceros lo hacen de forma parabólica. En este proyecto han sido utilizados los elementos de tipo cuadrático debido a su mayor exactitud, por lo que en lo subsiguiente nos centraremos exclusivamente en ellos.

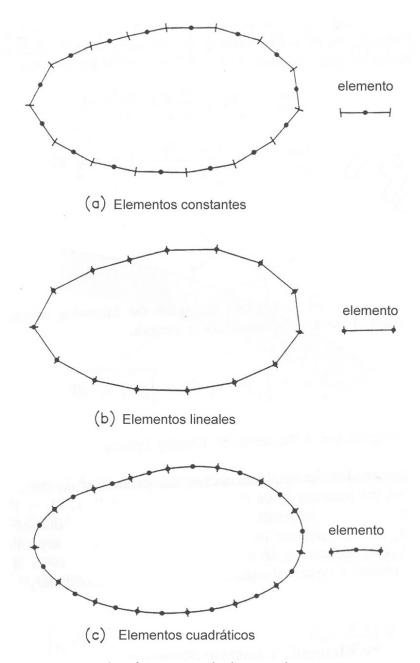


Fig. 4.2. Diferentes tipos de elementos de contorno

Consideremos por lo tanto un elemento curvo de contorno y definamos 3 nodos sobre él, dos en los extremos y uno en medio del elemento. Definamos también una coordenada homogénea ξ que varía entre los valores -1 y 1 a lo largo de él (figura 4.3). Las variables \boldsymbol{u} y \boldsymbol{p} pueden ser escritas en función de los valores de las variables nodales y sus tres funciones de interpolación ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 como se muestra a continuación:

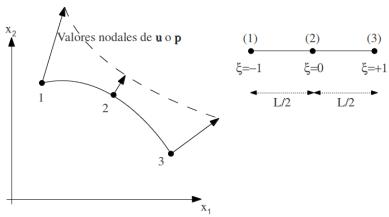


Fig. 4.3. El Elemento cuadrático y la variable homogénea ξ

$$\boldsymbol{u} = \begin{cases} u_{1} \\ u_{2} \end{cases} = \begin{bmatrix} \phi_{1} & 0 & \phi_{2} & 0 & \phi_{3} & 0 \\ 0 & \phi_{1} & 0 & \phi_{2} & 0 & \phi_{3} \end{bmatrix} \begin{cases} u_{1}^{1} \\ u_{1}^{2} \\ u_{2}^{1} \\ u_{3}^{2} \\ u_{3}^{2} \\ u_{3}^{2} \end{cases} = \Phi \boldsymbol{u}^{j}$$

$$(4.20)$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{cases} p_{1} \\ p_{2} \end{cases} = \begin{bmatrix} \phi_{1} & 0 & \phi_{2} & 0 & \phi_{3} & 0 \\ 0 & \phi_{1} & 0 & \phi_{2} & 0 & \phi_{3} \end{bmatrix} \begin{cases} p_{1}^{1} \\ p_{1}^{2} \\ p_{2}^{1} \\ p_{2}^{2} \\ p_{3}^{1} \\ p_{3}^{2} \end{cases} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{p}^{j}$$

$$(4.21)$$

Las funciones de interpolación son:

$$\phi_{1} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$\phi_{2} = (1 - \xi^{2})$$

$$\phi_{3} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$
(4.22)

La geometría del elemento puede ser considerada también como cuadrática y es representada por las coordenadas en los nodos y las mismas funciones de interpolación:

$$\mathbf{x} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_3^1 \\ x_3^2 \\ x_3^2 \end{cases} = \Phi \mathbf{x}^j$$
 (4.23)

La ecuación integral de contorno puede ser escrita ahora en forma discreta como:

$$\boldsymbol{c}^{i}\boldsymbol{u}^{i} + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_{j}} \boldsymbol{p}^{*} \Phi d\Gamma \right\} \boldsymbol{u}^{j} = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_{j}} \boldsymbol{u}^{*} \Phi d\Gamma \right\} \boldsymbol{p}^{j}$$
(4.24)

donde NE es el número de elementos.

Las integrales a lo largo de Γ_j necesitan ser transformadas a la coordenada homogénea ξ , de manera que las integrales elementales quedan de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma_{j}} \boldsymbol{p}^{*} \Phi d\Gamma = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{p}^{*} \Phi |G| d\xi$$

$$\int_{\Gamma_{j}} \boldsymbol{u}^{*} \Phi d\Gamma = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{u}^{*} \Phi |G| d\xi$$
(4.25)

donde el jacobiano |G| es:

$$|G| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \left\{ \left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \right\}^{1/2}$$
 (4.26)

donde $\frac{dx_1}{d\xi}$ y $\frac{dx_2}{d\xi}$ pueden obtenerse fácilmente derivando (4.23) respecto de ξ .

Las integrales a lo largo del elemento "j" pueden desarrollarse como:

$$\int_{-1}^{1} \boldsymbol{p}^* \Phi \left| G \right| d\xi = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{p}^* \left[\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \boldsymbol{\varphi}_3 \right] \left| G \right| d\xi = \left[\boldsymbol{h}_1^{ij} \quad \boldsymbol{h}_2^{ij} \quad \boldsymbol{h}_3^{ij} \right]$$
(4.27)

donde

$$\boldsymbol{\varphi}_{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{k} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\phi}_{k} \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

y

$$\int_{-1}^{1} \boldsymbol{u}^* \Phi \left| G \right| d\xi = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{u}^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 & \boldsymbol{\varphi}_2 & \boldsymbol{\varphi}_3 \end{bmatrix} \left| G \right| d\xi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1^{ij} & \boldsymbol{g}_2^{ij} & \boldsymbol{g}_3^{ij} \end{bmatrix}$$
(4.29)

La ecuación integral discretizada puede ser escrita entonces de la forma:

$$\mathbf{c}^{i}\mathbf{u}^{i} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}^{i1} & \hat{\mathbf{H}}^{i2} & \dots & \hat{\mathbf{H}}^{iN} \end{bmatrix} \begin{cases} u_{1}^{1} \\ u_{2}^{1} \\ u_{2}^{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{1}^{N} \\ u_{2}^{N} \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{i1} & \mathbf{G}^{i2} & \dots & \mathbf{G}^{iN} \end{bmatrix} \begin{cases} p_{1}^{1} \\ p_{2}^{1} \\ p_{2}^{2} \\ \vdots \\ p_{1}^{N} \\ p_{2}^{N} \end{cases} \tag{4.30}$$

donde N representa el número de nodos de contorno, y cuando el nodo "k" está entre dos elementos, \hat{H}^{ik} contiene la submatriz h_3 del elemento precedente y la submatriz h_1 del elemento posterior, y cuando el nodo "k" es el nodo central del elemento, contiene la submatriz h_2 del elemento al cual pertenece, del mismo modo que ocurre con las submatrices G^{ik} .

Además, la ecuación (4.30) puede escribirse de forma más compacta si definimos:

$$\mathbf{H}^{ij} = \hat{\mathbf{H}}^{ij}$$
 cuando $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$

$$\mathbf{H}^{ij} = \hat{\mathbf{H}}^{ij} + c^{i}$$
 cuando $\mathbf{i} = \mathbf{j}$
(4.31)

quedando de la forma:

$$\sum_{j=1}^{NE} \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^{j} = \sum_{j=1}^{NE} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^{j}$$
 (4.32)

de donde resulta el siguiente sistema de ecuaciones cuando la ecuación es aplicada sobre todos los nodos del contorno, que escrito en forma matricial queda de la forma:

$$HU = GP \tag{4.33}$$

donde *H* y *G* son dos matrices de dimensiones 2N x 2N.

Esta ecuación debe ser reordenada al aplicar las condiciones de contorno. Este proceso consiste en mover todas las columnas multiplicadas por una incógnita al miembro izquierdo y en acumular todos los valores obtenidos de multiplicar las condiciones de contorno por las columnas correspondientes al vector del lado derecho *F*. Esto nos lleva a un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$AX = F \tag{4.34}$$

donde el vector X recoge todas las incógnitas (desplazamientos y tensiones) del problema.

Es necesario hacer notar que sólo es posible tener una incógnita por nodo, lo cual no se verifica en el caso en el que el nodo sea una esquina, dado que en ese punto el valor de las tensiones antes y después no tienen porqué coincidir y, por lo tanto, tanto los desplazamientos como las tensiones a uno de los lados del nodo podrían ser incógnita. Este problema ha sido tratado por numerosos autores (ver, por ejemplo, Alarcón, Martín y París, 1979; o Domínguez, 1984), pero esta posibilidad no es tenida en cuenta en este proyecto, por lo que no será estudiada en mayor profundidad.

Finalmente, todos los valores de las incógnitas en los nodos del contorno pueden ser obtenidos de la resolución de este sistema de ecuaciones.

CAPÍTULO 5 FORMULACIÓN DEL ACOPLAMIENTO M.E.F.-M.E.C

5.1. Introducción.

El acoplamiento entre una barra perteneciente a una estructura modelada según el Método de los Elemento Finitos y una porción de terreno modelado según el Método de los Elementos de Contorno va a ser realizada a través de un elemento o conjunto de elementos de contorno de las siguientes características: a) se comportará como un sólido rígido, b) cada elemento será plano, c) la distribución de las tensiones t_x y t_y propias del M.E.C. será parabólica, y d) el punto de acoplamiento podrá ser cualquiera que pertenezca al contorno de acoplamiento.

Por otro lado, el acoplamiento deberá cumplir: *a)* Condiciones de equilibrio entre los esfuerzos en el extremo de la barra y la resultante de las tensiones a lo largo del elemento o conjunto de elementos del contorno, y *b)* Condiciones de compatibilidad en giro y desplazamientos horizontal y vertical del punto de acoplamiento

Dicho todo esto, el acoplamiento podría ser visualizado como una losa rígida y de tramos rectos en la que se encuentra perfectamente empotrada una barra de la estructura M.E.F. y que descansa sin posibilidad de separación sobre el terreno modelado con el M.E.C., tal y como se representa en la figura 5.1.

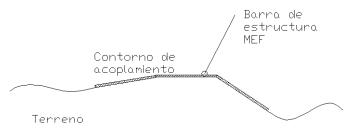


Fig 5.1. Contorno rígido de acoplamiento

A continuación, serán formuladas las relaciones de compatibilidad y equilibrio en este modelo de acoplamiento, y se estudiarán todas las partes que compondrán el sistema de ecuaciones del problema y la forma de obtenerlas.

5.2. FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA UN ÚNICO **ELEMENTO:**

5.2.1. EXPRESIÓN DEL MOMENTO RESULTANTE.

Sea un elemento de contorno plano de tres nodos y con distribución parabólica de tensiones, inclinado un ángulo θ , tal y como se expresa en la figura 5.2.

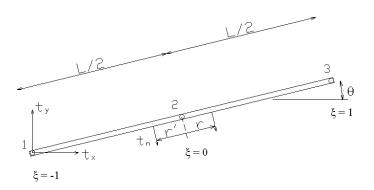


Fig 5.2. Elemento de contorno plano

donde el valor de la tensión en dirección normal al elemento en función del valor de los vectores de tensión en dirección x e y es:

$$t_n = t_x \sin \theta - t_y \cos \theta \tag{5.1}$$

Para calcular la expresión del momento resultante de las tensiones respecto al nodo central, teniendo en cuenta que se considera el momento positivo en sentido antihorario, integramos como se muestra a continuación:

$$\widehat{M} = \int_{\xi=-1}^{\xi=0} t_n r' dr - \int_{\xi=0}^{\xi=1} t_n r dr$$
 (5.2)

Sabiendo que $r(\xi) = \xi \frac{L}{2}$ tenemos:

$$M = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} t_n \left(\xi \frac{L}{2}\right) dr \tag{5.3}$$

donde para un elemento recto, tal y como se puede comprobar fácilmente realizando la sustitución $x = x_i \cdot \emptyset_i$ e $y = y_i \cdot \emptyset_i$:

$$dr = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi = \frac{L}{2} d\xi \tag{5.4}$$

y por tanto:

$$M = \int_{\xi=-1}^{\xi=1} t_n \left(\xi \frac{L}{2}\right) \frac{L}{2} d\xi \tag{5.5}$$

Introduciendo en ésta la ecuación (5.1) tenemos:

$$\widehat{M} = \frac{L^{2}}{4} \int_{-1}^{1} \left[-t_{x_{i}} \phi_{i} \sin \theta + t_{y_{i}} \phi_{i} \cos \theta \right] \xi d\xi = -\frac{L^{2}}{4} \sin \theta \int_{-1}^{1} \left[t_{x}^{1} \phi^{1} + t_{x}^{2} \phi^{2} + t_{x}^{3} \phi^{3} \right] \xi d\xi$$

$$+ \frac{L^{2}}{4} \cos \theta \int_{-1}^{1} \left[t_{y}^{1} \phi^{1} + t_{y}^{2} \phi^{2} + t_{y}^{3} \phi^{3} \right] \xi d\xi$$

$$(5.6)$$

y si nos interesa podemos sustituir las siguientes expresiones:

$$L^{2} \sin \theta = L(y_{3} - y_{1})$$

$$L^{2} \cos \theta = L(x_{3} - x_{1})$$
(5.7)

Las funciones de forma tienen las siguientes expresiones:

$$\phi^{1} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$\phi^{2} = (1 - \xi)(1 + \xi)$$

$$\phi^{3} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$
(5.8)

Los 3 tipos de integral que existen en la ecuación (5.6), y sus resultados son:

$$I_{1} = \int_{-1}^{1} \phi^{1} \xi d\xi = -\frac{1}{3}$$

$$I_{2} = \int_{-1}^{1} \phi^{2} \xi d\xi = 0$$

$$I_{3} = \int_{-1}^{1} \phi^{3} \xi d\xi = \frac{1}{3}$$
(5.9)

Sustituyendo, obtenemos la siguiente expresión del momento resultante:

$$M = -\frac{L^{2}}{4}\sin\theta \frac{1}{3}(-t_{x}^{1} + t_{x}^{3}) + \frac{L^{2}}{4}\cos\theta \frac{1}{3}(-t_{y}^{1} + t_{y}^{3})$$

$$M = \frac{L^{2}}{12}(\sin\theta - \cos\theta - 0 - 0 - \sin\theta - \cos\theta) \begin{cases} t_{x}^{1} \\ t_{y}^{1} \\ t_{x}^{2} \\ t_{y}^{2} \\ t_{x}^{3} \\ t_{y}^{3} \end{cases}$$
(5.10)

5.2.2. Expresión de las Resultantes F_x y F_y :

Según la figura 5.2, las resultantes se pueden obtener por integración de las tensiones, según las siguientes expresiones:

$$F_{x} = \int_{\Gamma} t_{x_{i}} \phi_{i} d\tau = \int_{-1}^{1} \left(t_{x}^{1} \phi^{1} + t_{x}^{2} \phi^{2} + t_{x}^{3} \phi^{3} \right) \frac{L}{2} d\xi$$
 (5.11)

donde:

$$I_{1} = \int_{-1}^{1} \phi^{1} d\xi = \frac{1}{3}$$

$$I_{2} = \int_{-1}^{1} \phi^{2} d\xi = \frac{4}{3}$$

$$I_{3} = \int_{-1}^{1} \phi^{3} d\xi = \frac{1}{3}$$
(5.12)

Sustituyendo:

$$F_{x} = \frac{L}{6} \left(t_{x}^{1} + 4t_{x}^{2} + t_{x}^{3} \right) \tag{5.13}$$

y del mismo modo:

$$F_{y} = \frac{L}{6} \left(t_{y}^{1} + 4t_{y}^{2} + t_{y}^{3} \right) \tag{5.14}$$

5.2.3. MATRIZ DE ECUACIONES DE EQUILIBRIO:

Las ecuaciones de equilibrio anteriores, se pueden expresar matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{cases}
F_{x} \\
F_{y} \\
M
\end{cases} = \frac{L}{6} \begin{bmatrix}
1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\
\frac{L\sin\theta}{2} & \frac{-L\cos\theta}{2} & 0 & 0 & \frac{-L\sin\theta}{2} & \frac{L\cos\theta}{2} \\
t_{x}^{2} \\
t_{x}^{2} \\
t_{x}^{3} \\
t_{y}^{3}
\end{bmatrix} (5.15)$$

5.3. FORMULACIÓN GENÉRICA DE LA MATRIZ DE EQUILIBRIO PARA UN CONJUNTO DE ELEMENTOS.

La ecuación (5.15) expresa la relación de equilibrio entre tensiones y esfuerzos resultantes respecto al nodo central de un elemento de contorno rígido de 3 nodos. Consideremos ahora un conjunto rígido de *n* elementos de contorno planos de 3 nodos, como el mostrado en la figura 5.3:

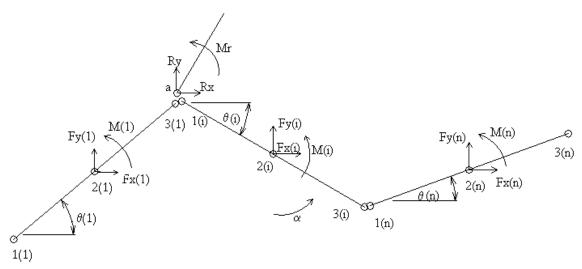


Fig 5.3. Conjunto rígido de elementos de contorno.

Al tratarse de un conjunto único, es necesario condensar las variables de cada elemento e a un único conjunto (u^a , v^a , α , R_x , R_y , M_r) referido al punto de acoplamiento a entre la barra incidente y el suelo.

Al condensar los esfuerzos en un punto cualquiera tenemos:

$$R_{x} = \sum_{e=1}^{n} F_{x}^{e}$$

$$R_{y} = \sum_{e=1}^{n} F_{y}^{e}$$

$$M_{r} = \sum_{e=1}^{n} (M^{e} + F_{y}^{e} d_{x}^{e} - F_{x}^{e} d_{y}^{e})$$
(5.16)

donde:

$$d_x^e = x_2^e - x_a d_y^e = y_2^e - y_a$$
 (5.17)

En notación matricial nos queda, para cada acoplamiento:

$$\begin{cases}
R_{x} \\
R_{y} \\
M_{r}
\end{cases} = \sum_{e=1}^{n} \frac{L^{e}}{6} \begin{bmatrix}
1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\
\left(\frac{L^{e} \sin \theta^{e}}{2} - d_{y}^{e}\right) \left(d_{x}^{e} - \frac{L^{e} \cos \theta^{e}}{2}\right) -4d_{y}^{e} & 4d_{x}^{e} & \left(-\frac{L^{e} \sin \theta^{e}}{2} - d_{y}^{e}\right) \left(d_{x}^{e} + \frac{L^{e} \cos \theta^{e}}{2}\right) \\
t_{x}^{2} \\
t_{y}^{3} \\
t_{y}^{3}
\end{cases}$$
(5.18)

Que podemos escribir también como:

$$\begin{Bmatrix} R_{x} \\ R_{y} \\ M_{r} \end{Bmatrix} = \sum_{e=1}^{n} \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{1}^{e} & \boldsymbol{c}_{2}^{e} & \boldsymbol{c}_{3}^{e} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} t_{x}^{1} \\ t_{y}^{1} \\ t_{x}^{2} \\ t_{y}^{2} \\ t_{x}^{3} \\ t_{y}^{3} \end{Bmatrix} \tag{5.19}$$

donde c_i^e representa una submatriz 3x2 de la expresión anterior.

Teniendo en cuenta que se asumirá la continuidad en el valor de las tracciones entre elementos aún cuando se trate de esquinas, es decir, que las tracciones en x y en y

van a considerarse idénticas para el tercer y el primer nodo de dos elementos consecutivos e y e+1, tenemos que:

$$\begin{cases}
 t_x^3 \\
 t_y^3
 \end{cases}^{e_i} =
 \begin{cases}
 t_x^1 \\
 t_y^1
 \end{cases}^{e_{i+1}}$$
(5.20)

y por tanto podemos escribir finalmente la relación de equilibrio como:

$$\begin{Bmatrix} R_{x} \\ R_{y} \\ M_{r} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{1}^{e_{i}} & \boldsymbol{c}_{2}^{e_{i}} & \boldsymbol{c}_{3}^{e_{i}} + \boldsymbol{c}_{1}^{e_{i+1}} & \boldsymbol{c}_{2}^{e_{i+1}} & \dots & \boldsymbol{c}_{3}^{e_{i+p-1}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} t^{n} \\ t^{n+1} \\ t^{n+2} \\ t^{n+3} \\ \vdots \\ t^{n+m-1} \end{Bmatrix}$$
(5.21)

Donde p es el número de elementos del contorno de acoplamiento, i es el primer elemento del contorno y n y m son el primer y último nodo respectivamente de dicho contorno de acoplamiento. Así mismo, t^j es un vector 2x1 que da las tracciones x e y del nodo j. Nos queda de esta manera:

$$\mathbf{F}^{a} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{t}^{c} \tag{5.22}$$

donde la matriz C es la matriz que engloba las condiciones de equilibrio y el superíndice c representa el conjunto de nodos del contorno de acoplamiento.

5. 4. FORMULACIÓN DE LAS ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD CINEMÁTICA.

Sea un nodo cualquiera n perteneciente a un contorno rígido de acoplamiento, y sea a el punto del contorno en el que se realiza dicho acoplamiento. La relación existente entre el desplazamiento del nodo n y el punto de acoplamiento es:

$$u^{n} = u^{a} - d_{na}\alpha \sin \beta_{na}$$

$$v^{n} = v^{a} + d_{na}\alpha \cos \beta_{na}$$

$$\alpha^{n} = \alpha^{a}$$
(5.23)

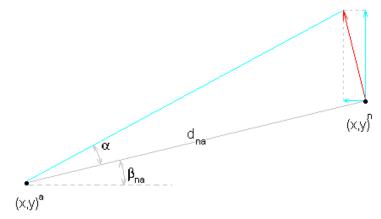


Fig 5.4. Relación cinemática entre el nodo n y el punto de acoplamiento

Donde d_{na} y β_{na} son respectivamente la longitud y el ángulo de la recta que une los puntos a y n, y α es el giro que sufre el contorno de elementos rígidos:

$$d_{na} = \sqrt{(x_n - x_a)^2 + (y_n - y_a)^2}$$

$$\sin \beta_{na} = \frac{y_n - y_a}{d_{na}}$$

$$\cos \beta_{na} = \frac{x_n - y_a}{d_{na}}$$
(5.24)

Estas relaciones, en forma matricial, entre un nudo en concreto y el punto de acoplamiento quedan:

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases}^{n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_{na} \operatorname{sen} \beta_{na} \\ 0 & 1 & d_{na} \cos \beta_{na} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \alpha \end{bmatrix}^{a}$$
(5.25)

$$\boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{d}_{na} \cdot \boldsymbol{u}^a \tag{5.26}$$

Esta misma relación pero expresada ya para el conjunto de los nodos c de un mismo contorno rígido de acoplamiento a queda de la forma:

$$\boldsymbol{u}^c = \boldsymbol{D}_{ca} \cdot \boldsymbol{u}^a \tag{5.27}$$

donde:

$$u^{c} = \begin{cases} u_{p} \\ v_{p} \\ u_{p+1} \\ v_{p+1} \\ \vdots \\ u_{p+N-1} \\ v_{p+N-1} \\ \end{pmatrix}_{2N \times 1}$$
 (5.28)

$$\mathbf{D}_{ca} = \begin{cases} \mathbf{d}_{pa} \\ \mathbf{d}_{(p+1)a} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{(p+N-1)a} \end{cases}_{2N \times 3}$$
(5.29)

donde p es el primer nodo del contorno de acoplamiento a, y N es el número de nodos de dicho contorno.

Es importante hacer notar en este punto que estas ecuaciones son completamente independientes de los elementos de contorno, de tal manera que no existe ninguna diferencia entre nodos por su posición en el elemento o incluso por ser un nodo que pertenece a dos elementos. Éste nodo no aparece dos veces en la formulación, ni desde el lado del vector \boldsymbol{u} ni de la matriz \boldsymbol{D} .

5.5. ESTUDIO DEL NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD DEL SISTEMA.

Teniendo en cuenta que se asumirá la continuidad en el valor de las tracciones en nudos intermedios considerados como pertenecientes al elemento anterior o posterior indistintamente (aún cuando se trate de esquinas), y teniendo en cuenta también que se realizará un desdoblamiento en los nodos frontera entre contornos ordinarios y de acoplamiento, las incógnitas existentes en cada conjunto de elementos de acoplamiento formado por m nodos son, inicialmente, las siguientes: 2m tracciones t_{xi} , t_{yi} ., 2m desplazamientos u_i , v_i , u_i

Pero con la sustitución de la expresión (5.27) en las ecuaciones del M.E.C. y de la expresión (5.22) en las ecuaciones del M.E.F. correspondientes al nodo de aplicación,

las incógnitas se reducen a 2m tracciones t_{xi} , t_{yi} . y 3 desplazamientos u, v, α como sólido rígido respecto al nodo de acoplamiento, que hacen un total de 2m + 3 incógnitas.

Por otro lado, las ecuaciones disponibles en este contorno son 2m ecuaciones M.E.C. que incorporan el acoplamiento cinemática dadas por (5.27), y 3 ecuaciones M.E.F. correspondientes al nudo de acoplamiento de la barra incidente, que hacen un total de 2m + 3 ecuaciones, con lo que tenemos un sistema de ecuaciones con igual número de ecuaciones que de incógnitas y que, por supuesto se completa con la aplicación del M.E.C. al resto del contorno y del M.E.F. a toda la estructura.

5.6. FORMULACIONES MEC Y MEF

5.6.1. MODELO DE ESTRUCTURA DE BARRAS CON EL MEF.

Se emplearán elementos barra en 2 dimensiones. La formulación se realizará en el dominio de la frecuencia, y el conjunto de ecuaciones obtenido puede representarse como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sa} \\ \mathbf{K}_{as} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{s} \\ \mathbf{u}^{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{s} \\ \mathbf{F}^{a} \end{bmatrix}$$
 (5.30)

donde K es la matriz derivada del Método de los Elementos Finitos, u son los desplazamientos de los nodos y F las fuerzas en los mismos. El subíndice a se refiere a los nodos de la estructura conectados al suelo y s al resto de los nodos de la estructura.

5.6.2. MODELO DEL SUELO CON EL MEC.

Se emplearán elementos de contorno de 2 dimensiones cuadráticos. La formulación se ha realizado en el dominio de la frecuencia, y el conjunto de ecuaciones obtenido puede representarse como:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{gg} & \boldsymbol{H}_{gc} \\ \boldsymbol{H}_{cg} & \boldsymbol{H}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^{g} \\ \boldsymbol{u}^{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{gg} & \boldsymbol{G}_{gc} \\ \boldsymbol{G}_{cg} & \boldsymbol{G}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}^{g} \\ \boldsymbol{t}^{c} \end{bmatrix}$$
(5.31)

donde u y t representan movimientos y tracciones en los nodos y H y G son las matrices del método. El subíndice c se refiere a los nodos del suelo de contornos de conexión con la estructura y g al resto de los nodos del suelo.

5.7. ESTUDIO DEL MONTAJE DEL SISTEMA DE ECUACIONES:

El sistema de ecuaciones final surge de la aplicación de todas las ecuaciones anteriormente enumeradas. Falta ahora definir el orden y la forma en que todas estas ecuaciones van a ser montadas.

Introduciendo las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad (5.22) y (5.27) en los sistemas de ecuaciones de M.E.F. y M.E.C. (5.30) y (5.31) respectivamente, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{as} & \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{s} \\ \mathbf{u}^{a} \\ \mathbf{t}^{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{s} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$
 (5.32)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_{gg} & \boldsymbol{H}_{gc} \cdot \boldsymbol{D}_{ca} \\ \boldsymbol{H}_{cg} & \boldsymbol{H}_{cc} \cdot \boldsymbol{D}_{ca} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^{g} \\ \boldsymbol{u}^{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{gg} & \boldsymbol{G}_{gc} \\ \boldsymbol{G}_{cg} & \boldsymbol{G}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}^{g} \\ \boldsymbol{t}^{c} \end{bmatrix}$$
(5.33)

Desarrollando el sistema tenemos:

$$H_{gg}u^{g} - G_{gg}t^{g} + H_{gc}D_{ca}u^{a} - G_{gc}t^{c} = 0$$

$$H_{cg}u^{g} - G_{cg}t^{g} + H_{cc}D_{ca}u^{a} - G_{cc}t^{c} = 0$$
(5.34)

y tras aplicar las condiciones de contorno y reordenar obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{gg} & \mathbf{H}_{gc} \mathbf{D}_{ca} & -\mathbf{G}_{gc} \\ \mathbf{A}_{cg} & \mathbf{H}_{cc} \mathbf{D}_{ca} & -\mathbf{G}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{g} \\ \mathbf{u}^{a} \\ \mathbf{t}^{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{gg} \\ \mathbf{B}^{cg} \end{bmatrix}$$
 (5.35)

donde la matriz A contendrá elementos de las matrices H o G, x^g a las variables nodales de los elementos no de acoplamiento que quedan como incógnita y B a los términos independientes, tras la aplicación de las condiciones de contorno.

Reordenando todas estas ecuaciones dentro de un único sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ss} & \boldsymbol{K}_{sa} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{K}_{as} & \boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}_{gc}\boldsymbol{D}_{ca} & -\boldsymbol{G}_{gc} & \boldsymbol{A}_{gg} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}_{cc}\boldsymbol{D}_{ca} & -\boldsymbol{G}_{cc} & \boldsymbol{A}_{cg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^{s} \\ \boldsymbol{u}^{a} \\ \boldsymbol{t}^{c} \\ \boldsymbol{x}^{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^{s} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}^{gg} \\ \boldsymbol{B}^{cg} \end{bmatrix}$$
 (5.36)

CAPÍTULO 6

EXCITACIÓN DEL SISTEMA CON ONDAS ARMÓNICAS PLANAS P Y SV.

6.1. Introducción.

La introducción en el sistema de la excitación provocada por la incidencia de ondas tipo P o SV necesita de la solución analítica para los campos de tensiones y desplazamientos que son solución del problema de un semiespacio elástico plano excitado por este tipo de ondas.

En los dos apartados siguientes se expone la obtención de dichos campos como una continuación a lo desarrollado en el séptimo apartado del segundo capítulo, por lo que no se han repetido las expresiones expuestas allí.

Por último, en los dos últimos apartados se muestra de qué manera se utilizan estas soluciones para resolver los problemas genéricos que pretendemos resolver.

6.2. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE UN SEMIESPACIO ELÁSTICO EXCITADO CON ONDAS TIPO P.

De la aplicación de la teoría de la elasticidad a los problemas armónicos pueden obtenerse las expresiones de los campos u_1 de desplazamientos y p_1 de tensiones correspondientes a un semiespacio elástico plano $(x_2 \le 0)$ definido por las propiedades físicas ρ , μ y λ , y sometido a una onda plana P que se propaga a través del material con un vector director q = (l,m). El semiespacio $x_2 > 0$ se considera libre de cualquier material.

Cuando la onda incidente alcanza el contorno del semiespacio en $x_2 = 0$, será reflejada de nuevo al interior en forma de ondas tipo P y tipo SV.

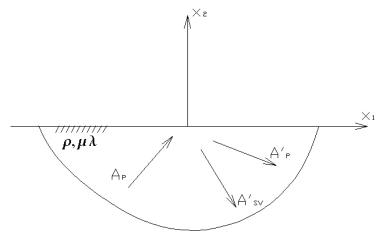


Fig 6.1. Reflexión de ondas P

Las expresiones para el campo de desplazamientos resultante son:

$$u_{1} = lA_{p}e^{-i\frac{w}{c_{p}}mx_{2}} + lA_{p}e^{i\frac{w}{c_{p}}mx_{2}} + m"A_{sv}e^{i\frac{w}{c_{s}}m"x_{2}}$$
(6.1)

$$u_{2} = mA_{p}e^{-i\frac{w}{c_{p}}mx_{2}} - mA_{p}e^{i\frac{w}{c_{p}}mx_{2}} + l"A_{sv}e^{i\frac{w}{c_{s}}m"x_{2}}$$
(6.2)

y las expresiones del campo de tensiones son:

$$\sigma_{11} = \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{1,1} =$$

$$= -i\frac{w}{c_p} \left[(\lambda + 2\mu l^2) A_p e^{-i\frac{w}{c_p} m x_2} + (\lambda + 2\mu l^2) A_p e^{i\frac{w}{c_p} m x_2} - 2\mu l m \, A_{sv} e^{i\frac{w}{c_s} m^* x_2} \right]$$
(6.3)

$$\sigma_{22} = \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2} =$$

$$= -i\frac{w}{c_p} \left[(\lambda + 2\mu m^2) A_p e^{-i\frac{w}{c_p} m x_2} + (\lambda + 2\mu m^2) A_p e^{i\frac{w}{c_p} m x_2} + 2\mu l m \, A_{sv}^{i\frac{w}{c_s} m x_2} \right]$$
(6.4)

$$\sigma_{21} = \sigma_{1,2} = \lambda(u_{1,2} + u_{2,1}) =$$

$$= -i \frac{w}{c_s} \left[2\mu l \, mA_p e^{-i \frac{w}{c_p} mx_2} - 2\mu l \, mA_p e^{i \frac{w}{c_p} mx_2} - \mu(l^{2} - m^{2}) A_{sv} e^{i \frac{w}{c_s} m^{2}} \right]$$
(6.5)

Para calcular las amplitudes A_p y A_{SV} de las ondas reflejadas tipo P y SV respectivamente, se particularizan las tensiones en el contorno a la condición de contorno libre ($\sigma_{22} = \sigma_{21} = 0$) en $x_2 = 0$. Con ello, se obtienen las siguientes expresiones:

$$A_{p}^{'} = A_{p} \left[\frac{2}{1 + \frac{(m''^{2} - l''^{2})(\lambda + 2\mu m^{2})}{4\mu l l'' mm''}} - 1 \right]$$
(6.6)

$$A_{sv}^{'} = A_{p} \frac{-2}{\left[\frac{2\mu lm"}{(\lambda + 2\mu m^{2})} + \frac{m"^{2} - l"^{2}}{2l"m}\right]}$$
(6.7)

que desarrollamos de la siguiente forma para evitar divisiones por 0 en su cálculo por el programa:

$$A_{p}^{'} = A_{p} \left[\frac{8\mu l l "mm"}{4\mu l l "mm" + (m"^{2} - l"^{2})(\lambda + 2\mu m^{2})} - 1 \right]$$
 (6.8)

$$A_{sv} = A_p \frac{-4(\lambda + 2\mu m^2)l "m}{4\mu l l "mm" + (m"^2 - l"^2)(\lambda + 2\mu m^2)}$$
(6.9)

donde el coeficiente de Lamé λ será calculado como:

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu} \tag{6.10}$$

y donde las componentes del vector director de la onda SV reflejada son:

$$l'' = l \cdot \frac{c_s}{c_p}$$

$$m'' = (1 - (c_s / c_p)^2 l^2)^{1/2}$$
(6.11)

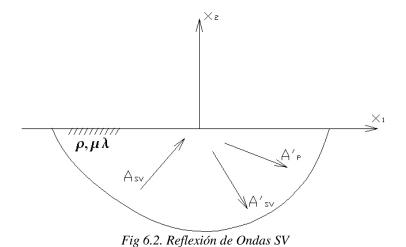
que se calcularán teniendo en cuenta que:

$$\frac{c_p^2}{c_s^2} = \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)} \tag{6.12}$$

6.3. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE UN SEMIESPACIO ELÁSTICO EXCITADO CON ONDAS TIPO SV.

Del mismo modo, de la aplicación de la teoría de la elasticidad a los problemas armónicos pueden obtenerse las expresiones de los campos u_1 de desplazamientos y p_1 de tensiones correspondientes a un semiespacio elástico plano $(x_2 \le 0)$ definido por las propiedades físicas ρ , μ y λ , y sometido a una onda plana SV que se propaga a través del material con un vector director q = (l,m). El semiespacio $x_2 > 0$ se considera libre de cualquier material.

Cuando la onda incidente alcanza el contorno del semiespacio en $x_2 = 0$, será reflejada de nuevo al interior en forma de ondas tipo P y tipo SV.



Las expresiones para el campo de desplazamientos resultante son:

$$u_{1} = mA_{sv}e^{-i\frac{w}{c_{s}}mx_{2}} - mA_{sv}e^{i\frac{w}{c_{s}}mx_{2}} + l'A_{p}e^{i\frac{w}{c_{p}}m'x_{2}}$$
(6.13)

$$u_{2} = -lA_{sv}e^{-i\frac{w}{c_{s}}mx_{2}} - lA_{sv}e^{i\frac{w}{c_{s}}mx_{2}} - m'A_{p}e^{i\frac{w}{c_{p}}m'x_{2}}$$
(6.14)

y las expresiones del campo de tensiones son:

$$\sigma_{11} = \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{1,1} = i\frac{w}{c_p} \left[ml' A_{sv} e^{-i\frac{w}{c_s}mx_2} - ml' A_{sv} e^{i\frac{w}{c_s}mx_2} - (\lambda + 2\mu l'^2) A_p' e^{i\frac{w}{c_p}m'x_2} \right]$$
(6.15)

$$\sigma_{22} = \lambda(u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2} =$$

$$= -i\frac{w}{c_p} \left[-2\mu l' m A_{sv} e^{-i\frac{w}{c_s} m x_2} + 2\mu l' m A_{sv} e^{i\frac{w}{c_s} m x_2} + (\lambda + 2\mu m'^2) A_p' e^{i\frac{w}{c_p} m' x_2} \right]$$
(6.16)

$$\sigma_{21} = \sigma_{1,2} = \lambda(u_{1,2} + u_{2,1}) =$$

$$= i \frac{w}{c_s} \left[\mu(l^2 - m^2) A_{sv} e^{-i\frac{w}{c_s} m x_2} + \mu(l^2 - m^2) A_{sv}^{'} e^{i\frac{w}{c_s} m x_2} + 2\mu l m' A_{p}^{'} e^{i\frac{w}{c_p} m' x_2} \right]$$
(6.17)

Para calcular las amplitudes A_p y A_{SV} de las ondas reflejadas tipo P y SV respectivamente, se particularizan las tensiones en el contorno a la condición de contorno libre ($\sigma_{22} = \sigma_{21} = 0$) en $x_2 = 0$. Con ello, se obtienen las siguientes expresiones:

$$A_{sv}' = -A_{sv} \left[\frac{2}{\frac{(l^2 - m^2)(\lambda + 2\mu m'^2)}{4\mu ll' mm'}} + 1 \right]$$
 (6.18)

$$A_{p}^{'} = A_{sv} \frac{2}{\left[\frac{(\lambda + 2\mu m'^{2})}{2\mu l' m} - \frac{2lm'}{l^{2} - m^{2}}\right]}$$
(6.19)

que desarrollamos de la siguiente forma para evitar divisiones por cero en su cálculo por el programa:

$$A_{sv}' = -A_{sv} \left[\frac{8\mu ll'mm'}{(l^2 - m^2)(\lambda + 2\mu m'^2) - 4\mu ll'mm'} + 1 \right]$$
 (6.20)

$$A_{p}' = A_{sv} \frac{4\mu l' m(l^{2} - m^{2})}{(\lambda + 2\mu m'^{2})(l^{2} - m^{2}) - 4\mu ll' mm'}$$
(6.21)

donde las componentes del vector director de la onda P reflejada son:

$$l' = l \cdot \frac{c_p}{c_s}$$

$$m' = (1 - (c_p / c_s)^2 l^2)^{1/2}$$
(6.22)

6.4. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE UN SEMIESPACIO DE GEOMETRÍA ARBITRARIA ACOPLADO A UNA ESTRUCTURA Y EXCITADO CON ONDAS TIPO P Y SV.

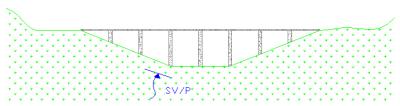


Fig 6.3. Semiespacio de geometría arbitraria

Los campos de desplazamientos u_t y de tensiones p_t solución de este problema pueden ser considerados como la superposición de los campos u_I y p_I solución al problema del semiespacio elástico plano ($x_2 \le 0$) y los campos u_d y p_d producto de la distorsión provocada por las irregularidades en la superficie del semiespacio y por el acoplamiento de la estructura. De este modo, podemos afirmar que se cumplirán en todo punto del dominio las siguientes ecuaciones:

$$u_t = u_I + u_d \tag{6.23}$$

$$p_t = p_I + p_d \tag{6.24}$$

Por otro lado, aplicando el teorema de reciprocidad sobre u_d y p_d , y siguiendo la metodología aplicada para alcanzar las ecuaciones utilizadas en el Método de los Elementos de Contorno, se llega a la siguiente ecuación:

$$Hu_{d} = Gp_{d} \tag{6.25}$$

que aunque no tenga ninguna utilidad expresada de esta manera, sí la tiene expresada de la siguiente forma:

$$H(u_t - u_I) = G(p_t - p_I)$$
 (6.26)

o lo que es lo mismo:

$$Hu_t - Gp_t = Hu_I - Gp_I \tag{6.27}$$

donde, tal y como hemos visto en los apartados anteriores, los elementos del lado derecho de la ecuación son todos conocidos, de tal modo que la solución del sistema coincide con los campos de tensiones y desplazamientos totales del problema.

6.5. Obtención del vector P_I en cada punto a partir del tensor de tensiones σ_{ii} .

Dado que la geometría del contorno en estudio es genérica y no tiene porqué ser plana y horizontal, será necesario multiplicar el tensor de tensiones en cada nodo del contorno por la normal a la superficie en dicho punto.

$$\begin{pmatrix} p_{x_1} \\ p_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{x_1} \\ n_{x_2} \end{pmatrix}$$
(6.28)

Los términos del tensor de tensiones σ_{ij} son obtenidos a través de las expresiones anteriormente expuestas, y las componentes de la tensión normal a la superficie serán obtenidas a partir de las siguientes expresiones, teniendo en cuenta que la geometría se aproxima a través de elementos de contorno parabólicos.

Sea un curva genérica en el plano x_1 - x_2 , y α la pendiente de la recta tangente en el punto de estudio.

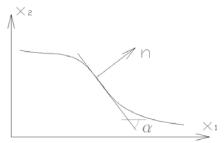


Fig 6.4. Vector tangente a una curva

Las componentes del vector normal a la curva en ese punto tienen la siguiente expresión.

$$n_{x_1} = \frac{\frac{dx_2}{d\xi}}{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2}}$$

$$n_{x_2} = -\frac{\frac{dx_1}{d\xi}}{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2}}$$
(6.29)

La geometría es aproximada a través de las siguientes expresiones:

$$x_i = x_i^1 \phi_1 + x_i^2 \phi_2 + x_i^3 \phi_3 \tag{6.30}$$

donde las funciones de forma son:

$$\phi_{1} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$\phi_{2} = 1 - \xi^{2}$$

$$\phi_{3} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$
(6.31)

y donde ξ es la coordenada adimensional a lo largo de un elemento de contorno, variando entre los valores -1 y 1.

De este modo, para calcular el valor de las expresiones (6.29), procedemos de la siguiente forma:

$$\frac{dx_i}{d\xi} = \phi_1^i x_i^1 + \phi_2^i x_i^2 + \phi_3^i x_i^3$$
 (6.32)

$$\phi_{1}^{'} = \xi - \frac{1}{2}$$

$$\phi_{2}^{'} = -2\xi$$

$$\phi_{3}^{'} = \xi + \frac{1}{2}$$
(6.33)

por tanto:

$$\frac{dx_1}{d\xi} = (\xi - 1/2)x_1^1 - 2\xi x_1^2 + (\xi + 1/2)x_1^3
\frac{dx_2}{d\xi} = (\xi - 1/2)x_2^1 - 2\xi x_2^2 + (\xi + 1/2)x_2^3
(6.34)$$

CAPÍTULO 7

DESCRIPCIÓN DEL CÓDIGO DESARROLLADO

7.1. Introducción.

En este capítulo se expone el código desarrollado para la aplicación informática del modelo matemático descrito en los capítulos anteriores. Su diseño, escritura y comprobación han constituido una parte muy importante del esfuerzo y el tiempo invertidos en el desarrollo de este proyecto.

El primer paso, tras la formulación de las herramientas matemáticas descritas en los capítulos anteriores, fue el estudio del código basado en el Método de los Elementos de Contorno que había sido desarrollado con anterioridad en el Departamento de Ingeniería Civil y que iba a servir de base para los cálculos referentes a esta parte del problema en este proyecto. A continuación, desarrollé el código para el cálculo dinámico de estructuras de barras según el Método de los Elementos Finitos y la subrutina que realiza el mapeo de la matriz del sistema. En este punto comencé el ensamblaje de estos conjuntos de rutinas en un único programa conjunto capaz de resolver numéricamente el problema del acoplamiento. Obviamente, el código original de cálculo basado en el Método de los Elementos de contorno fue modificado para albergar los cálculos referentes a las submatrices C y D, así como para responder a la nueva organización de la matriz del sistema dictada según la subrutina de mapeo. Además, se desarrolló el código que permite la inclusión de ondas SV y P en el sistema, dado que esta posibilidad no existía en el programa M.E.C. original. Por último, escribí una rutina de homogeneización del orden de los coeficientes de la matriz del sistema con el objeto de disminuir los problemas numéricos derivados de resolver un sistema de ecuaciones cuyos elementos tienen diversos orígenes y, normalmente, ordenes de magnitud muy alejados.

Hay que decir también que existe una característica del programa M.E.C. utilizado que no fue desarrollada en este proyecto, con el objetivo de centrarse en el acoplamiento M.E.C.-M.E.F. y de realizar un desarrollo escalonado del software, lo que

conlleva una mayor seguridad en el mismo. Esta característica es la posibilidad de utilizar dominios M.E.C. de naturaleza potencial, cuyo uso pudiera significar un paso más en este software de cálculo. Es por esto que en el código que se expone en este capítulo pueden apreciarse en puntos muy concretos ciertas sentencias y variables que no son de utilidad en la resolución del problema presentado en este proyecto, y que no han sido eliminadas para facilitar la inclusión de la característica comentada en éste párrafo en posteriores desarrollos del código.

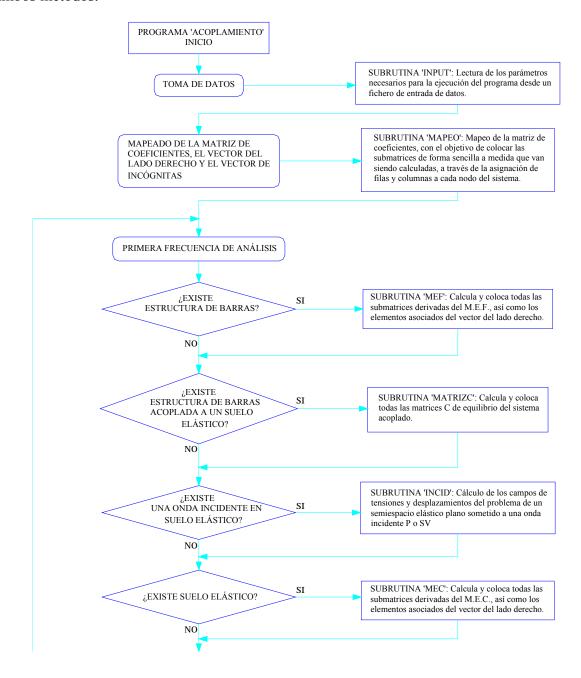
A este respecto, el programa pretende servir, además de como herramienta de cálculo en sí misma, como base para posibles desarrollos de esta línea de investigación en el seno del Departamento de Ingeniería Civil de esta Universidad, por lo que he intentado dotarlo de bastantes comentarios y de una estructura suficientemente clara para que otras personas puedan continuar, en su caso, con su desarrollo. Este capítulo servirá también para complementar este último objetivo, dado que aquí van a exponerse diagramas de flujo que facilitarán en gran medida su comprensión.

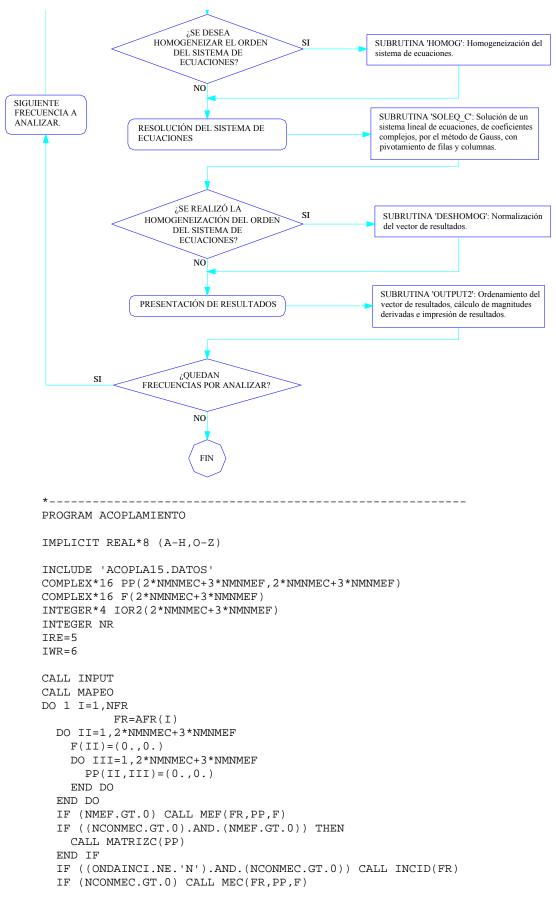
El programa ha sido escrito en lenguaje FORTRAN debido a que el código basado en el Método de los Elementos de Contorno que había sido desarrollado en este departamento estaba escrito en dicho lenguaje de programación. Por otro lado, es muy probable que el código no esté escrito de la forma más adecuada y que su estructura y rutinas no estén optimizadas. Mi objetivo durante su desarrollo fueron la mayor claridad y efectividad que permitieran mis limitados conocimientos y experiencia en programación.

En los siguientes apartados se exponen el código y varios diagramas de flujo de las rutinas desarrolladas junto con algunos comentarios. Las rutinas que representan el núcleo de cálculo del Método de los Elementos de Contorno y que fueron tomadas, con pocas modificaciones, del programa de cálculo original, no van a ser presentadas a continuación dado que se entiende que pertenecen a otro trabajo realizado con anterioridad y que no son el objeto de este proyecto.

7.2. RUTINA PRINCIPAL.

La rutina principal del programa 'Acoplamiento' ejecuta el esquema general del cálculo, para lo cual realiza llamadas a diferentes subrutinas para llevar a cabo la toma de los datos del problema, el cálculo de la matriz de coeficientes, la solución del sistema de ecuaciones y la presentación de los resultados, todo ello para un conjunto de diferentes valores de la frecuencia establecidos también por el usuario. Además, es posible ejecutar independientemente problemas pertenecientes exclusivamente al M.E.C. o al M.E.F., o bien, por supuesto, resolver un problema de acoplamiento entre ambos métodos.





^{*} SI SE HA ELEGIDO, SE HOMOGENEIZA LA MATRIZ ANTES DE RESOLVER

```
IF (NHOMOG.EQ.1) CALL HOMOG(PP,F,NR)

NX=2*NMNMEC+3*NMNMEF
   CALL SOLEQ_C(PP,F,IOR2,NDIMPP,NX)

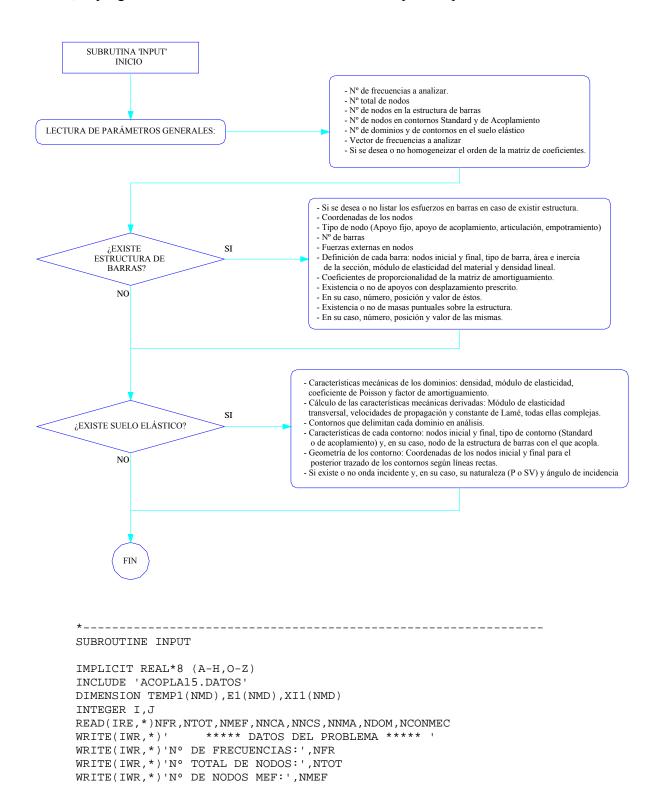
* SI SE HA HOMOGENEIZADO LA MATRIZ, HAY QUE TRATAR LOS RESULTADOS
   IF (NHOMOG.EQ.1) CALL DESHOMOG(F,IOR2,NR)

CALL OUTPUT2(FR,F,IOR2)

1 CONTINUE
100 FORMAT(E12.3,\)
101 FORMAT(')
201 FORMAT(')
202 FORMAT(');',/)
END
```

7.3. SUBRUTINA DE TOMA DE DATOS

Esta subrutina realiza la lectura de todos los datos necesarios para la definición y resolución del problema. Los datos se encuentran en un fichero de texto, y al tiempo que se leen, el programa los vuelca en el fichero de resultados para su posterior análisis.



```
WRITE(IWR, *)'N° DE NODOS EN CONTORNOS DE ACOPLAMIENTO:',NNCA
WRITE(IWR,*)'N° DE NODOS EN CONTORNOS STANDARD:',NNCS
WRITE(IWR,*)'NODO CON NUMERACIÓN MÁS ALTA:',NNMA
WRITE(IWR, *)'N° DE DOMINIOS:',NDOM
WRITE(IWR,*)'N° DE CONTORNOS MEC:',NCONMEC
READ(IRE,*)(AFR(I),I=1,NFR)
WRITE(IWR, *) 'FRECUENCIAS A ESTUDIAR: '
\mathtt{WRITE}\,(\,\mathtt{IWR}\,,\,^{\star}\,)\,(\,\mathtt{AFR}\,(\,\mathtt{I}\,)\,\,,\,\mathtt{I=1}\,,\mathtt{NFR}\,)
* EL INDICADOR NHOMOG INDICA SI LA MATRIZ FINAL SE HOMOGENEIZA
* O NO: 0 -> NO SE HOMOGENEIZA
          1 -> SI SE HOMOGENEIZA
READ(IRE, *)NHOMOG
WRITE(IWR, *)'NHOMOG=',NHOMOG
* EL INDICADOR NESFUER INDICA SI SE CALCULAN LOS ESFUERZOS EN CADA
   BARRA O NO: 0 -> NO SE CALCULAN
                1 -> SI SE CALCULAN
READ(IRE, *)NESFUER
WRITE(IWR,*)'NESFUER=',NESFUER
               LECTURA DE DATOS MEF
IF (NMEF.GT.0) THEN
  DO 5 I=1, NMEF
    READ(IRE,*) X(I),Y(I),TIPO(I)
 CONTINUE
  WRITE(IWR,*)' N° NODO, X(I), Y(I), TIPO(I)'
  DO 6 I=1,NMEF
    WRITE(IWR, *)I, X(I), Y(I), TIPO(I)
  CONTINUE
   READ (IRE, *) NBARRAS
   WRITE(IWR,*)'N° DE BARRAS:',NBARRAS
   IF (NMEF.LT.1.OR.NBARRAS.LT.1) STOP
   WRITE(IWR, 2007)
   DO I=1, NMEF
    READ(IRE, *)FUERZAS(1,I),FUERZAS(2,I),FUERZAS(3,I)
    WRITE(IWR, 2003) I, FUERZAS(1,I), FUERZAS(2,I), FUERZAS(3,I)
   END DO
   WRITE(IWR, 100)
   WRITE(IWR, 2008)
   DO I=1, NBARRAS
     READ (IRE,*) NODOINICIAL(I), NODOFINAL(I), ITIPOBARRA(I), E(I), ARE
@A(I),INERCIA(I),MDISTR(I)
     WRITE(IWR, 2004) I, NODOINICIAL(I), NODOFINAL(I), ITIPOBARRA(I), E(I),
@AREA(I),INERCIA(I),MDISTR(I)
   END DO
   READ(IRE, *)COEF1,COEF2
   WRITE(IWR,*)'COEFICIENTES PARA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO:'
   WRITE(IWR,*)'COEF1=',COEF1,'COEF2=',COEF2
   READ(IRE,*)APOYDESP
   IF (APOYDESP.EQ.1) THEN
     READ(IRE, *)NBCAD
     DO I=1, NBCAD
       READ(IRE,*)BCAD(I)
       DO II=1,3
         READ(IRE,*)UBCAD(I,II)
       END DO
     END DO
   END IF
   READ(IRE, *) MASAPUNT
   IF (MASAPUNT.EQ.1) THEN
     READ(IRE, *)NMASAS
     DO I=1,NMASAS
        READ(IRE,*)NODMASPU(I),VMASAPUN(I)
```

```
END DO
   END IF
END IF
              LECTURA DE DATOS MEC
IF (NCONMEC.GT.0) THEN
   LECTURA CARACTERÍSTICAS MECÁNICAS DE LOS DOMINIOS EN ANÁLISIS
  DO 1 I=1, NDOM
      NPROBLEM(I) = 2
      READ(IRE, *)RO1(I), E1(I), XNU1(I), XI1(I)
      WRITE(IWR,*)'DOMINIO:',I
      WRITE(IWR,*)'RO:',RO1(I),'E:',E1(I)
      WRITE(IWR,*)'XNU:',XNU1(I),'XI:',XI1(I)
1 CONTINUE
  DO 10 I=1, NDOM
      G1(I) = E1(I) / (2.*(1.+XNU1(I)))
      GE1(I) = DCMPLX(G1(I),G1(I)*2.*XI1(I))
      CS1(I)=CDSQRT(GE1(I)/RO1(I))
      CP1(I)=CS1(I)*DSQRT((2.-2.*XNU1(I))/(1.-2.*XNU1(I)))
      LAMDA(I) = 2.*GE1(I)*XNU1(I)/(1.-2.*XNU1(I))
10 CONTINUE
    CONTORNOS QUE DELIMITAN CADA DOMINIO EN ANÁLISIS
    NOTA: EL SIGNO DE CADA CADA CONTORNO INDICA EL SENTIDO DE SU
           NORMAL EXTERIOR EN REFERENCIA A LA NUMERACIÓN ADOPTADA.
    DO 2 I=1, NDOM
      READ(IRE, *)NCON(I), (NCON1(I, J), J=1, NCON(I))
 2 CONTINUE
    CARACTERIZACIÓN DE CADA CONTORNO
               NUDO INICIAL CONTORNO EN ESTUDIO
    NF(I)
              NUDO FINAL CONTORNO EN ESTUDIO
    KODE(I)=0 MOVIMIENTO CONOCIDO
    KODE(I)=1 TENSIÓN CONOCIDO
   WRITE(IWR, *) 'CONDICIONES DE CONTORNO:'
   DO 12 I=1, NCONMEC
     READ(IRE,*) ICONT(I),NI(I),NF(I),TIPOCON(I),NACOPLA(I)
     IF(ICONT(I).EQ.2) THEN
       READ(IRE,*)KODEX(I),UX(I),TX(I),KODEY(I),UY(I),TY(I)
       WRITE(IWR,*)'N° DE CONTORNO:',I
       WRITE(IWR,*)'ICONT:',ICONT(I),'TIPOCON:',TIPOCON(I)
       WRITE(IWR,*)'NODO INICIAL:',NI(I)
       WRITE(IWR,*)'NODO FINAL:',NF(I)
       WRITE(IWR,*)'KODE:',KODE(I)
       WRITE(IWR,*)'NODO DE ACOPLAMIENTO:',NACOPLA(I)
       WRITE(IWR,*)'KODEX:',KODEX(I)
       WRITE(IWR,*)'UX:',UX(I),'TX:',TX(I)
       WRITE(IWR,*)'KODEY:',KODEY(I)
       WRITE(IWR,*)'UY:',UY(I),'TY:',TY(I)
       NCODIGO(I)=3
      END IF
      IF(ICONT(I).EQ.1)READ(IRE,*)KODE(I),P(I),DP(I)
 12 CONTINUE
      DO 13 I=1, NCONMEC
        READ(IRE,*)JDOM1(I),JDOM2(I)
 13 CONTINUE
      DO 15 I=1, NCONMEC
      READ(IRE,*) X(NI(I)),Y(NI(I)),X(NF(I)),Y(NF(I))
      WRITE(IWR,*)'CONTORNO:',I
      WRITE(IWR,*)'X(NI):',X(NI(I)),'Y(NI):',Y(NI(I))
```

```
WRITE(IWR,*)'X(NF):',X(NF(I)),'Y(NF):',Y(NF(I))
 15
      CONTINUE
* A PARTIR DE LAS COORDENADAS DE LOS NODOS INICIAL Y FINAL DE
* CADA CONTORNO, CALCULAMOS LAS COORDENADAS DEL RESTO DE NODOS
* SUPONIENDO UNA LÍNEA RECTA.
      DO 30 I=1, NCONMEC
        DELTAY=Y(NF(I))-Y(NI(I))
        DELTAX=X(NF(I))-X(NI(I))
        IF(ABS(DELTAX).GT.ABS(DELTAY)) THEN
          DX=DELTAX/(NF(I)-NI(I))
          DO 20 J=NI(I)+1,NF(I)-1
            X(J) = X(J-1) + DX
            Y(J)=Y(NI(I))+DELTAY*(X(J)-X(NI(I)))/DELTAX
 20
           CONTINUE
        ELSE
          DY=DELTAY/(NF(I)-NI(I))
          DO 25 J=NI(I)+1,NF(I)-1
             Y(J) = Y(J-1) + DY
             X(J)=X(NI(I))+DELTAX*(Y(J)-Y(NI(I)))/DELTAY
 25
           CONTINUE
        END IF
 30
        CONTINUE
        READ(IRE, *)ONDAINCI
        WRITE(IWR,*)'TIPO DE ONDA INCIDENTE: ',ONDAINCI
         IF (ONDAINCI.NE.'N') THEN
          READ(IRE,*)ANGUINCI
          WRITE(IWR,*)'ÁNGULO DE LA ONDA INCIDENTE=',ANGUINCI
        END IF
      END IF
       WRITE(IWR, 101)
 100 FORMAT(/)
 101 FORMAT(//,2X,"FIN DE LECTURA DE DATOS",//)
2001 FORMAT (6X,A50)
2003 FORMAT (1X, I4, 3E8.2)
2004 FORMAT (1X,4I4,E12.2,3E8.2)
2005 FORMAT (2X, "NODO DE APOYO", 14, ": ", 14)
2007 FORMAT (" NODO FX
                            FY
                                    M")
2008 FORMAT (" BARRA I J ITIPOBARRA E AREA INERCIA MDIST")
     END
```

A continuación se presenta el texto de un archivo de datos a modo de ejemplo. Este archivo, concretamente, corresponde al ejemplo estudiado en el tercer apartado del capítulo 8.

```
1,155,2,31,122,155,1,3
0.1
1
0
0.0,3.0,E
0.0,0.0,M
1
-150.,-150.,0.0
0.0,0.0,0.0
1,2,2,2.0E10,0.0156,0.92E-3,0.0
0.0,0.0
```

```
1425.,90.09E6,0.4,0.0
3,1,2,3
2,3,63,S,0
1,(0.0,0.0),(0.0,0.0),1,(0.0,0.0),(0.0,0.0)
2,64,94,A,2
1,(0.0,0.0),(0.0,0.0),1,(0.0,0.0),(0.0,0.0)
2,95,155,S,0
1,(0.0,0.0),(0.0,0.0),1,(0.0,0.0),(0.0,0.0)
6.0,0.0,1.0,0.0
1.0,0.0,-1.0,0.0
```

El significado de cada uno de los parámetros puede extraerse con facilidad del código y del diagrama de flujo, pero a continuación se nombran los datos que deben aparecer en las distintas líneas del fichero:

- número de frecuencias a analizar, número total de nodos del sistema, número de nodos pertenecientes a la estructura de barras, número de nodos en contornos de acoplamiento, número de nodos en contornos estandar, número del nodo con numeración más alta, número de dominios y número de contornos
- Serie de frecuencias a analizar.
- Se indica se se desea o no homogeneizar el sistema de ecuaciones antes de su resolución (valores 1 o 0 respectivamente)
- Se indica si se desean o no obtener los esfuerzos en barras (valores 1 o 0 respectivamente)
- Descripción de los nodos de la estructura de barras (tantas líneas como nodos) mediante sus coordenadas *x* e *y* seguidas de una letra que indica su naturaleza según la leyenda siguiente:
 - o A, nodo articulado no de apoyo
 - o E, nodo no articulado no de apoyo
 - o M, nodo de acoplamiento MEF-MEC
 - o F, apoyo empotrado fijo.
- Número de barras en la estructura
- Fuerzas exteriores sobre cada uno de los nodos de la estructura: F_x , F_y y M (tantas líneas como nodos)
- Definición de cada una de las barras de la estructura: nodo inicial, nodo final, tipo de barra, módulo de elasticidad del material, área de la sección, inercia

de la sección y masa distribuida. (tantas líneas como barras) El tipo de barra se especifica según la siguiente leyenda:

- o 1: Barra biarticulada
- o 2: Barra biempotrada
- o 3: Barra empotrada articulada
- o 4: Barra articulada empotrada
- Valores de los coeficientes α_i para el cálculo de la matriz de amortiguamiento
- Indicación de si existen o no apoyos con un cierto desplazamiento diferencial (valores 1 o 0 respectivamente). En caso de haberlos, en la siguiente línea se indica cuántos hay y en las sucesivas el número y desplazamiento diferencial de cada uno de ellos
- Indicación de si existen o no masas puntuales en la estructura (valores 1 o 0 respectivamente). En caso de haberlas, en la siguiente línea se indica cuántas hay y en las sucesivas el nodo sobre el que están y el valor de cada una de ellas
- Densidad, módulo elástico, coeficiente de Poisson y coeficiente de amortiguamiento para cada dominio en estudio.
- Número de contornos y denominación de cada uno de ellos (positiva si el material se deja a la izquierda y negativa si se deja a la derecha).
- Para cada contorno: su tipo (siempre de valor '2'), nodo inicial, nodo final, tipo de contorno y, en su caso, nodo de la estructura con el que está acoplado. El tipo de contorno se caracteriza con una 'S' en caso de un contorno estandar, y con una 'A' en caso de un contorno de acoplamiento.
- Para cada contorno, a continuación de la linea anterior se especifican las condiciones de contorno estableciendo en cada eje (x e y), según sean de desplazamiento conocido (valor 0) o tensión conocida (valor 1), y luego su valor (el primero es desplazamientos y el segundo tensiones)
- Coordenadas *x* e *y* de los nodos inicial y final de cada contorno (tantas lineas como contornos)
- Descripción del tipo de onda incidente (si la hay)
 - o P: Onda tipo P
 - S: Onda tipo SV

- o N: No existe onda incidente.
- En su caso, ángulo de inclinación de la onda incidente respecto de la vertical.

Un aspecto muy importante a tener en cuenta en el momento de numerar los nodos de los contornos que delimitan los dominios en estudio es el sentido de la misma, puesto que el algoritmo interpreta que el material se encuentra a la izquierda del contorno cuando lo recorremos en sentido creciente por su numeración. En caso que por alguna razón la numeración sea realizada dejando el material a la derecha, el contorno deberá ser identificado con su número con signo negativo.

7.4. SUBRUTINA DE MAPEO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES.

Con el objetivo de localizar y colocar cada elemento de la matriz del sistema según el esquema expuesto en el capítulo 5 de forma rápida y eficaz, se ha optado por realizar al principio de la ejecución del programa un mapeo de la misma, de manera que se almacene en una serie de vectores la información necesaria, quedando ésta a disposición de cualquier otra subrutina para evitar cálculos repetitivos. Estos vectores, con tantas filas como nodos, se encuentran en la matriz NPOS, cuyas tres columnas almacenan la fila de la matriz que le corresponde, la posición de la incógnita asociada al nodo dentro del vector de incógnitas y el número de posiciones que ocupa, que es de 2 excepto en el caso de tratarse de un nodo M.E.F. de empotramiento.

Una de las consecuencias de realizar un mapeo de antemano es la facilidad que ofrece para montar las distintas submatrices de las matrices K, H, G, C, D y HD a medida que van siendo calculadas en lugar de mantenerlas enteras en memoria, lo cual permite no utilizar una cantidad excesivamente grande de la misma.

El mapeo se realiza asignando una posición a los nodos M.E.F. en primer lugar, según necesiten de 2 o de 3 grados de libertad. A partir de ahí se obtienen las posiciones a partir de las cuales se debe comenzar a colocar los siguientes grupos. Sumando dos veces el número de nodos en contornos estandar se obtiene la fila a partir de la cual se situarán las submatrices *HD*, *G* y *A* correspondientes a nodos de contronos de acoplamiento; sumando dos veces el número de nodos en contornos de acoplamiento se obtiene la columna a partir de la cual se situarán las matrices *A* correspondientes a

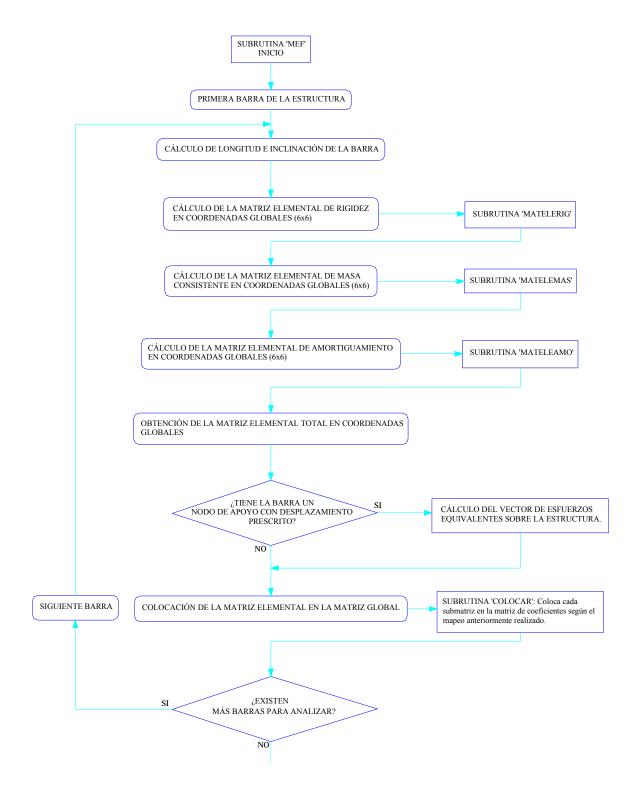
nodos de acoplamiento. A partir de estos datos se continúan posicionando el resto de los nodos pertenecientes a dominios M.E.C.

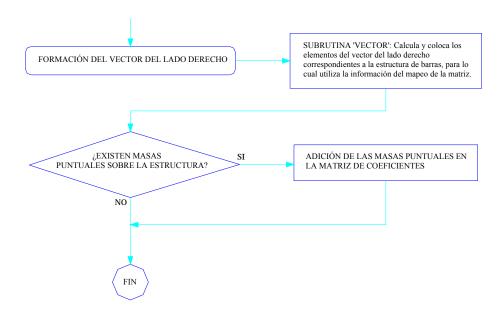
```
SUBROUTINE MAPEO
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  INCLUDE 'ACOPLA15.DATOS'
  INTEGER CONT, I, J, CO
  INTEGER NK2F, NK2C, NK3F, NK4C
  IRE=5
  IWR=6
  CONT=1
  NK1 = 1
  DO 5 I=1,NNMA
    DO 4 J=1,3
     NPOS(I,J)=0
4 CONTINUE
5 CONTINUE
  IF (NMEF.GT.0) THEN
    * MAPEO DE LAS FILAS CORRESPONDIENTES A LAS SUBMATRICES MEF
    DO 10 I=1,NMEF
      IF ((TIPO(I).NE.'M').AND.(TIPO(I).NE.'F')) THEN
        NPOS(I,1)=CONT
        NPOS(I,2) = CONT
        IF (TIPO(I).EQ.'A') THEN
           NPOS(I,3)=2
           CONT=CONT+2
        ELSE
           NPOS(I,3)=3
           CONT=CONT+3
        END IF
      END IF
   CONTINUE
10
     NK1=CONT
     DO 15 I=1,NMEF
     IF (TIPO(I).EQ.'M') THEN
       NPOS(I,1)=CONT
       NPOS(I,2) = CONT
       NPOS(I,3)=3
       CONT=CONT+3
     END IF
    CONTINUE
  END IF
  NK2=CONT
  NK3=CONT+2*NNCS
  NK4=CONT+2*NNCA
  * DIMENSIÓN TOTAL DE LA MATRIZ:
  NDIMPP=CONT+2*(NNCS+NNCA)-1
  IF (NCONMEC.GT.0) THEN
  * MAPEO DEL RESTO DE SUBMATRICES
    NK2F=NK2
    NK2C=NK2
    NK3F=NK3
    NK4C=NK4
```

```
DO 20 CO=1, NCONMEC
        IF (TIPOCON(CO).EQ.'S') THEN
          DO 18 I=NI(CO),NF(CO)
            NPOS(I,1)=NK2F
            NPOS(I,2)=NK4C
            \mathtt{NPOS}\,(\,\mathtt{I}\,,3\,)\,{=}\,2
            NK2F=NK2F+2
            NK4C=NK4C+2
18
         CONTINUE
        ELSE
          DO 19 I=NI(CO),NF(CO)
               NPOS(I,1)=NK3F
               NPOS(I,2)=NK2C
               \texttt{NPOS}(\texttt{I},\texttt{3}) = 2
               NK3F=NK3F+2
               NK2C=NK2C+2
19
          CONTINUE
         END IF
20
     CONTINUE
     END IF
     END
```

7.5. SUBRUTINA PRINCIPAL DE LOS CÁLCULOS DEL M.E.F.

Esta rutina realiza el cálculo y montaje de las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento, así como del vector del lado derecho. Para ello realiza llamadas a diversas subrutinas que serán expuestas en apartados sucesivos.





SUBROUTINE MEF(FR, PP, F) IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z) INCLUDE 'ACOPLA15.DATOS' COMPLEX*16 PP(2*NMNMEC+3*NMNMEF,2*NMNMEC+3*NMNMEF) COMPLEX*16 F(2*NMNMEC+3*NMNMEF) COMPLEX*16 SK(6,6) REAL*8 SKR(6,6),SKM(6,6),SKC(6,6) REAL*8 LONGIT, ALFA, A, B INTEGER KNBCAD, NINI, NFIN KNBCAD=1 DO JJ=1,3*NMEF FBCAD(JJ) = (0.0D0, 0.0D0)DO I=1,NBARRAS A=X(NODOINICIAL(I))-X(NODOFINAL(I)) B=Y(NODOINICIAL(I))-Y(NODOFINAL(I)) LONGIT=SQRT(A*A+B*B) IF(LONGIT.LT.0.1E-10) THEN WRITE(IWR,*)'ERROR - LONGIT<0'</pre> STOP END IF IF (ABS(A).LT.(0.1E-10)) THEN IF (B.LT.O.) THEN ALFA=90.0D0 ELSE ALFA=-90.0D0 END IF ELSE IF (ABS(B).LT.(0.1E-10)) THEN IF (A.LT.O.) THEN ALFA=0.0D0 ELSE ALFA=180.0D0 END IF ELSE ALFA=ATAND(B/A) IF(A.GT.0.) ALFA=ALFA+180. END IF

```
* PRIMERO CALCULAMOS LA SUBMATRIZ DE RIGIDEZ
     CALL MATELERIG(LONGIT, ALFA, I, SKR)
   * A CONTINUACIÓN CALCULAMOS LA SUBMATRIZ DE MASA
     CALL MATELEMAS(LONGIT,ALFA,I,SKM)
   * EN TERCER LUGAR CALCULAMOS LA SUBMATRIZ DE AMORTIGÜAMIENTO
     CALL MATELEAMO (SKR, SKM, SKC)
   * AHORA FORMAMOS LA MATRIZ ELEMENTAL TOTAL
     DO J=1,6
       DO JJ=1,6
         SK(J,JJ) = (1.,0.)*(SKR(J,JJ)-FR*FR*SKM(J,JJ))+(0.,1.)*SKC(J,JJ)
       END DO
     END DO
   * SI EN ESTA BARRA HAY UN NUDO DE APOYO QUE TIENE COMO CONDICION
   * DE CONTORNO UN DESPLAZAMIENTO PRESCRITO, CALCULAMOS AQUÍ EL VECTOR
   * EQUIVALENTE QUE HAY QUE AÑADIR EN EL VECTOR DEL LADO DERECHO, SEGÚN
   * LA ECUACIÓN: (KII-W2*M)UI=-KIA*UA (DONDE A SON LOS NODOS DE APOYO
   * E I SON EL RESTO DE NODOS DE LA ESTRUCTURA
     IF (APOYDESP.EQ.1) THEN
       IF (I.EQ.BCAD(KNBCAD)) THEN
         NINI=NODOINICIAL(I)
         NFIN=NODOFINAL(I)
            IF (TIPO(NINI).EQ.'F') THEN
              DO J=1,3
                DO JJ=1,3
                   KKK=NPOS(NFIN,2)+J-1
                   FBCAD(KKK) = FBCAD(KKK) - SKR(J+3,JJ)*UBCAD(KNBCAD,JJ)
              END DO
            ELSE IF (TIPO(NFIN).EQ.'F') THEN
              DO J=1,3
                DO JJ=1.3
                   KKK=NPOS(NINI,2)+J-1
                  FBCAD(KKK)=FBCAD(KKK)-SKR(J,JJ+3)*UBCAD(KNBCAD,JJ)
                END DO
              END DO
            ELSE
                 WRITE(IWR,*)'ERROR POR APOYOS CON DESPLAZAMIENTO'
            END IF
            KNBCAD=KNBCAD+1
       END IF
     END IF
   * POR ÚLTIMO COLOCAMOS EN LA MATRIZ GLOBAL PP
     CALL COLOCAR(PP,SK,I)
   END DO
         COLOCAMOS EN EL VECTOR INDEPENDIENTE
   CALL VECTOR(F)
         COLOCAMOS LAS MASAS PUNTUALES QUE HAYA EN LA ESTRUCTURA
   IF (MASAPUNT.EQ.1) THEN
     DO KKK=1,NMASAS
          KMPOS=NPOS(NODMASPU(KKK),1)
          PP(KMPOS,KMPOS)=PP(KMPOS,KMPOS)-FR*FR*VMASAPUN(KKK)
          PP(KMPOS+1,KMPOS+1)=PP(KMPOS+1,KMPOS+1)-FR*FR*VMASAPUN(KKK)
     END DO
   END IF
101 FORMAT(E15.8,\)
   END
```

7.6. SUBRUTINA PARA EL CÁLCULO DE LAS SUBMATRICES DE RIGIDEZ

Esta subrutina se encarga del cálculo de la submatriz de rigidez correspondiente a cada barra. Tiene la posibilidad de obtenerlas según sea cada extremo empotrado o articulado.

```
SUBROUTINE MATELERIG(LON, ALFA, NB, SK)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INCLUDE 'ACOPLA15.DATOS'
REAL*8 SK(6,6)
REAL*8 LON, ALFA, COSENO, SENO, AA, BB
REAL*8 C(6)
REAL*8 LON3, PRO
INTEGER I, J, NB
COSENO=COSD (ALFA)
SENO=SIND(ALFA)
IF (ABS(COSENO).LT.0.1E-10) COSENO=0.0D0
IF (ABS(SENO).LT.0.1E-10) SENO=0.0D0
LON3=LON*LON*LON
    SEGÚN SEA LA BARRA, ELEGIMOS
SELECT CASE (ITIPOBARRA(NB))
  CASE (1)
   BARRA ARTICULADA-ARTICULADA
      AA=E(NB)*AREA(NB)/LON
       SK(1,1)=AA*COSENO*COSENO
      SK(2,1)=AA*COSENO*SENO
       SK(3,1)=0.
       SK(4,1) = -AA*COSENO*COSENO
      SK(5,1) = -AA*COSENO*SENO
      SK(6,1)=0.
      SK(2,2) = AA*SENO*SENO
      SK(3,2)=0.
       SK(4,2) = -AA*COSENO*SENO
      SK(5,2) = -AA*SENO*SENO
      SK(6,2)=0.
       SK(3,3)=0.
      SK(4,3)=0.
       SK(5,3)=0.
      SK(6,3)=0.
      SK(4,4)=AA*COSENO*COSENO
      SK(5,4)=AA*COSENO*SENO
      SK(6,4)=0.
       SK(5,5) = AA*SENO*SENO
       SK(6,5)=0.
      SK(6,6)=0.
  CASE (2)
      BARRA EMPOTRADA-EMPOTRADA
      AA = (12.*E(NB)*INERCIA(NB))/(LON3)
      BB=(E(NB)*AREA(NB))/LON
      C(1)=BB*COSENO*COSENO+AA*SENO*SENO
```

```
C(2)=BB*SENO*SENO+AA*COSENO*COSENO
     C(3) = (4.*E(NB)*INERCIA(NB))/LON
     C(4) = (BB-AA) *COSENO*SENO
     C(5) = (6.*E(NB)*INERCIA(NB)*COSENO)/(LON*LON)
     C(6) = -(6.*E(NB)*INERCIA(NB)*SENO)/(LON*LON)
     SK(1,1)=C(1)
     SK(2,1)=C(4)
     SK(3,1)=C(6)
     SK(4,1) = -C(1)
     SK(5,1) = -C(4)
     SK(6,1)=C(6)
     SK(2,2) = C(2)
     SK(3,2) = C(5)
     SK(4,2) = -C(4)
     SK(5,2) = -C(2)
     SK(6,2)=C(5)
     SK(3,3)=C(3)
     SK(4,3) = -C(6)
     SK(5,3) = -C(5)
     SK(6,3)=C(3)/2.
     SK(4,4) = C(1)
     SK(5,4) = C(4)
     SK(6,4) = -C(6)
     SK(5,5)=C(2)
     SK(6,5) = -C(5)
     SK(6,6)=C(3)
CASE (3)
   BARRA EMPOTRADA-ARTICULADA
     PRO=3.0*E(NB)*INERCIA(NB)
     AA=PRO/LON3
     BB=(E(NB)*AREA(NB))/LON
     C(1)=BB*COSENO*COSENO+AA*SENO*SENO
     C(2)=BB*SENO*SENO+AA*COSENO*COSENO
     C(3)=PRO/LON
     C(4) = (BB-AA) *COSENO*SENO
     C(5) = (PRO*COSENO) / (LON*LON)
     C(6) = -(PRO*SENO)/(LON*LON)
     SK(1,1) = C(1)
     SK(2,1) = C(4)
     SK(3,1)=C(6)
     SK(4,1) = -C(1)
     SK(5,1) = -C(4)
     SK(6,1)=0.
     SK(2,2)=C(2)
     SK(3,2)=C(5)
     SK(4,2) = -C(4)
     SK(5,2) = -C(2)
     SK(6,2)=0.
     SK(3,3)=C(3)
     SK(4,3) = -C(6)
     SK(5,3) = -C(5)
     SK(6,3)=0.
     SK(4,4)=C(1)
     SK(5,4)=C(4)
     SK(6,4)=0.
     SK(5,5)=C(2)
     SK(6,5)=0.
     SK(6,6)=0.
CASE (4)
    BARRA ARTICULADA-EMPOTRADA
```

```
AA=(3.*E(NB)*INERCIA(NB))/(LON3)
          BB=(E(NB)*AREA(NB))/LON
          C(1)=BB*COSENO*COSENO+AA*SENO*SENO
          C(2)=BB*SENO*SENO+AA*COSENO*COSENO
          C(3)=(3.*E(NB)*INERCIA(NB))/LON
          C(4) = (BB-AA) *COSENO*SENO
          C(5) = (3.*E(NB)*INERCIA(NB)*COSENO)/(LON*LON)
          C(6) = -(3.*E(NB)*INERCIA(NB)*SENO)/(LON*LON)
          SK(1,1)=C(1)
          SK(2,1)=C(4)
          SK(3,1)=0.
          SK(4,1) = -C(1)
          SK(5,1) = -C(4)
          SK(6,1)=C(6)
          SK(2,2)=C(2)
          SK(3,2)=0.
          SK(4,2) = -C(4)
          SK(5,2) = -C(2)
          SK(6,2)=C(5)
          SK(3,3)=0.
          SK(4,3)=0.
          SK(5,3)=0.
          SK(6,3)=0.
          SK(4,4) = C(1)
          SK(5,4) = C(4)
          SK(6,4) = -C(6)
          SK(5,5)=C(2)
          SK(6,5) = -C(5)
          SK(6,6)=C(3)
     CASE DEFAULT
          WRITE(IWR, 100)
          STOP
     END SELECT
        RELLENAMOS LA PARTE SIMÉTRICA
   DO I = 2.6
     DO J=1, (I-1)
       SK(J,I)=SK(I,J)
     END DO
   END DO
100 FORMAT (3X,/,"!!!ERROR EN MATELERIG")
```

7.7. SUBRUTINA PARA EL CÁLCULO DE LAS SUBMATRICES DE MASA.

Esta subrutina se encarga del cálculo de la submatriz de masa correspondiente a cada barra. Al igual que en el caso anterior, tiene la posibilidad de obtenerlas según sea cada extremo empotrado o articulado.

```
*----*
SUBROUTINE MATELEMAS(LON,ALFA,NB,SK)

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INCLUDE 'ACOPLA15.DATOS'
REAL*8 SK(6,6)
REAL*8 LON,ALFA,COSENO,SENO,AA
```

```
INTEGER I, J, NB
COSENO=COSD(ALFA)
SENO=SIND(ALFA)
IF (ABS(COSENO).LT.0.1E-10) COSENO=0.0D0
IF (ABS(SENO).LT.0.1E-10) SENO=0.0D0
    SEGÚN SEA LA BARRA, ELEGIMOS
SELECT CASE (ITIPOBARRA(NB))
 CASE (1)
   BARRA ARTICULADA-ARTICULADA
      AA=MDISTR(NB)*LON/6.
       SK(1,1) = AA*COSENO*COSENO*2.
      SK(2,1) = AA*COSENO*SENO*2.
       SK(3,1)=0.
      SK(4,1)=AA*COSENO*COSENO
      SK(5,1)=AA*COSENO*SENO
       SK(6,1)=0.
      SK(2,2) = AA*SENO*SENO*2.
       SK(3,2)=0.
       SK(4,2)=AA*COSENO*SENO
      SK(5,2) = AA*SENO*SENO
      SK(6,2)=0.
      SK(3,3)=0.
      SK(4,3)=0.
       SK(5,3)=0.
      SK(6,3)=0.
      SK(4,4) = AA*COSENO*COSENO*2.
      SK(5,4) = AA*COSENO*SENO*2.
      SK(6,4)=0.
       SK(5,5) = AA*SENO*SENO*2.
      SK(6,5)=0.
      SK(6,6)=0.
  CASE (2)
      BARRA EMPOTRADA-EMPOTRADA
      AA=MDISTR(NB)*LON/420.
      SK(1,1)=AA*(140.*COSENO*COSENO+156.*SENO*SENO)
       SK(2,1) = -AA*16.*COSENO*SENO
       SK(3,1) = -AA*22.*LON*SENO
       SK(4,1) = AA*(70.*COSENO*COSENO+54.*SENO*SENO)
      SK(5,1) = AA*16.*COSENO*SENO
       SK(6,1) = AA*13.*LON*SENO
       SK(2,2)=AA*(140.*SENO*SENO+156.*COSENO*COSENO)
       SK(3,2) = AA*22.*LON*COSENO
       SK(4,2) = AA*16.*COSENO*SENO
      SK(5,2) = AA*(70.*SENO*SENO+54.*COSENO*COSENO)
       SK(6,2) = -AA*13.*LON*COSENO
       SK(3,3) = AA*4.*LON*LON
       SK(4,3) = -AA*13.*LON*SENO
       SK(5,3) = AA*13.*LON*COSENO
      SK(6,3) = -AA*3.*LON*LON
       SK(4,4)=AA*(140.*COSENO*COSENO+156.*SENO*SENO)
       SK(5,4) = -AA*16.*COSENO*SENO
       SK(6,4) = AA*22.*LON*SENO
       SK(5,5)=AA*(140.*SENO*SENO+156.*COSENO*COSENO)
      SK(6,5) = -AA*22.*LON*COSENO
      SK(6,6) = AA*4.*LON*LON
 CASE (3)
     BARRA EMPOTRADA-ARTICULADA
```

```
AA=MDISTR(NB)*LON/420.
           SK(1,1)=AA*(140.*COSENO*COSENO+204.*SENO*SENO)
           SK(2,1) = AA*(-64.)*COSENO*SENO
           SK(3,1) = AA*(-36.)*LON*SENO
           SK(4,1)=AA*(70.*COSENO*COSENO+58.5*SENO*SENO)
           SK(5,1) = AA*11.5*COSENO*SENO
           SK(6,1)=0.
           SK(2,2)=AA*(140.*SENO*SENO+204.*COSENO*COSENO)
           SK(3,2) = AA*36.*LON*COSENO
           SK(4,2) = AA*11.5*COSENO*SENO
           SK(5,2)=AA*(70.*SENO*SENO+58.5*COSENO*COSENO)
           SK(6,2)=0.
           SK(3,3) = AA*8.*LON*LON
           SK(4,3) = AA*(-16.5)*LON*SENO
           SK(5,3) = AA*16.5*LON*COSENO
           SK(6,3)=0.
           SK(4,4)=AA*(140.*COSENO*COSENO+99.*SENO*SENO)
           SK(5,4) = AA*41.*COSENO*SENO
           SK(6,4)=0.
           SK(5,5) = AA*(140.*SENO*SENO+99.*COSENO*COSENO)
           SK(6,5)=0.
           SK(6,6)=0.
      CASE (4)
           BARRA ARTICULADA-EMPOTRADA
           AA=MDISTR(NB)*LON/420.
           SK(1,1)=AA*(140.*COSENO*COSENO+99.*SENO*SENO)
           SK(2,1) = AA*41.*COSENO*SENO
           SK(3,1)=0.
           SK(4,1)=AA*(70.*COSENO*COSENO+58.5*SENO*SENO)
           SK(5,1) = AA*11.5*COSENO*SENO
           SK(6,1) = AA*16.5*LON*SENO
           SK(2,2)=AA*(140.*SENO*SENO+99.*COSENO*COSENO)
           SK(3,2)=0.
           SK(4,2) = AA*11.5*COSENO*SENO
           SK(5,2) = AA*(70.*SENO*SENO+58.5*COSENO*COSENO)
           SK(6,2) = AA*(-16.5)*LON*COSENO
           SK(3,3)=0.
           SK(4,3)=0.
           SK(5,3)=0.
           SK(6,3)=0.
           SK(4,4)=AA*(140.*COSENO*COSENO+204.*SENO*SENO)
           SK(5,4) = AA*(-64.)*COSENO*SENO
           SK(6,4) = AA*36.*LON*SENO
           SK(5,5)=AA*(140.*SENO*SENO+204.*COSENO*COSENO)
           SK(6,5) = AA*(-36.)*LON*COSENO
           SK(6,6) = AA*8.*LON*LON
       CASE DEFAULT
           WRITE(IWR, 100)
           STOP
       END SELECT
         RELLENAMOS LA PARTE SIMÉTRICA
    DO I = 2, 6
      DO J=1, (I-1)
        SK(J,I)=SK(I,J)
      END DO
    END DO
100 FORMAT (3X,/,"!!!ERROR EN MATELEMAS")
    END
```

CÁLCULO DE SUBRUTINA PARA EL LAS **SUBMATRICES** AMORTIGUAMIENTO.

Esta subrutina realiza el cálculo de la submatriz de amortiguamiento como una combinación lineal de las submatrices de rigidez y de masa a través de los coeficientes $\alpha_1 y \alpha_2$.

```
SUBROUTINE MATELEAMO(SKR,SKM,SKC)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INCLUDE 'ACOPLA15.DATOS'
REAL*8 SKR(6,6),SKM(6,6),SKC(6,6)
DO I=1,6
  DO J=1,6
   SKC(I,J) = COEF1*SKR(I,J) + COEF2*SKM(I,J)
  END DO
END DO
END
```

7.9. SUBRUTINA PARA EL MONTAJE DE LAS SUBMATRICES M.E.F. EN LA MATRIZ DEL SISTEMA.

Esta subrutina coloca cada submatriz del Método de los Elementos Finitos, de dimensión 6x6, a partir de la información contenida en la matriz de mapeo NPOS, considerando cada submatriz como formada por 4 submatrices de dimensión 3x3, asociada cada una a un nodo determinado, y colocándolas en su posición.

```
*_____
 SUBROUTINE COLOCAR (PP, SK, NBAR)
 IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
 INCLUDE 'ACOPLA15.DATOS'
 COMPLEX*16 PP(2*NMNMEC+3*NMNMEF,2*NMNMEC+3*NMNMEF)
 COMPLEX*16 SK(6,6)
 NINI=NODOINICIAL (NBAR)
 NFIN=NODOFINAL(NBAR)
 IF ((TIPO(NINI).NE.'F').AND.(TIPO(NFIN).NE.'F')) THEN
   DO 2 I=1,NPOS(NINI,3)
    DO 1 J=1, NPOS(NINI, 3)
       II=NPOS(NINI,1)+I-1
       JJ=NPOS(NINI,2)+J-1
       PP(II,JJ)=PP(II,JJ)+SK(I,J)
    CONTINUE
2 CONTINUE
   DO 4 I=1,NPOS(NINI,3)
```

1

```
DO 3 J=1,NPOS(NFIN,3)
         II=NPOS(NINI,1)+I-1
         JJ=NPOS(NFIN,2)+J-1
         PP(II,JJ)=PP(II,JJ)+SK(I,J+3)
 3
       CONTINUE
    CONTINUE
    DO 6 I=1,NPOS(NFIN,3)
      DO 5 J=1,NPOS(NINI,3)
         II=NPOS(NFIN,1)+I-1
         JJ=NPOS(NINI,2)+J-1
         PP(II,JJ)=PP(II,JJ)+SK(I+3,J)
 5
       CONTINUE
     CONTINUE
     DO 8 I=1,NPOS(NFIN,3)
      DO 7 J=1,NPOS(NFIN,3)
         II=NPOS(NFIN,1)+I-1
         JJ=NPOS(NFIN,2)+J-1
         PP(II,JJ)=PP(II,JJ)+SK(I+3,J+3)
       CONTINUE
      CONTINUE
  ELSE IF (TIPO(NINI).EQ.'F') THEN
    DO 10 I=1,NPOS(NFIN,3)
      DO 9 J=1,NPOS(NFIN,3)
         II=NPOS(NFIN,1)+I-1
         JJ=NPOS(NFIN,2)+J-1
         PP(II,JJ) = PP(II,JJ) + SK(I+3,J+3)
 9
       CONTINUE
10 CONTINUE
  ELSE IF (TIPO(NFIN).EQ.'F') THEN
    DO 12 I=1,NPOS(NINI,3)
      DO 11 J=1,NPOS(NINI,3)
         II=NPOS(NINI,1)+I-1
         JJ=NPOS(NINI,2)+J-1
         PP(II,JJ)=PP(II,JJ)+SK(I,J)
11
       CONTINUE
    CONTINUE
  ELSE
    WRITE(IWR, *)'ERROR EN COLOCAR'
    STOP
  END IF
  END
```

7.10. SUBRUTINA PARA OBTENER Y CALCULAR LOS ELEMENTOS DEL VECTOR INDEPENDIENTE ASOCIADOS AL M.E.F.

Esta subrutina calcula y coloca los elementos del vector independiente asociados al Método de los Elementos Finitos. Para ello utiliza la información de mapeo contenida en la matriz *NPOS*. Coloca cada subvector de 3 elementos que recoge las cargas sobre cada nudo en concreto, sumado al vector de cargas equivalentes que surja, en su caso, debido al apoyo diferencial de algún apoyo, en la posición del vector del lado derecho reservada para el nodo en cuestión.

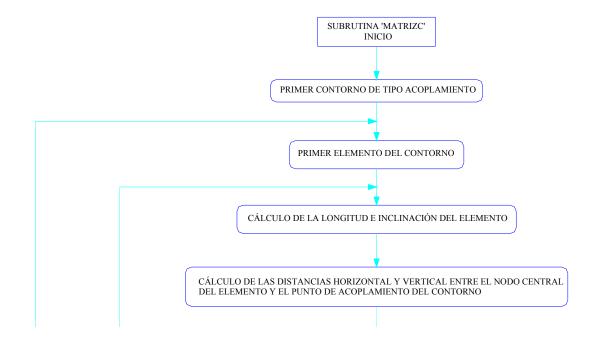
```
SUBROUTINE VECTOR(F)

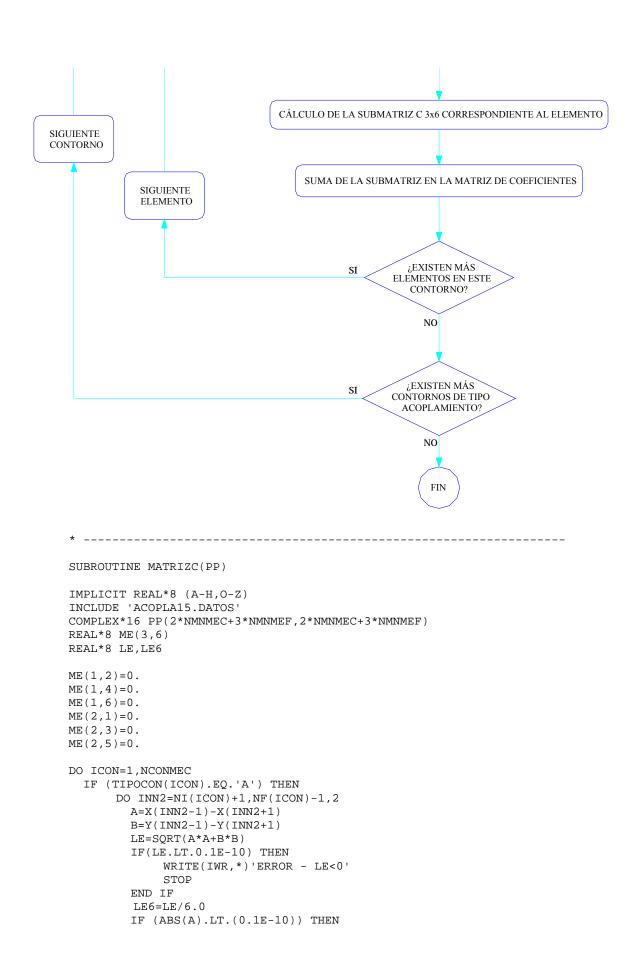
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INCLUDE 'ACOPLA15.DATOS'
COMPLEX*16 F(2*NMNMEC+3*NMNMEF)

DO I=1,NMEF
IF ((TIPO(I).NE.'F').AND.(TIPO(I).NE.'M')) THEN
DO J=1,NPOS(I,3)
F(NPOS(I,2)+J-1)=FUERZAS(J,I)+FBCAD(NPOS(I,2)+J-1)
END DO
END IF
END DO
END
```

7.11. SUBRUTINA PARA EL CÁLCULO DE LA SUBMATRIZ C.

Esta matriz se encarga del cálculo y la colocación de las submatrices C, generadas a partir del acoplamiento M.E.F.-M.E.C., tal y como fue expuesto en el tercer apartado del capítulo quinto. Cada submatriz C que se calcula para cada elemento de cada uno de los contornos de acolamiento es una matriz de dimensiones 3x6 cuyas 6 columnas representan los desplazamientos u y v de cada uno de los 3 nodos del elementos en cuestión. De este modo, cuando un contorno está formado por más de un elemento, las primeras dos columnas de la submatriz de un elementos se suman, en su caso, a las dos columnas últimas de la submatriz del elementos anterior.





```
IF (B.LT.O.) THEN
                    TITA=90.0
             ELSE
                    TITA=-90.0
             END IF
         ELSE IF (ABS(B).LT.(0.1E-10)) THEN
             IF (A.LT.O.) THEN
                    TTTA=0.
                    TITA=180.
             END IF
         ELSE
             TITA=ATAND(B/A)
         END IF
         DXE=X(INN2)-X(NACOPLA(ICON))
         DYE=Y(INN2)-Y(NACOPLA(ICON))
         SENTITA=SIND(TITA)
         COSTITA=COSD(TITA)
        ME(1,1) = LE6
        ME(1,3)=4.*LE6
        ME(1,5) = LE6
        ME(2,2) = LE6
        ME(2,4)=4.*LE6
        ME(2,6) = LE6
        ME(3,1) = LE6*(LE*SENTITA/2.-DYE)
        ME(3,2)=LE6*(DXE-LE*COSTITA/2.)
        ME(3,3) = -4.*DYE*LE6
        ME(3,4)=4.*DXE*LE6
         ME(3,5) = LE6*(-LE*SENTITA/2.-DYE)
        ME(3,6) = LE6*(DXE+LE*COSTITA/2.)
* COLOCAMOS LA MATRIZ C EN LA MATRIZ DEL SISTEMA.
        NFILA=NPOS(NACOPLA(ICON),1)
        NCOLU=NPOS (INN2-1,2)
        DO II=1.3
             DO III=1,6
      PP(NFILA+II-1,NCOLU+III-1)=PP(NFILA+II-1,NCOLU+III-1)+ME(II,III)
             END DO
        END DO
      END DO
  END IF
END DO
END
```

7.12. SUBRUTINA PARA EL CÁLCULO DE LOS CAMPOS DE TENSIONES Y DESPLAZAMIENTOS DEBIDOS A UNA ONDA INCIDENTE P O SV.

Esta subrutina es la encargada de calcular los campos de desplazamientos y tensiones que existirían sobre el contorno del dominio en estudio para el problema de un semiespacio elástico plano sometido a una onda incidente tipo 'P' o 'SV'. Esta información es utilizada posteriormente por la subrutina 'ASSEMBLE', del modo expuesto en el cuarto apartado del capítulo sexto, para introducir en el problema la excitación derivada de la existencia de dichas ondas incidentes.

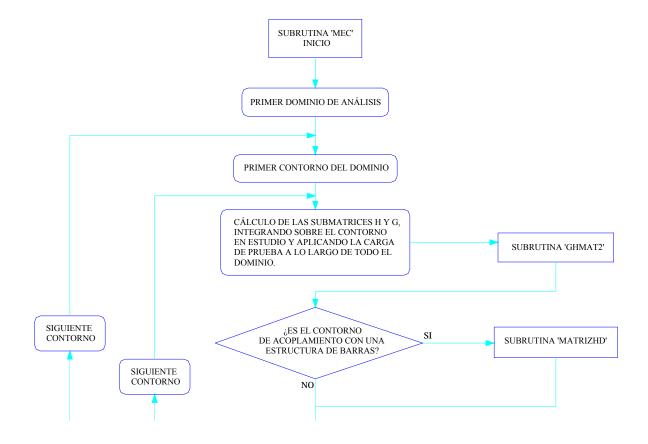
```
SUBROUTINE INCID(FR)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INCLUDE 'ACOPLA15.DATOS'
COMPLEX*16 SIGMA(2,2), EXPO(3), AUX1, AUX2
COMPLEX*16 APP, ASVP, NUM1, DEN1
REAL*8 L,M,LP,MP,LPP,MPP,NORMAL(2)
REAL*8 DENO, DX1CHI, DX2CHI, CHI
INTEGER NCHI
* CÁLCULO DE LAS COMPONENTES DEL VECTOR DIRECTOR DE LA ONDA INCIDENTE
M=DCOSD(ANGUINCI)
L=DSIND(ANGUINCI)
* CÁLCULO DE TENSIONES Y DESPLAZAMIENTO DE UN SEMIESPACIO LIBRE EN
* FUNCIÓN DE QUE SE TRATE DE ONDAS P U ONDAS SV
IF (ONDAINCI.EQ.'P') THEN
  DO 1 IDOM=1,NDOM
    DO 2 I=1, NCON(IDOM)
      I1=ABS(NCON1(IDOM,I))
      NCHT = -1
        DO 3 J=NI(I1),NF(I1)
          LPP=L*(1.-2.*XNU1(IDOM))/(2.-2.*XNU1(IDOM))
          MPP=DSQRT(1.-((1.-2.*XNU1(IDOM))/(2.-2.*XNU1(IDOM)))*L*L)
          NUM1=4.*GE1(IDOM)*L*LPP*M*MPP
          DEN1=NUM1+(MPP*MPP-LPP*LPP)*(LAMDA(IDOM)+2.*GE1(IDOM)*MPP*MPP)
          IF (DEN1.EQ.0.0) THEN
             WRITE(IWR,*)'ERROR. DEN1=0 EN INCID'
             STOP
          END IF
          APP=(2.*NUM1/DEN1)-1.
         NUM1=-4.*(LAMDA(IDOM)+2.*GE1(IDOM)*MPP*MPP)*LPP*M
          ASVP=NUM1/DEN1
         X2=Y(J)
         AUX1=DCMPLX(0.,-FR*M*X2)
          EXPO(1)=CDEXP(AUX1/CP1(IDOM))
         AUX1=DCMPLX(0.,FR*M*X2)
          EXPO(2)=CDEXP(AUX1/CP1(IDOM))
          AUX1=DCMPLX(0.,FR*MPP*X2)
          EXPO(3)=CDEXP(AUX1/CS1(IDOM))
          UIX(J)=L*EXPO(1)+L*APP*EXPO(2)+MPP*ASVP*EXPO(3)
          UIY(J)=M*EXPO(1)-M*APP*EXPO(2)+LPP*ASVP*EXPO(3)
          AUX2=DCMPLX(0.,-FR)
          AUX1=AUX2/CP1(IDOM)
          AUX2=LAMDA(IDOM)+2.*GE1(IDOM)*L*L
          SIGMA(1,1) = AUX1*(AUX2*EXPO(1)+AUX2*APP*EXPO(2)-
@2.*GE1(IDOM)*L*MPP*ASVP*EXPO(3))
          AUX2=LAMDA(IDOM)+2.*GE1(IDOM)*M*M
          SIGMA(2,2) = AUX1*(AUX2*EXPO(1)+AUX2*APP*EXPO(2)+
@2.*GE1(IDOM)*L*MPP*ASVP*EXPO(3))
         AUX2=DCMPLX(0.,-FR)
          AUX1=AUX2/CS1(IDOM)
          SIGMA(1,2) = AUX1*(2.*GE1(IDOM)*LPP*M*EXPO(1)-2.*GE1(IDOM)*
@LPP*M*APP*EXPO(2)-GE1(IDOM)*(LPP*LPP-MPP*MPP)*ASVP*EXPO(3))
          SIGMA(2,1)=SIGMA(1,2)
* CÁLCULO DE LA NORMAL PARA MULTIPLICARLA POR EL TENSOR DE TENSIONES
* Y OBTENER EL VECTOR DE TENSIONES
          CHI=REAL(NCHI,8)
          JJ=J-NCHI
         DX1CHI = (CHI - 0.5) *X(JJ - 1) - 2.*CHI *X(JJ) + (CHI + 0.5) *X(JJ + 1)
         DX2CHI = (CHI - 0.5) *Y(JJ - 1) - 2.*CHI *Y(JJ) + (CHI + 0.5) *Y(JJ + 1)
          DENO=DSQRT(DX1CHI*DX1CHI+DX2CHI*DX2CHI)
         NORMAL(1)=DX2CHI/DENO
          NORMAL(2)=-DX1CHI/DENO
          PIXY(J,1) = (0.,0.)
```

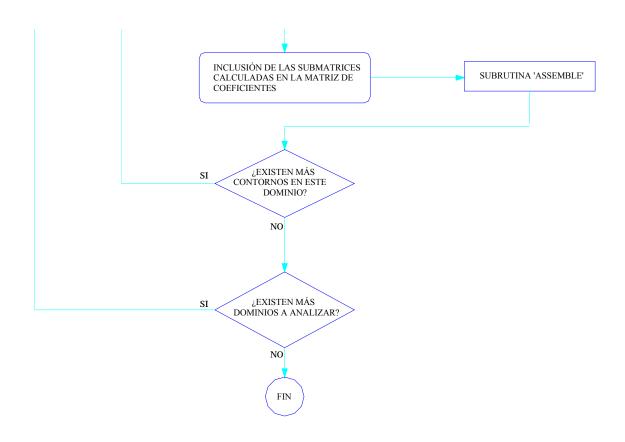
```
PIXY(J,2) = (0.,0.)
         DO K=1,2
            DO KK=1.2
             PIXY(J,K)=PIXY(J,K)+SIGMA(K,KK)*NORMAL(KK)
            END DO
          END DO
         NCHI=NCHI+1
         IF (NCHI.EQ.2) NCHI=0
3
        CONTINUE
2
       CONTINUE
1
      CONTINUE
   ELSE IF (ONDAINCI.EQ.'S') THEN
      DO 4 IDOM=1,NDOM
        DO 5 I=1, NCON(IDOM)
          I1=ABS(NCON1(IDOM,I))
          NCHI = -1
          DO 6 J=NI(I1),NF(I1)
** COMPROBACIÓN DEL ÁNGULO CRÍTICO DE INCIDENCIA
       IF ((1.-((2.-2.*XNU1(IDOM)))/(1.-2.*XNU1(IDOM)))*L*L).LT.0.0) THEN
             WRITE(IWR,*)'ANGULO MAYOR QUE EL CRÍTICO'
       END IF
         LP=L*(2.-2.*XNU1(IDOM))/(1.-2.*XNU1(IDOM))
         \texttt{MP=DSQRT(1.-((2.-2.*XNU1(IDOM))/(1.-2.*XNU1(IDOM)))*L*L)}
         NUM1=4.*GE1(IDOM)*L*LP*M*MP
          DEN1=(L*L-M*M)*(LAMDA(IDOM)+2.*GE1(IDOM)*MP*MP)-NUM1
          IF (DEN1.EQ.0.0) THEN
             WRITE(IWR,*)'ERROR. DEN1=0 EN INCID'
             STOP
         END IF
          ASVP=-(2.*NUM1/DEN1+1.)
          NUM1=4.*GE1(IDOM)*LP*M*(L*L-M*M)
         APP=NUM1/DEN1
         X2=Y(J)
         AUX1=DCMPLX(0.,-FR*M*X2)
         EXPO(1)=CDEXP(AUX1/CS1(IDOM))
          AUX1=DCMPLX(0.,FR*M*X2)
          EXPO(2)=CDEXP(AUX1/CS1(IDOM))
         AUX1=DCMPLX(0.,FR*MP*X2)
          EXPO(3)=CDEXP(AUX1/CP1(IDOM))
          UIX(J)=M*EXPO(1)-M*ASVP*EXPO(2)+LP*APP*EXPO(3)
          UIY(J) = -L*EXPO(1) - L*ASVP*EXPO(2) - MP*APP*EXPO(3)
          AUX2=DCMPLX(0.,FR)
          AUX1=AUX2/CP1(IDOM)
         AUX2=LAMDA(IDOM)+2.*GE1(IDOM)*LP*LP
          SIGMA(1,1) = AUX1*(M*LP*EXPO(1)-M*LP*ASVP*EXPO(2)-
@AUX2*APP*EXPO(3))
          AUX2=DCMPLX(0.,-FR)
          AUX1=AUX2/CP1(IDOM)
         AUX2=LAMDA(IDOM)+2.*GE1(IDOM)*MP*MP
          SIGMA(2,2) = AUX1*(-2.*GE1(IDOM)*LP*M*EXPO(1)+
@2.*GE1(IDOM)*LP*ASVP*EXPO(2)+AUX2*APP*EXPO(3))
          AUX2=DCMPLX(0.,FR)
          AUX1=AUX2/CS1(IDOM)
         AUX2=GE1(IDOM)*(L*L-M*M)
          SIGMA(1,2) = AUX1*(AUX2*EXPO(1)+AUX2*ASVP*EXPO(2)+
@2.*GE1(IDOM)*L*MP*APP*EXPO(3))
          SIGMA(2,1)=SIGMA(1,2)
* CÁLCULO DE LA NORMAL PARA MULTIPLICARLA POR EL TENSOR DE TENSIONES
* Y OBTENER EL VECTOR DE TENSIONES
          CHI=REAL(NCHI,8)
          JJ=J-NCHT
          DX1CHI = (CHI - 0.5) *X(JJ - 1) - 2.*CHI *X(JJ) + (CHI + 0.5) *X(JJ + 1)
          DX2CHI = (CHI - 0.5)*Y(JJ - 1) - 2.*CHI*Y(JJ) + (CHI + 0.5)*Y(JJ + 1)
```

```
DENO=DSQRT(DX1CHI*DX1CHI+DX2CHI*DX2CHI)
         NORMAL(1)=DX2CHI/DENO
         NORMAL(2)=-DX1CHI/DENO
         PIXY(J,1) = (0.,0.)
         PIXY(J,2) = (0.,0.)
         DO K=1,2
             DO KK=1,2
               PIXY(J,K)=PIXY(J,K)+SIGMA(K,KK)*NORMAL(KK)
             END DO
         END DO
         NCHI=NCHI+1
          IF (NCHI.EQ.2) NCHI=0
6
        CONTINUE
5
       CONTINUE
4
      CONTINUE
   END IF
   END
```

7.13. SUBRUTINA PRINCIPAL DE LOS CÁLCULOS DEL M.E.C.

Esta subrutina constituye el módulo fundamental del cálculo M.E.C. Desde ella se llama a las distintas subrutinas que realizan el cálculo de los elementos de las matrices H, G, D y HD que son posteriormente montadas en la matriz de coeficientes del sistema a través de otra subrutina.





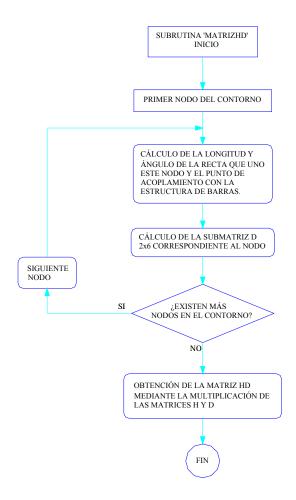
```
SUBROUTINE MEC(FR, PP, F)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
INCLUDE 'ACOPLA15.DATOS'
COMPLEX*16 GE,CS,CP
COMPLEX*16 HP(NMNC*NMCD,NMNC),GP(NMNC*NMCD,NMNC)
COMPLEX*16 H2D(2*NMNC*NMCD,2*NMNC),G2D(2*NMNC*NMCD,2*NMNC)
COMPLEX*16 GAS(NMNC*NMCD,2*NMNC),GSA(2*NMNC*NMCD,NMNC)
COMPLEX*16 PP(2*NMNMEC+3*NMNMEF,2*NMNMEC+3*NMNMEF)
COMPLEX*16 F(2*NMNMEC+3*NMNMEF)
COMPLEX*16 HD(2*NMNC*NMCD,3)
* CÁLCULO DE LAS SUBMATRICES G Y H CORRESPONDIENTES A CADA DOMINIO
DO 1 IDOM=1, NDOM
  DO 2 I=1, NCON(IDOM)
    I1=ABS(NCON1(IDOM,I))
      ----- SIGNO DE LA NORMAL EXTERIOR EN EL ELEMENTO
    NEXP=2
    {\tt IF(NCON1(IDOM,I).LT.0)NEXP=1}
      IF(NPROBLEM(IDOM).EQ.2)THEN
        G=G1(IDOM)
        CS=CS1(IDOM)
        CP=CP1(IDOM)
        GE=GE1(IDOM)
        RO=RO1(IDOM)
        XNU=XNU1(IDOM)
        CALL GHMAT2(IDOM, I1, NEXP, G, XNU, RO, GE, CS, CP, FR, H2D, G2D)
* SI EL CONTORNO ES DE ACOPLAMIENTO, OBTENEMOS LA MATRIZ HD
CORRESPONDIENTE.
IF ((TIPOCON(I1).EQ.'A').AND.(NMEF.GT.0)) CALL MATRIZHD(I1,H2D,HD)
      END IF
```

- INCLUSIÓN DE LAS SUBMATRICES CALCULADAS EN LA POSICIÓN
- CORRESPONDIENTE EN LA MATRIZ GLOBAL DEL SISTEMA
 - CALL ASSEMBLE(IDOM, I1, HP, GP, H2D, G2D, GAS, GSA, HD, PP, F)
- 2 CONTINUE
- CONTINUE 1 RETURN

END

7.14. SUBRUTINA PARA EL CÁLCULO DE LAS SUBMATRICES HD.

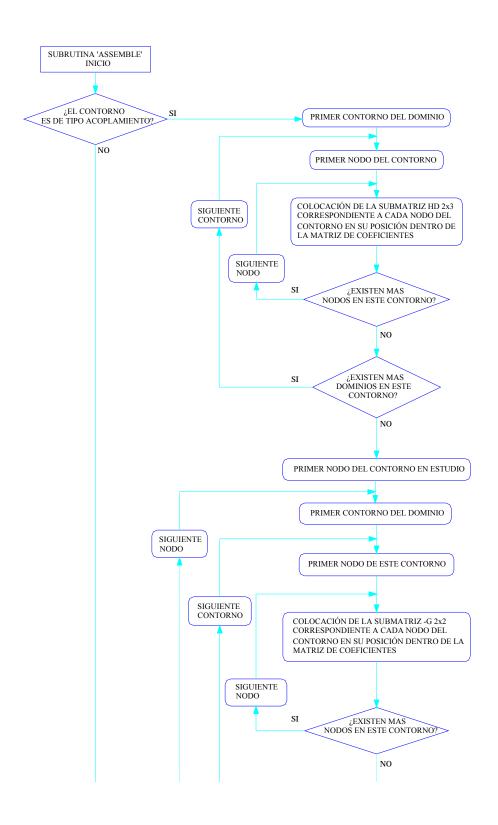
Esta subrutina es la encargada del cálculo de las submatrices D y de su producto con las submatrices H correspondientes para obtener las submatrices HD derivadas del acomplamiento M.E.F.-M.E.C., tal y como se presentó en el capítulo quinto. Cada una de las submatrices HD, de dimensiones 2x3, corresponde a una relación entre los desplazamientos u y v de un nodo de un contorno de acoplamiento y los desplazamientos u, v y α del nodo M.E.F. con el que está acoplado. De este modo, en caso que el contorno rígido de acoplamiento esté formado por más de un elemento, cada una de las submatrices obtenidas para cada elemento se suma a la misma submatriz obtenida para los elementos anteriores.

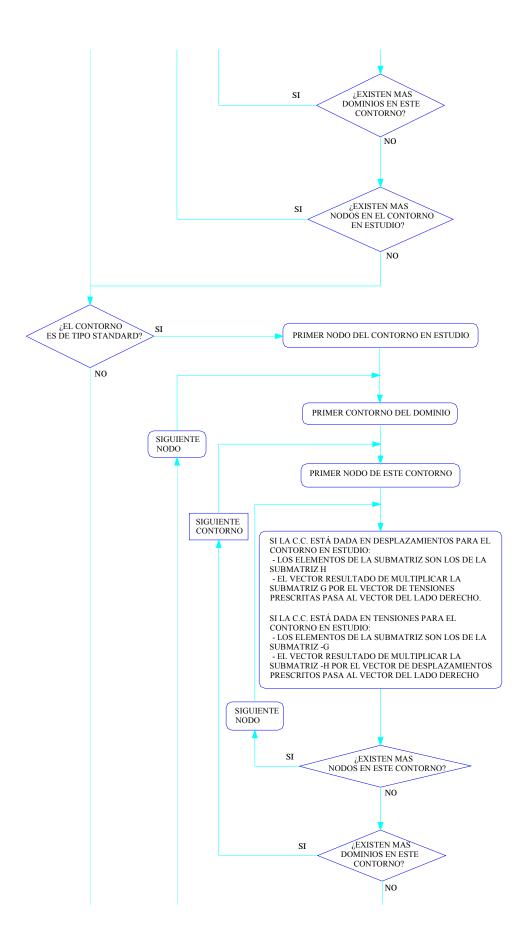


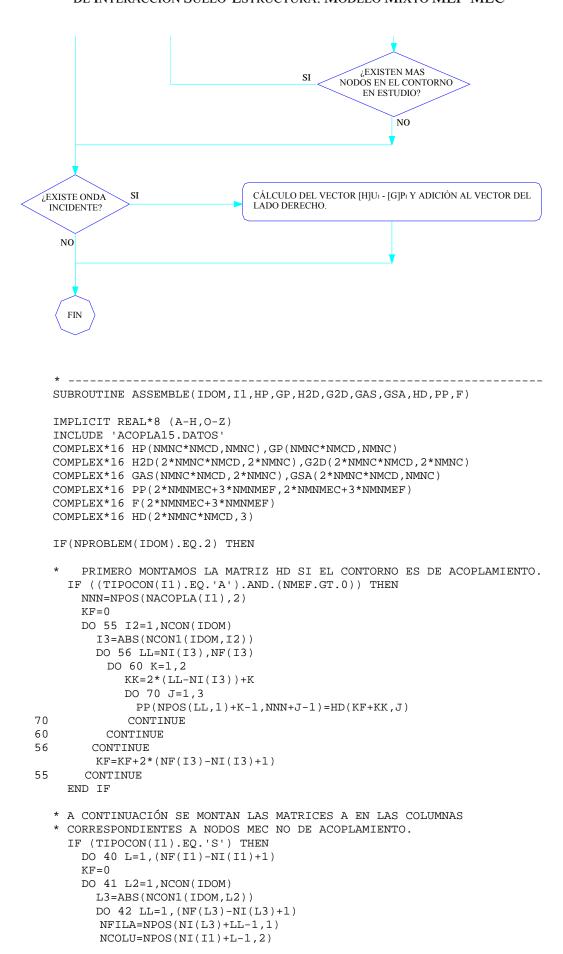
```
SUBROUTINE MATRIZHD(I1, H2D, HD)
    IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
    INCLUDE 'ACOPLA15.DATOS'
    COMPLEX*16 H2D(2*NMNC*NMCD,2*NMNC)
    COMPLEX*16 HD(2*NMNC*NMCD,3)
    COMPLEX*16 D(2*NMNC,3)
    * CALCULAMOS LA MATRIZ D CORRESPONDIENTE AL CONTORNO EN CUESTIÓN.
    N=NACOPLA(I1)
    DO I=NI(I1),NF(I1)
      {\tt DISTNA=SQRT((X(I)-X(N))*(X(I)-X(N))+(Y(I)-Y(N))*(Y(I)-Y(N)))}
      IF (DISTNA.GT.0.0001) THEN
        SINBNA=(Y(I)-Y(N))/DISTNA
        COSBNA=(X(I)-X(N))/DISTNA
      ELSE
        SINBNA=0.
        COSBNA=0.
      END IF
      D(2*(I-NI(I1))+1,1)=1
      D(2*(I-NI(I1))+2,1)=0
      D(2*(I-NI(I1))+1,2)=0
      D(2*(I-NI(I1))+2,2)=1
      D(2*(I-NI(I1))+1,3)=-DISTNA*SINBNA
      D(2*(I-NI(I1))+2,3)=DISTNA*COSBNA
    END DO
    * UNA VEZ CALCULADA LA MATRIZ D, REALIZAMOS LA MULTIPLICACIÓN
    DO 2 I=1,2*NMNC*NMCD
      DO 1 J=1,3
        HD(I,J)=0.
    CONTINUE
  1
  2 CONTINUE
    DO 5 I=1,2*NMNC*NMCD
      DO 4 J=1,3
        DO 3 K=1,2*NMNC
          HD(I,J)=HD(I,J)+H2D(I,K)*D(K,J)
        CONTINUE
  3
      CONTINUE
 5 CONTINUE
100 FORMAT(E12.3,\)
101 FORMAT(/)
    RETURN
    END
```

7.15. Subrutina Para el Montaje de las Submatrices $H, G ext{ y } HD$.

Esta subrutina realiza el montaje de las diferentes submatrices H, G y HD calculadas para cada contorno. El resultado será el sistema último a resolver $PP \cdot X = F$.







```
* KODEX=1 -> CONDICIÓN DADA EN TENSIONES
         IF(KODEX(I1).EQ.1)THEN
           PP(NFILA, NCOLU)=H2D(KF+2*LL-1, 2*L-1)
           PP(NFILA+1,NCOLU)=H2D(KF+2*LL,2*L-1)
           F(NFILA) = F(NFILA) + G2D(KF+2*LL-1,2*L-1)*TX(I1)
           F(NFILA+1)=F(NFILA+1)+G2D(KF+2*LL,2*L-1)*TX(I1)
         ELSE
           PP(NFILA, NCOLU) = (-1.)*G2D(KF+2*LL-1, 2*L-1)
           PP(NFILA+1,NCOLU) = (-1.)*G2D(KF+2*LL,2*L-1)
           F(NFILA) = F(NFILA) + (-1.)*H2D(KF+2*LL-1,2*L-1)*UX(I1)
           F(NFILA+1)=F(NFILA+1)+(-1.)*H2D(KF+2*LL,2*L-1)*UX(I1)
         END IF
  * KODEY=1 -> CONDICIÓN DADA EN TENSIONES
         IF(KODEY(I1).EQ.1)THEN
           PP(NFILA,NCOLU+1)=H2D(KF+2*LL-1,2*L)
           PP(NFILA+1,NCOLU+1)=H2D(KF+2*LL,2*L)
           F(NFILA) = F(NFILA) + G2D(KF+2*LL-1,2*L)*TY(I1)
           F(NFILA+1)=F(NFILA+1)+G2D(KF+2*LL,2*L)*TY(I1)
         ELSE
           PP(NFILA, NCOLU+1) = (-1.)*G2D(KF+2*LL-1, 2*L)
           PP(NFILA+1, NCOLU+1) = (-1.)*G2D(KF+2*LL, 2*L)
           F(NFILA) = F(NFILA) + (-1.)*H2D(KF+2*LL-1,2*L)*UY(I1)
           F(NFILA+1)=F(NFILA+1)+(-1.)*H2D(KF+2*LL,2*L)*UY(I1)
         END IF
       CONTINUE
42
      KF = KF + 2*(NF(L3) - NI(L3) + 1)
41
      CONTINUE
    CONTINUE
40
    END IF
  * A CONTINUACIÓN SE MONTAN LAS MATRICES -G EN LAS COLUMNAS
    CORRESPONDIENTES A NODOS MEC DE ACOPLAMIENTO.
    IF (TIPOCON(I1).EQ.'A') THEN
      DO 50 L=1, (NF(I1)-NI(I1)+1)
      KF=0
      DO 51 L2=1, NCON(IDOM)
         L3=ABS(NCON1(IDOM, L2))
         DO 52 LL=1,(NF(L3)-NI(L3)+1)
          NFILA=NPOS(NI(L3)+LL-1,1)
          NCOLU=NPOS(NI(I1)+L-1,2)
           PP(NFILA,NCOLU) = (-1.)*G2D(KF+2*LL-1,2*L-1)
           PP(NFILA+1,NCOLU) = (-1.)*G2D(KF+2*LL,2*L-1)
           PP(NFILA,NCOLU+1) = (-1.)*G2D(KF+2*LL-1,2*L)
           PP(NFILA+1,NCOLU+1) = (-1.)*G2D(KF+2*LL,2*L)
52
         CONTINUE
          KF = KF + 2 * (NF(L3) - NI(L3) + 1)
51
        CONTINUE
       CONTINUE
      END IF
  * AHORA AÑADIMOS AL VECTOR INDEPENDIENTE EL PRODUCTO HUI-GPI EN CASO DE
  * QUE SE HAYA AÑADIDO UNA ONDA INCIDENTE TIPO P O TIPO SV
     IF (ONDAINCI.NE.'N') THEN
       DO 80 L=1, (NF(I1)-NI(I1)+1)
         KF=0
          NODO=NI(I1)+L-1
          DO 81 L2=1, NCON(IDOM)
           L3=ABS(NCON1(IDOM,L2))
           DO 82 LL=1, (NF(L3)-NI(L3)+1)
            NFILA=NPOS(NI(L3)+LL-1,1)
            F(NFILA)=F(NFILA)-G2D(KF+2*LL-1,2*L-1)*PIXY(NODO,1)
             F(NFILA+1)=F(NFILA+1)-G2D(KF+2*LL,2*L-1)*PIXY(NODO,1)
             F(NFILA) = F(NFILA) + H2D(KF + 2*LL - 1, 2*L - 1)*UIX(NODO)
             F(NFILA+1)=F(NFILA+1)+H2D(KF+2*LL,2*L-1)*UIX(NODO)
             F(NFILA) = F(NFILA) - G2D(KF + 2*LL - 1, 2*L)*PIXY(NODO, 2)
```

```
F(NFILA+1)=F(NFILA+1)-G2D(KF+2*LL,2*L)*PIXY(NODO,2)
              F(NFILA) = F(NFILA) + H2D(KF + 2*LL - 1, 2*L)*UIY(NODO)
              F(NFILA+1)=F(NFILA+1)+H2D(KF+2*LL,2*L)*UIY(NODO)
82
             CONTINUE
            KF = KF + 2 * (NF(L3) - NI(L3) + 1)
81
          CONTINUE
80
         CONTINUE
      END IF
   END IF
200 RETURN
300 FORMAT(E12.3,\)
301 FORMAT(/)
   END
```

7.16. SUBRUTINA PARA LA HOMOGENEIZACIÓN DEL ORDEN DE LOS COEFICIENTES DE LA MATRIZ DEL SISTEMA.

Como se comentó anteriormente, el objetivo de esta subrutina es minimizar los problemas numéricos derivados de la gran disparidad existente en el orden de magnitud de los elementos con distinta procedencia que están presentes en la matriz del sistema.

Se sabe que el sistema de ecuaciones a homogeneizar tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sa} & 0 & 0 \\ K_{as} & K_{aa} & C & 0 \\ 0 & H_{gc}D_{ca} & -G_{gc} & A_{gg} \\ 0 & H_{cc}D_{ca} & -G_{cc} & A_{cg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{s} \\ u^{a} \\ t^{c} \\ x^{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{s} \\ 0 \\ B^{gg} \\ B^{cg} \end{bmatrix}$$
(7.1)

donde generalmente, los elementos de la matriz K son de orden muy superior al resto de los elementos, siendo los elementos de la matriz G los de menor orden.

Por todo esto, el objetivo de la homogeneización de la matriz será disminuir el orden de los elementos de la matriz K al tiempo que se aumenta el orden de los elementos de la matriz G, obteniendo una matriz cuyos elementos tengan un orden más homogeneo pero, como es obvio, cuya solución final sea la misma que la del sistema original.

La estrategia a seguir será la siguiente. Multiplicando la primera y segunda filas por un factor 10^{-R} , donde R es un número entero mayor de 0, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} K_{ss} \cdot 10^{-R} & K_{sa} \cdot 10^{-R} & 0 & 0 \\ K_{as} \cdot 10^{-R} & K_{aa} \cdot 10^{-R} & C \cdot 10^{-R} & 0 \\ 0 & H_{gc}D_{ca} & -G_{gc} & A_{gg} \\ 0 & H_{cc}D_{ca} & -G_{cc} & A_{cg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{s} \\ u^{a} \\ t^{c} \\ x^{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{s} \cdot 10^{-R} \\ 0 \\ B^{gg} \\ B^{cg} \end{bmatrix}$$
(7.2)

pero dado que no nos interesa disminuir el orden de la matriz C, debemos pasar el factor que la multiplica al vector de incógnitas, con lo que nos queda:

$$\begin{bmatrix} K_{ss} \cdot 10^{-R} & K_{sa} \cdot 10^{-R} & 0 & 0 \\ K_{as} \cdot 10^{-R} & K_{aa} \cdot 10^{-R} & C & 0 \\ 0 & H_{gc}D_{ca} & -G_{gc} \cdot 10^{R} & A_{gg} \\ 0 & H_{cc}D_{ca} & -G_{cc} \cdot 10^{R} & A_{cg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{s} \\ u^{a} \\ t^{c} \cdot 10^{-R} \\ x^{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{s} \cdot 10^{-R} \\ 0 \\ B^{gg} \\ B^{cg} \end{bmatrix}$$
(7.3)

y del mismo modo que queda así aumentado el orden de la matriz G en las columnas correspondientes a los nodos de acoplamiento, podemos también aumentar el oden de los elementos de la matriz G haciendo:

$$\begin{bmatrix} K_{ss} \cdot 10^{-R} & K_{sa} \cdot 10^{-R} & 0 & 0 \\ K_{as} \cdot 10^{-R} & K_{aa} \cdot 10^{-R} & C & 0 \\ 0 & H_{gc} D_{ca} & -G_{gc} \cdot 10^{R} & A_{gg} \cdot 10^{T} \\ 0 & H_{cc} D_{ca} & -G_{cc} \cdot 10^{R} & A_{cg} \cdot 10^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{s} \\ u^{a} \\ t^{c} \cdot 10^{-R} \\ x^{g} \cdot 10^{-T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{s} \cdot 10^{-R} \\ 0 \\ B^{gg} \\ B^{cg} \end{bmatrix}$$
(7.4)

donde:

$$T = \begin{cases} R & \text{si } x^g = t^g \\ 0 & \text{si } x^g = u^g \end{cases}$$

El valor de R será tomado como la parte entera de:

$$R = \frac{Orden(K) - Orden(G)}{2}$$

```
PRIMERO CALCULAMOS EL VALOR DE LA POTENCIA DE 10 (NR) CON QUE
    * VAMOS A TRABAJAR
   NORDENK=-1000000
   NORDENG=10000000
   DO 10 I=1,NK2-1
     DO 5 J=1, NK2-1
       IF(ABS(REAL(PP(I,J))).GT.0.0E-50) THEN
          J1=IDINT(LOG10(ABS(REAL(PP(I,J)))))
          IF (J1.GT.NORDENK) NORDENK=J1
       END IF
     CONTINUE
10 CONTINUE
   DO 20 I=NK2,NDIMPP
     DO 15 J=NK2,NK4-1
       IF(ABS(REAL(PP(I,J))).GT.0.0E-50) THEN
          J1=IDINT(LOG10(ABS(REAL(PP(I,J)))))
          IF (J1.LT.NORDENG) NORDENG=J1
       END IF
    CONTINUE
20 CONTINUE
   NR=(NORDENK-NORDENG)/2
   ** AHORA MULTIPLICAMOS ESTE FACTOR POR LOS ELEMENTOS NECESARIOS
   DO 30 I=1,NK2-1
     DO 25 J=1,NK2-1
       PP(I,J)=PP(I,J)*(10.**(-NR))
     CONTINUE
     F(I) = F(I) * (10.**(-NR))
 30 CONTINUE
   DO 40 I=NK2, NDIMPP
     DO 35 J=NK2,NK4-1
       PP(I,J) = PP(I,J) * (10.**NR)
      CONTINUE
 40 CONTINUE
   DO 50 I=1, NDOM
     IF(NPROBLEM(I).EQ.2) THEN
       DO 45 J=1,NCON(I)
          J1=ABS(NCON1(I,J))
           IF(TIPOCON(J1).EQ.'S') THEN
             IF(KODEX(J1).EQ.0) THEN
               DO 43 K=NI(J1),NF(J1)
                KPOSF=NPOS(K,1)
                KPOSC=NPOS(K,2)
                PP(KPOSF, KPOSC) = PP(KPOSF, KPOSC) * (10. **NR)
                PP(KPOSF+1,KPOSC)=PP(KPOSF+1,KPOSC)*(10.**NR)
 43
              CONTINUE
              END IF
           END IF
           IF(TIPOCON(J1).EQ.'S') THEN
             IF(KODEY(J1).EQ.0) THEN
             DO 44 K=NI(J1),NF(J1)
               KPOSF=NPOS(K,1)
               KPOSC=NPOS(K,2)
               PP(KPOSF, KPOSC+1)=PP(KPOSF, KPOSC+1)*(10.**NR)
               PP(KPOSF+1,KPOSC+1)=PP(KPOSF+1,KPOSC+1)*(10.**NR)
 44
              CONTINUE
             END IF
          END IF
         CONTINUE
 45
      END IF
 50 CONTINUE
   END
```

7.17. SUBRUTINA PARA LA NORMALIZACIÓN DEL ORDEN DEL LOS ELEMENTOS DEL VECTOR SOLUCIÓN.

Una vez obtenidos los resultados del problema, es necesario normalizar los valores contenidos en el vector solución en el caso de que se haya optado por homogeneizar la matriz de coeficientes.

La operación a realizar es muy sencilla. Sabiendo que el vector obtenido es de la forma:

el vector que da la solución real del sistema es de la forma:

$$\begin{cases}
 u^{s} \\
 u^{a} \\
 t^{c'} \cdot 10^{R} \\
 x^{g'} \cdot 10^{R}
\end{cases} = \begin{cases}
 u^{s} \\
 u^{a} \\
 t^{c} \\
 x^{g}
\end{cases}$$
(7.6)

```
SUBROUTINE DESHOMOG(F, IOR2, NR)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  INCLUDE 'ACOPLA15.DATOS'
  COMPLEX*16 F(2*NMNMEC+3*NMNMEF)
  INTEGER*4 IOR2(2*NMNMEC+3*NMNMEF)
  INTEGER NR
  DO 35 J=NK2,NK4-1
    F(J) = F(J) * (10.**NR)
35 CONTINUE
  DO 50 I=1,NDOM
    IF(NPROBLEM(I).EQ.2) THEN
      DO 45 J=1,NCON(I)
      J1=ABS(NCON1(I,J))
      IF(TIPOCON(J1).EQ.'S') THEN
         IF(KODEX(J1).EQ.0) THEN
            DO 43 K=NI(J1),NF(J1)
             KPOS=NPOS(IOR2(K),2)
             F(KPOS) = F(KPOS) * (10.**NR)
43
            CONTINUE
         END IF
      END IF
      IF(TIPOCON(J1).EQ.'S') THEN
         IF(KODEY(J1).EQ.0) THEN
            DO 44 K=NI(J1),NF(J1)
             KPOS=NPOS(IOR2(K),2)
             F(KPOS+1)=F(KPOS+1)*(10.**NR)
```

126 CÁLCULO DE ESTRUCTURAS DE BARRAS INCLUYENDO EFECTOS DINÁMICOS DE INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA. MODELO MIXTO MEF-MEC

44 CONTINUE
END IF
END IF
45 CONTINUE
END IF
50 CONTINUE
END

CAPÍTULO 8

VALIDACIÓN DEL CÓDIGO DE CÁLCULO

8.1. Introducción.

Mientras que la comprobación del correcto funcionamiento de las subrutinas de cálculo de estructuras mediante el Método de los Elementos Finitos es una tarea relativamente sencilla, la validación del código del acoplamiento entre Elementos Finitos y Elementos de Contorno no puede realizarse de forma fácil e indiscutible, debido a que para éste último problema no existen soluciones analíticas genéricas con las que contrastar los resultados.

Para validar los resultados ofrecidos por el código de Elementos Finitos, tanto en problemas estáticos como dinámicos, se compararon los resultados ofrecidos por el mismo para diversos ejemplos de variada tipología con sus soluciones analíticas, comprobando tanto los desplazamientos en nodos como la posición de las frecuencias naturales del sistema para diversas excitaciones (en los casos dinámicos). Estos problemas no han sido incluidos en el documento del proyecto debido a que se entiende que no poseen el interés necesario.

Por otro lado, teniendo en cuenta que las subrutinas de cálculo relativas al Método de los Elementos de Contorno, desarrolladas previamente en el departamento de Ingeniería Civil, han sido sobradamente contrastadas de antemano, no queda más que tratar de comprobar el correcto funcionamiento de las subrutinas referidas al acoplamiento y, de forma genérica, el buen funcionamiento del sistema en su conjunto. Debido a la ausencia de otros métodos análogos para la comparación de resultados, esta validación debe centrarse en el análisis de las soluciones y en la observación de que parámetros tales como distribuciones y resultantes de tensiones y desplazamientos en la superficie del terreno o la evolución de la solución en función de la rigidez del suelo se ajusten a los valores y comportamientos esperables.

Con este objetivo se presentan en este capítulo tres ejemplos de cálculo con los que se ha tratado de analizar el correcto comportamiento de diversas facetas del método,

aunque bien es cierto que las comprobaciones que aquí se realizan no dejan de ser condiciones necesarias pero no suficientes para poder asegurar sin lugar a dudas que todas las variables obtenidas por el programa sean correctas.

El primer problema es el estudio estático de la distribución de tensiones bajo el contorno rígido de acoplamiento del suelo con una barra vertical cargada en su extremo superior y de los valores del desplazamiento en el extremo superior de ésta, analizando la geometría de dichas distribuciones y el valor de la resultante de las mismas.

El segundo problema pretende constatar el cumplimiento del principio de Saint-Venant, estudiando el campo de desplazamientos en la superficie de un contorno sobre una de cuyas caras se aplica en primer lugar una carga distribuida constante y, en segundo lugar, una carga equivalente sobre el extremo superior de una barra acoplada en la misma zona del contorno, ambas estáticas.

Por último, el tercer problema es un modelo simplificado de un edificio de cuatro alturas en el que se ha considerado despreciable la masa de los pilares y que ha sido excitado armónicamente desde la base. Los resultados obtenidos han sido comparados con su solución analítica y se ha analizado cómo evoluciona el espectro de respuesta en frecuencias al variar la rigidez del suelo. De este modo, se comprueba por un lado el buen funcionamiento del código M.E.F. y por otro el comportamiento del acoplamiento.

8.2. BARRA VERTICAL ACOPLADA A UN SUELO RÍGIDO O FLEXIBLE Y SOMETIDA A CARGAS ESTÁTICAS.

La figura 8.1 representa una barra vertical de 3 metros de longitud, una sección de 0.0156 m² de área y 0.92·10⁻³ m⁴ de inercia y un módulo de elasticidad de 2·10¹⁰ Pa que está acoplada con un suelo de unas características determinadas mediante un contorno rígido de acoplamiento de 2 metros de largo.

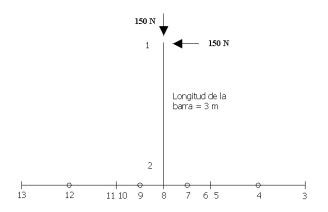


Fig 8.1. Barra vertical acoplada

Sobre este problema vamos a realizar tres comprobaciones diferentes. En primer lugar, vamos a calcular analíticamente cuál es el desplazamiento del nodo 1 frente a las cargas estáticas representadas para un empotramiento perfecto de la barra, y posteriormente vamos a comparar éste valor con el obtenido de acoplar la barra a un suelo flexible y a un suelo extraordinariamente rígido.

En segundo lugar, vamos a obtener el valor de las tensiones en los nodos del acoplamiento y vamos a comprobar que el resultado de la integral de la distribución de tensiones coincide con las reacciones en el extremo empotrado de la barra.

Por último, vamos a representar y analizar las distribuciones de tensiones bajo el contorno rígido de empotramiento para diferentes combinaciones de cargas y una discretización del contorno más tupida que la representada en la figura.

8.2.1. COMPROBACIÓN DEL DESPLAZAMIENTO DEL NODO 1

Para una barra perfectamente empotrada, estando el giro condensado en el extremo no empotrado, el sistema a resolver para obtener el desplazamiento del nodo 1 es el siguiente:

$$\begin{pmatrix}
3\frac{EI}{L^3} & 0 \\
0 & \frac{EA}{L}
\end{pmatrix}
\begin{cases}
u \\
v
\end{cases} = \begin{pmatrix}
F_x \\
F_y
\end{pmatrix}$$
(8.1)

de donde obtenemos para los datos de este problema:

$$\begin{pmatrix} 20.4 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0.104 \cdot 10^9 \end{pmatrix} \begin{cases} u \\ v \end{cases} = \begin{pmatrix} -150 \\ -150 \end{pmatrix}$$

cuyo resultado es:

$$u = -7.33696 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$v = -1.44231 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

El resultado dado por el código de acoplamiento M.E.F.-M.E.C. para una barra acoplada con un suelo arenoso cuyo módulo de elasticidad transversal G toma el valor $3.2175 \cdot 10^7$ Pa y cuyo coeficiente de Poisson v es de 0.4 es:

$$u = -9.59515 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$v = -8.26558 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

mientras el resultado para un suelo extremadamente rígido con $G = 3.2175 \cdot 10^{14}$ Pa es:

$$u = -7.33696 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$v = -1.44231 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

que coincide con el resultado de una barra perfectamente empotrada. De este modo constatamos, una vez más, que los resultados ofrecidos por el código de acoplamiento

para problema con suelos muy rígidos tienden al resultado para el problema perfectamente empotrado.

8.2.2. COMPROBACIÓN DEL VALOR DE LAS REACCIONES EN EL ACOPLAMIENTO

La parte real de las tensiones en cada uno de los nodos del contorno rígido de acoplamiento para el problema sobre suelo arenoso propuesto en el epígrafe anterior es:

$$\begin{cases}
t_{6x} \\
t_{6y} \\
t_{7x} \\
t_{7x}
\end{cases} = \begin{cases}
-280.126 \\
980.509 \\
-1.34583 \\
32.2406 \\
-62.3174 \\
-67.4169 \\
-4.73217 \\
t_{9y} \\
t_{10x} \\
t_{10x} \\
t_{10y}
\end{cases} = \begin{cases}
-280.126 \\
980.509 \\
-1.34583 \\
32.2406 \\
-62.3174 \\
-67.4169 \\
-4.73217 \\
-109.814 \\
-470.927 \\
-1435.38
\end{cases}$$

La obtención de las resultantes en términos de fuerzas horizontal, vertical y momento equivalente mediante la integración de la distribución de tensiones dada por estos valores en nodos, está genéricamente resuelta en el tercer apartado del capítulo quinto con la obtención de las matrices C, por lo que tenemos:

$$\begin{cases} R_x \\ R_y \\ M_r \end{cases} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} -280.126 \\ 980.509 \\ -1.34583 \\ 32.2406 \\ -62.3174 \\ -67.4168 \end{cases} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{cases} -62.3174 \\ -67.4168 \\ -4.73217 \\ -109.814 \\ -470.927 \\ -1435.38 \end{pmatrix}$$

dado que

$$L^{i} = 1$$

$$\sin \theta^{i} = 0$$

$$\cos \theta^{i} = -1$$

$$d_{y}^{i} = 0$$

$$d_{x}^{1} = 0.5; d_{x}^{2} = -0.5$$

con lo que obtenemos los resultados esperados, idénticos a las reacciones de empotramiento para el problema en estudio.

$$\begin{cases}
 F_x \\
 F_y \\
 M_r
 \end{cases} =
 \begin{cases}
 -150.00 N \\
 -150.00 N \\
 450.00 N \cdot m
 \end{cases}$$

8.2.3. ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES BAJO EL ACOPLAMIENTO

Por último, las figuras 8.2 y 8.3 representan las distribuciones de tensiones t_x y t_y bajo el contorno rígido de acoplamiento para el problema presentado en este apartado bajo carga horizontal, vertical y ambas al mismo tiempo aplicadas sobre el nodo 1. Las características tomadas para el terreno son las de un suelo arenoso cuyo módulo de elasticidad transversal G toma el valor $3.2175 \cdot 10^7$ Pa y cuyo coeficiente de Poisson v es de 0.4. Estos resultados han sido obtenidos con una discretización de 15 elementos para el contorno rígido de acoplamiento y superficies libres de 5 metros por cada lado con 30 elementos cada una.

Aunque las curvas responden a las distribuciones esperadas para este problema tanto en signo como en su tendencia general, puede observarse claramente que existen en todas ellas dos puntos cuyo valor no parece ser correcto. Estos puntos coinciden siempre, y para cualquier discretización, con el nodo central del elemento extremo del contorno rígido de acoplamiento. La razón de esta anomalía, que ha aparecido también en otros modelos en los que se utiliza el M.E.C. parece ser un error numérico propio del método, cuyo estudio se encuentra fuera del alcance de este proyecto.

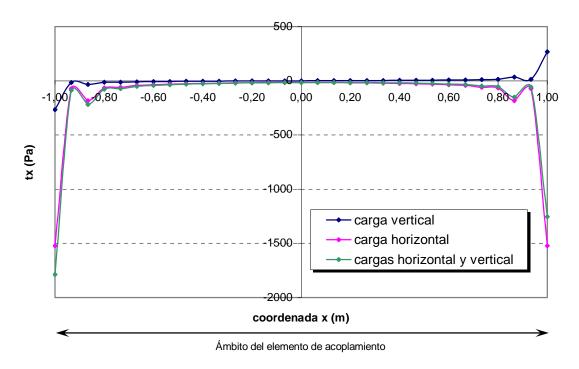


Fig 8.2. Distribución de tensiones t_x bajo diferentes cargas

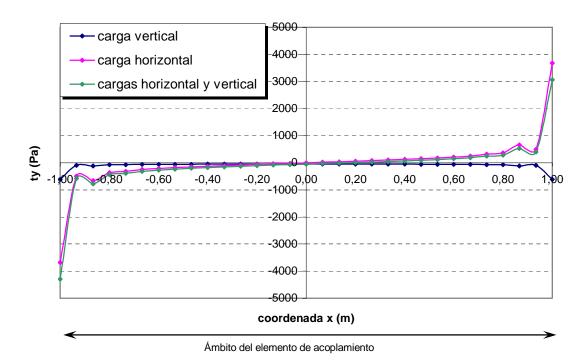


Fig 8.3. Distribución de tensiones t_y bajo diferentes cargas.

8.3. CONTORNO RECTANGULAR CERRADO CON CARGA ESTÁTICA DISTRIBUIDA Y BARRA ACOPLADA CON CARGA ESTÁTICA PUNTUAL.

La figura 8.4 representa la sección rectangular de 5 metros de alto y uno de ancho de un prisma que conforma un contorno cerrado sobre el que se van a estudiar dos cargas diferentes. En el caso (a) se aplica una carga estática vertical de 150 N sobre el extremo de una barra acoplada en el centro del contorno superior de la sección a través de un contorno rígido de acoplamiento de 0.2 metros de longitud. En el caso (b) se aplica una carga estática vertical distribuida uniformemente de 750 Pa sobre una superficie de 0.2 metros con condición de contorno de desplazamiento horizontal nulo, de modo que la resultante sea equivalente al caso anterior. La condición de contorno es de superficie libre en toda la superficie sobre la que no hay carga aplicada excepto en el contorno inferior, en el cual la condición de contorno es de desplazamiento horizontal y vertical nulos.

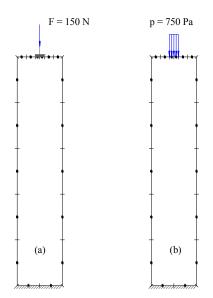


Fig 8.4. Contorno rectangular cerrado con barra acoplada y carga distribuida uniforme.

Como ya se comentó anteriormente, el objetivo de este problema de ejemplo es constatar que se cumple el principio de Saint-Venant, cuyo enunciado es el siguiente: "Las deformaciones (tensiones y desplazamientos) producidas en un cuerpo por aplicación en una zona de su superficie de un sistema de cargas estáticamente equivalente a un sistema nulo, (es decir fuerza y momento resultantes nulos) son despreciables a distancias superiores a la dimensión de la zona afectada por el estado de la carga". La aplicación del Principio al caso anterior, en el cual están definidos dos

sistemas de fuerzas equivalentes, implica que a una distancia equiparable a la superficie de aplicación de las fuerzas, la distribución de tensiones, deformaciones y desplazamientos provocados por uno y por otro debe ser análoga.

Para comprobar este extremo, representamos a continuación las distribuciones de desplazamiento en los contornos superior (figuras 8.5 y 8.6) y lateral (figuras 8.7 y 8.8) del cuerpo en estudio, poniéndose de manifiesto que ambas distribuciones resultan idénticas a una distancia superior al metro de la zona de aplicación de la carga. Debe hacerse hincapié en el hecho de que ambas distribuciones no podrían salir idénticas en el contorno superior debido a que mientras en el caso (a) el contorno rígido de acoplamiento implica un desplazamiento horizontal y vertical uniforme de todos sus puntos, esto no sucede así en el caso (b).

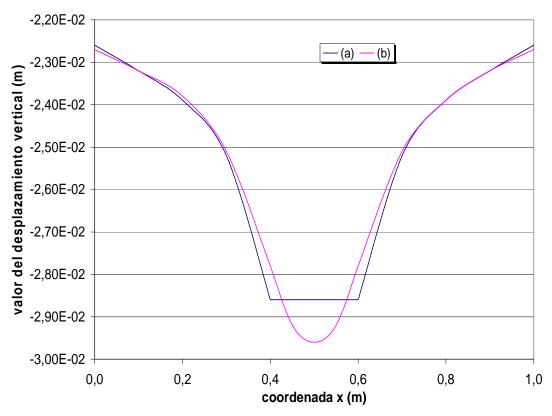


Fig 8.5. Distribución del desplazamiento vertical en el contorno superior

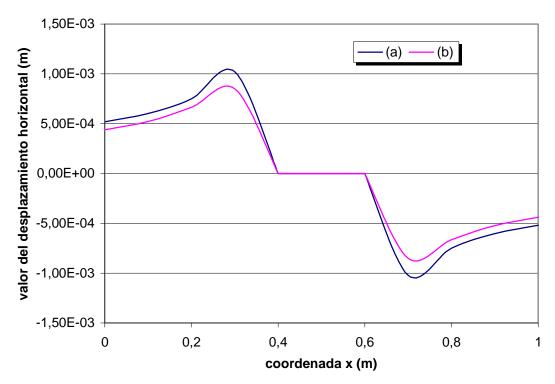


Fig 8.6. Distribución del desplazamiento horizontal en el contorno superior

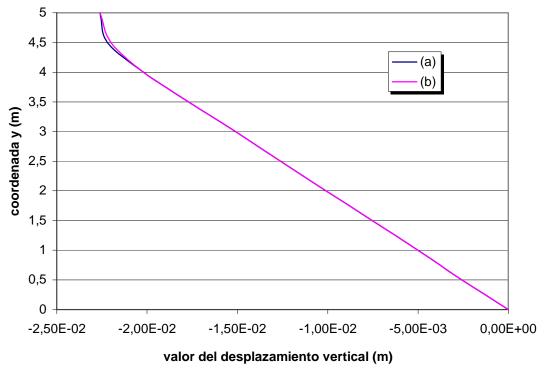


Fig 8.7. Distribución del desplazamiento vertical en el contorno lateral

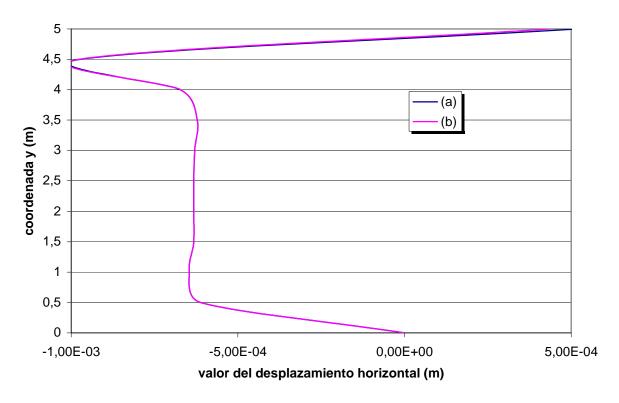


Fig 8.8. Distribución del desplazamiento horizontal en el contorno lateral.

8.4. EDIFICIO DE CUATRO ALTURAS.

La figura 8.9 representa el modelo simplificado de un edificio de cuatro alturas que será excitado horizontalmente desde la base, por lo que puede estudiarse como un sistema de 8 grados de libertad, a saber, desplazamiento horizontal y giro en el centro de gravedad de cada uno de los forjados, dado que debido a que la excitación será horizontal y el problema es simétrico, el desplazamiento vertical del centro de gravedad de los forjados será nulo.

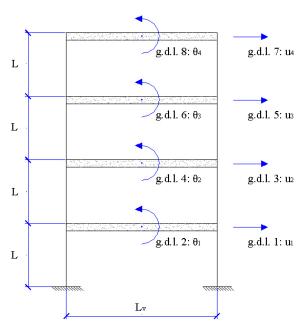


Fig 8.9. Modelo simplificado de edificio de cuatro alturas

8.4.1. OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA.

La primera tarea fue la obtención de la solución analítica de este modelo simplificado, comenzando por la matriz de rigidez, a partir de la definición de sus coeficientes, según la cual, el coeficiente k_{ij} representa la fuerza que aparece en el grado de libertad i al dar un desplazamiento unidad al grado de libertad j, manteniendo nulos todos los demás. En la siguiente serie de figuras (8.10 a la 8.17) se ilustra la obtención de todos los coeficientes de la matriz, cuyos valores han sido extraídos de la matriz de rigidez de una barra biempotrada, tal y como fue definida en el capítulo 3.

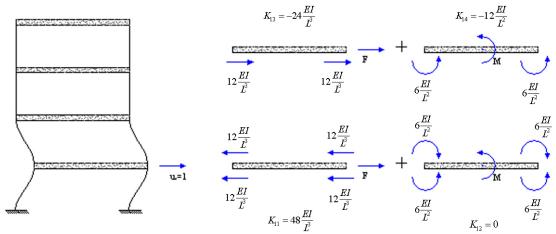


Fig 8.10. Obtención de los elementos de la primera fila de la matriz de rigidez

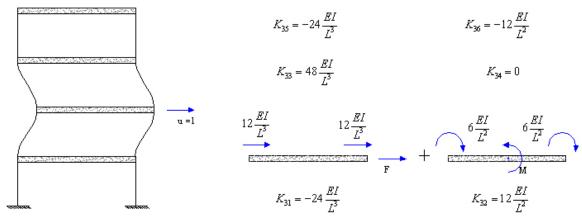


Fig 8.11. Obtención de los elementos de la tercera fila de la matriz de rigidez

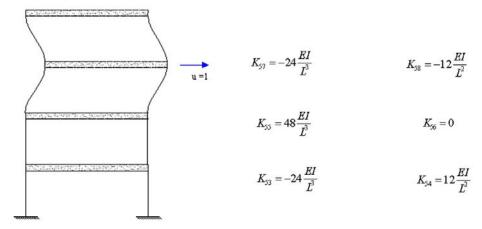


Fig 8.12. Obtención de los elementos de la quinta fila de la matriz de rigidez.

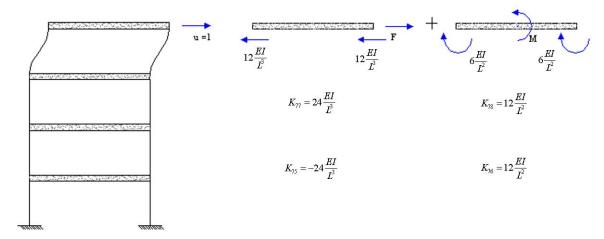


Fig 8.13. Obtención de los elementos de la séptima fila de la matriz de rigidez.

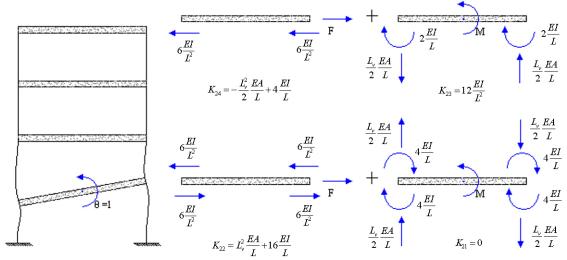


Fig 8.14. Obtención de los elementos de la segunda fila de la matriz de rigidez

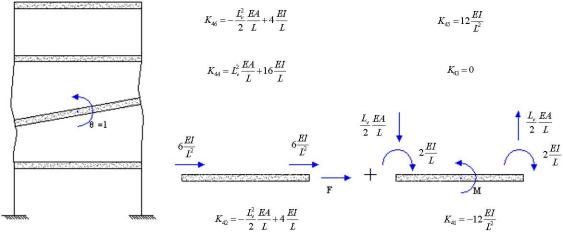


Fig 8.15. Obtención de los elementos de la cuarta fila de la matriz de rigidez

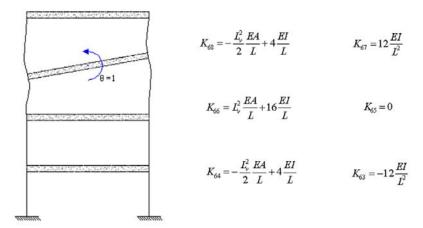


Fig 8.16. Obtención de los elementos de la sexta fila de la matriz de rigidez.

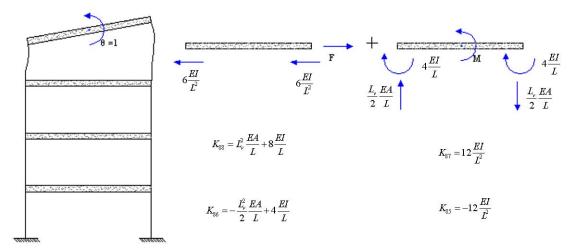


Fig 8.17. Obtención de los elemento de la octava fila de la matriz de rigidez

De los elementos calculados se obtiene la siguiente matriz de rigidez

$$\begin{bmatrix} 48\frac{EI}{L^{3}} & 0 & 24\frac{EI}{L^{3}} & -12\frac{EI}{L^{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{v}^{2}\frac{EA}{L} + 16\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24\frac{EI}{L^{3}} & 12\frac{EI}{L^{2}} & 48\frac{EI}{L^{3}} & 0 & -24\frac{EI}{L^{3}} & -12\frac{EI}{L^{2}} & 0 & 0 \\ -12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 0 & L_{v}^{2}\frac{EA}{L} + 16\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24\frac{EI}{L^{3}} & 12\frac{EI}{L^{2}} & 48\frac{EI}{L^{3}} & 0 & -24\frac{EI}{L^{3}} & -12\frac{EI}{L^{2}} \\ 0 & 0 & 12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 0 & L_{v}^{2}\frac{EA}{L} + 16\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24\frac{EI}{L^{3}} & 12\frac{EI}{L^{2}} & 48\frac{EI}{L^{3}} & 12\frac{EI}{L^{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & L_{v}^{2}\frac{EA}{L} + 8\frac{EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & L_{v}^{2}\frac{EA}{L} + 8\frac{EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & L_{v}^{2}\frac{EA}{L} + 8\frac{EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & L_{v}^{2}\frac{EA}{L} + 8\frac{EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & L_{v}^{2}\frac{EA}{L} + 8\frac{EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & L_{v}^{2}\frac{EA}{L} + 8\frac{EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & L_{v}^{2}\frac{EA}{L} + 8\frac{EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & L_{v}^{2}\frac{EA}{L} + 8\frac{EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & L_{v}^{2}\frac{EA}{L} + 8\frac{EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} & 12\frac{EI}{L^{2}} & -\frac{L_{v}^{2}}{2}\frac{EA}{L} + 4\frac{EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1$$

A continuación, y con el objetivo de obtener el modelo dinámico del sistema, calculamos la matriz de masa del mismo. El hecho de considerar despreciable la masa de los pilares y reducir los grados de libertad del sistema al centro de gravedad de los forjados conduce a una matriz cuyos únicos elementos no nulos son los pertenecientes a la diagonal principal. De ellos, los referidos a los g.d.l. correspondientes al desplazamiento horizontal toman el valor de la masa de cada forjado $\overline{m}L$, donde \overline{m} es la masa distribuida a lo largo de cada uno de ellos. Los referidos a los g.d.l. de giro, por otro lado, toman el valor de la inercia a rotación respecto al c.d.g. del dintel representado en la figura 8.18, y cuya expresión es:

$$\frac{M_I}{\ddot{\theta}} = \int_{-L/2}^{L/2} x \cdot x \cdot \overline{m} \cdot dx = 2\overline{m} \int_{0}^{L/2} x^2 dx = 2\overline{m} \frac{x^3}{3} \bigg]_{0}^{L/2} = \overline{m} \frac{L^3}{12}$$
 (8.3)

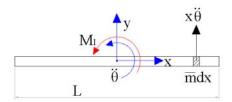


Fig 8.18. Inercia a giro de una barra

Por tanto, la matriz de masa queda:

$$\begin{bmatrix}
\overline{m}L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \overline{m}\frac{L^3}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \overline{m}L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \overline{m}\frac{L^3}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \overline{m}L & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \overline{m}L & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{m}L & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{m}L & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{m}L & 0
\end{bmatrix}$$
(8.4)

Llegados a este punto, sólo resta puntualizar que el sistema será excitado con un desplazamiento armónico de amplitud unidad en la base, tal y como se representa en la figura 8.19.

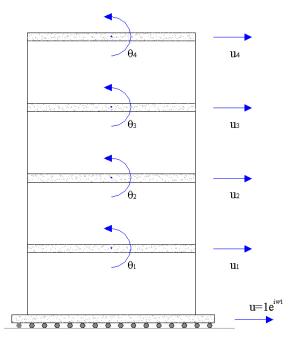


fig 8.19. Excitación unitaria horizontal de la base

De este modo, considerando nulo el amortiguamiento en la estructura y una vez conocido el valor de todos los parámetros, el sistema de ecuaciones que da la solución del problema es:

$$(\boldsymbol{K}_{MM} - w^2 \boldsymbol{M}_{MM}) \boldsymbol{U}_{M} = -\boldsymbol{K}_{MN} \cdot \boldsymbol{U}_{N} = \boldsymbol{F}_{equi}$$
(8.5)

donde, como vimos en el epígrafe 3.3.3., *M* representa los g.d.l. incógnita de la estructura y *N* los g.d.l. cuyo valor es conocido. De este modo, el vector equivalente del lado derecho toma la siguiente expresión:

$$F_{equi} = \begin{cases} -24 \frac{EI}{L^3} \\ -12 \frac{EI}{L^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$
(8.6)

cuyo valor representa la fuerza que debe realizarse sobre los g.d.l. de la estructura para mantener su desplazamiento nulo cuando la base se desplaza horizontalmente una cantidad unitaria.

8.4.2. Presentación de Resultados.

Los parámetros adoptados para el predimensionamiento de los pilares y vigas han sido una luz L_{ν} de 5 metros, un entrevigado E de 6 metros, una altura entre forjado y forjado L de 4 metros, un forjado de viguetas y bovedillas de 350 kg/m², una carga muerta de 100 kg/m², una sobrecargad de uso de 250 kg/m² y un hormigón de 30 N/mm² de resistencia característica con densidad 2600 kg/m³ y módulo de elasticidad E_h de 28577·10⁶ Pa. Con estos valores puede comprobarse que secciones de 40 x 40 cm tanto en vigas como en pilares resisten las cargas descritas. La masa distribuida equivalente sobre cada forjado, en la que se incluye el peso propio del forjado, el peso

propio de la viga, la masa de la mitad de cada pilar por encima y por debajo de cada forjado y parte de la sobrecarga de uso, toma el valor de 4620 kg/m.

A continuación se muestran los resultados obtenidos, por un lado, según la solución analítica obtenida en el epígrafe anterior y, por otro lado, a través del código desarrollado para la estructura M.E.F. sin y con acoplamiento. Para modelizar la superficie del terreno en el problema acoplado se han utilizado elementos de contorno de medio metro de longitud, con contornos rígidos de acoplamiento de 2 metros de longitud y una superficie libre discretizada, debido a la sencillez del problema, de 4 metros por cada lado.

En las figuras 8.20 y 8.21 se muestran los espectros de respuesta en frecuencia obtenidos mediante la solución analítica y mediante el código de Elementos Finitos para el desplazamiento horizontal y el giro del primer forjado respectivamente. Se aprecia en primer lugar que las soluciones dadas por ambos métodos son idénticas. En segundo lugar, las cuatro frecuencias naturales de los grados de libertad correspondientes a los desplazamientos horizontales de los forjados se encuentran en el rango de 0 a 60 radianes por segundo, mientras que las cuatro correspondientes a los giros de los forjados están entre los 200 y los 1100 radianes por segundo. Dado que son las primeras frecuencias naturales de un sistema las que más interés tienen, serán éstas las que estudiemos en adelante.

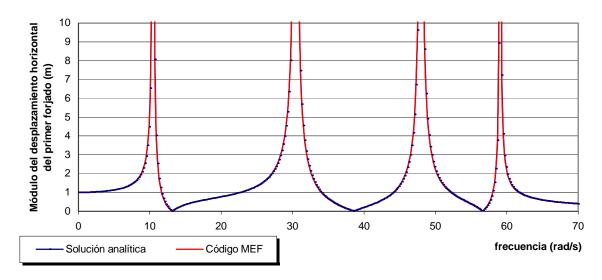


Fig 8.20. Respuesta en frecuencias para excitación horizontal unitaria sobre base rígida.

Desplazamiento horizontal

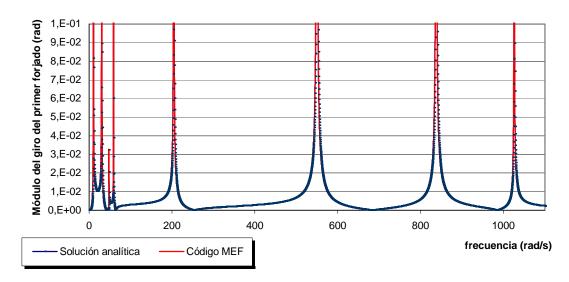


Fig 8.21. Respuesta en frecuencias para excitación horizontal unitaria sobre base rígida. Giro

En la figura 8.22. se muestra el rango entre 0 y 70 radianes por segundo del espectro de respuesta en frecuencias obtenido para el desplazamiento horizontal del primer forjado para tres casos diferentes. En primer lugar, la curva de respuesta de la estructura ante un desplazamiento armónico horizontal unitario en la base. En segundo lugar, la soluciones a través del código de acoplamiento M.E.F.-M.E.C. para la estructura acoplada a dos suelos diferentes, uno muy rígido y otro flexible (con las características de un suelo arenoso, cuyos parámetros toman los siguientes valores: $G = 3,2175 \cdot 10^7$ Pa, $\rho = 1425$ kg/m³, v = 0,4, $\chi = 0,05$), y excitada por una onda S de incidencia vertical y amplitud unitaria. Para éstos dos últimos casos, las soluciones se presentan divididas entre dos dado que una onda S vertical de amplitud unitaria produce un desplazamiento de los puntos de la superficie de valor 2.

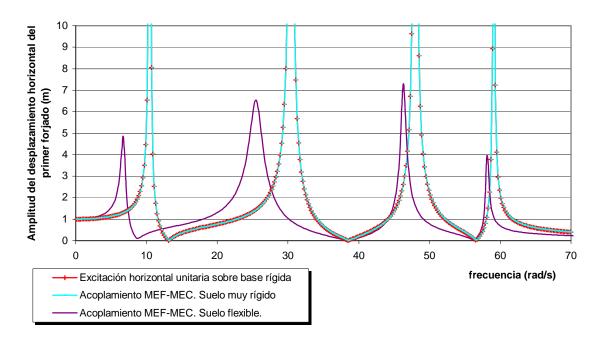


Fig 8.22. Respuesta en frecuencias ante excitación horizontal unitaria de la base y ante Onda S de incidencia vertical y amplitud unitaria. Amplitud del desplazamiento horizontal del primer forjado

Puede apreciarse que la solución de los dos primeros casos es idéntica, tal y como era de esperar, mientras el resultado acoplado en suelo flexible aparece desplazado hacia la izquierda y con la amplitud de sus picos reducida debido a la menor rigidez del conjunto y a la introducción de amortiguamiento en el sistema.

Se deduce, por lo tanto, que es de importancia la correcta evaluación de la rigidez del suelo y la implantación de este dato dentro de un modelo acoplado, dado que la consideración de un suelo infinitamente rígido lleva a la obtención de una frecuencia fundamental superior a la real y, al mismo tiempo, a la consideración de mayores factores de amplificación.

CAPÍTULO 9

Análisis de la Influencia de los Efectos de Interacción Suelo-Estructura. Ejemplos de Cálculo.

9.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los resultados de tres ejemplos de cálculo con diferentes características con el objetivo de analizar e ilustrar los efectos del carácter espacial de la excitación sobre una estructura, de la interacción dinámica suelo-estructura y del efecto local que produce sobre la respuesta una irregularidad en la superfície del terreno ante una onda sísmica. Estos análisis se realizarán, en los dos primeros casos, ante diferentes grados de aproximación de la estructura para ilustrar su influencia en la respuesta, así como ante diferentes valores de la rigidez del suelo en los tres ejemplos.

Por otro lado, los dos ejemplos últimos han sido diseñados de tal manera que la distancia vertical máxima entre apoyos sea del mismo orden de magnitud que la semilongitud de onda transversal para la primera frecuencia natural de la estructura. De este modo, dentro del rango de frecuencias en estudio, diferentes apoyos tenderán a moverse magnitudes diferentes e, incluso, en sentidos diferentes, lo cual representa un tipo de excitación mucho más desfavorable que la uniforme adoptada generalmente en los estudios dinámicos de las estructuras.

El primer ejemplo es el modelo simplificado de un edificio de cuatro alturas que fue ya utilizado en el capítulo anterior. En esta ocasión, se añaden los espectros de respuesta en frecuencia para la hipótesis de pilares infinitamente rígidos a axil, lo cual representa la hipótesis de edificio a cortante que se utiliza habitualmente en los cálculos dinámicos simplificados de estructuras, así como la consideración de la masa distribuida existente en los pilares.

150

El segundo ejemplo es el modelo simplificado de un puente de hormigón armado que salva un cañón de 200 metros de luz y 30 metros de profundidad. En este problema se estudiará el espectro de respuesta en frecuencias del puente excitado de diversas maneras, con dos suelos de diferentes rigideces y con la consideración de un dintel infinitamente rígido o no. Además, se analizará el campo de desplazamientos en los puntos del cañón con y sin la presencia del puente, con el objetivo de ilustrar hasta qué punto este tipo de estructura es capaz de influir en la respuesta dinámica del terreno que lo rodea.

El tercer ejemplo, similar al anterior, representa el modelo simplificado de un puente de acero que salva una luz de 120 metros sobre un cañón de 50 metros de profundidad. Los estudios a realizar en este caso son similares a los comentados para el caso anterior.

9.2 Edificio de Cuatro Alturas.

9.2.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.

La figura 9.1. reproduce el modelo de un edificio de cuatro alturas que ya fue presentado en el capítulo anterior. Los parámetros referentes tanto a la estructura como al suelo y sus discretizaciones son idénticas a las anteriormente descritas, con la única salvedad que en los casos en los que se considera la masa distribuida en los pilares, de valor 415 kg/m, la masa distribuida considerada en los forjados es de 3950 kg/m, dado que se descuenta del valor anterior la masa concentrada equivalente a los pilares.

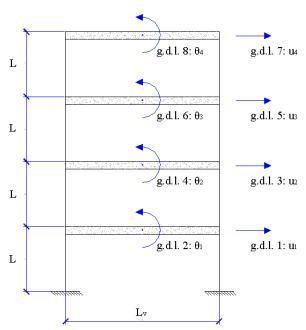


Fig 9.1. Modelo de edificio de cuatro alturas.

9.2.2. Presentación de resultados.

En los epígrafes siguientes se muestran los resultados obtenidos para la estructura sobre base rígida excitada con un desplazamiento armónico horizontal unitario o acoplada a un suelo flexible excitado con una onda S de incidencia vertical. En este último caso se considera un suelo arenoso con módulo de elasticidad transversal G de $3,2175\cdot10^7$ Pa, densidad ρ de 1425 kg/m³, coeficiente de Poisson ν de 0,4 y coeficiente de amortiguamiento γ de 0,05.

En cada uno de estos casos, se presenta el espectro, por un lado, para los pilares con su rigidez real o considerados como infinitamente rígidos a axil y, por otro lado, con su masa considerada distribuida o concentrada en los forjados. Se estudiará, por un lado, la influencia de la rigidez de los pilares y del modelo de masa considerado y, por otro lado, la influencia de la rigidez del suelo.

9.2.2.1. INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ DE LOS PILARES Y SU MODELO DE MASA.

Las figuras 9.2 y 9.3 expuestas a continuación ofrecen las respuestas en frecuencias del desplazamiento horizontal del primer forjado del modelo de edificio de cuatro alturas sobre base rígida y sobre suelo flexible respectivamente.

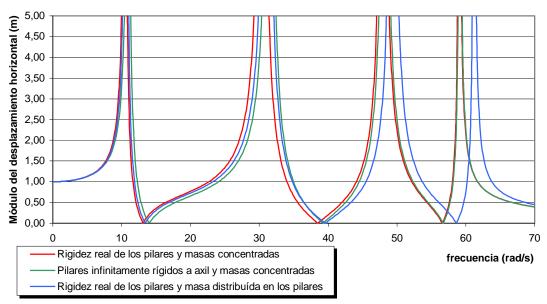


Fig. 9.2. Respuesta en frecuencias del modelo de edificio de cuatro alturas sobre base rígida

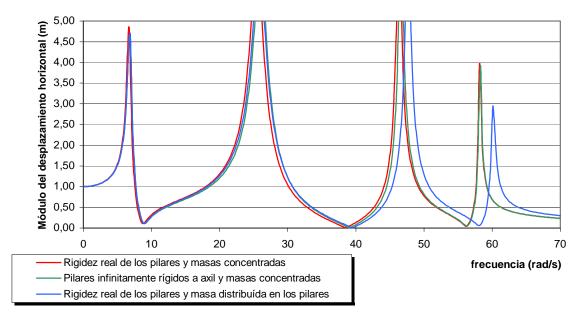


Fig. 9.3. Respuesta en frecuencias del modelo de edificio de cuatro alturas sobre suelo flexible

Puede apreciarse cómo la introducción en el modelo de simplificaciones referentes a la consideración de los pilares como infinitamente rígidos a axil o de su masa como concentrada en los dinteles lleva a frecuencias naturales menores a las reales debido, en el primero de los casos, al aumento de la rigidez del sistema y, en el segundo, al aumento de la inercia de los dinteles respecto al movimiento de traslación. Por tanto, puede afirmarse que la introducción de este tipo de simplificaciones en el modelo posiciona al cálculo dinámico del lado de la seguridad. De todos modos, en este ejemplo en concreto puede observarse que las primeras frecuencias naturales del sistema (que son las de mayor importancia en los cálculos dinámicos) se ven muy poco afectadas por estas simplificaciones, mientras que la mayor influencia que se aprecia sobre la cuarta frecuencia natural (correspondiente al cuarto nivel del edificio) viene maximizada por el hecho de que en el modelo de masas concentradas se consideró, como es práctica habitual, una misma masa para los cuatro dinteles, cuando en el cuarto nivel confluyen tan solo dos de los cuatro pilares que confluyen en el resto de niveles, lo que da lugar a la consideración de una inercia mayor a la real.

9.2.2.2. INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ DEL SUELO

En las figuras 9.4, 9.5 y 9.6 se comparan las respuestas en frecuencia del desplazamiento horizontal del primer forjado del modelo de edificio de cuatro alturas

considerando, respectivamente, la rigidez real de los pilares y su masa concentrada en los dinteles, los pilares como infinitamente rígidos a axil y su masa concentrada en los dinteles y, por último, la rigidez real de los pilares y su masa según el modelo de masa distribuida.

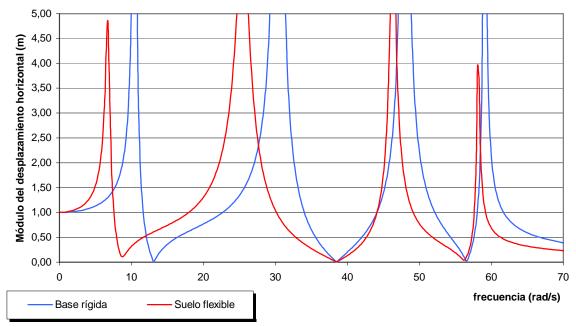


Fig. 9.4. Respuesta en frecuencias del modelo de edificio de cuatro alturas considerando la rigidez real de los pilares y su masa concentrada en los dinteles

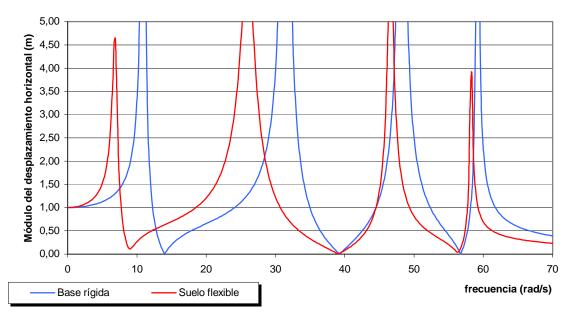


Fig. 9.5. Respuesta en frecuencias del modelo de edificio de cuatro alturas considerandolos pilares infinitamente rígidos a axil y su masa concentrada en los dinteles

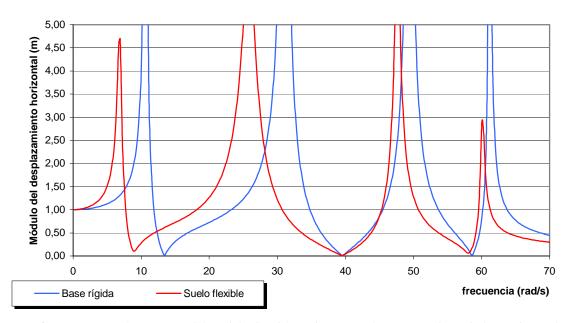


Fig. 9.6. Respuesta en frecuencias del modelo de edificio de cuatro alturas considerando la rigidez real de los pilares y su masa distribuida

En cada una de estas gráficas se aprecia con claridad el efecto de la consideración de la rigidez del suelo, que es mucho más importante que los parámetros estudiados en el epígrafe anterior. De ellas puede extraerse una consecuencia de gran importancia basada en la disminución de la primera frecuencia natural del sistema que, en este caso, es del 36% (aproximadamente desde los 10.5 rad/s a los 6.7 rad/s). Esta disminución sustancial lleva a la conclusión de que aquellos diseños realizados sin tener en cuenta la interacción suelo-estructura en el cálculo de la primera frecuencia natural del sistema se encuentran en el lado de la inseguridad, dado que la estructura, diseñada siempre para que dicha frecuencia natural esté en todo caso por encima de la frecuencia de la excitación esperada, podría en realidad tenerla en un valor considerablemente menor del esperado. De este modo, la estructura podría estar siendo peligrosamente excitada sin el conocimiento de los diseñadores de la misma.

9.3. PUENTE DE HORMIGÓN ARMADO.

9.3.1. Presentación del problema

La figura 9.7 representa el modelo simplificado de un puente de hormigón armado que salva un cañón de 200 metros de luz y 30 metros de profundidad. Considerando un tablero de 6 metros de anchura, el predimensionado ha sido realizado para una sobrecarga de uso de 800 kg/m² y 500 kg/m² de peso propio del forjado. Además, tal y como se comentó en la introducción de este capítulo, se buscó que la primera frecuencia natural fuese tal que diera lugar a una semi-longitud de onda transversal del mismo orden de magnitud que la distancia vertical máxima entre apoyos de pilares, de tal modo que los apoyos estén excitados de manera diferente.

La consideración de estas premisas da lugar a 7 pilares cuadrados de 150 cm. de lado y un dintel con una sección de 0.14766 m⁴ de inercia mínima y apoyos móviles articulados en los extremos, considerando un hormigón con una resistencia característica a compresión de 40 N/mm² y un módulo de deformación instantáneo de 30891 N/mm².

Esta estructura tiene su primera frecuencia natural en torno a los 13.0 rad/s. Considerando un suelo arenoso con módulo de elasticidad transversal G de $3,2175\cdot10^7$ Pa, densidad ρ de 1425 kg/m³, coeficiente de Poisson ν de 0,4 y coeficiente de amortiguamiento χ de 0,05, el valor de la parte real de la velocidad de la onda equivolumial es:

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 150,26 \ m/s \tag{9.1}$$

A partir de este valor, podemos calcular la longitud de la onda transversal para este suelo y a la frecuencia anteriormente comentada como:

$$\lambda_s = c_s \frac{2\pi}{w} = 72,6 m \tag{9.2}$$

Tal y como se comentó anteriormente, la mitad de esta longitud es un valor del mismo orden que la máxima distancia vertical entre apoyos del puente.

Análisis de la Influencia de los Efectos de Interacción Suelo-Estructura 157 Ejemplos de Cálculo

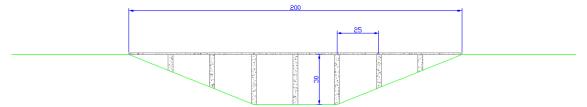


Fig 9.7 Modelo simplificado de puente de hormigón.

Esta estructura ha sido excitada de tres formas diferentes, tal y como se representa en la figura 9.8. En la figura 9.8.a se observa la estructura excitada con un movimiento armónico horizontal y unitario de la base, considerando ésta como perfectamente rígida de tal manera que todos los apoyos tienen idéntico movimiento, tal y como suele considerarse en los estudios dinámicos más habituales de las estructuras. Por otro lado, en la figura 9.8.b se representa una excitación más desfavorable, en la cual los apoyos verticalmente más alejados se mueven según vectores de desplazamiento de igual magnitud pero desfasados 180°. Por último, la figura 9.8.c representa la estructura acoplada a un suelo flexible excitado con una onda S de incidencia vertical. Éste último caso será estudiado para el suelo elástico de características arenosas con módulo de elasticidad transversal G de 3,2175·10⁷ Pa del que se habló anteriormente y para una roca con módulo de elasticidad transversal G de 11500·10⁶ Pa, densidad ρ de 2500 kg/m³, coeficiente de Poisson ν de 0,2 y coeficiente de amortiguamiento ν de 0,05. Además, los resultados serán obtenidos para dos hipótesis diferentes:

- 1) considerando una estructura simplificada cuyos dinteles son infinitamente rígidos a axil y a flexión, y cuyos pilares son infinitamente rígidos a axil, y
- 2) considerando, de forma más realista, dinteles infinitamente rígidos a axil y sus características reales a flexión, así como las características reales de los pilares

Por otro lado, la discretización utilizada en la obtención de todos los resultados con acoplamiento sobre suelo flexible que se presentan a continuación ha sido adoptada tras comprobar que un refinamiento de la misma o una ampliación de la superficie libre no influían significativamente sobre los resultados. Esta discretización está formada por 4 elementos en cada contorno de acoplamiento (de 4 metros de anchura), 10 elementos en cada contorno estándar situado entre contornos de acoplamiento y 30 elementos para discretizar los 75 metros de superficie libre a cada lado de la estructura. Esto da lugar a un sistema con un total de 399 nodos y 21 contornos.

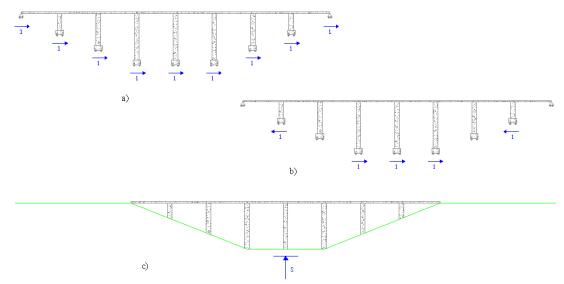


Fig 9.8. Diferentes excitaciones resueltas sobre el puente de hormigón armado.

9.3.2. Presentación de resultados.

En los epígrafes siguientes se presentan los espectros de respuesta en frecuencia para el desplazamiento horizontal del nodo central del tablero del puente. Se estudiarán la influencia del modelo del puente y de la rigidez del puente sobre el espectro de respuesta en frecuencias.

9.3.2.1. INFLUENCIA DEL MODELO DEL PUENTE.

A continuación se presentan las figuras 9.9 y 9.10, en la primera de las cuales se muestra la respuesta del puente ante los tipos de excitación a y b sobre base rígida, mientras que en la segunda se muestra su respuesta ante una onda tipo S de amplitud unitaria e incidencia vertical que se propaga en dos suelos, uno flexible y otro rocoso, ambas para las hipótesis 1 y 2 presentadas en el epígrafe anterior.

En ambas gráficas se aprecia cómo la consideración de un modelo más simplificado, como es el correspondiente a la hipótesis 1, ofrece unas frecuencias naturales sensiblemente mayores, debido a la mayor rigidez otorgada a la estructura. Además, para esta hipótesis la frecuencia natural es única, dado que se comporta como un sistema de un solo grado de libertad, mientras que bajo la hipótesis 2 aparecen varias frecuencias naturales. La conclusión principal es que este tipo de hipótesis

simplificativas sitúan al cálculo dinámico del lado de la inseguridad, al ofrecer frecuencias naturales superiores a las reales.

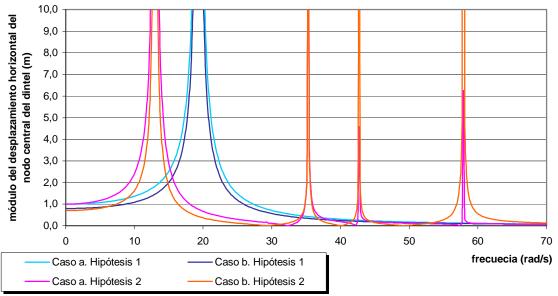


Fig 9.9. Respuesta en frecuencias para el desplazamiento horizontal del nodo central del dintel del puente. Casos a y b de excitación en base rígida. Hipótesis 1 frente a Hipótesis 2.

<u>Hipótesis 1</u>: Dinteles infinitamente rígidos a axil y a flexión. Pilares infinitamente rígidos a axil. <u>Hipótesis 2</u>: Dinteles infinitamente rígidos a axil. Características reales de los pilares.

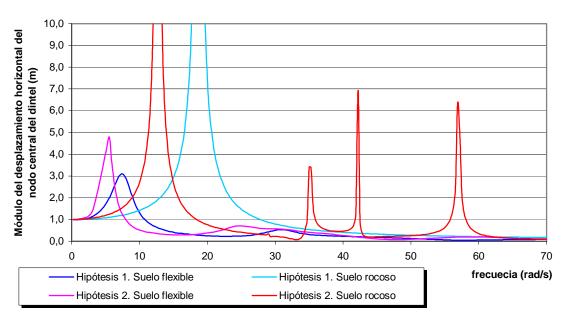


Fig 9.10. Respuesta en frecuencias para el desplazamiento horizontal del nodo central del dintel del puente acoplado a un suelo flexible excitado con una onda S (caso c). Hipótesis 1 frente a Hipótesis 2.

<u>Hipótesis 1</u>: Dinteles infinitamente rígidos a axil y a flexión. Pilares infinitamente rígidos a axil. <u>Hipótesis 2</u>: Dinteles infinitamente rígidos a axil. Características reales de los pilares.

9.3.2.2. INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ DEL SUELO Y DEL MODELO DE EXCITACIÓN.

Las figuras 9.11 y 9.12 corresponden, respectivamente, a las hipótesis 1 y 2 presentadas en el epígrafe anterior. Cada una de ellas presenta la respuesta del puente ante los tipos de excitación *a* y *b* en suelo rígido y *c* en suelos rocoso y flexible.

En ambas figuras se puede apreciar, en primer lugar, cómo los casos *a* y *b* de cada hipótesis dan lugar a curvas que tienen las frecuencias naturales en la misma situación, lo cual no podría ser de otro modo dado que son características de la estructura y no de la excitación. Sin embargo, la amplitud del movimiento es menor en el caso *b* para frecuencias por debajo de la segunda frecuencia natural y mayor para frecuencias situadas en torno o por encima de dicha frecuencia. Esto, sin embargo, no quiere decir en modo alguno que los esfuerzos y deformaciones a los que están sometidos los elementos de la estructura sean menores en el caso b, dado que aquí se estudia la amplitud del desplazamiento en términos absolutos, y no en términos relativos. A este respecto, cabría decir aquí que una vía de desarrollo posterior de este estudio estaría en la transformación de las soluciones aquí obtenidas al dominio del tiempo, donde podrían estudiarse los esfuerzos y deformaciones máximos a que se verían sometidos los elementos de la estructura en los diversos casos y ejemplos de cálculo presentados en este proyecto.

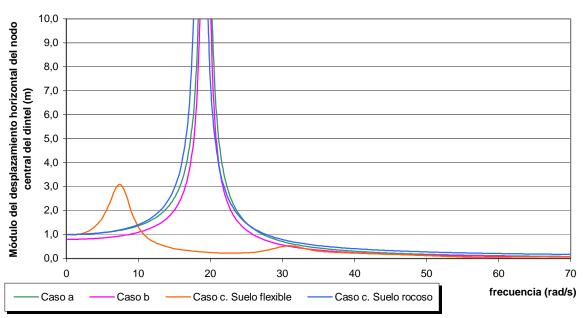


Fig 9.11.Respuesta en frecuencias para el desplazamiento horizontal del nodo central del dintel del puente. Dinteles considerados infinitamente rígidos a axil y a flexión. Pilares infinitamente rígidos a axil. (Hipótesis 1)

En segundo lugar se observa cómo las soluciones para el caso c en suelo rocoso están muy cercanas al caso a o b y, sin embargo, y tal y como era de prever, las curvas resultado del acoplamiento con el suelo flexible arrojan frecuencias naturales del sistema en valores muy por debajo a las de los casos anteriores, así como desplazamientos máximos de menor amplitud, todo ello debido a la disminución de la rigidez del sistema, al carácter espacial de la excitación y al aumento del amortiguamiento, principalmente debido a la radiación que tiene lugar en el medio infinito. Esto lleva a la misma conclusión del ejemplo anterior, por la que el diseño de estructuras sin tener en cuenta el efecto del acoplamiento suelo-estructura puede llevar a la suposición de frecuencias fundamentales superiores a las reales.

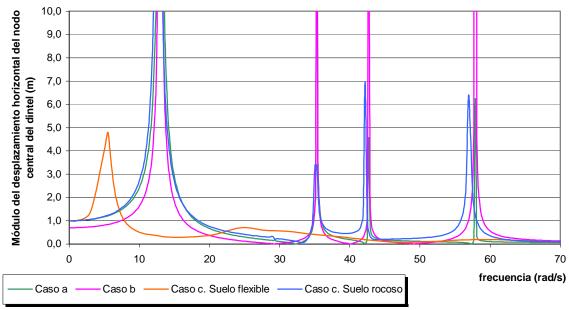


Fig 9.12. Respuesta en frecuencias para el desplazamiento horizontal del nodo central del dintel del puente. Dinteles considerados infinitamente rígidos a axil. Características reales de los pilares. (Hipótesis 2)

9.3.2.3. ESTUDIO DE LOS CAMPOS DE DESPLAZAMIENTO. EFECTO LOCAL E INTERACCIÓN DINÁMICA SUELO - ESTRUCTURA.

En las gráficas anteriores se estudian el carácter espacial de la excitación y la influencia de la rigidez del suelo. En la siguiente serie de gráficas van a analizarse conjuntamente el efecto local y la influencia de la interacción dinámica suelo-estructura. En ellas se representan la amplitud del campo de desplazamientos horizontal o vertical, para suelo flexible o rocoso, de todos los puntos del dominio en estudio, para los casos

en que la onda alcance el cañón sin presencia de la estructura o con la estructura considerada según las dos hipótesis enumeradas con anterioridad. Todos los resultados están obtenidos para 24 rad/s.

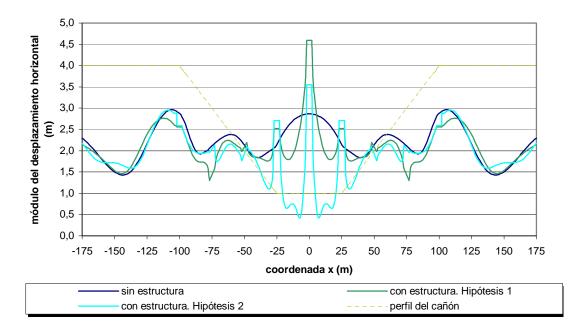


Fig 9.13 Campo de desplazamientos horizontales para un suelo flexible

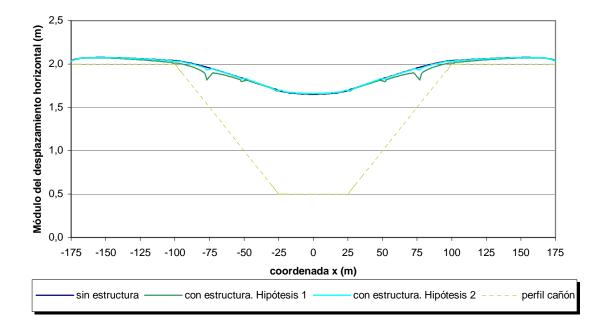


Fig 9.14 Campo de desplazamientos horizontales en un suelo rocoso.

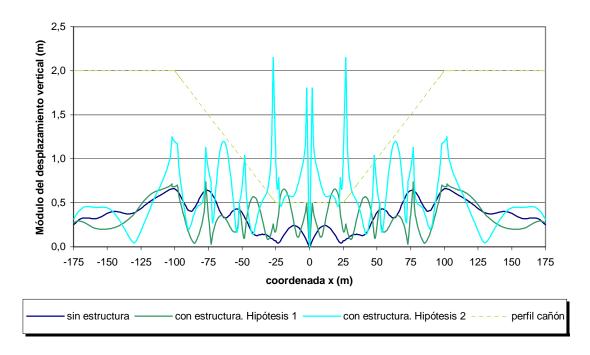


Fig 9.15. Campo de desplazamientos verticales en un suelo flexible

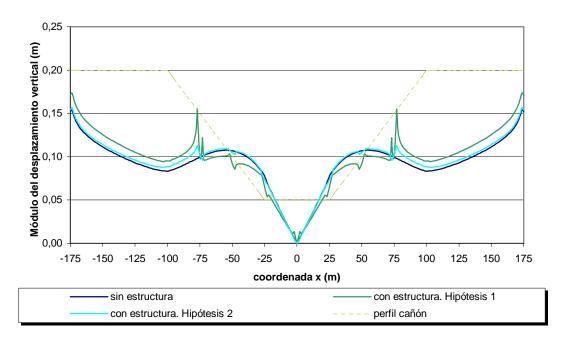


Fig 9.16 Campo de desplazamiento verticales en un suelo rocoso

En primer lugar, en esta serie de curvas se pone de manifiesto el fenómeno del 'Efecto Local', es decir, la modificación del campo de desplazamientos provocada por una alteración morfológica o topográfica del semiespacio plano. En las curvas que representan el campo de desplazamiento para el cañón sin la presencia de la estructura puede verse cómo se modifica el valor de campo libre, que es nulo para el desplazamiento vertical y de 2 metros para el desplazamiento horizontal.

En segundo lugar puede analizarse el efecto de la interacción dinámica sueloestructura, es decir, la modificación del campo de desplazamientos provocado por la
presencia de la estructura en el cañón, que lo restringe e influye al añadir al sistema su
rigidez y su inercia. Este efecto queda representado en el desplazamiento de la curva del
campo de desplazamientos cuando se acopla la estructura en el terreno. Se observa
claramente la posición de los contornos rígidos de acoplamiento, para los que los
desplazamientos describen tramos rectos. En la figura 9.7, la curva de desplazamiento
ofrece incluso tramos horizontales para aquellos apoyos en los que el giro es reducido.
Se aprecia que el fondo del cañón es la zona donde mayor es la distorsión del campo de
desplazamientos, produciéndose un aumento de la amplitud de los desplazamientos en
los entornos de los acoplamientos, posiblemente debido en gran medida a la suma de la
inercia de la estructura a la inercia propia del terreno.

Es evidente que ambos efectos tienen menor importancia cuando el suelo es rocoso y tiene mayor densidad que cuando es menor rígido y menos denso.

Además, el hecho de ser un problema de geometría simétrica y excitación asimétrica da lugar a desplazamientos horizontales idénticos en puntos igualmente alejados del eje, y desplazamientos verticales iguales pero desfasados en 180°, por lo que la amplitud del desplazamiento vertical en el punto central es nulo, tal y como se pone de manifiesto en las curvas obtenidas.

9.4. PUENTE DE ACERO.

9.4.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La figura 9.17 representa el modelo simplificado de uno de los dos pórticos de un puente constituido por barras de acero que salva un cañón de 120 metros de anchura y 50 metros de profundidad. Considerando un tablero de 6 metros de anchura, el predimensionado ha sido realizado para una sobrecarga de uso de 800 kg/m² y 500 kg/m² de peso propio del forjado, obteniéndose la estructura mostrada en la figura en la que las barras tienen una sección de 0.1 m² y una inercia en el plano en estudio de 0.06 m⁴ para cumplir el objetivo, repetido en los apartados anteriores, de obtener una primera frecuencia natural que de lugar a una semi-longitud de onda transversal del mismo orden de magnitud que la distancia vertical máxima entre apoyos de pilares, de tal modo que los apoyos estén excitados de manera diferente.

En este caso, la frecuencia más baja que excita los grados de libertad asociados al desplazamiento horizontal de los nodos del plano de simetría del puente está situada en torno a los 21.3 rad/s. Considerando un suelo flexible con las características de un suelo arenoso con módulo de elasticidad transversal G de 3,2175·10⁷ Pa, densidad ρ de 1425 kg/m³, coeficiente de Poisson ν de 0,4 y coeficiente de amortiguamiento χ de 0,05, el valor de la parte real de la velocidad de la onda equivolumial es:

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 150,26 \ m/s \tag{9.3}$$

A partir de este valor, podemos calcular la longitud de la onda transversal para este suelo y a la frecuencia anteriormente comentada como:

$$\lambda_s = c_s \frac{2\pi}{w} = 44.3 m \tag{9.4}$$

Tal y como se comentó anteriormente, la mitad de esta longitud es un valor del mismo orden que la máxima distancia vertical entre apoyos del puente.

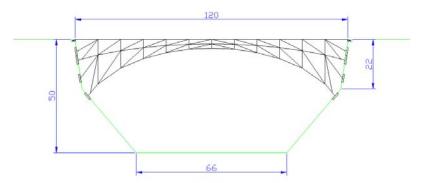


Fig 9.17 Modelo simplificado de un pórtico para un puente constituido con barras de acero.

Tal y como se hizo con el ejemplo anterior, la estructura ha sido excitada de tres formas diferentes, tal y como se representa en la figura 9.18. Los casos son idénticos a los de dicho ejemplo: a) movimiento armónico horizontal y unitario de la base, considerándo esta como perfectamente rígida de tal manera que todos los apoyos tienen idéntico movimiento; b) los apoyos verticalmente distanciados se mueven según vectores de desplazamiento de igual magnitud pero desfasados 90º respecto al anterior; c) la estructura está acoplada a un suelo flexible excitado con una onda S de incidencia vertical.

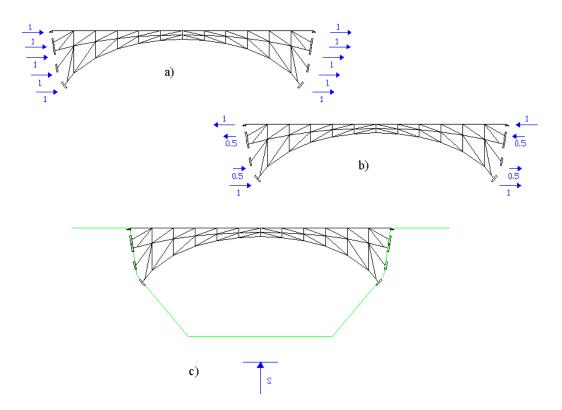


Fig 9.18 Diferentes excitaciones resueltas sobre el puente de barras de acero.

Análisis de la Influencia de los Efectos de Interacción Suelo-Estructura 167 Ejemplos de Cálculo

Éste último caso será estudiado de nuevo para un suelo flexible y otro rocoso. El suelo flexible es el suelo de carácter arenoso descrito en el epígrafe anterior. El suelo rocoso, por el contrario, es un suelo con módulo de elasticidad transversal G de $11500 \cdot 10^6$ Pa, densidad ρ de 2500 kg/m^3 , coeficiente de Poisson v de 0.2 y coeficiente de amortiguamiento χ de 0.05.

Por otro lado, la discretización utilizada en la obtención de todos los resultados con acoplamiento sobre suelo flexible que se presentan a continuación ha sido adoptada tras comprobar que un refinamiento de la misma o una ampliación de la superficie libre no influían significativamente sobre los resultados. Esta discretización está formada por 4 elementos en cada contorno de acoplamiento (de 4 metros de anchura), 5 elementos en cada contorno estándar situado entre contornos de acoplamiento, 15 elementos en los contornos libres inclinados, 30 elementos en el tramo horizontal del fondo del cañón y 30 elementos para discretizar los 75 metros de superficie libre a cada lado de la estructura. Esto da lugar a un sistema con un total de 385 nodos y 25 contornos.

9.4.2. Presentación de resultados.

9.4.2.1. ESPECTROS DE RESPUESTA EN FRECUENCIA.

La figura 9.19 presenta el espectro de respuesta en frecuencias para el desplazamiento horizontal del nodo central del tablero sobre base rígida frente al correspondiente al puente sobre suelo rocoso. A continuación, la figura 9.20 presenta el espectro de respuesta en frecuencias para el desplazamiento horizontal del nodo central del tablero sobre suelo rocoso frente al correspondiente al puente sobre suelo flexible.

De nuevo puede observarse en la figura 9.19 cómo las respuesta correspondiente a la estructura sobre base rígida y excitada con un desplazamiento armónico uniforme y unitario de la base está muy próxima a la correspondiente a la misma estructura acoplada a un suelo rocoso de gran rigidez pero de características reales. Asi mismo, la figura 9.20 arroja nuevamente una disminución de las frecuencias fundamentales del sistema. Además, en este caso puede apreciarse de forma clara el efecto de la introducción del amortiguamiento del terreno y de la radiación de la energía a través del medio infinito, plasmado en la atenuación de la amplitud de los picos correspondientes a las sucesivas frecuencias naturales del sistema.

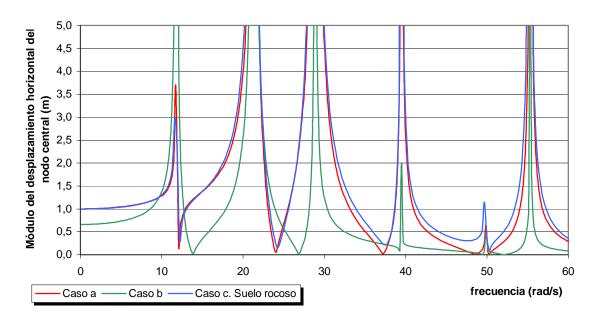


Fig 9.19. Respuesta en frecuencias para el desplazamiento horizontal del nodo central del dintel del puente. Base rígida frente a suelo rocoso.

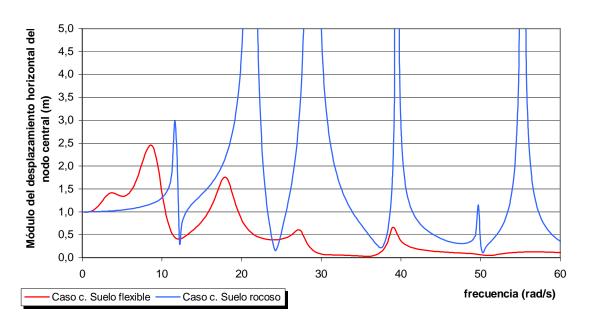


Fig 9.20. Respuesta en frecuencias para el desplazamiento horizontal del nodo central del dintel del puente. Suelo flexible frente a suelo rocoso.

Por otro lado, se aprecia también cómo las curvas de las figuras 9.19 y 9.20 correspondientes a los modelos de excitación *a* y *c* tienden a un valor unitario cuando la frecuencia tiende a cero. No ocurre lo mismo en el caso *b* debido a que la excitación en la base no es de carácter uniforme. Además, conviene recordar que los valores representados para las curvas del caso *c* están divididos entre dos, debido a que el modelo de excitación utilizado, consistente en una onda S de incidencia vertical y amplitud unitaria, produce desplazamientos horizontales en una superficie libre de valor dos, debido a la existencia de ondas reflejadas.

9.4.2.2. ESTUDIO DE LOS CAMPOS DE DESPLAZAMIENTO. EFECTO LOCAL E INTERACCIÓN DINÁMICA SUELO – ESTRUCTURA.

De nuevo se presenta a continuación una serie de gráficas (figuras 9.21 a la 9.24) destinadas a analizar conjuntamente el efecto local y la influencia de la interacción dinámica suelo-estructura. En ellas se representan la amplitud del campo de desplazamientos horizontal o vertical, para suelo flexible o rocoso, de todos los puntos del dominio en estudio, para los casos en que la onda alcance el cañón sin presencia de la estructura o con la estructura considerada según las dos hipótesis enumeradas con anterioridad. Todos los resultados están obtenidos para 24 rad/s.

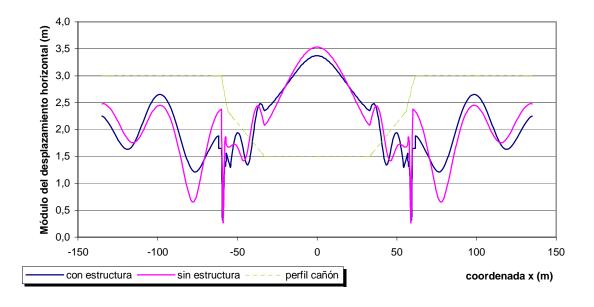


Fig 9.21 Campo de desplazamientos horizontales para un suelo flexible

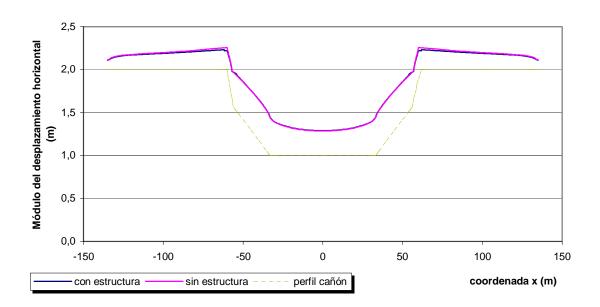


Fig 9.22 Campo de desplazamientos horizontales para un suelo rocoso

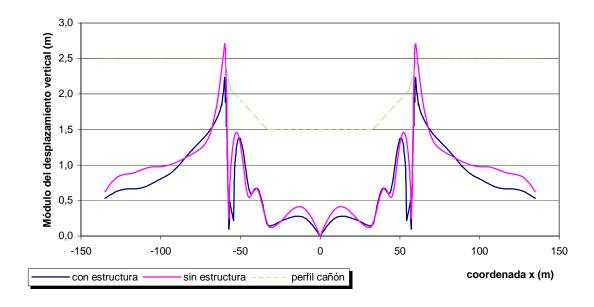


Fig 9.23 Campo de desplazamientos verticales en suelo flexible

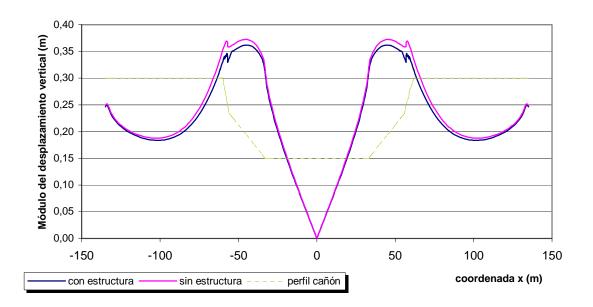


Fig. 9.24 Campo de desplazamientos verticales en suelo rocoso

De nuevo, en esta serie de curvas se pone de manifiesto el fenómeno del 'Efecto local', resultando un campo de desplazamientos horizontal sensiblemente transformado en el entorno del cañón, y que, conforme nos alejamos del mismo, tiende al valor dos, correspondiente al módulo del desplazamiento horizontal del contorno de un semiespacio plano libre. Además, se aprecia cómo "las esquinas" que definen la geometría del cañón son puntos de gran influencia sobre los campos de desplazamientos, y que aparecen remarcados sobre los mismos en forma de cambio bruscos del valor de los desplazamientos.

También puede apreciarse con claridad el efecto de la interacción dinámica suelo-estructura, por el cual la estructura modifica significativamente el campo de desplazamientos del terreno al cual está acoplada. Cabe destacar además cómo el campo de desplazamientos aparece distorsionado no sólo en el entorno próximo a la estructura sino incluso en puntos alejados del cañón sobre la superficie libre discretizada, o también en el fondo del mismo. Sin embargo, la magnitud de la influencia parece ser mucho menor en este ejemplo respecto del anterior, debido fundamentalmente a la menor rigidez de la estructura de este último ejemplo.

CAPÍTULO 10 REVISIÓN, CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

10.1. REVISIÓN Y CONCLUSIONES.

Al realizar el planteamiento de este Proyecto de Fin de Carrera se marcaron una serie de objetivos centrados, por un lado, en la formulación de un modelo acoplado entre el Método de los Elementos Finitos para estructuras de barras y el Método de los Elementos de Contorno, ambos en régimen armónico y planteados para el problema bidimensional; y, por otro lado, en su implementación informática para el desarrollo de una herramienta de cálculo en régimen armónico para el estudio dinámico en general y sísmico en particular de estructuras de barras cimentadas sobre suelos elásticos en problemas bidimensionales, y en la utilización de esta herramienta para analizar algunas estructuras bajo acciones de carácter sísmico, evaluando la influencia de los efectos de interacción suelo-estructura.

Una vez concluido el proyecto, puede sintetizarse el estudio realizado en una serie de conclusiones y comentarios que son enumerados a continuación:

- Se ha formulado un modelo de acoplamiento entre barras pertenecientes a una estructura modelada según el Método de los Elementos Finitos y una porción de terreno modelado según el Método de los Elementos de contorno. Este acoplamiento se realiza a través de un contorno formado por segmentos rectos que se comporta, en conjunto, como un sólido rígido, y que transmite las cargas al terreno cumpliendo condiciones de equilibrio y compatibilidad entre éste y la estructura. Puede, por tanto, ser entendido como una zapata rígida de cimentación en la que se encuentra perfectamente empotrada una barra de la estructura y que descansa sobre el terreno sin posibilidad de separación.
 - Esta formulación ha sido implantada en una herramienta informática capaz de:

- Estudiar problemas M.E.C o M.E.F. por separado, donde es posible contemplar, de manera genérica, cualquier discretización, abierta o cerrada, correspondiente a un problema M.E.C. con un terreno elástico y lineal y múltiples tipologías correspondientes a estructuras de barras, pudiendo definir las características mecánicas y másicas de cada elemento, así como masas puntuales, desplazamientos prescritos en los apoyos, o un cierto modelo de amortiguamiento en la estructura. De este análisis pueden obtenerse los desplazamientos y las tensiones o esfuerzos correspondientes a cualquier nudo del sistema, así como las reacciones en los apoyos o los esfuerzos en las barras.
- Estudiar problemas de acoplamiento entre una estructura y su terreno de cimentación, modelados según el M.E.F y el M.E.C. respectivamente, pudiendo definirse múltiples barras y contornos de acoplamiento y pudiendo obtener como resultados los expuestos en el punto anterior.
- Excitar el sistema mediante cargas armónicas sobre la estructura, tensiones o desplazamientos armónicos sobre el terreno, así como ondas tipo P o SV de amplitud y orientación genéricas.
- Se ha analizado la validez del código desarrollado. Éste punto ha sido realizado, en primer lugar, mediante la comparación de sus resultados con problemas estáticos o dinámicos en base rígida de solución analítica conocida y, en segundo lugar, mediante el análisis de los resultados obtenidos en problemas de estructuras acopladas en medios elásticos, flexibles o rígidos. Los resultados obtenidos de este conjunto de análisis han sido enteramente satisfactorios.
- Han sido estudiados tres ejemplos de cálculo, correspondientes a los modelos simplificados de un edificio de cuatro plantas, un puente de hormigón y un puente de acero. Los resultados y conclusiones derivados de estos ejemplos servirán de material didáctico, fundamentalmente en la asignatura de 'Teoría de Estructuras' de esta Escuela.
- Se ha analizado la influencia de suponer o no los pilares de un edificio como infinitamente rígidos a axil (modelo de edificio a cortante) así como de considerar la masa de los mismos como distribuida a lo largo de ellos o como concentrada en los dinteles. En el ejemplo analizado se ha visto cómo estas simplificaciones tienen poca influencia sobre la respuesta dinámica de un edificio en altura, si bien su influencia

tiende a aumentar el valor de la primera frecuencia fundamental, lo que sitúa a esta simplificación del lado de la seguridad en este tipo de análisis dinámicos.

- Se ha analizado la influencia de simplificar el modelo de un puente de hormigón suponiendo su tablero como infinitamente rígido a axil y a flexión y sus pilares como infinitamente rígidos a axil. Ha sido comprobado cómo el valor de la frecuencia fundamental del sistema aumenta al realizar este tipo de simplificaciones, por lo que se puede concluir que se trata de simplificaciones que colocan el cálculo dinámico de la estructura del lado de la inseguridad.
- Se ha analizado el efecto de considerar que la estructura reposa sobre una base rígida o sobre el terreno de cimentación con sus características propias, así como la influencia de la rigidez de éste último. En todos los ejemplos estudiados se ha podido constatar que cuando el terreno es de gran rigidez, como es el caso de la roca, los resultados varían muy poco respecto a la consideración de una base rígida. Sin embargo, a medida que aumenta la flexibilidad del medio, el efecto del acoplamiento aumenta. En el caso de suelos de gran flexibilidad (como es el caso de un suelo arenoso como el estudiado) la variación de la respuesta del sistema es de gran importancia y, además, sitúa al cálculo simplificado del lado de la inseguridad, hasta el punto de poder afirmarse que un análisis que obviase los efectos de la interacción suelo-estructura en casos de terrenos de cierta flexibilidad no debería considerarse adecuado.
- Se ha puesto de manifiesto la influencia del 'carácter espacial de la excitación', debido al cual diferentes apoyos de la estructura tendrán, en general, diferentes valores de desplazamiento, velocidad y aceleración en un mismo instante de tiempo, lo cual endurece de manera considerable respecto al planteamiento tradicional las solicitaciones a las que se ven sometidos los elementos de la estructura.
- Se ha puesto de manifiesto el fenómeno del 'Efecto local', es decir, la modificación del campo de desplazamientos provocada por una alteración morfológica o topográfica del semiespacio plano. En los ejemplos estudiados, los accidentes geográficos que ha dado lugar a este fenómeno han sido los modelos de dos cañones.
- Se ha puesto de manifiesto el efecto de la interacción dinámica suelo-estructura, es decir, la modificación del campo de desplazamiento provocado por la presencia de la estructura en el cañón. Se ha podido constatar cómo este efecto puede tener importancia en estructuras de cierta rigidez como puede ser el caso de algunos tipos de puente.

10.2. DESARROLLOS FUTUROS.

Con este capítulo se da punto final a este Proyecto Fin de Carrera, pero de ningún modo se finaliza el estudio planteado en este documento, fruto a su vez de diversas líneas de investigación seguidas en la actualidad. De hecho, se citan a continuación varias ideas que podrían servir de punto de partida a desarrollos futuros en torno al tema en el que se ha centrado este proyecto:

- Estudio de nuevos ejemplos de cálculo, con mayor variedad de terrenos, topografías y tipologías de estructuras, así como casos reales.
- Estudio de la influencia sobre la respuesta del sistema de la presencia de estratos en el subsuelo.
- Estudio de sistemas excitados con otro tipo de acciones, como puedan ser cargas dinámicas sobre la estructura o sobre el terreno, así como ondas P y SV con diferentes ángulos de incidencia.
- Estudio de este problema en el dominio del tiempo, bien a través de la Transformada de Fourier aplicada sobre la solución en el dominio de la frecuencia aquí presentada, o bien atacando el problema directamente en el dominio del tiempo.
- Desarrollo de un código capaz de estudiar la existencia de una carga móvil situada sobre el terreno o sobre la estructura. De nuevo, este punto puede llevarse a cabo a través de la Transformada de Fourier desde el dominio de la frecuencia, o bien directamente en el dominio del tiempo.
- Desarrollo de un modelo que permita la existencia de libertades en los apoyos, ya sean giros o desplazamientos.
- Desarrollo de una formulación distinta del acoplamiento que comprenda la posibilidad de separación entre el elemento de acoplamiento y el terreno, la existencia de un modelo de interacción entre las superficies como puede ser el modelo de rozamiento de Coulomb, y/o la consideración de una cierta flexibilidad para el elemento de acoplamiento.
- Generalización del programa para el estudio de problemas con excitaciones en dirección perpendicular al plano (caso de ondas SH) mediante la consideración de estructuras de emparrillado o para el estudio de problemas 3D, mediante la utilización de códigos M.E.F. y M.E.C tridimensionales.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- Abascal, R., 2000, "Cálculo Matricial de Estructuras", E.T.S.I.I. de Sevilla, España
- Abascal, R. "Teoría de Estructuras", E.T.S.I.I. de Las Palmas de G.C.
- Achenbach, J.D., 1973, "Wave Propagation in Elastic Solids". North-Holland, Amsterdam.
- Alarcón, E., Martín, A. and París, F., 1979, "Boundary Elements in Potencial and Elasticity Theory", Computer and Structures, Vol. 10, pp. 351-362.
- Brebbia, C.A., Domínguez, J., 1992, "Boundary Elements. An Introductory Course", Second edition, Comput. Mech. Publ and McGraw-Hill Book Comp., Southampton and New York
- Canet, J.M., Barbat, H., 1988, "Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas", CIMNE, Barcelona.
- Clogh, W., Penzien, J., 1993, "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, NY
- Domínguez, J., 1993, "Boundary Elements in Dynamics". Computational Mechanics Publications, Southampton and Elsevier Applied Science, London.
- Domínguez, J., 1984, "Comment on an Implementation of the Boundary Element Method for Zones Media with Stress Discontinuities", Int. J. Numer, Methods in Engineering, Vol. 22, pp. 1756.
- Domínguez, J., Abascal, R., 1984, "On the fundamental Solutions for the Boundary Integral Equations Method in Static and Dynamic Elasticity", Eng. Anal., 1(3), 128-134
- Eringen, A.C. and Suhubi, E.S., 1975, "Elastodynamics", Vol.2. Linear theory, Academic Press, New York.
- Galante, M., 1985, "Dinámica de las Estructuras", E.T.S.I.I. de Las Palmas.
- Graffi, D., 1946, "Sul Teorema di reciprocitá Nella Dinamica dei Corpi Elastici", Mem. Accad. Sci. Bologna, Ser.10, 4, 103-111.
- Hartman, F., 1989, "Introduction to Boundary Elements". Springer-Verlag, Berlín.
- Miklowitz, J., 1977, "The Theory of Elastic Waves and Wave Guides", North-Holland, Amsterdam

- París, F., 1978, "El método de los Elementos de Contorno en la Teoría del Potencial y la Elasticidad", *Tesis doctoral*, Univ. Politécnica de Madrid.
- París, F., 1998, "Teoría de la Elasticidad". E.T.S.I.I. de Sevilla., España
- Stokes, G.G., 1849, "On the Dynamical Theory of Diffraction". Trans. Cambridge Philos. Soc., Vol.9, pag. 1-62.
- Zhang, C. y Zhao, C., 1988, "Effects of Canyon Topography and Geological conditions on Strong Ground Motion", Earthquake Engrb. Struct. Dyn., 16, 81-97