

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS  
DE GRAN CANARIA



## PROYECTO FIN DE CARRERA

ESTUDIO COMPARATIVO DE LA METODOLOGÍA A EMPLEAR EN  
PROBLEMAS DE INTERACCIÓN DINÁMICA SUELO-ESTRUCTURA.  
UNA APLICACIÓN PRÁCTICA

AUTOR:

JUAN JOSÉ PÉREZ GONZÁLEZ

TUTORES:

DR. D. ORLANDO MAESO FORTUNY

DR. D. JUAN JOSÉ AZNÁREZ GONZÁLEZ

DICIEMBRE DE 2006



# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. ANTECEDENTES . . . . .	3
1.2. OBJETO DEL TRABAJO FIN DE CARRERA . . . . .	4
1.3. EL CASO PRÁCTICO ANALIZADO . . . . .	6
1.4. EL PROBLEMA DE LA INTERACCIÓN SUELO - ESTRUCTURA. . . . .	7
1.5. METODOLOGÍA UTILIZADA . . . . .	12
<b>2. El Método de los Elementos de Contorno</b>	<b>19</b>
2.1. ECUACIONES BÁSICAS DE LA ELASTODINÁMICA LINEAL . . . . .	21
2.2. PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS ELÁSTICOS . . . . .	23
2.3. ONDAS DE PRESIÓN EN FLUIDOS . . . . .	25
2.4. ECUACIONES DE GOBIERNO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA . . . . .	27
2.5. CONDICIONES DE CONTORNO . . . . .	29
2.6. FORMULACIÓN INTEGRAL DEL PROBLEMA ELASTODINÁMICO . . . . .	31
2.7. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ESCALAR . . . . .	39
2.7.1. Solución Fundamental . . . . .	42
2.8. ACOPLAMIENTO DE SUBREGIONES SÓLIDAS Y/O LÍQUIDAS. . . . .	43
2.9. ASPECTOS NUMÉRICOS . . . . .	46
2.9.1. Discretización del Contorno . . . . .	46
2.9.2. El problema de Esquina . . . . .	48
2.9.3. Evaluación de las Integrales en el Contorno . . . . .	50
<b>3. Análisis Dinámico</b>	<b>59</b>
3.1. EL MÉTODO DIRECTO . . . . .	61
3.2. EL MÉTODO DE LOS TRES PASOS . . . . .	61
3.2.1. Interacción cinemática . . . . .	62
3.2.2. Rigideces del terreno . . . . .	63

3.2.3.	Sistema Dinámico Equivalente . . . . .	65
3.3.	EL MEC EN AMBAS METODOLOGÍAS . . . . .	70
3.3.1.	Método Directo . . . . .	70
3.3.2.	La Interacción Cinemática . . . . .	71
3.3.3.	Cálculo de Rigideces . . . . .	71
3.3.4.	Campo incidente y Campo difractado . . . . .	72
3.4.	DESCRIPCIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS FÍSICAS Y GEOMÉTRICAS .	85
3.4.1.	La estructura . . . . .	85
3.4.2.	El terreno . . . . .	87
<b>4.</b>	<b>Modelo de Elementos de Contorno del problema a analizar</b>	<b>89</b>
4.1.	PROBLEMA I . . . . .	94
4.1.1.	La estructura . . . . .	95
4.1.2.	La Superficie Libre . . . . .	96
4.2.	PROBLEMA II . . . . .	97
4.2.1.	La estructura . . . . .	98
4.2.2.	La Superficie Libre . . . . .	99
4.3.	PROBLEMA III . . . . .	100
4.3.1.	La Estructura . . . . .	100
4.3.2.	La Superficie Libre . . . . .	101
4.4.	PROBLEMA IV . . . . .	102
4.4.1.	La Estructura . . . . .	103
4.4.2.	La Superficie Libre . . . . .	104
4.5.	Problema V . . . . .	105
4.5.1.	La Estructura . . . . .	106
4.5.2.	La Superficie Libre . . . . .	107
4.6.	Problema VI . . . . .	108
<b>5.</b>	<b>Resultados</b>	<b>111</b>
5.1.	PROBLEMA I . . . . .	113
5.1.1.	Método Indirecto . . . . .	114
5.1.2.	Método Directo . . . . .	123
5.2.	PROBLEMA II . . . . .	126
5.2.1.	Método Indirecto . . . . .	127
5.2.2.	Método Directo . . . . .	133
5.2.3.	Influencia del Enterramiento . . . . .	135

5.3. PROBLEMA III . . . . .	138
5.3.1. Método Indirecto . . . . .	138
5.3.2. Método Directo . . . . .	143
5.3.3. Influencia de la estratigrafía . . . . .	145
5.4. PROBLEMA IV . . . . .	147
5.4.1. Método Indirecto . . . . .	148
5.4.2. Método Directo . . . . .	154
5.4.3. Influencia de la estratigrafía . . . . .	156
5.5. PROBLEMA V . . . . .	158
5.5.1. Método Indirecto . . . . .	159
5.5.2. Método Directo . . . . .	161
5.6. PROBLEMA VI . . . . .	163
5.6.1. Influencia de el agua . . . . .	166
<b>6. Revisión, Conclusiones y Desarrollos Futuros</b>	<b>169</b>
<b>A. Mejora de las Mallas</b>	<b>175</b>
<b>B. Gráficas</b>	<b>185</b>
B.1. PROBLEMA I . . . . .	187
B.1.1. Comparación Método Directo y Método Indirecto . . . . .	187
B.2. PROBLEMA II . . . . .	191
B.2.1. Comparación Método Directo y Método Indirecto . . . . .	191
B.2.2. Comparación Problema II y Problema I . . . . .	196
B.3. PROBLEMA III . . . . .	200
B.3.1. Comparación Método Directo y Método Indirecto . . . . .	200
B.3.2. Comparación Problema III y Problema I . . . . .	205
B.4. PROBLEMA IV . . . . .	209
B.4.1. Comparación Método Directo y Método Indirecto . . . . .	209
B.4.2. Comparación Problema IV y Problema II . . . . .	214
B.5. PROBLEMA V . . . . .	218
B.5.1. Comparación Método Directo y Método Indirecto . . . . .	218
B.6. PROBLEMA VI . . . . .	221
B.6.1. Comparación Problema VI y Problema V . . . . .	221

<b>C. Tutorial GiD</b>	<b>225</b>
C.1. CREACIÓN DE LA GEOMETRÍA . . . . .	228
C.1.1. Entidades . . . . .	228
C.1.2. Capas . . . . .	229
C.1.3. Líneas . . . . .	230
C.1.4. Copiar, Rotar y Extruir . . . . .	231
C.1.5. Figura . . . . .	232
C.2. MALLADO DE LA GEOMETRÍA . . . . .	233

Capítulo 1

# Introducción

---



## 1.1. ANTECEDENTES

La necesidad de diseñar y construir de forma óptima estructuras que van a estar sometidas a acciones dinámicas, como pueden ser el paso de un tren sobre un puente, la acción del viento sobre un edificio o la excitación que produce un terremoto sobre cualquier tipo de construcción, pone de manifiesto la importancia del estudio de la Dinámica de Estructuras.

En toda programación de Teoría de Estructuras en una Escuela Técnica Superior, existe un bloque temático dedicado específicamente a este ámbito. Dentro de este bloque se estudia el caso de estructuras civiles sometidas a excitaciones sísmicas y se analizan los distintos factores que influyen en su respuesta.

Tradicionalmente, este problema se aborda con planteamientos clásicos que incorporan importantes simplificaciones, y que están recogidos en las normativas de construcción de los diferentes países.

En este transfondo se enmarca el proyecto presentado: el estudio y análisis de modelos numéricos que permiten evaluar los factores que influyen en la respuesta dinámica de estructuras.

Convencionalmente, para el estudio de estructuras sometidas a sollicitación sísmica, existen dos metodologías: un procedimiento directo, en el que estructura y cimentación se analizan conjuntamente como un super-sistema acoplado ante la sollicitación dinámica; o bien un procedimiento indirecto (o por pasos) en el que los efectos de interacción mutua suelo-estructura se contemplan de forma simplificada en pasos sucesivos (tres pasos en la práctica, de lo cual ha ido derivando el nombre de ‘método de los tres pasos’ con el que habitualmente se conoce este método). El primero de los procedimientos (método directo) tiene como ventaja principal la de acercarse más fielmente a la realidad. Sus inconvenientes son su complejidad y el elevado número de grados de libertad que implica. El segundo (método de los tres pasos), al analizar el sistema por partes, es menos preciso, si bien suele suponer un menor costo computacional. Tradicionalmente, el método indirecto ha sido, por su simplicidad, el más empleado. De hecho, utilizado con ‘buen oficio’ ha demostrado su grado de validez en un gran número de problemas concretos. Sin embargo, son

muchos los aspectos del problema, desde la propia definición de la excitación sísmica hasta el comportamiento acoplado de la estructura con el suelo de cimentación, que no están completamente comprendidos en la actualidad y son objeto de aportaciones científicas constantes en numerosas revistas dedicadas al tema.

Estos hechos son lo que hace de la respuesta dinámica de estructuras un importante campo de trabajo e investigación, el cual continúa siendo un tema completamente abierto. De esta forma y en este contexto, un estudio sistemático de las diferencias que supone el uso de una u otra metodología aplicada a un análisis concreto es un tema de gran interés y actualidad.

## 1.2. OBJETO DEL TRABAJO FIN DE CARRERA

De acuerdo a la memoria que acompañaba a la solicitud de título de PFC, estudiado y aprobado por la comisión de proyectos de fin de carrera en octubre de 2006, se persigue como objeto último de este estudio la comparación de dos estrategias muy utilizadas en el campo de la dinámica de estructuras; un método directo, y un método indirecto (denominado método de los tres pasos), tratando así de definir sus diferencias principales, basándose en las soluciones obtenidas al resolver un mismo problema con ambos métodos.

Para ello, se define un problema patrón (caso práctico concreto) que corresponde al análisis sísmico de una estructura cilíndrica de hormigón genérica, de grandes dimensiones, parcialmente enterrada en un terreno estatificado, saturado o no de agua. Esta tipología estructural puede ser aplicable a distintos casos como un silo nuclear, un reactor nuclear, una estación de bombeo en una infraestructura hidroeléctrica, etc. Se admite la hipótesis de comportamiento lineal.

El análisis se centra en la obtención de la respuesta dinámica de la estructura provocada por un tren de ondas que se propagan por el suelo. Se trata de un estudio del problema en el dominio de la frecuencia. Se analizará la respuesta de la estructura a través del método directo y a través del método de los tres pasos. Se evaluarán las posibles diferencias o discrepancias en los resultados. Asimismo se estudiará la influencia de aspectos tales como la estratigrafía del suelo, el grado de enterramiento

de la estructura y la flexibilidad de la estructura. Todos los cálculos se realizarán con un software desarrollado por los tutores basado en el Método de los Elementos de Contorno.

Más detalladamente los objetivos a cumplir son:

- Estudio de las bases de la elastodinámica lineal (lo cual supone una extensión de la asignatura troncal Elasticidad y Resistencia de Materiales), haciendo hincapié en la comprensión de los fenómenos de propagación de ondas elásticas y su formulación
- Estudio de los modelos de excitación sísmica vinculados a la propagación de ondas elásticas en el suelo. Comprensión de la naturaleza propagatoria del sismo, lo que conlleva que puntos del suelo separados entre sí estén sometidos en un instante determinado a desplazamientos de diferente valor, e incluso en desfase. Esta cuestión se ha revelado de suma importancia en el caso de estructuras de gran tamaño.
- Instrucción en los modelos ‘clásicos’ contemplados en las normativas para cálculo sísmico de estructuras, así como las simplificaciones que introducen, para tener una idea clara del ámbito de aplicación adecuado de dicha normativa, y de cuales son los principales fenómenos que no contempla.
- Asimilar las bases de los métodos numéricos que han servido para el desarrollo de software aplicable al análisis de la propagación de ondas en medios elásticos, y al cálculo sísmico de estructuras. Dicho software forma parte de la infraestructura de la ya que se dispone, y ha sido elaborado durante más de una década por los profesores del Departamento.
- Entrenamiento en el uso de esta batería de programas informáticos, de manera que, bajo tutela de los profesores, sea capaz de utilizarlos adecuadamente. Se pretende que el alumno aplique dichos programas al estudio de la influencia de las características del emplazamiento en la definición de la excitación sísmica.
- Desarrollo del modelo y evaluación de la influencia de las características geológicas/geotécnicas del emplazamiento en la respuesta. Se evaluará la influencia de los efectos de interacción suelo-estructura, carácter espacial de la excitación, y se obtendrán todas las conclusiones relativas a las diferencias encontradas frente al uso de modelos que no contemplan dichas características.

- Se deberá generar una batería de resultados que sirvan de material didáctico para ilustrar la influencia de los efectos estudiados. Este material tendrá utilidad docente en las asignaturas Teoría de Estructuras y Construcciones Industriales (troncal), Mecánica de Sólidos Elásticos (optativa) y Cálculo Avanzado de Estructuras (optativa).

### 1.3. EL CASO PRÁCTICO ANALIZADO

Como objeto central del estudio se ha optado por una estructura genérica, que bien puede responder a la configuración estructural de un silo nuclear, bien a la de un pozo de refrigeración o a la estación de bombeo de un sistema hidroeléctrico.

A fin de dotar al problema de unas características físicas lo más aproximadas a magnitudes reales, se ha definido el problema de la figura 1.1, que consiste en un cilindro hueco en su mayor parte de 14 metros de radio exterior y 80 metros de altura. De los cuales los 50 m. inferiores están enterrados en un terreno estratificado y los 10 metros siguientes se encuentran por debajo del nivel del agua. Los muros, de hormigón armado, tienen un espesor de 1.5 metros, y se cuenta en la parte enterrada con una pantalla de 1 metro de espesor nominal, por lo que la perforación en el terreno es de 15 metros de radio. Los 20 metros inferiores en el interior de la torre, se encuentran rigidizados por diferentes forjados que sirven como base a maquinaria, cuartos de máquinas y control, talleres varios y demás recintos que pudieran ser necesarios. Las magnitudes físicas que terminan de definir el problema, (densidad, coeficiente de elasticidad...) serán descritas posteriormente. Además se utilizará un modelo simplificado consistente en un cilindro macizo de 50 metros de altura y 15 de radio. A fin de estudiar la influencia del hecho de simplificar la estructura, así como la de ciertas características físicas del problema. También permitirá comprobar la potencia del código utilizado.

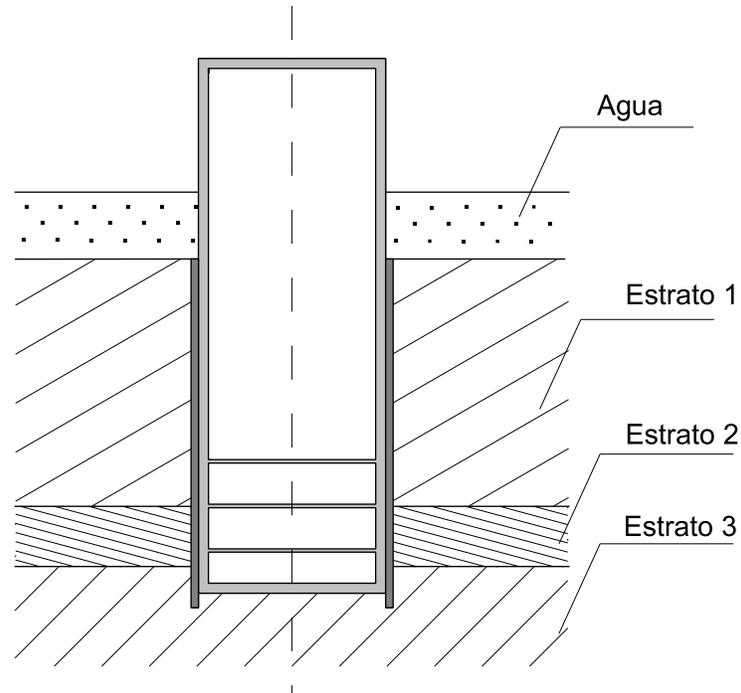


Figura 1.1: Alzado del problema

#### 1.4. EL PROBLEMA DE LA INTERACCIÓN SUELO - ESTRUCTURA.

Este problema ha sido ampliamente estudiado por numerosos autores, se puede encontrar un estudio más concreto en trabajos como Abascal (1984) y Domínguez (2003).

El comportamiento de estructuras apoyado en suelos deformables y sujetas a acciones dinámicas puede depender en gran parte de las propiedades del suelo y en las características de la cimentación. El análisis de este comportamiento requiere un modelo que tenga en cuenta no solamente la estructura, sino también el suelo y las fuerzas de interacción dinámica existentes entre ellos. Los primeros problemas de interacción dinámica suelo-estructura, que fueron estudiados en los años 30, estaban relacionados a la vibración de grandes máquinas montadas en cimentaciones masivas. El comportamiento dinámico de estas máquinas, sólo podía ser entendido teniendo en cuenta la interacción dinámica entre el suelo y la cimentación. Edificios altos, o cualquier otra estructura cimentada, sometidos a cargas de viento, también son ejemplos de problemas donde la interacción dinámica suelo-estructura puede tener

efectos importantes y donde la excitación es directamente aplicada a la estructura. El análisis de las estructuras bajo efectos de terremotos, lleva a un segundo tipo de problema interacción dinámica suelo-estructura donde la excitación es transmitida a través del terreno.

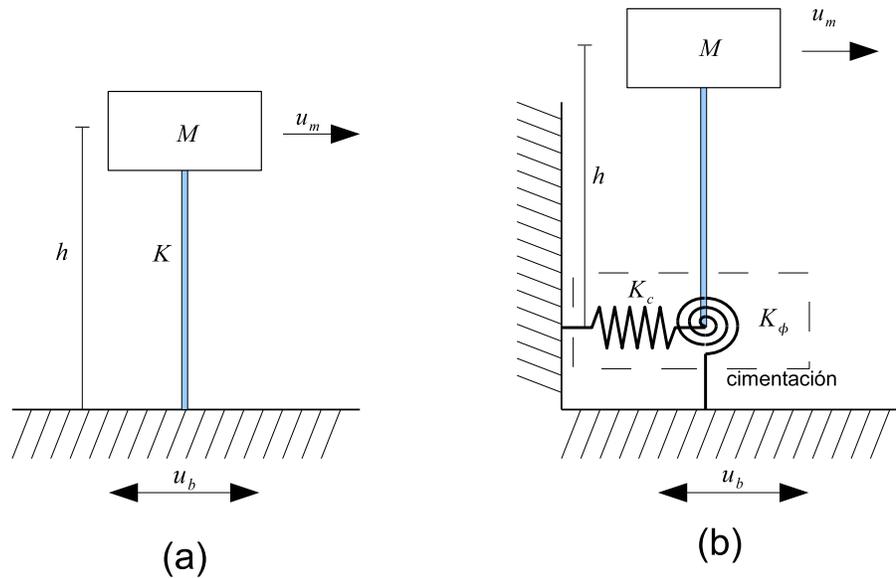


Figura 1.2: Consideración de la interacción dinámica suelo-estructura

Para mostrar de un modo simple la importancia de los efectos de la interacción suelo estructura en la respuesta dinámica de estructuras cimentadas, basta con comparar dos problemas muy similares en apariencia: el primero (figura 1.2a) se trata de una masa puntual  $M$  unida a un base a través de una barra de longitud  $h$  y rigidez horizontal  $K$ , la masa tiene impedidos los desplazamientos verticales. La respuesta de este sistema en caso de aplicar una excitación a la base es más que conocida y se rige por la ecuación:

$$M \ddot{u}_m + K u_m = -M \ddot{u}_b \quad (1.1)$$

donde  $u_m$  es el desplazamiento de la masa y  $u_b$  el de la base. La frecuencia natural del sistema será:

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M} \quad (1.2)$$

El segundo problema (figura 1.2b) consiste en intercalar entre barra y base una cimentación infinitamente rígida y sin masa, pero que puede desplazarse horizon-

talmente con una rigidez  $K_c$  y girar con una rigidez  $K_\phi$  con relación al terreno. La ecuación equivalente a (1.1) del problema anterior sería:

$$M \left( \frac{K}{K_c} + \frac{K h^2}{K_\phi} + 1 \right) \ddot{u}_m + K u_m = -M \ddot{u}_b \quad (1.3)$$

la frecuencia natural sería en este caso:

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M} \frac{1}{\left( \frac{K}{K_c} + \frac{K h^2}{K_\phi} + 1 \right)} \quad (1.4)$$

Es evidente que la consideración en el sistema de la rigidez de la cimentación afecta notablemente a la respuesta del sistema y a su frecuencia natural.

Un problema sencillo en el que se muestra el cálculo de la impedancia de cimentación es el mostrado en la figura 1.3. Se asume que la cimentación es un bloque rígido y sin masa apoyado en un semiespacio que representa el terreno. La relación entre la fuerza dinámica aplicada ( $p(t)$ ) a la cimentación y su desplazamiento ( $x(t)$ ) es la impedancia.

$$K(\omega) = \frac{p(t)}{x(t)} \quad (1.5)$$

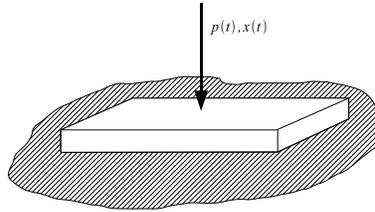


Figura 1.3: Cimentación rígida sobre semiespacio uniforme

donde  $p(t) = P_0 e^{i\omega t}$  y  $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ . Estas amplitudes ( $P_0$ , y  $X_0$ ) son números complejos, y por lo tanto también lo será la impedancia.

A fin de comprender el significado de la rigidez de la cimentación, se puede considerar una analogía sencilla dibujada por Roesset (1980). En este modelo, se asume que la figura 1.4 representa el suelo debajo de la cimentación.

Su ecuación de equilibrio será:

$$p(t) = m_s \ddot{x} + c_s \dot{x} + k_s x \quad (1.6)$$

sometido a cargas armónicas tal que:

$$\frac{p(t)}{x(t)} = (k_s - m_s \omega^2) + i \omega c_s \quad (1.7)$$

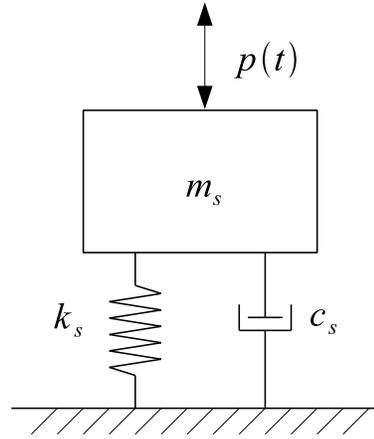


Figura 1.4: Modelo para la respuesta dinámica del suelo

por comparación de las ecuaciones (1.5) y (1.7) se puede obtener que:

$$K(\omega) = (k_s - m_s \omega^2) + i \omega c_s = k_1 + i k_2 \quad (1.8)$$

$$K(\omega) = k_s \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + 2 i \beta \frac{\omega}{\omega_n} \quad (1.9)$$

donde  $\omega_n = \sqrt{k_s/m_s}$  y  $\beta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{k_s m_s}}$  Esta ecuación puede ser escrita como:

$$K(\omega) = k_s(k + i \omega c^*) \quad (1.10)$$

La constante del resorte del modelo simple representa la rigidez estática de la cimentación mientras que los coeficientes dependientes de la frecuencia  $k$  y  $c^*$  representan las parte real e imaginaria de la rigidez dinámica de la cimentación. Estos coeficientes pueden ser representados en función de la frecuencia angular  $\omega$  tal y como se muestra en la figura 1.5.

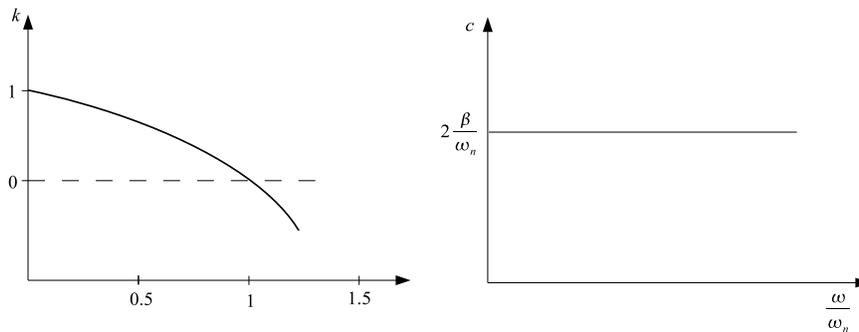


Figura 1.5: Coeficientes de rigidez para el modelo de la figura 1.4

De forma general se puede decir que la influencia de la interacción dinámica suelo-estructura en las respuestas de construcciones frente a sollicitaciones sísmicas

es importante para construcciones grandes y masivas. Cuando una estructura grande es excitada por ondas viajando a través del terreno, como ocurre durante un terremoto, se presentan dos efectos importantes asociados al tamaño de la cimentación y la estructura. El primero se denomina interacción cinemática y está asociado al tamaño y la geometría de la cimentación. La existencia de cimentaciones de gran tamaño exentas de masa, producirían por si mismas una interferencia en las ondas incidentes de tal manera que la respuesta de la cimentación es función de su geometría. El fenómeno puede ser ilustrado por la imagen de dos barcos muy ligeros en la superficie del mar (figura 1.6); uno muy pequeño y otro igualmente ligero pero de mayor tamaño. El primero seguirá el movimiento de la superficie libre sin producir ningún cambio en él; el segundo tendrá su propio movimiento y cambiará el desplazamiento del mar en su cercanía.

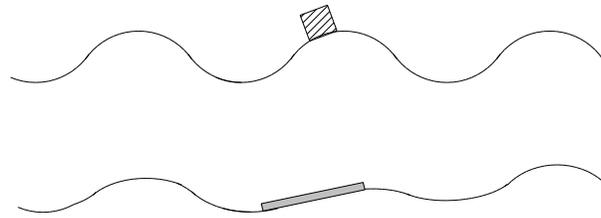


Figura 1.6: Interacción cinemática

El segundo efecto es conocido como el efecto de tren de ondas (figura 1.7). Tiene lugar cuando la longitud característica de la estructura es del mismo orden que la longitud de onda de las ondas sísmicas. La importancia de esta característica depende del tamaño de la estructura y el tipo, frecuencia y dirección de las ondas.

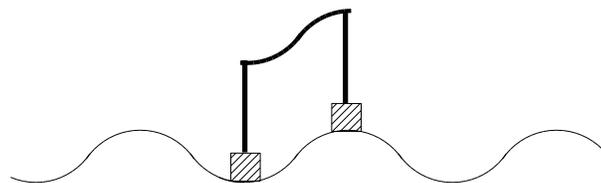


Figura 1.7: Efecto de Tren de Ondas

## 1.5. METODOLOGÍA UTILIZADA

Existe una amplia bibliografía en relación con la diversa metodología para enfrentarse a la resolución del problema de la interacción suelo-estructura: Chopra et al.(1981), Alarcón et al.(1979), Brevia et al. (1992). En Emperador (1988) se hace una visión muy acertada e interesante acerca de los diferentes procedimientos con los que obtener la solución de dicho problema. El punto de vista de este autor ha sido el adoptado para la redacción de este apartado.

Desde una óptica muy general, puede decirse que la ingeniería tiene planteados un número de problemas muy diversos para los que no se conoce una solución exacta de forma explícita. Con la aparición y generalización del uso de los computadores digitales, surgen una serie de técnicas numéricas que proporcionan soluciones aproximadas, con precisión y costo razonables.

En este estudio, el problema afrontado pertenece al grupo de los que no poseen solución explícita por lo tanto se aborda de forma numérica. El problema, en general, se refiere a obtener la solución en tensiones y desplazamientos de una estructura sometida a sollicitaciones dinámicas y en particular a los efectos que la interacción entre el suelo y estructura tienen sobre la respuesta de esta última.

Es claro que un gran número de las estructuras que se diseñan tienen una clara vinculación con el terreno sobre el que se mueven, o asientan; como ejemplo se pueden citar: maquinarias, vehículos, edificaciones, obras civiles etc...

Antes de la aparición de métodos de resolución adecuados, a pesar de que era bien conocida la interdependencia entre suelo y estructura, solía realizarse el análisis dinámico de la estructura desvinculada del mismo; esta hipótesis, aunque inexacta, suele ser suficiente para aquellas estructuras de no elevada importancia o responsabilidad.

En ciertas estructuras, bien por su importancia en sí mismas, p. e. puentes de grandes luces o edificios en altura; bien por sus repercusiones tanto ecológicas como de índole de seguridad, caso de centrales nucleares, resulta evidente que se debe realizar el estudio conjunto de ambas partes: estructura y terreno.

La realidad actual es que el número de estructuras a las que hay que aplicar un análisis dinámico conjunto crece constantemente y esta necesidad ha inducido numerosas investigaciones en este sentido. Los métodos desarrollados son fundamentalmente dos: el Método Directo y el Método de los Tres Pasos o de Subestructuración.

En el Método Directo el análisis se realiza conjuntamente entre ambos elementos estructurales, el terreno y la superestructura, aplicándoles alguno de los métodos numéricos de resolución ya mencionados, usualmente el método de los elementos finitos o como en este caso el método de los elementos de contorno. La estructura y el suelo se discretizan, empleando para ello los tipos de elementos adecuados, en especial aquellos elementos utilizados para modelizar el terreno, ya que éstos han de tener en cuenta la parte del mismo que no ha sido discretizada.

La solución al problema puede ser hallada en dos dominios diferentes. En el dominio del tiempo, aquel en el que todas las variables dependen de la variable tiempo, mediante una técnica de resolución de Integración Paso a Paso. En el dominio de la frecuencia (aquel en el que todas las variables son del tipo armónico o bien pueden ser descompuestas en la suma de ellos), la respuesta se consigue a través de la obtención de la función de transferencia del sistema para cada frecuencia, obtenida al resolver el sistema de ecuaciones resultante de aplicar la transformada de Fourier o de Laplace a las ecuaciones de campo en el dominio del tiempo. Se puede obtener la solución en este último dominio al realizar el producto de la función de transferencia del sistema y la función transformada de la excitación, y aplicarle a éste la antitransformada correspondiente.

El método de integración paso a paso permite tener en cuenta las posibles no linealidades del conjunto analizado, teniendo como principal inconveniente su fuerte dependencia del intervalo de tiempo escogido para cada uno de los pasos, debido a que este debe ser pequeño para obtener una solución correcta, penalizándose el tiempo de ejecución y por tanto su costo final.

El análisis en el dominio de la frecuencia, pese a su mayor sencillez, tiene dos inconvenientes fundamentales: el primero es que no permite tener en cuenta las no linealidades existentes, y el segundo es que para obtener una respuesta temporal

equivalente a la del análisis en el tiempo, es necesario obtener una gama muy amplia de frecuencias.

En el Método de los tres Pasos o de la Subestructuración, se consideran separadamente la super estructura y el terreno, su denominación proviene de que han de resolverse en tres pasos sucesivos.

1. Determinación de los desplazamientos de la cimentación, rígida y sin masa, debidos a los movimientos producidos por un tren de ondas elásticas, incidentes a través del suelo
2. Cálculo de las impedancias dinámicas de la cimentación mediante la aplicación de los movimientos de sólido rígido adecuados y de la evaluación de los esfuerzos producidos.
3. Determinación de la respuesta de la superestructura, suponiéndola soportada no ya por el terreno sino sobre los resortes y amortiguadores equivalentes, obtenidos en el segundo paso, y sometiendo la base rígida a los movimientos determinados en el primero.

Los inconvenientes de este método se centran en la dificultad de modelizar el comportamiento no lineal del terreno, así como no tener en cuenta la influencia de las propiedades de la estructura sustentada, al no estar ésta incluida en los modelos utilizados en los pasos primero y segundo.

Algunas de las ventajas que presenta este método son:

- a) Los modelos utilizados son muy simples.
- b) Permite efectuar análisis de sensibilidad a los diferentes parámetros, basados en diferentes hipótesis a lo largo de los tres pasos, lo que nos da, una mayor y mejor información, acerca de los distintos factores que intervienen en el problema global.

Hasta hace relativamente pocos años, el método numérico más utilizado con ambos enfoques de resolución del problema era el de los Elementos Finitos, que suponen un semiespacio elástico, o un medio estratificado horizontalmente, yaciendo

sobre una base infinitamente rígida. En cualquiera de ellos, habrá de obtenerse el movimiento de la base rígida compatible con el movimiento conocido en la superficie; utilizando para ello varios procedimientos.

Los principales inconvenientes de los modelos desarrollados basándose en los elementos finitos son dos:

1. La estratigrafía real del suelo puede no ser rectos ni paralelos, entre si y la base, como por ejemplo, valles de aluvión etc...
2. La base sobre la que se asienta la estratigrafía del terreno considerado no ha de ser siempre rígida

Ambas limitaciones vienen impuestas, la primera por la matriz consistente de contorno, elemento especialmente desarrollado para este tipo de problemas, que cierra la zona de terreno discretizada. La segunda por la imposibilidad inherente al método de modelar medios seminfinitos o infinitos.

Por estas razones se han desarrollado otras técnicas numéricas tales como el Método de los Elementos de Contorno, el cuál será utilizado tanto como método directo, como herramienta para calcular los pasos sucesivos del método de los tres pasos.

El Método de los elementos de contorno (MEC) es una técnica numérica basada en la formulación de ecuaciones integrales de problemas de mecánica de los medios continuos. Hay dos tipos de formulación de ecuaciones integrales. Una posee como incógnitas principales, variables con un claro sentido físico y en términos de las cuales se dan las condiciones de contorno. Esto es la formulación directa. En el segundo tipo, conocido como formulación indirecta, las incógnitas fundamentales carecen de todo sentido físico. EL MEC, se basa casi exclusivamente en la formulación directa, en él las incógnitas de las ecuaciones integrales son valores en el contorno de las principales variables de campo (por ejemplo, desplazamientos en elasticidad) y sus derivadas, que también poseen sentido físico (tracciones en elasticidad). Estas funciones son aproximadas en el contorno a través de los valores en un determinado número de puntos (nodos) y un conjunto de ecuaciones de interpolación previamente seleccionadas. Para hacer la interpolación y el subsecuente proceso de integración más llevadero, el contorno se divide en partes (elementos)

Este método, posee unas características generales que vienen a solventar los principales inconvenientes del método de los elementos finitos (MEF). Ya que en el MEC sólo se discretiza el contorno, el sistema de ecuaciones resultantes es mucho menor que en métodos que requieren la discretización del dominio completo como lo es el de elementos finitos y el de diferencias finitas. Otra consecuencia de trabajar sólo el dominio es que el proceso de generación de mallas al involucrar sólo la superficie es más sencillo que el utilizado por los métodos que involucran al dominio completo. El precio a pagar por esta ventaja es que los sistemas de ecuaciones así obtenidos, no son simétricos y la matriz suele carecer de excesivos ceros que alivian el tiempo de computación, lo que en ocasiones puede resultar en mayores tiempos de cálculo a pesar de que el número de grados de libertad sea menor. Una segunda característica del MEC es que de él se obtienen resultados de alta precisión tanto en el contorno como en cualquier punto interno, esta cualidad lo hacen un candidato perfecto en problemas donde se requiera gran exactitud en la respuesta.

Entre las desventajas del método, también se puede recalcar el hecho de que para tratar con propiedades no lineales de los materiales existe una dificultad añadida, consistente en tener que incluir en las ecuaciones integrales de dominio. Lo cual puede acabar con las ventajas de un método basado en las condiciones en los contornos si existen zonas demasiado extensas de material no lineal.

Todo esto forma parte de la naturaleza general del método y puede ser aplicado a problemas del medio continuo en estática y en dinámica. Hay sin embargo una diferencia adicional entre el MEC y los métodos numéricos basados en el dominio que se debe resaltar debido a su relevancia en la solución de ciertos problemas dinámicos. Esto es al tratar con espacios semi-infinitos o infinitos, en los métodos que discretizan el dominio, deberían hacerlo hasta el infinito, lo que en realidad sucede es que se malla el dominio hasta cierto punto en el que se coloca un contorno artificial de algún tipo. Estos contornos pueden ser utilizados sin problemas en estática, pero en dinámica, pueden aparecer falsas reflexiones de ondas en esa superficie que distorsionen los resultados. Por el contrario el MEC está basado en una formulación de ecuaciones integrales, las cuales en caso de regiones externas, consiste en integrales extendiéndose sólo sobre los contornos internos, y además sólo se discretizan estos últimos. El comportamiento de los dominios sin contorno está representado por estas integrales definidas en los contornos internos. Esta importante característica, unido

al hecho de que la mayoría de los análisis dinámicos se limitan al comportamiento lineal, ha convertido al MEC en la alternativa más adecuada para resolver problemas en importantes campos de la ingeniería como son la interacción dinámica suelo estructura o acústica en espacios abiertos.



Capítulo 2

# El Método de los Elementos de Contorno

---

## INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta de manera general el método de los elementos de contorno, se intenta que muestre un proceso de evolución natural partiendo de las ecuaciones que gobiernan los diferentes medios que formarán el sistema [2.1], una vez descritos, se explica su respuesta frente a excitaciones armónicas [2.2] y [2.3] y como integrar en esas ecuaciones las condiciones exteriores o interacciones entre los diferentes medios[2.5]. Terminado de definir las bases del MEC, se describe la formulación propia del método para ambos medios (viscoelástico y potencial) que serán objeto de estudio [2.6] y [2.7] además del proceso necesario para implementar varios medios de diferentes naturalezas en un mismo sistema [2.8]. Con lo cual queda completamente definido el método. La última sección [2.9] sirve como parte explicativa de la matemática necesaria en ciertos pasos del método. Para un estudio en mayor profundidad, se puede recurrir a la bibliografía consultada en la redacción de este capítulo. Aznárez (2002), Domínguez (1993) y Maeso (1992).

## 2.1. ECUACIONES BÁSICAS DE LA ELASTODINÁMICA LINEAL

Al igual que en problemas estáticos, las ecuaciones de equilibrio en las tres direcciones y la ley de comportamiento del material constituyen las relaciones básicas que gobiernan el comportamiento de sólidos elásticos en régimen dinámico. En este problema, sin embargo, las variables del problema serán funciones con dependencia temporal además de espacial, y será necesario incluir las fuerzas de inercia y disipación en las ecuaciones de equilibrio del mismo.

Con todo ello, las relaciones cinemáticas básicas se establecen de igual forma que en elastostática. Así, si  $\mathbf{x}$  representa el vector posición de cualquier punto del sólido  $\Omega$  en relación al sistema de referencia cartesiano fijo y  $t$  la variable tiempo, a partir de las componentes del vector desplazamiento  $u_i(\mathbf{x}, t)$  en cada punto del sólido  $\Omega$ , se define el tensor de pequeñas deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  como:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1)$$

obviamente simétrico ( $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ). Por otro lado, las ecuaciones de equilibrio a nivel diferencial responden a la ecuación:

$$\sigma_{ij,j} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{u}_i \quad (2.2)$$

donde  $\sigma_{ij}$  representa el tensor de tensiones (simétrico, si se establece el equilibrio de momentos  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ),  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  las componentes de las fuerzas de volumen por unidad de masa y  $\rho$  la densidad del material.

Por último, la relación entre el tensor de tensiones y el de deformaciones se establece a través de la ley de comportamiento. Esta relación, también llamada ecuación constitutiva, viene dada por la ley de Hooke, que para materiales homogéneos e isótropos con comportamiento elástico y lineal tiene la siguiente expresión:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.3)$$

o bien, en forma inversa:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (2.4)$$

siendo  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker. Así, para la hipótesis de partida, la relación tensión-deformación puede expresarse en función de sólo dos constantes (ver p.e. París, 1998). En (2.3) el módulo de elasticidad ( $E$ ) y el coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), mientras en (2.4) el módulo de elasticidad transversal ( $\mu = \frac{E}{2(1-\nu)}$ ) y la constante de Lamé ( $\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$ ). En esta última,  $\varepsilon_{kk}$  representa la dilatación volumétrica del medio. En algunos casos puede resultar interesante la utilización del módulo de rigidez volumétrica o módulo de compresibilidad ( $K$ ) como una de las constantes características del medio. Esta constante representa la rigidez de un sólido al cambio de volumen de la misma forma que  $\mu$  representa la rigidez al cambio de forma. Ambas pueden adoptarse como constantes del medio, la primera relacionada con la componente esférica y la segunda con la desviadora de la ley de comportamiento. Haciendo uso de (2.4) en un problema hidrostático,  $K$  será la relación entre la presión y el cambio unitario de volumen provocado por ésta:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.5)$$

Las relaciones cinemáticas (3.34), las ecuaciones de equilibrio en tensiones (3.35) y la ley de Hooke (2.4) constituyen un sistema de ecuaciones completo que gobierna el campo de desplazamientos de un dominio lineal, homogéneo e isotrópico. Todas estas ecuaciones presentan una dependencia espacio-temporal que representa físicamente el carácter ondulatorio de la solución del problema. Así, ante una sollicitación genérica variable en el tiempo, la respuesta del sistema en desplazamientos, tensión o deformación serán ondas que se propagan en el interior del dominio en estudio.

Con todo, este sistema de ecuaciones planteado puede ser condensado y formular el comportamiento del medio en término de las tres componentes del vector desplazamiento. Así, sustituyendo (3.34) y (2.4) en (3.35) podemos expresar las ecuaciones de equilibrio como sigue (ecuación de Navier):

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.6)$$

de forma vectorial:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.7)$$

expresión que ha de satisfacerse en todos los puntos del dominio en estudio para cada instante de tiempo. La integración de (2.7) y la obtención del campo de desplazamientos en el dominio  $\Omega$ , requiere la imposición de las restricciones en

el contorno  $\Gamma$  de  $\Omega$  en forma de tensiones y desplazamientos conocidos además de establecer condiciones iniciales en  $t = 0$  para las tres componentes del desplazamiento y la velocidad en cada punto del medio. Conocido ya el campo de desplazamientos, el tensor de deformaciones  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$  puede obtenerse de (3.34) de forma sencilla, y con él el tensor de tensiones  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$  a partir de la ley de comportamiento (2.4).

## 2.2. PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS ELÁSTICOS

En esta sección se estudian que características tienen los fenómenos de propagación de ondas en un medio elástico, homogéneo e isótropo. Se parte, para ello, de las ecuaciones de equilibrio dinámico en desplazamientos (2.7) y del problema que representa su integración teniendo en cuenta que las variables fundamentales (las tres componentes del desplazamiento) se presentan acopladas. En este sentido, los procedimientos que permiten desacoplar este sistema de ecuaciones arrancan de los trabajos de Poisson, si bien es Stockes (Stokes, 1849) el primero que presenta una formulación en términos de la dilatación volumétrica  $\theta$  y el vector de rotación  $\boldsymbol{\omega}$  que permiten desacoplar estas ecuaciones de un modo simple.

$$\begin{aligned}\theta &= \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.8}$$

En término de estas variables, la laplaciana del campo de desplazamientos puede ser expresada como sigue:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \theta - \nabla \times \boldsymbol{\omega}\tag{2.9}$$

que introducida en el sistema de ecuaciones (2.7), permite escribirlo en los siguientes términos:

$$-\mu \nabla \times \boldsymbol{\omega} + (\lambda + 2\mu) \nabla \theta = \rho \ddot{\mathbf{u}}\tag{2.10}$$

Aplicando ahora los operadores divergencia y rotacional sobre esta ecuación, en la que para mayor simplicidad se han eliminado las cargas de volumen, y teniendo en cuenta que  $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = 0$  y  $\nabla \times (\nabla \theta) = 0$  además de ser nula la divergencia del vector rotación, se puede escribir respectivamente:

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{c_P^2} \ddot{\theta}\tag{2.11}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{c_S^2} \ddot{\boldsymbol{\omega}}\tag{2.12}$$

donde:

$$c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad y \quad c_S^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.13)$$

Las ecuaciones (2.11) y (2.12) representan una versión desacoplada de las ecuaciones de Navier (2.7) en términos de la dilatación y las tres componentes del vector de rotación. Se trata de ecuaciones de onda, la primera escalar y la segunda vectorial ( $c_P$  y  $c_S$  tienen dimensiones de velocidad). Así, la componente dilatacional o irrotacional de la perturbación (asociada a cambios de volumen) se propaga con velocidad  $c_P$  mientras que la componente rotacional o equivoluminal (asociada a distorsiones en la forma) viaja con velocidad  $c_S$ . En un medio homogéneo e isótropo infinito ambas componentes coexisten y se propagan independientemente siendo  $c_P > c_S$ , razón por la cual en sismología se denomina a las ondas irrotacionales *ondas primarias* (ondas P) y a las equivoluminales *ondas secundarias* (ondas S), ya que las primeras alcanzan la estación en menor tiempo desde el epicentro del sismo. Esto último justifica la notación utilizada desde el comienzo para ambas.

Utilizando  $c_P$  y  $c_S$  como constantes características del medio, podemos escribir la ecuación de gobierno del problema (2.10) como sigue:

$$-c_S^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} + c_P^2 \nabla \theta = \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.14)$$

Expresión algo más conveniente para estudiar las características del movimiento de los puntos del sólido bajo el efecto de estas ondas. Para ello, se supone un problema de propagación plana armónica de carácter genérico con velocidad  $c$  y dirección determinada por el vector unitario  $\mathbf{s}$  (ver p.e. Domínguez, 1993). El campo de desplazamientos en notación compleja y con amplitud unitaria, puede expresarse como sigue:

$$\mathbf{u} = e^{i(\omega t - k\mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (2.15)$$

donde  $k$  es el número de onda ( $\frac{\omega}{c}$ ),  $\omega$  es la frecuencia angular,  $\mathbf{x}$  el vector posición de cualquier punto del medio,  $i$  la unidad imaginaria y  $\mathbf{d}$  un vector unitario en la dirección del movimiento. Así, sustituyendo (2.15), cada uno de los términos de (2.14) serán:

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -k^2 \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) e^{i(\omega t - k\mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.16)$$

$$\nabla \theta = -k^2 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} e^{i(\omega t - k\mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.17)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 e^{i(\omega t - k\mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (2.18)$$

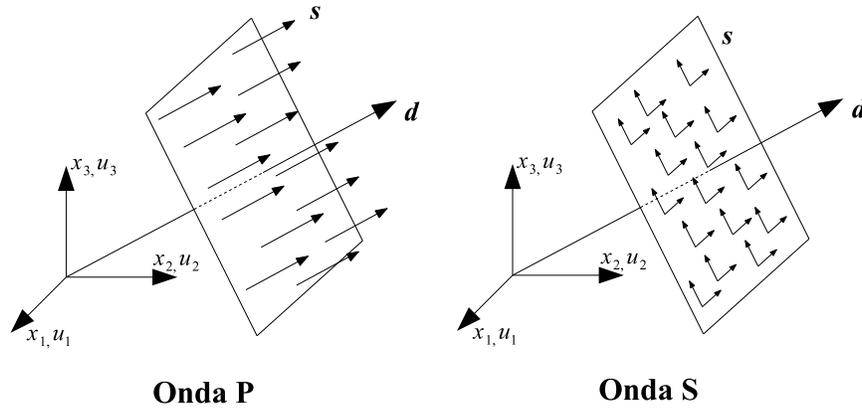


Figura 2.1: Desplazamientos y dirección de propagación. Ondas planas P y S

Por tanto, y teniendo en cuenta que  $\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} - \mathbf{d}$ , la ecuación (2.14), en este caso, puede expresarse como sigue:

$$(c_S^2 - c^2) \mathbf{d} + (c_P^2 - c_S^2) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} = 0 \quad (2.19)$$

Con ello, si (2.15) es una onda S ( $c = c_S$ ), esta relación sólo se verifica si  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{d} = 0$  y, por tanto, si las direcciones de propagación y desplazamiento son perpendiculares. Se trata de una onda transversal y el vector desplazamiento está contenido en el plano de propagación. Por otra parte, si (2.15) es una onda P ( $c = c_P$ ), el cumplimiento de (2.19) requiere que  $\mathbf{s} = \pm \mathbf{d}$  y la dirección de propagación y desplazamiento coinciden. Así la onda P es una perturbación de carácter longitudinal y el desplazamiento de los puntos del sólido se produce en la dirección de propagación (figura 2.1). Este planteamiento realizado para ondas armónicas puede generalizarse sin excesiva dificultad a cualquier tipo de perturbación plana.

En este apartado sólo se han tratado los aspectos básicos necesarios para entender lo que sigue en los próximos capítulos. Un tratamiento en profundidad de la teoría de la elastodinámica puede estudiarse en Achenbach (1973) o Eringen y Suhubi (1975)

### 2.3. ONDAS DE PRESIÓN EN FLUIDOS

En este punto se introducen las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico del agua. Así será tratada como un fluido incompresible y de viscosidad despreciable (fluido perfecto) con comportamiento elástico y lineal que trabaja en un rango de pequeñas perturbaciones.

Todos los fluidos reales tienen viscosidad distinta de cero y los tensores de tensión presentan componentes de cortante no nulas. No obstante, la viscosidad varía entre amplios márgenes para diferentes fluidos de forma tal que, en algunos casos, puede ser despreciada sin que se produzca pérdida de exactitud en los resultados. Así, en las regiones líquidas del modelo que se presenta (agua), los efectos inerciales serán predominantes sobre los viscosos y el fluido podrá considerarse no viscoso. No se tienen en cuenta los efectos provocados por turbulencias. Un fluido perfecto (no viscoso) no soporta tensiones tangenciales y el tensor de tensiones se reduce a su componente esférica.

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (2.20)$$

siendo  $p$  la presión. El signo negativo indica una tensión de compresión para un valor positivo de la presión. En un rango de pequeñas perturbaciones y teniendo en cuenta el carácter elástico y lineal del modelo, la ley de comportamiento puede plantearse desde la ley de Hooke descrita para sólidos elásticos (2.4):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} &= -p = K_f \varepsilon \\ \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde, si  $U(\mathbf{x}, t)$  son las componentes del campo de desplazamientos en el fluido,  $\varepsilon = \varepsilon_{kk} = U_{i,i}$  representa la dilatación volumétrica del mismo.  $K_f$  es el módulo de compresibilidad del fluido. También a partir de las ecuaciones de equilibrio para sólidos elásticos (3.35), puede expresarse el equilibrio en un fluido perfecto de densidad  $\rho$  como sigue:

$$-\nabla p = \rho \ddot{\mathbf{U}} \quad (2.22)$$

o haciendo uso de (2.21)

$$K_f \nabla \varepsilon = \rho \ddot{\mathbf{U}} \quad (2.23)$$

La ecuación (2.22) que representa la relación entre la presión y la derivada segunda del desplazamiento, será útil, como se verá, a la hora de establecer las condiciones de contorno en las interfases del modelo. En ambas expresiones del equilibrio no se han tenido en cuenta las cargas de volumen sobre el dominio líquido.

La aplicación de los operadores de divergencia y rotacional sobre (2.22) permiten escribir:

$$\nabla^2 \varepsilon = \frac{1}{c^2} \ddot{\varepsilon} \quad (2.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

Así con las hipótesis realizadas, el movimiento del líquido está gobernado por la ecuación de onda que rige la dilatación volumétrica en los sólidos elásticos (2.11) ( $c^2 = \frac{K_f}{\rho}$ ) es la velocidad de propagación de las ondas longitudinales). Asimismo, el campo de desplazamientos es irrotacional (ecuación (2.25)), como es de sobra conocido. No existe onda S en un fluido perfecto.

En términos de la presión, a partir de (2.21), podemos escribir (2.24) como sigue:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \ddot{p} \quad (2.26)$$

Ecuación que gobierna la propagación de ondas de presión y que será utilizada en adelante para caracterizar el comportamiento dinámico de un fluido perfecto, lineal y elástico sometido a pequeñas perturbaciones.

## 2.4. ECUACIONES DE GOBIERNO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Ya en apartados anteriores se han introducido algunos problemas con dependencia temporal de tipo armónico. Recuérdese la expresión de las ondas planas que permitieron el estudio de las características de las ondas en sólidos elásticos. En este apartado, se obtienen las ecuaciones que rigen el comportamiento en régimen armónico (dominio de la frecuencia) de los dos tipos de regiones que forman parte del modelo acoplado que se presenta.

Como se verá, este planteamiento en el dominio de la frecuencia conduce a una importante simplificación matemática de las ecuaciones de gobierno. En estas ecuaciones reducidas desaparece la dependencia temporal de las variables fundamentales.

Este planteamiento reducido también simplifica los procedimientos para la obtención de soluciones al problema. Soluciones armónicas claro está. De cualquier forma, y teniendo en cuenta que las funciones de tipo armónico constituyen un conjunto completo de funciones independientes, puede plantearse cualquier dependencia temporal de la variable como superposición de armónicos de diferente frecuencia de acuerdo a los planteamientos de Fourier. Este último aspecto, si bien sólo aplicable a problemas elásticos y lineales para la obtención de la respuesta temporal, permite comprender el interés que ha tenido el estudio de la formulación reducida de las ecuaciones de gobierno para muchos autores.

Se comienza con el problema elastodinámico armónico. Así para frecuencia  $\omega$ , el vector desplazamiento en un punto  $\mathbf{x}$  del medio puede ser expresado, en notación compleja, como sigue:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} \quad (2.27)$$

siendo  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  un vector de componentes complejas en general. El módulo de las variables complejas en el dominio de la frecuencia representa el valor máximo que adopta esa variable en el dominio del tiempo, mientras que la relación entre las partes imaginaria y real, determina el desfase. Suponiendo también fuerzas de volumen con dependencia armónica, la expresión reducida de las ecuaciones de Navier (2.7) será:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \theta + \mathbf{X} = -\rho \omega^2 \mathbf{u} \quad (2.28)$$

A pesar de la coincidencia en la notación con (2.7), se entiende que las variables de (2.28) dependen de la posición y de la frecuencia. En este punto, puede tenerse en cuenta el carácter viscoelástico del medio (disipativo) mediante la consideración de un valor complejo para  $\mu(\lambda)$  de la forma:

$$\mu = \text{Re}[\mu](1 + 2i\xi) \quad (2.29)$$

donde  $\xi$  puede entenderse de la misma forma que el factor de amortiguamiento para sistemas de un grado de libertad (ver p.e. Domínguez, 1993).

Para la ecuación de ondas en fluidos perfectos (2.26), el carácter armónico de la presión ( $p$ ):

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} \quad (2.30)$$

permite escribir la ecuación reducida o ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (2.31)$$

donde  $k = \frac{\omega}{c}$  es el número de onda. Utilizando como variable primaria la presión, la variable derivada está relacionada con el desplazamiento de las partículas de fluido ( $U_i$ ) a través de la ecuación de equilibrio (2.23). Así en puntos del contorno y en la dirección marcada por la normal al mismo, podemos escribir para problemas armónicos:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \rho \omega^2 U_n \quad (2.32)$$

donde  $U_n$  es el desplazamiento normal al contorno de las partículas de fluido.

## 2.5. CONDICIONES DE CONTORNO

La completa definición del problema dinámico en el dominio de la frecuencia requiere la imposición de las condiciones de contorno en términos de las variables primarias o sus derivadas.

En el caso de sólidos viscoelásticos, se define el vector tensión ( $t_i$ ) en un punto  $\mathbf{x}$  del contorno  $\Gamma$  con normal exterior  $\mathbf{n}$  según el lema de Cauchy.

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{en } \Gamma \quad (2.33)$$

donde  $n_j$  son las componentes del vector unitario normal al contorno en ese punto.

En general, y estudiando el comportamiento dinámico de cualquiera de los medios tratados, existirá una zona de contorno ( $\Gamma_1$ ) donde serán conocidas las variables fundamentales (condiciones de contorno naturales) y una zona complementaria ( $\Gamma_2$ ) en la que son dato las variables derivadas (condiciones de contorno esenciales). Para sólidos viscoelásticos:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i & \text{en } \Gamma_1 \\ t_i &= \bar{t}_i & \text{en } \Gamma_2 \end{aligned}$$

siendo  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  y  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ . Para medios fluidos ( $p^a$ ) es la variable fundamental. La variable derivada será el flujo de presión en el contorno ( $q^a = p_{,n}$ ) equivalente al desplazamiento normal de las partículas de fluido ( $U_n^a$ ) a través de (2.32). Así:

$$\begin{aligned} p^a &= \bar{p}^a & \text{en } \Gamma_1 \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} &= \bar{q}^a & \text{en } \Gamma_2 \end{aligned}$$

En análisis dinámico de modelos donde coexisten los dos tipos de medios (viscoelásticos y escalares) debe tener en cuenta el efecto de interacción entre ellos a través de las interfases o contornos comunes a dos regiones. Esta interacción se establece matemáticamente a través del cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio de tensiones y compatibilidad de desplazamientos de ambos medios en todos los puntos de estos contornos. Existen tres tipos de interfases en el modelo implementado dependiendo de la naturaleza de los medios que interactúan, a saber: viscoelástico-viscoelástico, fluido-fluido y viscoelástico-fluido.

Interfase viscoelástico-viscoelástico: La ecuación de equilibrio en este caso son inmediatas. Sean  $s_1$  y  $s_2$  las regiones viscoelásticas que determinan el contorno interfase. Así:

1. Equilibrio entre los vectores tensión de ambos medios

$$\mathbf{t}^{s_1} + \mathbf{t}^{s_2} = 0 \quad (2.34)$$

2. Compatibilidad de los vectores desplazamiento

$$\mathbf{u}^{s_1} = \mathbf{u}^{s_2} \quad (2.35)$$

Interfase fluido-fluido: Sean como antes,  $a_1$  y  $a_2$  las regiones fluidas en contacto. Así:

1. Equilibrio. Igualdad de presión hidrodinámica en ambas regiones a lo largo de la interfase

$$p^{a_1} = p^{a_2} \quad (2.36)$$

2. Compatibilidad. Los desplazamientos normales a cada medio son iguales en calor absoluto y signo contrario. Esta condición se expresa en idénticos términos si la variable elegida es el flujo de presión.

$$U_n^{a_1} = -U_n^{a_2} \quad (2.37)$$

Interfase viscoelástico-fluido: Las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en este tipo de interfases son como sigue:

1. Equilibrio entre el vector tensión en el sólido ( $\mathbf{t}^s$ ) y la presión hidrodinámica ( $p^a$ ):

$$\mathbf{t}^s - p^a \mathbf{n}^a = \mathbf{0} \quad (2.38)$$

Siendo  $\mathbf{n}^a$  la normal exterior a la región fluida. De nuevo es obligatorio recordar que una presión positiva representa compresión lo que explica el cambio de signo en relación a (2.34)

2. Compatibilidad entre los desplazamientos normales de sólido ( $u_n^s$ ) y fluido ( $U_n^a$ )

$$u_n^s = u_i^s n_i^s = -U_n^a \quad (2.39)$$

siendo  $\mathbf{n}^s$  la normal exterior a la región viscoelástica

## 2.6. FORMULACIÓN INTEGRAL DEL PROBLEMA ELASTODINÁMICO

El punto de partida es el teorema de reciprocidad (Wheeler y Sternberg, 1968) que constituye una extensión de la ley de Betty de la elastoestática. Para ello se toma en consideración una región regular  $\Omega$  de contorno  $\Gamma$ , caracterizada por una densidad  $\rho$ , y unas velocidades de propagación  $c_P$  y  $c_S$ , de las ondas longitudinales y transversales, respectivamente. Sobre dicha región se definen dos estados elastodinámicos.

$$\begin{aligned} S(\mathbf{f}, \rho, c_P, c_S; \Omega) &= [\mathbf{u}, \sigma] \\ S^*(\mathbf{f}^*, \rho, c_P, c_S; \Omega) &= [\mathbf{u}^*, \sigma^*] \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el campo de movimientos y  $\sigma$  es el tensor de tensiones, definidos en  $\Omega$  correspondientes a unas fuerzas de volumen  $\mathbf{f}$ , y  $\mathbf{u}^*$ ,  $\sigma^*$  los correspondientes a las fuerzas de volumen  $\mathbf{f}^*$ .

En el caso de condiciones iniciales nulas, el teorema se plantea como:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{t} * \mathbf{u}^*) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{f} * \mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{t}^* * \mathbf{u}) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{f}^* * \mathbf{u}) d\Omega \quad (2.41)$$

donde  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t}^*$  son los vectores tracciones en  $\Gamma$  de los estados  $S$  y  $S^*$  respectivamente, que han de satisfacer la condición de equilibrio en el contorno de los tensores de tensiones correspondientes. El operador  $*$  entre vectores representa la suma del producto de convolución de sus componentes.

En este particular consideraremos que las fuerzas másicas u las condiciones de contornos son armónicas en el tiempo, con frecuencia angular  $\omega$ , es decir:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t} \quad (2.42)$$

En este caso el campo de movimientos puede representarse como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t} \quad (2.43)$$

donde  $\mathbf{u}^T(\mathbf{x}, t)$  se conoce como ‘parte transitoria’ de la solución y se obtiene de la solución homogénea de las ecuaciones que rigen el estado elastodinámico bajo unas determinadas condiciones iniciales. Es usual suponer que desaparece transcurrido un cierto intervalo de tiempo debido a los mecanismos internos de disipación de energía que presentan todos los sistemas físicos. En estas condiciones siempre será posible formular el problema en un instante de tiempo donde tan sólo exista la ‘parte permanente’ de la solución  $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$ , que en general será una función compleja con un posible desfase respecto a la función excitadora, y que se calcula de forma que satisfaga las condiciones de contorno bajo unas determinadas fuerzas másicas. Bajo esta hipótesis los campos de movimientos y tensiones, supuestas las propiedades del medio independientes del tiempo, pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t} \\ \sigma(\mathbf{x}, t) &= \sigma(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.44)$$

que sustituidas en la ecuación de Navier proporcionan

$$(c_P^2 - c_S^2)u_{k,kl}(\mathbf{x}; \omega) + c_S^2 u_{l,kk}(\mathbf{x}; \omega) + \omega^2 u_l(\mathbf{x}; \omega) + f_l(\mathbf{x}; \omega) = 0 \quad (2.45)$$

y en la ecuación de comportamiento-compatibilidad

$$\sigma_{kl}(\mathbf{x}; \omega) = \rho (c_P^2 - 2c_S^2)\delta_{kl} u_{m,m}(\mathbf{x}; \omega) + \rho c_S^2 (u_{k,l}(\mathbf{x}; \omega) + u_{l,k}(\mathbf{x}; \omega)) \quad (2.46)$$

Así pues es posible definir un nuevo estado elastodinámico, denominando reducido  $S_\omega \equiv [\mathbf{u}, \sigma]$ , con un campo de desplazamientos  $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$  y tensiones  $\sigma(\mathbf{x}; \omega)$  correspondientes a unas fuerzas másicas  $\mathbf{f}(\mathbf{x}; \omega)$  definidas en una región regular  $\Omega$  de densidad  $\rho$  y velocidades de ondas  $c_P$  y  $c_S$ .

Es posible encontrar significado matemático a la respuesta permanente  $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$ , si se considera que una representación del campo de movimientos dado por la integral de todas las posibles frecuencias

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.47)$$

es la solución de las ecuaciones de campo para una función excitadora del tipo

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}; \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.48)$$

para unas condiciones de contorno del mismo tipo, puesto que la ecuación diferencial (2.45) es lineal. Así,  $2\pi\mathbf{f}(\mathbf{x}; \omega)$  es la transformada de Fourier de las fuerzas másicas  $\mathbf{f}(\mathbf{x}; t)$ . Del mismo modo  $2\pi\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$  es solución de la transformada de Fourier de las ecuaciones de campo elastodinámicas. Por tanto, dado un espectro de frecuencias de la función excitadora, siempre será posible construir una solución general a través de la integral (2.47).

Interesa a continuación volver a plantear el teorema de reciprocidad para el caso de dos estados elastodinámicos reducidos. Sean estos:

$$\begin{aligned} S_{\omega}(\mathbf{f}, \rho, c_P, c_S; \omega, \Omega) &= [\mathbf{u}, \sigma] \\ S_{\omega}^*(\mathbf{f}^*, \rho, c_P, c_S; \omega, \Omega) &= [\mathbf{u}^*, \sigma^*] \end{aligned} \quad (2.49)$$

y sean  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t}^*$  los vectores de tracción (complejos) en el contorno  $\Gamma$ . En estas condiciones la expresión (2.50) se simplifica, desapareciendo los productos de convolución, quedando el teorema como:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}\mathbf{u}^* d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{f}\mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{t}^*\mathbf{u} d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{f}^*\mathbf{u} d\Omega \quad (2.50)$$

El teorema de reciprocidad, establecido entre el estado elastodinámico que se pretende resolver y otro convenientemente escogido, será el que proporcione la representación integral en la que se basa el MEC. En efecto, va a considerarse un estado reducido  $S_{\omega}^* \equiv [\mathbf{u}^*, \sigma^*]$  particular, conocido como estado de Stokes, correspondiente a una fuerza excitadora concentrada en un punto  $\underline{\xi}$  en dirección  $\mathbf{e}$ , esto es  $\rho\mathbf{f}^* = \delta(\underline{\xi})e^{i\omega t}\mathbf{e}$ , donde  $\delta(\underline{\xi})$  es la función impulso o delta de Dirac. El teorema de reciprocidad se convierte entonces en:

$$\mathbf{u}(\underline{\xi}) = \int_{\Gamma} \mathbf{t}\mathbf{u}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{u}\mathbf{t}^* d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{f}\mathbf{u}^* d\Omega \quad (2.51)$$

que es la representación integral del campo de desplazamientos del estado elastodinámico reducido  $S_{\omega} \equiv [\mathbf{u}, \sigma]$ .

En el caso de que el dominio sea no acotado, es natural considerar que todas las fuentes de excitación están en el interior de  $\Omega$  y que no hay propagación de ondas desde el infinito. Esto se traduce en decir que la contribución de todas las fuentes colocadas sobre  $\Gamma_\infty$  debe ser nula, y la integral de contorno de la representación integral debe cumplir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\infty} r^2 [\mathbf{t}\mathbf{u}^* - \mathbf{u}\mathbf{t}^*] d\tau = 0 \quad (2.52)$$

donde  $\Gamma_\infty$  es la superficie de una esfera centrada en  $\underline{\xi}$  de radio  $r$  que tiende a infinito, y  $\tau$  representa el ángulo sólido. Esta condición conduce a las siguientes (Eringen y Suhubi, 1975): descomponiendo  $\mathbf{u}$  en sus componentes de Helmholtz  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_P + \mathbf{u}_S$  deben verificarse las llamadas condiciones de radiación y de regularidad

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \frac{\partial_\alpha}{\partial r} + \frac{i\omega}{c_\alpha} \mathbf{u}_\alpha = 0 \quad (2.53)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}_\alpha = 0 \quad \alpha = P, S$$

que pueden ser interpretadas como condiciones de que el flujo de energía a través de  $\Gamma_\infty$  hacia el exterior sea siempre positivo

La solución fundamental, esto es, la solución del campo de movimientos y tensiones correspondientes al estado de Stokes  $S_\omega^* \equiv [\mathbf{u}^*, \sigma^*]$  fue obtenida para el caso elastodinámico general en el dominio del tiempo por dicho autor en 1849. Para el correspondiente estado reducido, Cruse y Rizzo lo hacen en 1968 a partir de la solución general que Doyle había obtenido en 1966. Se omitirá aquí la obtención detallada de la solución, limitándose a presentarla. Así, el movimiento en dirección  $k$  cuando la carga  $\delta(\underline{\xi})$  tiene dirección  $l$  viene dado por

$$U_{lk} = \frac{1}{\alpha \pi \rho c_S^2} [\Psi \delta_{kl} - \chi r_{,k} r_{,l}] \quad (2.54)$$

siendo  $r$  la distancia entre los puntos de aplicación  $\underline{\xi}$  y de estudio, y  $\alpha = 4$  en el caso tridimensional y donde

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(1 + \frac{1}{z_S^2} - \frac{1}{z_S}\right) \frac{e^{z_S}}{r} - \left(\frac{c_S}{c_P}\right)^2 \left(\frac{1}{z_P^2} - \frac{1}{z_P}\right) \frac{e^{z_P}}{r} \\ \chi &= \left(1 + \frac{3}{z_S^2} - \frac{3}{z_S}\right) \frac{e^{z_S}}{r} - \left(\frac{c_S}{c_P}\right)^2 \left(1 + \frac{3}{z_P^2} - \frac{3}{z_P}\right) \frac{e^{z_P}}{r} \end{aligned} \quad (2.55)$$

siendo

$$z_S = \frac{i \omega r}{c_S} \quad (2.56)$$

$$z_P = -\frac{i \omega r}{c_P}$$

La componente  $k$  del vector tensión sobre una superficie cuya normal unitaria exterior es  $\eta$  viene dada por

$$T_{lk} = \frac{1}{\alpha \pi} \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \left( \delta_{kl} \frac{\partial r}{\partial \eta} + r_{,k} \eta_l \right) - \frac{2}{r} \chi \left( \eta_k r_{,l} - 2 r_{,k} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} r_{,k} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \left( \frac{c_P^2}{c_S^2} - 2 \right) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\alpha}{2r} \right) r_{,l} \eta_k \right] \quad (2.57)$$

Esta ecuación se puede expresar de una forma más compacta quedando:

$$T_{lk} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (A \delta_{lk} + B r_{,l} r_{,k}) + (A r_{,k} \eta_l + C r_{,l} \eta_k) \right] \quad (2.58)$$

siendo:

$$A = \frac{d\Psi}{dr} - \frac{\chi}{r}$$

$$B = 2 \left( 2 \frac{\chi}{r} - \frac{d\chi}{dr} \right) \quad (2.59)$$

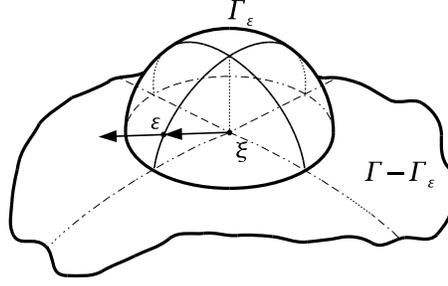
$$C = \frac{\lambda}{\mu} \left( \frac{d\Psi}{dr} - \frac{d\chi}{dr} - 2 \frac{\chi}{r} \right) - 2 \frac{\chi}{r}$$

Planteando de nuevo la representación integral del campo de desplazamientos es posible llegar a la expresión

$$c_{kl}(\underline{\xi}) u_l(\underline{\xi}) = \int_{\Gamma} (U_{lk} t_k - T_{lk} u_k) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} f_k U_{lk} d\Omega \quad (2.60)$$

donde  $c_{kl}(\underline{\xi})$  vale  $\delta_{kl}$  si  $\underline{\xi} \in \Omega$  y es nulo si  $\underline{\xi} \notin \Omega \cup \Gamma$ . El caso en que  $\underline{\xi} \in \Gamma$  requiere atención especial, puesto que ahora el punto de aplicación de la carga se encuentra dentro del contorno de  $\Gamma$  de integración, presentando entonces la primera integral del segundo miembro un punto singular.

Es usual extraer esta singularidad mediante un proceso de paso al límite, sustituyendo el contorno  $\Gamma$  por otro aproximado que evita la singularidad, y que está compuesto por dos contornos,  $(\Gamma - \Gamma_\varepsilon)$  y  $\Gamma_\varepsilon$ , siendo  $\Gamma_\varepsilon$  una esfera de radio  $\varepsilon \rightarrow 0$  como se ve en la figura 2.2.

Figura 2.2: Singularidad en  $\xi$ 

Tomando límites se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} U_{lk} t_k d\Gamma_\varepsilon &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{lk} u_k d\Gamma_\varepsilon &= d_{lk}(\underline{\xi}) u_k(\underline{\xi}) \end{aligned} \quad (2.61)$$

y es posible demostrar que las constantes  $d_{lk}$  al igual que ocurre en el caso de elasticidad estática (Domínguez, 1989) dependen exclusivamente de la geometría del contorno en el punto de aplicación  $\underline{\xi}$ . Esta igualdad con el caso estático es debida a que el tipo de singularidad de ambas soluciones fundamentales son exactamente iguales.

Así pues, la expresión (2.60) es válida para un punto  $\underline{\xi} \in \Gamma$ , siendo en este caso  $c_{lk}(\underline{\xi}) = 1 + d_{lk}(\underline{\xi})$ , teniendo en cuenta entonces que la primera integral del segundo miembro hay que entenderla en el sentido del valor principal de Cauchy.

No supone restricción significativa asumir que las fuerzas de dominio sean nulas, pues en general los términos que contiene la integral de dominio de (2.60) son siempre completamente conocidos.

Por tanto, la representación del desplazamiento de un punto cualquiera  $\underline{\xi}$  en función de los movimientos  $\mathbf{u}$  y tracciones  $\mathbf{t}$  en puntos exclusivamente del contorno  $\Gamma$  es:

$$c_{lk}(\underline{\xi}) u_k(\underline{\xi}) + \int_{\Gamma} T_{lk} u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{lk} t_k d\Gamma \quad (2.62)$$

Para puntos  $\underline{\xi} \in \Gamma$ , la expresión anterior, junto a las condiciones de contorno proporcionan una formulación cerrada para calcular los campos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{t}$  sobre dicho contorno. Sin embargo, y salvo casos puntuales muy sencillos, no es posible la resolución analítica de (2.62), siendo necesaria su resolución numérica que es lo que da

pie al Método de los Elementos de Contorno. Una exposición detallada del mismo puede encontrarse en Brebbia y Domínguez (1992).

Las integrales se realizan numéricamente discretizando, esto es, subdividiendo el contorno en un número discreto de elementos, y los movimientos y tracciones se aproximan en función de sus valores en unos puntos determinados llamados nodos, mediante funciones de interpolación.

Adoptando una notación matricial, mas compacta que la de índices empleada hasta ahora, las tres componentes del movimiento y la tracción en cualquier punto de un elemento genérico 'j' vienen dados por

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \Phi \mathbf{u}^j \\ \mathbf{t} &= \Phi \mathbf{t}^j\end{aligned}\tag{2.63}$$

donde  $\mathbf{u}^j$  y  $\mathbf{t}^j$  son vectores de dimensiones  $3 \times Q$ , siendo  $Q$  el número de nodos del elemento 'j', y contienen todos los valores nodales de desplazamientos y tracciones, respectivamente, en dicho elemento. La matriz de funciones de interpolación  $\Phi$  tiene dimensiones  $3 \times 3Q$ .

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & 0 & \dots & \Phi_Q & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_2 & 0 & \dots & 0 & \Phi_Q & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_1 & 0 & 0 & \Phi_2 & \dots & 0 & 0 & \Phi_Q \end{pmatrix}\tag{2.64}$$

y sus componentes son funciones de forma sobre las que se reparará más adelante.

De este modo, y representando las tensiones de la solución fundamental en forma matricial,  $(\mathbf{t}^*, \mathbf{u}^*)$ , la ecuación (2.62) para cada nodo 'i' puede reescribirse como

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \int_{\Gamma} \mathbf{t}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{t} \, d\Gamma\tag{2.65}$$

La discretización de esta ecuación integral y la sustitución de (2.63) conduce a la ecuación discretizada

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{\mathbf{E}} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{t}^* \Phi \, d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{\mathbf{E}} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi \, d\Gamma \right\} \mathbf{t}^j\tag{2.66}$$

en la cual las integrales se han descompuesto en un sumatorio de integrales extendido al número total de elementos  $E$ .  $\Gamma_j$  representa la superficie de cada elemento ‘j’

Una vez integrada, puede ser escrita como:

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{H}}^{\text{in}} \mathbf{u}^n = \sum_{n=1}^N \mathbf{G}^{\text{in}} \mathbf{t}^n \quad (2.67)$$

donde el nuevo ‘i’, es el nodo de colocación, habiendo extendido en este caso el sumatorio al número total de nodos  $N$ . Ahora los vectores  $\mathbf{u}^n$  y  $\mathbf{t}^n$ ,  $(3 \times 1)$ , representan las 3 componentes de desplazamiento y tracción del nodo genérico ‘n’ debido a la carga unidad en ‘i’, por lo que generalmente se las conoce como matrices de influencia y son:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}^{\text{in}} &= \sum_{\mathbf{t}} \int_{\Gamma_{\mathbf{t}}} \mathbf{t}^* \phi_q d\Gamma \\ \mathbf{G}^{\text{in}} &= \sum_{\mathbf{t}} \int_{\Gamma_{\mathbf{t}}} \mathbf{u}^* \phi_q d\Gamma \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde el sumatorio se extiende a todos los elementos a los que el nodo ‘n’ pertenezca, y ‘q’ representa la numeración local de ‘n’ dentro del elemento ‘t’

Llamando,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{\text{in}} &= \hat{\mathbf{H}}^{\text{in}} & \text{si } l \neq n \\ \mathbf{H}^{\text{in}} &= \hat{\mathbf{H}}^{\text{in}} + \mathbf{c}^i & \text{si } l = n \end{aligned} \quad (2.69)$$

y escribiendo (2.67) para todos los nodos de la discretización, se obtiene un sistema de ecuaciones del tipo

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{t} \quad (2.70)$$

donde pueden imponerse directamente las condiciones de contorno, y en general para un problema mixto es posible reordenar las columnas entre  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$  para pasar todas las incógnitas a un sólo vector  $\mathbf{x}$ , y escribir el sistema en la forma normal

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (2.71)$$

De este modo el problema se reduce al cálculo de las matrices  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$ , y a la resolución de un sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

## 2.7. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA ESCALAR

En la hipótesis de pequeñas perturbaciones el comportamiento dinámico de un fluido no viscoso en el que se admite que es despreciable el efecto de las ondas de gravedad, viene gobernado por la ecuación:

$$\nabla^2 \bar{p}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{p}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad (2.72)$$

donde  $\bar{p}(\mathbf{x}, t)$  representa la presión hidrodinámica, y  $c$  la velocidad de propagación de las ondas de presión en el medio. Para el caso particular en el que la excitación sea armónica, con pulso  $\omega$ , es fácil obtener una nueva ecuación simplificada correspondiente al estado elastodinámico reducido. Así:

$$\bar{p}(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} \quad (2.73)$$

transforma (2.72) en

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (2.74)$$

La ecuación de partida para la obtención de la identidad integral en la que se basa el MEC es en este caso el segundo teorema de Green:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 p \cdot p^* - p \nabla^2 p^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (p^* \frac{\partial p}{\partial \eta} - p \frac{\partial p^*}{\partial \eta}) d\Gamma \quad (2.75)$$

Donde las letras  $\Omega$ ,  $\Gamma$  y  $\eta$  tienen el mismo significado que un apartado anterior.  $p$  será la solución buscada de la ecuación (2.74) con condiciones de contorno en  $\Gamma$ , y se escoge una función  $p^*$  que sea solución fundamental, esto es, que cumpla en  $\Omega$  que

$$\nabla^2 p^* + \frac{\omega^2}{c^2} p^* + \delta^i = 0 \quad (2.76)$$

siendo  $\delta^i$  la función delta de Dirac que representa un impulso concentrado en el punto  $\mathbf{i}$  del dominio. La solución de esta ecuación presenta simetría esférica, y es dependiente de la frecuencia  $\omega$  y de la distancia  $r$  entre el punto de perturbación  $\mathbf{i}$  y el de estudio:

$$p^* = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\frac{i\omega r}{c}}}{r} \quad (2.77)$$

La obtención del flujo es inmediata. Derivando con respecto a la normal del contorno

$$\frac{\partial p^*}{\partial \eta} = \frac{\partial p^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad (2.78)$$

resultando

$$\frac{\partial p^*}{\partial \eta} = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{i\omega}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{-\frac{i\omega r}{c}} \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad (2.79)$$

Ahora bien, la sustitución de la ecuación (2.76) en la (2.75) permite obtener:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 p \cdot p^* + p \frac{\omega^2}{c^2} p^* + p \delta^i) d\Omega = \int_{\Gamma} (p^* \frac{\partial p}{\partial \eta} - p \frac{\partial p^*}{\partial \eta}) d\Gamma \quad (2.80)$$

y recordando las propiedades de la función impulso queda

$$p^i + \int_{\Gamma} p \frac{\partial p^*}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \eta} p^* d\Gamma \quad (2.81)$$

que es la representación integral de la presión en un punto  $p \in \Omega$  en función de las presiones y sus derivadas de contorno.

Cuando se hace tender el punto de aplicación  $\mathbf{i}$  hacia el contorno se aísla la singularidad del mismo modo que se empleó para el problema elástico, sustituyendo el contorno  $\Gamma$  por otro aproximado  $(\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}) + \Gamma_{\varepsilon}$ , siendo  $\Gamma_{\varepsilon}$  una esfera de radio infinitesimal  $\varepsilon$  alrededor del punto singular. En este proceso de paso al límite es posible ver que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\partial p}{\partial \eta} p^* d\Gamma_{\varepsilon} &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p \frac{\partial p^*}{\partial \eta} d\Gamma_{\varepsilon} &= p^i \bar{c}^i \end{aligned} \quad (2.82)$$

donde  $\bar{c}^i$  depende exclusivamente de la geometría del contorno en el punto  $\mathbf{i}$ . Así pues, la representación de la presión en puntos del contorno puede expresarse como:

$$c^i p^i + \int_{\Gamma} p \frac{\partial p^*}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial \eta} p^* d\Gamma \quad (2.83)$$

entendiéndose ahora que las integrales excluyen el punto  $\mathbf{i}$ , y donde se ha tenido en cuenta que:

$$c^i = 1 + \bar{c}^i \quad (2.84)$$

La ecuación integral se discretiza descomponiendo las integrales sobre  $\Gamma$  en un sumatorio extendido al número total de elementos, sobre los cuales la presión y su derivada normal son aproximadas en función de sus valores nodales, mediante matrices de funciones de forma. Así, en un elemento genérico ' $j$ ' puede expresarse que

$$\begin{aligned} p &= \phi_q \mathbf{p}^j \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} &= \phi_Q \left. \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \eta} \right|^j \end{aligned} \quad (2.85)$$

donde, si  $Q$  es el número de nodos del elemento 'j',  $\mathbf{p}^j$  y  $\partial\mathbf{p}/\partial\eta|_j$  son vectores de dimensión  $Q$  con los valores nodales de la presión y su derivada. La matriz de interpolación sera del tipo

$$\phi_q = [ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_Q ] \quad (2.86)$$

siendo las funciones de forma las mismas que en el apartado anterior.

Con todo ello la ecuación discretizada correspondiente al nodo  $i$  puede escribirse como:

$$C^i p^i + \sum_{j=1}^E \left\{ \int_{\Gamma_j} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \phi_q d\Gamma_j \right\} \mathbf{p}^j = \sum_{j=1}^E \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* \phi_q d\Gamma_j \right\} \left. \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \eta} \right|^n \quad (2.87)$$

que una vez integrada puede visualizarse como:

$$C^i p^i + \sum_{n=1}^N \hat{H}^{in} p^n = \sum_{n=1}^N G^{in} \left. \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \eta} \right|^n \quad (2.88)$$

habiendo extendido el sumatorio al mismo total de nodos  $N$ , y notando con el superíndice  $n$  los valores correspondientes a cada uno.

Las matrices de influencia son

$$\hat{H}^{in} = \sum_t \int_{\Gamma_t} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \phi_q d\Gamma_t \quad (2.89)$$

$$G^{in} = \sum_t \int_{\Gamma_t} p^* \phi_q d\Gamma_t$$

entendiéndose que la suma abarca todos los elementos 't' a los que el nodo 'n' pertenece, siendo 'q' su numeración local en cada uno de ellos.

Estableciendo la ecuación discretizada para todo los nodos y llamando

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{in} &= \hat{\mathbf{H}}^{in} & \text{si } l \neq n \\ \mathbf{H}^{in} &= \hat{\mathbf{H}}^{in} + \mathbf{C}^i & \text{si } l = n \end{aligned} \quad (2.90)$$

se obtiene un sistema de  $N$  ecuaciones

$$\mathbf{H} \mathbf{p} = \mathbf{G} \left. \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \eta} \right|^n \quad (2.91)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la relación que existe entre el flujo y el movimiento normal al contorno  $w$ :

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \rho \omega^2 w \quad (2.92)$$

el sistema de ecuaciones puede reescribirse sustituyendo  $\mathbf{G}$  por  $\mathbf{G} \rho \omega^2$  como

$$\mathbf{H} \mathbf{p} = \mathbf{G} \mathbf{w} \quad (2.93)$$

Sobre el contorno se conocerá o bien la presión o bien el movimiento normal, por lo que una vez impuestas las condiciones de contorno se obtendrá un sistema de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas.

### 2.7.1. Solución Fundamental

La aplicación de la formulación integral (2.83) a problemas de propagación de ondas de presión en un fluido no viscoso, requiere el conocimiento de la presión en cualquier punto  $\mathbf{x}$  del espacio completo correspondiente a una fuente puntual aplicada en  $\xi$ . Esta solución, se reproduce aquí para problemas de propagación de ondas de presión en fluidos:

$$p^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr} \quad (2.94)$$

donde  $r = |\mathbf{x} - \xi|$  y  $k = \frac{\omega}{c}$ , siendo  $c$  la velocidad de propagación de las ondas en el medio. La variable derivada, esto es, el flujo de presión en una superficie con normal  $\mathbf{n}$  será:

$$\frac{\partial p^*}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{-ikr} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \quad (2.95)$$

Hasta ahora, los únicos requerimientos sobre la solución fundamental han sido el cumplimiento de la ecuación diferencial de gobierno y las condiciones de radiación en el infinito. En algunos casos es posible obviar la consideración de algunos contornos en (2.83) si la solución fundamental empleada verifica la condición de contorno del problema real en éstos. Así, en el modelo acoplado que se presenta y en su análisis de comportamiento dinámico, es posible evitar la discretización de la superficie libre del agua circundante ( $\Gamma_S$ ) haciendo uso de una solución fundamental que verifique la condición de presión nula en los puntos de ese contorno. Dicha solución es sencilla. Basta considerar dos fuentes puntuales: una positiva aplicada en el punto de  $\Omega$  en el que se describe la ecuación integral, y otra negativa aplicada en el punto imagen respecto de la superficie libre del líquido (figura 2.3). Así, la solución fundamental será:

$$\hat{p}^*(\mathbf{x}, \xi, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} e^{-ikr} - \frac{1}{\bar{r}} e^{-ik\bar{r}} \right) \quad (2.96)$$

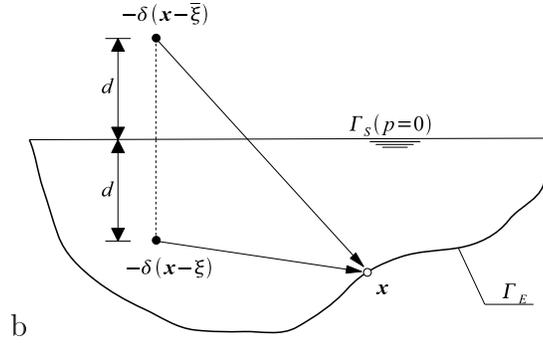


Figura 2.3: Solución Fundamental fuente-imagen en problemas escalares

donde  $\bar{r} = |\mathbf{x} - \bar{\xi}|$ . Así con el empleo de  $\hat{p}^*$  la ecuación integral se extiende a  $\Gamma_E$  exclusivamente. El tratamiento numérico del problema se realizará ahora con un considerable ahorro en el número de grados de libertad.

Con el mismo objetivo, pueden también obtenerse formulaciones explícitas de la solución fundamental para el problema escalar que satisfagan condiciones de contorno tipo Robin en superficies planas del modelo. En este sentido y en problemas bidimensionales de propagación de ondas acústicas, puede consultarse el trabajo de Maeso y Aznárez (2002). Estos autores estudian la eficiencia de barreras acústicas de diferente geometría con un modelo MEC que permite evitar la discretización de contornos absorbentes.

## 2.8. ACOPLAMIENTO DE SUBREGIONES SÓLIDAS Y/O LÍQUIDAS.

Si el dominio en estudio está compuesto por una serie de subdominios con propiedades distintas, la representación integral y su discretización siguen siendo válidas para cada uno de los subdominios. Así, para el ejemplo de la figura 2.4 se escribirán las ecuaciones para cada subregión independientemente para a continuación imponer las condiciones de equilibrio y de compatibilidad en las interfases.

Si se trata de dominios sólidos las ecuaciones serán:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^1 \mathbf{u}_1^1 + \mathbf{H}_2^1 \mathbf{u}_2^1 &= \mathbf{G}_1^1 \mathbf{t}_1^1 + \mathbf{G}_2^1 \mathbf{t}_2^1 \\ \mathbf{H}_2^2 \mathbf{u}_2^2 + \mathbf{H}_3^2 \mathbf{u}_3^2 &= \mathbf{G}_2^2 \mathbf{t}_2^2 + \mathbf{G}_3^2 \mathbf{t}_3^2 \end{aligned} \quad (2.97)$$

que con:

$$\mathbf{u}_2^1 = \mathbf{u}_2^2 = \mathbf{u}_2 \quad ; \quad \mathbf{t}_2^1 = -\mathbf{t}_2^2 = \mathbf{t}_2 \quad (2.98)$$

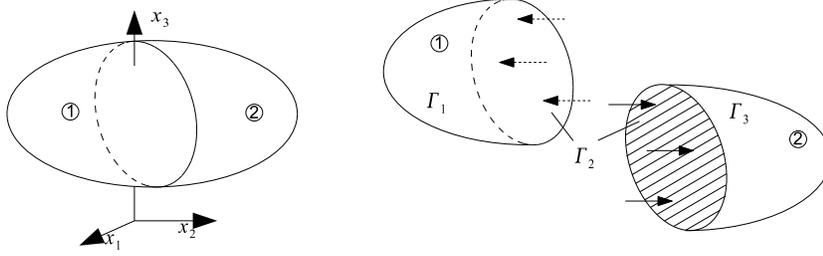


Figura 2.4: Acoplamiento Sólido-Sólido

permiten obtener un único sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_1^1 & \mathbf{H}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2^2 & \mathbf{H}_3^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^1 & \mathbf{G}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2^2 & \mathbf{G}_3^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1^1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3^2 \end{Bmatrix} \quad (2.99)$$

Si se trata de medios fluidos el planteamiento es similar, escribiéndose en la interfase las condiciones de contorno siguientes

$$\mathbf{p}_2^1 = \mathbf{p}_2^2 = \mathbf{p}_2 \quad ; \quad \mathbf{w}_2^1 = -\mathbf{w}_2^2 = \mathbf{w}_2 \quad (2.100)$$

para obtener un sistema análogo al (2.99) sustituyendo  $\mathbf{u}$  por  $\mathbf{p}$ , y  $\mathbf{t}$  por  $\mathbf{w}$ :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_1^1 & \mathbf{H}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2^2 & \mathbf{H}_3^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^1 & \mathbf{G}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2^2 & \mathbf{G}_3^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1^1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3^2 \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

La resolución del caso en que se presentan acopladas regiones sólidas y líquidas requiere un tratamiento especial, puesto que la interfase entre ambas regiones presenta la particularidad de tener seis incógnitas por nodo  $(u_x, u_y, u_z, t_x, t_y, t_z)$ , como perteneciente al contorno del sólido, y solamente dos  $(p, w)$ , como perteneciente al líquido.

La condición de compatibilidad de movimientos en la interfase se expresa diciendo que el movimiento normal debe ser igual para el sólido y para el líquido. Si  $\eta_x, \eta_y, \eta_z$  son los cosenos directores de la normal al contorno de líquido, tal condición se establece como:

$$w = u_x \eta_x + u_y \eta_y + u_z \eta_z \quad (2.102)$$

Las ecuaciones de equilibrio deben expresar la igualdad de la presión en el líquido con la tracción normal al contorno del sólido, y la ausencia en la interfase de tensión tangencial. Esto se traduce en

$$\begin{aligned} t_x &= p\eta_x \\ t_y &= p\eta_y \\ t_z &= p\eta_z \end{aligned} \quad (2.103)$$

Así pues mediante (2.102) y (2.103) es posible expresar cuatro incógnitas en función de las otras cuatro, quedando  $p$ ,  $u_x$ ,  $u_y$  y  $u_z$  como las incógnitas en la interfase. Las cuatro ecuaciones necesarias que faltan serán las que suministra el MEC, tres en el sólido, correspondientes a cada una de las direcciones coordenadas y una en el líquido. En efecto, sea el ejemplo que se ilustra en la figura 2.5

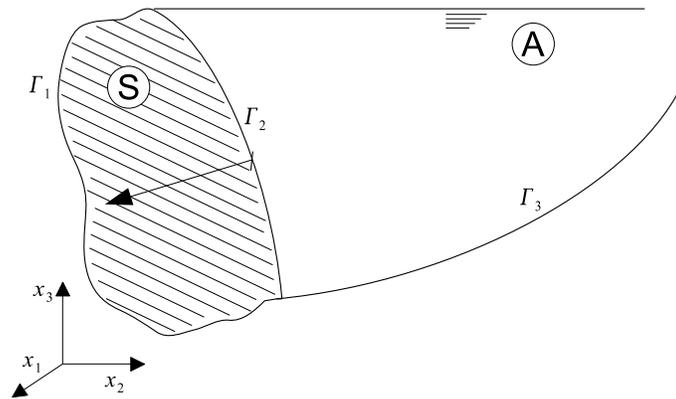


Figura 2.5: Acoplamiento Sólido-Líquido

escribiendo las ecuaciones de cada subregión se tiene

$$\begin{aligned} S : \quad & \mathbf{H}_1^S \mathbf{u}_1 + \mathbf{H}_2^S \mathbf{u}_2 = \mathbf{G}_1^S \mathbf{t}_1 + \mathbf{G}_2^S \mathbf{t}_2 \\ A : \quad & \mathbf{H}_2^A \mathbf{p}_2 + \mathbf{H}_3^A \mathbf{p}_3 = \mathbf{G}_2^A \mathbf{w}_2 + \mathbf{G}_3^A \mathbf{w}_3 \end{aligned} \quad (2.104)$$

y recordando las expresiones (2.102) y (2.103) pueden desarrollarse las partes

correspondientes a la interfase del siguiente modo:

$$\mathbf{G}_2^S \mathbf{t}_2 = \mathbf{G}_2^S \left( \begin{array}{c} t_x \\ t_y \\ t_z \end{array} \right)_2 = \mathbf{G}_2^S \left( \begin{array}{c} \eta_x p \\ \eta_y p \\ \eta_z p \end{array} \right)_2 = \mathbf{G}_2^{SA} \mathbf{p}_2 \quad (2.105)$$

$$\mathbf{G}_2^A \mathbf{w}_2 = \mathbf{G}_2^A (u_x \eta_x + u_y \eta_y + u_z \eta_z) = \mathbf{G}_2^A S_2 \left( \begin{array}{c} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array} \right)_2 = \mathbf{G}_2^{AS} \mathbf{u}_2$$

de tal forma que, para un nodo  $j$  perteneciente a  $\Gamma_2$ :

$$G_2^{SA}{}_{ij} = \sum_{k=1}^3 G_{2,i,3j-3+k}^S \eta_k \quad (2.106)$$

$$G_2^{AS}{}_{i,3j-3+k} = G_{2,ij}^A \eta_k \quad k = 1, 2, 3$$

Las dimensiones de  $\mathbf{G}_2^{SA}$  serán  $3(n_1 + n_2) \times n_2$  siendo  $n_1$  y  $n_2$  el número de nodos de los contornos 1 y 2 respectivamente.  $\mathbf{G}_2^{AS}$  tiene dimensiones  $(n_2 + n_3) \times 3n_2$

Finalmente el sistema global de ecuaciones queda:

$$\left( \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{H}_1^S & \mathbf{H}_2^S & -\mathbf{G}_2^{SA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_2^{AS} & \mathbf{H}_2^A & \mathbf{H}_3^A \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{G}_1^S \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{G}_3^A \mathbf{w}_3 \end{array} \right\} \quad (2.107)$$

## 2.9. ASPECTOS NUMÉRICOS

En este apartado se desarrollan ciertos aspectos del método, que si bien no son necesarios para la comprensión global del mismo, si son de mucha utilidad a la hora de implementar la resolución numérica en cualquier sistema de ecuaciones planteado.

### 2.9.1. Discretización del Contorno

La ecuación integral en el contorno para problemas armónicos escalares y elásticos fue presentada en la sección 2.7. Se concretó que para realizar la integración numérica, era requisito indispensable la división del contorno  $\Gamma$  (Fig 2.6) en  $E$  elementos de  $N$  nodos cada uno. de manera que los campos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{t}$  sobre el mismo pueden

interpolarse en función de los valores nodales. Así como ya vimos, sobre un elemento genérico  $j$  se puede escribir:

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{u}^j \quad \mathbf{t} = \Phi \mathbf{t}^j \quad (2.108)$$

donde  $\mathbf{u}^j$  y  $\mathbf{t}^j$  presentan vectores de  $\alpha N$  componentes y  $\Phi$  una matriz de dimensión  $(\alpha \times \alpha N)$  cuyos términos son las funciones de forma del elemento ( $\alpha = 1$  para problemas escalares y 3 en sólidos viscoelásticos)

La geometría del elemento se aproximará de la misma forma (elemento isoparamétrico):

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{x}^j \quad (2.109)$$

donde  $\mathbf{x}^j$  contiene las  $3N$  coordenadas de los nodos del elemento  $j$ .

Todo con el fin de poder evaluar la ecuación (2.65) en cada uno de esos nodos. ( $\mathbf{x}_i$ )

$$\mathbf{c}^i \mathbf{u}^i + \int_{\Gamma} \mathbf{t}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (2.110)$$

Si bien el tratamiento numérico es completamente extrapolable a cualquier tipo de elementos, en el modelo que se presenta se han utilizado elementos cuadráticos cuadriláteros y triangulares de nueve y seis nodos respectivamente (figura 2.6). Las funciones de forma de los primeros en coordenadas naturales ( $\xi_1, \xi_2$ ) se escriben a continuación:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 - 1) \xi_2 (\xi_2 - 1) & \phi_2 &= \frac{1}{2} (1 - \xi_1^2) \xi_2 (\xi_2 - 1) \\ \phi_3 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 + 1) \xi_2 (\xi_2 - 1) & \phi_4 &= \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 + 1) (1 - \xi_2^2) \\ \phi_5 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 + 1) \xi_2 (\xi_2 + 1) & \phi_6 &= \frac{1}{2} (1 - \xi_1^2) \xi_2 (\xi_2 + 1) \\ \phi_7 &= \frac{1}{4} \xi_1 (\xi_1 - 1) \xi_2 (\xi_2 + 1) & \phi_8 &= \frac{1}{2} \xi_1 (\xi_1 - 1) (1 - \xi_2^2) \\ \phi_9 &= (1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2) \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\text{Para } -1 \leq \xi_1 \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \xi_2 \leq 1$$

Para los elementos triangulares las funciones de forma son:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \xi_1 (2\xi_1 - 1) & \phi_2 &= \xi_2 (2\xi_2 - 1) \\ \phi_3 &= \xi_3 (2\xi_3 - 1) & \phi_4 &= 4\xi_1 \xi_2 \\ \phi_5 &= 4\xi_2 \xi_3 & \phi_6 &= 4\xi_1 \xi_3 \end{aligned} \quad (2.112)$$

donde  $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$  y las variables  $\xi_1, \xi_2$  toman valores comprendidos entre 0 y 1

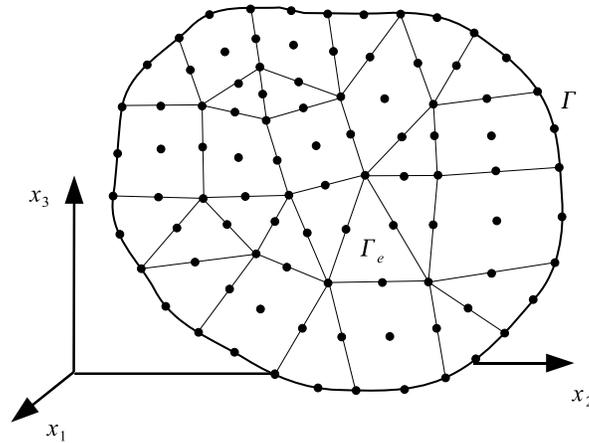


Figura 2.6: Contorno 3D discretizado con elementos cuadráticos

### 2.9.2. El problema de Esquina

La superficie de un contorno debe ser lo suficientemente suave como para poder considerar que sólo existe un vector tensión, (o valor de flujo) asociado a cada nodo, cuando estos sean sean incógnitas. En los bordes frontera entre varios contornos se considerarán tantos nodos como contornos confluyan, de manera que a cada nodo sólo se asocie una normal, o dicho de otra forma, cada nodo sólo pertenezca a un contorno. Con ello se consigue desvincular los grados de libertad de los distintos contornos y montar las columnas de cada una de ellos independientemente del resto en el sistema de ecuaciones. Se logra así una simplificación notable del procedimiento de montaje eliminando la casuística usual en este tipo de soluciones, (que se ve complicada en el caso de geometrías tridimensionales), y obtener una distribución sencilla de los ceros del sistema, lo cual puede ser útil en determinados procedimientos de resolución. Asimismo facilita la incorporación al programa de nuevos tipos de subregiones con distinto número de grados de libertad.

Por contra este procedimiento supone la consideración de un número de grados de libertad mayor de estrictamente lo necesario, puesto que asocia a los nodos duplicados incógnitas independientes en desplazamientos (en las subregiones sólidas), o en presión (en el agua). Hay que decir sin embargo que, para una geometría determinada, el número de bordes en los que se duplican nodos está restringido, y por lo tanto, el porcentaje de nuevas ecuaciones con respecto al total disminuye rápidamente al aumentar o refinar las discretizaciones.

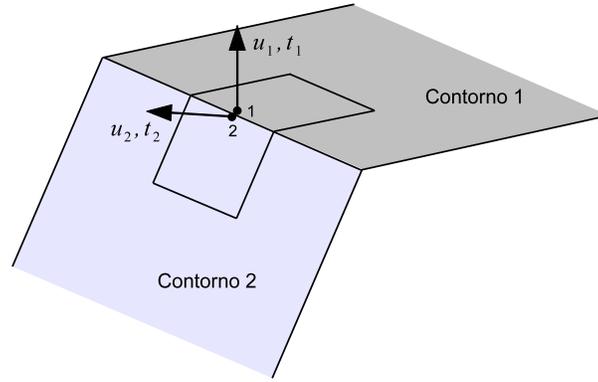


Figura 2.7: Problema de Esquina

Sea de nuevo el caso representado en la figura 2.7. Como se ha dicho, la duplicación del nodo provoca el desdoblamiento de la ecuación nodal en dos filas y dos columnas. Si se trata de contornos de sólido se obtiene, para cada dirección de coordenada:

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + b t_1 + c t_2 + \dots = \bar{d} \\ 2) \quad & a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + b t_1 + c t_2 + \dots = \bar{d} \end{aligned} \quad (2.113)$$

donde la contribución de los términos libres se ha incluido en los coeficientes de la diagonal  $a_{11}$  y  $a_{22}$ . Las posibles condiciones de contorno para este caso son:

$$\begin{aligned} a) \quad & t_1 = \bar{t}_1 \quad t_2 = \bar{t}_2 \\ b) \quad & t_1 = \bar{t}_1 \quad u_2 = \bar{u}_2 \\ c) \quad & u_1 = \bar{u}_1 \quad t_2 = \bar{t}_2 \\ d) \quad & u_1 = \bar{u}_1 \quad u_2 = \bar{u}_2 \quad \text{con} \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u} \end{aligned}$$

En cualquiera de las tres primeras situaciones, el sistema (2.113) es suficiente para obtener las otras dos incógnitas nodales. Así en el caso *a*) se obtienen  $u_1$  y  $u_2$  que resultarán iguales  $u_1 = u_2$ ; en el caso *b*) se obtienen  $u_1$  y  $t_2$  siendo  $u_1 = u_2$ ; y en el caso *c*) se obtienen  $t_1$  y  $u_2$ , siendo  $u_2 = u_1$ .

El caso *d*) requiere un tratamiento especial puesto que en este caso las dos ecuaciones de (2.113) se hacen idénticas y el sistema de ecuaciones es singular. Este problema, conocido como problema de esquina, se puede resolver mediante la duplicación de la ecuación nodal para una posición ligeramente desplazada de la carga concentrada, con lo que los coeficientes del sistema ya no serán iguales, y éste no será singular.

### 2.9.3. Evaluación de las Integrales en el Contorno

En este punto, se trata el tema de la evaluación de las integrales en el contorno de forma mayormente introductoria. Un estudio en profundidad en este campo se puede encontrar en F. Chirino et al. (2000)

Durante el desarrollo descrito, las integrales a evaluar sobre cada elemento  $j$  con colocación sobre cada nodo  $i$  de la discretización son del tipo

$$\begin{aligned}\mathbf{GW}^{ij} &= \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \\ \mathbf{HW}^{ij} &= \int_{\Gamma} \mathbf{t}^* \Phi d\Gamma\end{aligned}$$

Cuando el nodo  $i$  no forma parte del elemento  $j$  sobre el que se integra, las integrales (2.114) pueden ser evaluadas numéricamente haciendo uso de una cuadratura gaussiana estándar sobre elementos rectangulares o triangulares según el caso (ver p.e. Stroud y Secrest, 1966 o Abramovitz y Stegun, 1972). Estas cuadraturas vienen expresadas en función del sistema de referencia intrínseco al elemento  $(\xi_1, \xi_2)$  lo cual exige la transformación de las variables geométricas del mismo a este sistema de referencia. Así, el diferencial de superficie  $d\Gamma$  (figura 2.8) podrá expresarse

$$d\Gamma = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |J_A| d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.114)$$

siendo  $|J_A|$  el jacobiano de la transformación.

Teniendo en cuenta la definición de la geometría del contorno a través de (2.109):

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \mathbf{x}^j \quad (2.115)$$

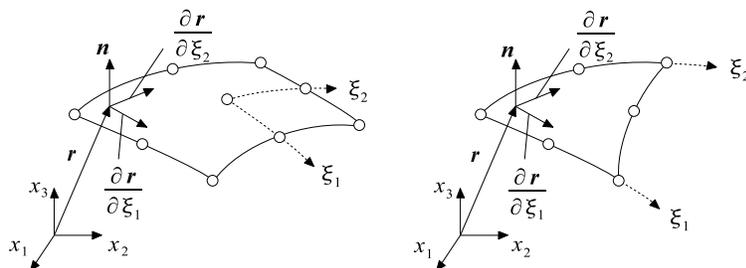


Figura 2.8: Diferencial de la superficie de un elemento

con lo cual:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

$$|J_A| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \quad (2.116)$$

Con lo visto, las componentes del vector normal en cada punto serán:

$$n_k = \frac{g_k}{|J_A|} \quad (2.117)$$

La expresión del jacobiano en coordenadas intrínsecas puede obtenerse sustituyendo (2.109) en (2.116). También haciendo uso de (2.109) puede expresarse la derivada de  $r$  respecto de la normal al contorno si, como es sabido:

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial r}{\partial x_k} n_k \quad (2.118)$$

De esta forma las integrales sobre cada elemento (2.114) pueden escribirse como sigue:

$$\mathbf{G}\mathbf{W}^{ij} = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \mathbf{u}^* \Phi |J_A| d\xi_1 d\xi_2$$

$$\mathbf{H}\mathbf{W}^{ij} = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \mathbf{t}^* \Phi |J_A| d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.119)$$

preparadas ya para su evaluación según cuadraturas estandar. Para elementos cuadriláteros los límites de integración serán -1 y 1. Para los elementos triangulares dichos límites serán 0 y 1.

Cuando el punto de colocación  $i$  forma parte del elemento  $j$  sobre el que se integra, los núcleos  $\mathbf{u}^*$  y  $\mathbf{t}^*$  presentan singularidades de tipo  $O(\frac{1}{r})$  y  $O(\frac{1}{r^2})$  en los términos tratados con anterioridad. Las singularidades del primer tipo pueden ser tratadas numéricamente mediante un proceso de subdivisión del elemento en triángulos. Para las segundas serán necesarias algunas transformaciones previas a su tratamiento numérico.

### Evaluación de los Términos Débilmente Singulares

La técnica que permite integrar numéricamente los términos de  $O(\frac{1}{r})$  se basa en la búsqueda de un nuevo sistema de referencia donde el subintegrando sea regular.

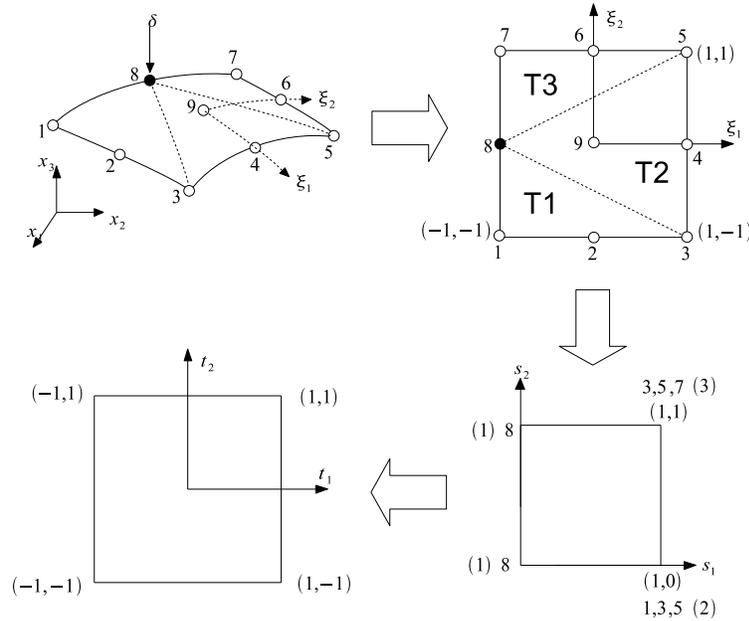


Figura 2.9: Técnica de subdivisión del elemento para integración singularidad débil

Para ello el jacobiano de la transformación entre este sistema de referencia y el sistema de coordenadas homogéneo ha de ser  $O(r)$ . Ello se consigue de forma sencilla con un procedimiento muy conocido y habitual en gran parte de la bibliografía sobre el particular. Dicho procedimiento se esquematiza en la (Figura 2.9) para un elemento cuadrilátero con colocación en un nodo situado en uno de sus lados.

Así, se procede a dividir el elemento en subregiones triangulares tomando como vértice común a todos el nodo de colocación. Posteriormente, cada uno de estos triángulos (T1, T2, y T3) son tratados como cuadriláteros degenerados con dos de sus vértices colapsando en el punto de colocación. Se define un sistema ( $s_1$  y  $s_2$ ) donde esta imagen se convierte en regular. La relación entre  $(\xi_1, \xi_2)$  y  $(s_1, s_2)$  que permite esta conversión es la siguiente:

$$\xi_k = (1 - s_1)\xi_k^{(1)} + s_1(1 - s_2)\xi_k^{(2)} + s_1s_2\xi_k^{(3)} \quad k = 1, 2 \quad (2.120)$$

donde el superíndice (1) se refiere al vértice donde se localiza el punto de colocación. El jacobiano de esta transformación:

$$d\xi_1 d\xi_2 = |J_1| ds_1 ds_2 \quad (2.121)$$

será:

$$|J_1| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial s_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial s_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial s_2} \end{vmatrix} = 2 A s_1 \quad (2.122)$$

donde  $A$  representa el área del triángulo en el sistema de referencia homogéneo  $(\xi_1, \xi_2)$ . Puede verse cómo  $|J_1| \rightarrow 0$  cuando  $s_1 \rightarrow 0$  y nos acercamos al lado determinado por el punto de colocación. Una vez cancelada la singularidad, la integración mediante una cuadratura estándar  $(-1, 1)$  puede realizarse con una nueva transformación del tipo:

$$s_k = \frac{t_k + 1}{2} \quad k = 1, 2 \quad (2.123)$$

cuyo jacobiano será:

$$ds_1 ds_2 = |J_2| dt_1 dt_2 = \frac{1}{4} dt_1 dt_2 \quad (2.124)$$

Con todo ello, las integrales (2.119) con este tipo de singularidad, puede evaluarse numéricamente en  $(t_1, t_2)$  de forma estándar:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} u_{lk}^* \phi_q d\Gamma &= \sum_{n=1}^{\# \text{triangulos}} \int_{t_1} \int_{t_2} u_{lk}^*(t_1, t_2) \phi_q(t_1, t_2) |J_A(t_1, t_2)| \frac{A}{4} (t_1 + 1) dt_1 dt_2 \\ \int_{\Gamma_j} t_{lk}^* \phi_q d\Gamma &= \sum_{n=1}^{\# \text{triangulos}} \int_{t_1} \int_{t_2} t_{lk}^*(t_1, t_2) \phi_q(t_1, t_2) |J_A(t_1, t_2)| \frac{A}{4} (t_1 + 1) dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (2.125)$$

Esta técnica aplicada aquí a elementos cuadriláteros puede extenderse a elementos triangulares con idéntica sencillez (ver p.e. Domínguez, 1993). Este tipo de estrategias fueron propuestas inicialmente por Lachat y Watson (1976), y revisadas luego por Li et al. (1985), Telles (1987) y Cerrozala y Alarcón (1989).

### Evaluación de los Términos Fuertemente Singulares

Existen en la bibliografía del MEC estrategias indirectas, aunque rigurosas, que evitan el cálculo de las integrales cuyo integrando presenta una singularidad de  $O(\frac{1}{r^2})$ . Pero sin embargo, no existe un procedimiento general indirecto, y cada problema particular requiere la definición concreta del tipo de estrategia. Aún más, cuando se trata de problemas armónicos, la aplicación del movimiento de sólido rígido (MSR) exige combinar las ecuaciones del problema dinámico con las del caso estático (ver Domínguez, 1993), y si además el dominio en estudio es no acotado, se hace necesario *cerrar* la discretización con *elementos ficticios* sobre los que integrar la solución fundamental estática (ver Maeso, 1992). En otros supuestos puede resultar más interesante evaluar directamente las integrales en el sentido del VPC, por ejemplo el caso de elementos discontinuos (nodos situados en el interior del elemento) o la estrategia de colocación no-nodal. En ambos casos, el término libre

$$c_{lk} = 0,5 \delta_{lk}.$$

El procedimiento que se presenta para la evaluación de estos términos (ver Chirino et al., 2000) sigue la línea de los anteriores en el sentido de mostrar que la singularidad es realmente *ficticia*, puesto que dicha singularidad se *desvanece* con la contribución de los elementos adyacentes. La técnica es válida para elementos curvos de cualquier orden y tipo, y se basa en la identificación concreta de los términos fuertemente singulares, que será regularizados directamente en coordenadas cartesianas de forma conveniente para obtener una integral de superficie y otra de línea extendida al perímetro del elemento (Cruse, 1969), ambas no singulares y evaluables mediante cuadratura estándar. Este método muestra de forma clara dónde radica la contribución de los elementos adyacentes para cancelar la singularidad en el entorno cercano del punto de colocación. La idea se ilustra abordando en primer lugar el problema elastostático. A continuación se generaliza su aplicación para la formulación elastodinámica en régimen armónico. Como se ha visto, el orden de singularidad es el mismo en ambos casos.

**Problema Elastostático** Como es sabido, las integrales a la solución fundamental de tensiones serán:

$$\int_{\Gamma_j} t_{lk}^* \phi_q d\Gamma = - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 3r_{,l}r_{,k}] \phi_q d\Gamma \right. \\ \left. + (1-2\nu) \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k}n_l - r_{,l}n_k) \phi_q d\Gamma \right\} \quad (2.126)$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = O(r)$ , la primera integral es débilmente singular y puede calcularse numéricamente mediante el proceso de subdivisión triangular visto. En la segunda, si  $l \neq k$ , el subintegrando es de  $O(\frac{1}{r^2})$  cuando  $\phi_q \neq 0$  en el nodo de colocación. El proceso de cancelación de la singularidad se realiza en varias fases. En primer lugar, puede reescribirse el segundo término de (2.126) como sigue:

$$\int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k}n_l - r_{,l}n_k) \phi_q d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k}n_l - r_{,l}n_k) (\phi_q - \phi_q^i) d\Gamma \\ + \phi_q^i \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k}n_l - r_{,l}n_k) d\Gamma = I_1 + I_2 \quad (2.127)$$

siendo  $\phi_q^i$  el valor de la función de forma en el punto de colocación  $i$  ( $\phi_q^i = 1$  si la colocación es nodal). Con esta operación previa (ver p.e. Davis y Rabinowitz, 1984) se elimina la función de forma del subintegrando. Así,  $I - 1$  es ahora evaluable de

forma numérica ya que  $(\phi_q - \phi_q^i) = O(r)$  y la singularidad a tratar de concentra en  $I_2$ . En este punto, es sencillo comprobar que el subintegrando de  $I_2$  puede escribirse en términos del flujo de la rotación de un campo vectorial definido en el elemento de la forma:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_m \quad (2.128)$$

siendo  $\mathbf{e}_m$  un vector unitario en la dirección de  $m$  ( $m \neq l$ ,  $m \neq k$ ). Así:

$$I_2 = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) d\Gamma = \epsilon_{lmk} \int_{\Gamma_j} (\nabla \times \mathbf{B}) \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.129)$$

donde  $\epsilon_{lmk}$  es el tensor de permutación. Aplicando ahora el teorema de Stokes al segundo miembro de (2.129):

$$\int_{\Gamma_j} (\nabla \times \mathbf{B}) \mathbf{n} d\Gamma = \oint_{S_j} \mathbf{B} d\mathbf{S} \quad (2.130)$$

donde  $S_j$  representa el perímetro del elemento  $\Gamma_j$  en el sentido del Valor Principal de Cauchy (VPC) (figura 2.10) con colocación en el nodo 1), se puede escribir:

$$I_2 = \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) d\Gamma = \epsilon_{lmk} \oint_{S_j} \frac{1}{r} \mathbf{e}_m d\mathbf{S} = \epsilon_{lmk} \oint_{S_j} \frac{1}{r} dx_m \quad (2.131)$$

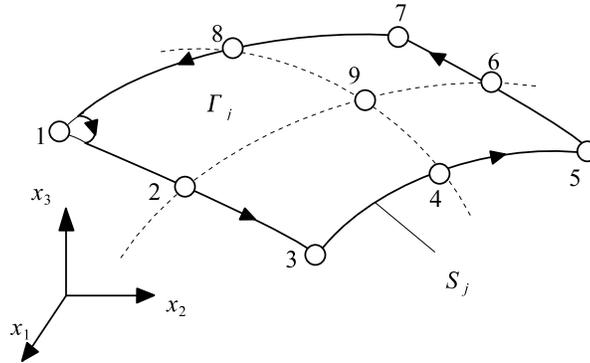


Figura 2.10: Integral curvilínea término singular. Colocación nodo 1

La reducción en una unidad del orden de la singularidad es sólo aparente. Ahora el término singular  $I_2$  se ha convertido en una integral curvilínea extendida al perímetro del elemento y cuyo subintegrando presenta una singularidad fuerte de  $O(\frac{1}{r})$ . A pesar de ello, el camino para su cancelación ha quedado ya trazado. Así, consideremos el elemento  $\Gamma_j$  y los de su entorno tal y como aparece en la (Figura 2.11)

La integral curvilínea en que ha quedado convertida  $I_2$  sobre  $\Gamma_j$  puede expresarse:

$$\begin{aligned} \oint_{S_j} \frac{1}{r} dx_\alpha &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{j1-\varepsilon}} \frac{1}{r} dx_\alpha + \int_{S_{j2}} \frac{1}{r} dx_\alpha + \int_{S_{j3}} \frac{1}{r} dx_\alpha \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{j4-\varepsilon}} \frac{1}{r} dx_\alpha + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{j\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} dx_\alpha \end{aligned} \quad (2.132)$$

extendidas a cada una de las curvas que constituyen el perímetro en el sentido del VPC ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Las integrales sobre  $S_{j2}$  y  $S_{j3}$  (curvas que no contienen el punto de colocación) no presentan problemas y pueden ser evaluadas numéricamente de acuerdo a una cuadratura estándar monodimensional. Las extendidas a lo largo de  $S_{j1}$  y  $S_{j4}$  (singulares) se cancelan con las correspondientes a los elementos  $\Gamma_k$  y  $\Gamma_n$  (recorridos marcados por el sentido de la normal al exterior al elemento). Por último, para la integral de la línea sobre  $S_{j\varepsilon}$ , si se considera la aportación conjunta de todos los elementos que confluyen en el punto de colocación ( $m = j, k, l, n$ ) puede escribirse:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \sum_m \int_{S_{m\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} dx_\alpha \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} \oint_{S_\varepsilon} dx_\alpha \right) = 0 \quad (2.133)$$

Por tanto (2.126) ha sido expresada en término de dos integrales de superficie y una tercera curvilínea, todas ellas regulares y evaluables numéricamente de forma sencilla.

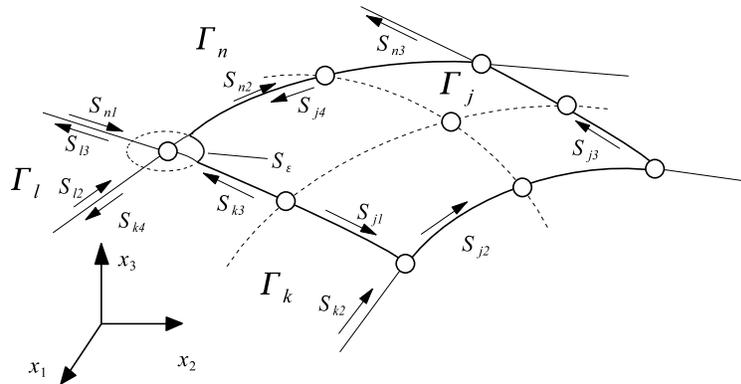


Figura 2.11: Cancelación de la singularidad. Colocación nodo de esquina

**Problemas Dinámicos Armónicos** En este epígrafe serán tratada la estrategia de integración de los coeficientes de  $O = (\frac{1}{r^2})$  en problemas elastodinámicos armónicos. Como se ha comentado con anterioridad, la solución fundamental para el problema elástico armónico presenta una singularidad del mismo tipo que en el

problema elastostático. La singularidad fuerte se encuentra, como en el caso anterior en el segundo término de (2.58). Así, podrá escribirse:

$$\int_{\Gamma_j} t_{lk}^* \phi_q d\Gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (A \delta_{lk} + B r_{,l} r_{,k})}_{O(r^{-1})} \phi_q d\Gamma + \int_{\Gamma_j} \underbrace{(A r_{,k} n_l + C r_{,l} n_k)}_{O(r^{-2})} \phi_q d\Gamma \quad (2.134)$$

siendo  $A$ ,  $B$ , y  $C$  las ecuaciones (2.59). Aislada la parte singular de esta función, puede escribirse el segundo término de (2.134) como sigue (Chirino et al., 2000):

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_j} (A r_{,k} n_l + C r_{,l} n_k) \phi_q d\Gamma = \\ & \int_{\Gamma_j} \overbrace{\left[ \left( A + \frac{1}{r^2} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) r_{,k} n_{,l} + \left( C - \frac{1}{r^2} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) r_{,l} n_{,k} \right]}^{O(r^0)} \phi_q d\Gamma \\ & - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r^2} (r_{,k} n_l - r_{,l} n_k) \phi_q d\Gamma \end{aligned} \quad (2.135)$$

El primer término es absolutamente regular e integrable mediante una cuadratura de Gauss estándar. El segundo puede tratarse teniendo en cuenta la aportación de elementos contiguos tal y como se ha descrito en el subapartado anterior.



Capítulo 3

# Análisis Dinámico

---

## INTRODUCCIÓN

Se describió en el capítulo anterior en qué se basa el método de los elementos de contorno, ahora en el presente se expondrá la aplicación particular de dicha técnica como método directo [3.1], también se describe detalladamente el método indirecto que se utilizará en el estudio [3.2]. Se recalca la importancia del MEC como parte de ambos métodos [3.3]. Y por último, se introduce el modelo sobre el que se efectuará el estudio [3.4].

### 3.1. EL MÉTODO DIRECTO

El método directo permite resolver por medio de un modelo numérico el campo de desplazamientos y tensiones generado en un sistema suelo-estructura debido a una sollicitación sísmica (figura 3.1). Particularizando para el caso estudiado, la estructura es de conformación cilíndrica y se encuentra soterrada en un campo estratificado. A este sistema se le someterá a dos tipos de ondas (P y SH) que inciden verticalmente hacia la estructura desde zonas profundas del terreno.

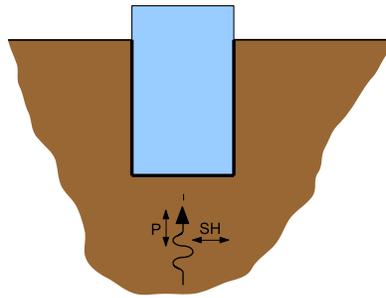


Figura 3.1: Problema Estudiado

A fin de poder comparar ambas metodologías, se adopta como parámetro de valoración los desplazamientos obtenidos en un punto situado en el centro de la base y el giro de la misma. El análisis debe abarcar todo el rango de frecuencias contenido en el espectro del sismo. Los resultados de desplazamientos y giros en la base del depósito cilíndrico se representarán adimensionalizados con relación a los desplazamientos producidos por el tren de ondas P o SH en puntos de la superficie libre del suelo en zonas alejadas de la estructura, libre del efecto local (desplazamientos de un punto de campo libre de un problema de suelo estratificado).

### 3.2. EL MÉTODO DE LOS TRES PASOS

Este método es el procedimiento de cálculo indirecto más utilizado para obtener la respuesta dinámica de una estructura frente a una sollicitación sísmica. Según este proceso, se escalona la obtención de la respuesta en tres etapas. Como se puede ver en la figura 3.2; en la primera se evalúa la interacción cinemática; en la segunda se calculan las rigideces del terreno; y en la tercera se analiza la respuesta de un sistema

dinámico equivalente ante el movimiento impuesto por la base rígida (obtenido del primer paso) por intermediación de resortes y amortiguadores equivalentes (calculados en el segundo paso).

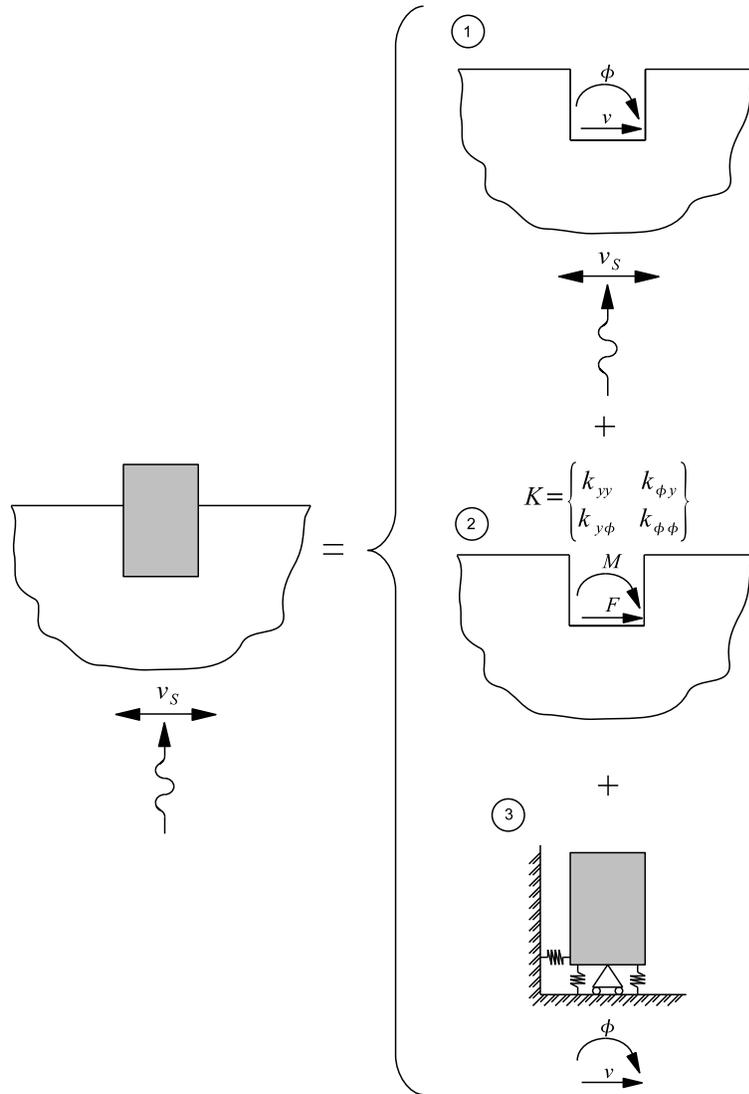


Figura 3.2: método de los tres pasos

### 3.2.1. Interacción cinemática

En el apartado 1.4. se introdujo el concepto de interacción cinemática. En este punto se retoma a fin de recalcar su importancia en el cálculo de la respuesta dinámica del sistema y para explicar que papel juega en el método indirecto.

La primera parte del método de los tres pasos consiste precisamente en determinar los movimientos  $u$ ,  $v$  y  $\phi$  que se producen en el terreno que rodea a la estructura,

para ello se considera vacío el espacio que debería ocupar la construcción e infinitamente rígidas los contornos del terreno que estarían en contacto con la misma a fin de que el hueco se comporte como un sólido rígido. En este nuevo sistema formado sólo por el terreno y una cimentación rígida sin masa, se formula el problema de incidencia y difracción de ondas en un medio tridimensional correspondiente. Los resultados buscados son los desplazamientos en el centro de la base para cada frecuencia, éstos serán la excitación a aplicar a la base del sistema dinámico equivalente.

Los modos de vibración de un estrato de terreno sobre base rígida son de tipo senoidal. En la parte izquierda de la figura 3.3 se han dibujado líneas que representan la deformación ante una onda S, así como la forma que tomaría la estructura empotrada en el terreno si fuera absolutamente flexible. Si por el contrario, la estructura es infinitamente rígida, los ángulos entre fondo y paredes deben permanecer rectos, y ello implica una interacción con el terreno que, además de un desplazamiento horizontal distinto del correspondiente al del suelo sin estructura, generará una rotación  $\phi$  tal y como se indica en la parte derecha de la misma figura.

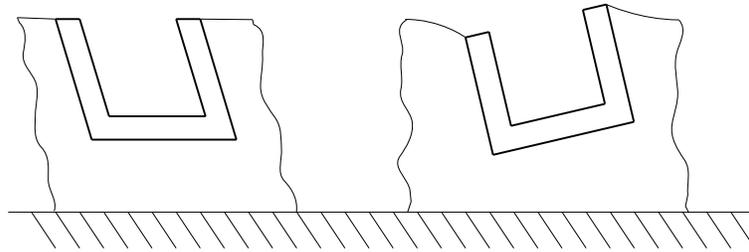


Figura 3.3: influencia de la rigidez de la estructura

### 3.2.2. Rigideces del terreno

La segunda etapa del método de los tres pasos consiste en la determinación de las rigideces dinámicas del terreno ante posibles movimientos de sólido rígido de la parte del cilindro empotrada en el suelo. Para ello se recurre a la definición de rigidez: fuerza que es necesario aplicar en los grados de libertad cuando se da un movimiento unidad a la estructura. En este caso el procedimiento consiste en dar movimientos armónicos del tipo  $1 e^{i\omega t}$  a las zonas del terreno que se encuentren en contacto con la estructura, pero sin considerar los efectos de la masa de esta sobre el suelo. La suma de las tensiones desarrolladas en el contorno rígido son las ‘fuerzas necesarias’

descritas en la definición de rigidez. El problema se repite, para cada frecuencia, y para los casos correspondientes a movimiento vertical de amplitud unitaria (figura 3.4a), movimiento armónico horizontal unitario (figura 3.4b), y giro armónico de amplitud unitaria (figura 3.4c). Se imponen condiciones de contorno soldadas en los dos últimos problemas que conducen a que el giro induzca tensiones horizontales en la cimentación y, recíprocamente, un movimiento horizontal genere un momento en la base. Por lo tanto las rigideces horizontal y de giro referidas a la base están acopladas.

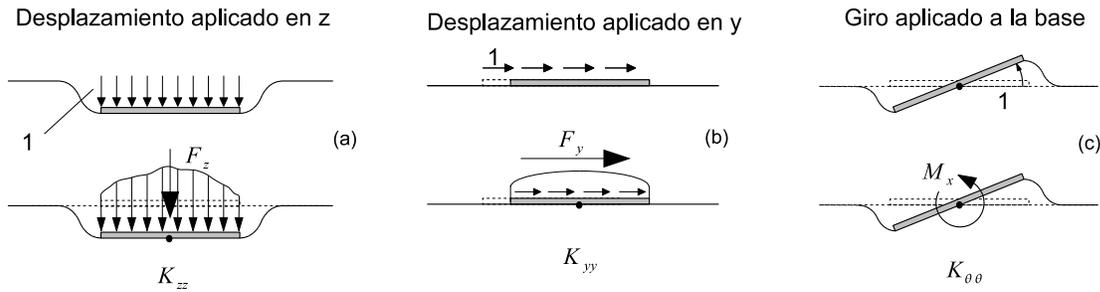


Figura 3.4: Problemas para el cálculo de rigideces

Para una excitación armónica con pulsación  $\omega$ , se define la matriz de rigidez dinámica de una cimentación rígida como la matriz que relaciona el vector de fuerzas y momentos aplicados sobre ella con el vector de desplazamientos y giros resultantes:

$$\begin{pmatrix} F_z \\ F_y \\ M_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & K_{y\theta} \\ 0 & K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Cada término de la matriz de rigidez  $K_{lm}$  es dependiente de la frecuencia  $\omega$  y representa la fuerza (o momento) resultante según la dirección  $l$ , debido a las tensiones de contacto, cuando sobre el contorno lateral y la base de la estructura rígida en contacto con el suelo se aplica un desplazamiento (o giro) armónico unitario según la dirección  $m$ . Fuerzas y desplazamientos están, en general, desfasadas, es decir, los términos de  $K$  son valores complejos del tipo:

$$K_{lm}(\omega) = Re(K_{lm}) + i Im(K_{lm}) \quad (3.2)$$

La parte real de está relacionada con las propiedades de rigidez e inercia del suelo. La parte imaginaria con el amortiguamiento del sistema. Este amortiguamiento

se debe a la energía disipada por radiación de ondas hacia el infinito, a lo que se suma el propio amortiguamiento interno que presente el suelo.

Las rigideces que se obtengan aquí, serán trasladadas al paso siguiente como las características propias de los resortes del sistema vibratorio. También existen otros métodos para obtener estos valores y abundante bibliografía de casos particulares.

### 3.2.3. Sistema Dinámico Equivalente

La última fase del método de los tres pasos consiste en establecer un sistema oscilante sencillo que simule el comportamiento de el problema original. Para ello, se establece que la masa del sistema original se ve unida a una superficie infinitamente rígida y sin masa (sólo tiene la función de soporte del sistema), esta unión se realiza mediante unos resortes cuyas características elásticas y amortiguadoras son las calculadas en el apartado 3.2.2. A este sistema se le transmite a su base una serie de movimientos armónicos, cuyas amplitudes son una función también dependiente de la frecuencia y se corresponden con los calculados en 3.2.1. Según lo observado en el apartado anterior acerca de que los problemas vertical (desplazamiento en  $z$ ) y horizontal (desplazamiento en  $y$  y giro alrededor del eje  $x$ ) están desacoplados, se pueden tratar por separado.

#### Problema Vertical

Este sistema queda definido en la representación de la figura 3.5, en donde, como se ha dicho, el valor de la masa es la aportada por el cuerpo cilíndrico del problema. Las constantes de rigidez y amortiguamiento se han calculado para un desplazamiento vertical en el segundo paso del método (hay que recordar que son funciones imaginarias dependientes de la frecuencia  $\omega$ );  $u$  es el desplazamiento absoluto de la masa; y  $u_B$  es el desplazamiento de la base. El cual será el que se obtuvo de la interacción cinemática suelo-cimentación del primer paso.

El comportamiento de este sistema esta gobernado por la ecuación

$$M \ddot{u} + c \dot{u} + k u = 0 \quad (3.3)$$

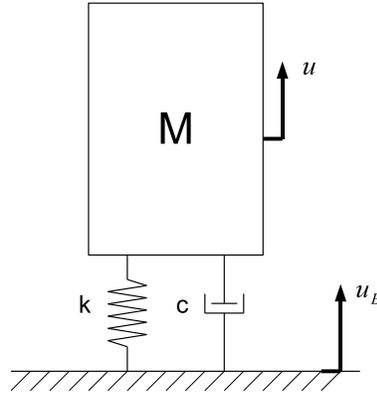


Figura 3.5: Problema Vertical

$\bar{u}$  es el desplazamiento relativo entre masa y suelo ( $\bar{u} = u - u_b$ ), del cual dependen las fuerzas elástica y amortiguadora. A fin obtener una ecuación con una sola incognita, se expresa todo en función de  $\bar{u}$  de donde resulta que:

$$M (\ddot{\bar{u}} + \ddot{u}_B) + c \dot{\bar{u}} + k \bar{u} = 0 \quad (3.4)$$

$$M \ddot{\bar{u}} + c \dot{\bar{u}} + k \bar{u} = -M \ddot{u}_B \quad (3.5)$$

Expresando los desplazamientos en el dominio de la frecuencia

$$\begin{aligned} u &= U e^{i\omega t} \\ \dot{u} &= i\omega U e^{i\omega t} \\ \ddot{u} &= -\omega^2 U e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por lo que la ecuación de comportamiento se transforma en:

$$-\omega^2 M \bar{U} + c\omega i \bar{U} + k \bar{U} = M \omega^2 U_B \quad (3.7)$$

$$(-\omega^2 M + c\omega i + k) \bar{U} = M \omega^2 U_B \quad (3.8)$$

Los términos  $(c\omega i + k)$  se corresponden con la rigidez del terreno para el problema vertical, la cual es función de  $\omega$  y se corresponden con los calculados previamente. Por lo tanto la solución de este problema es:

$$\bar{U} = \frac{M \omega^2 U_B}{K(\omega) - \omega^2 M} \quad (3.9)$$

### Problema horizontal

Para este problema, ya se detalló como el desplazamiento horizontal del centro de la base ( $v$ ) y el giro ( $\theta$ ) están acoplados, por lo que lo correcto es establecer un sistema oscilante de 2 grados de libertad.

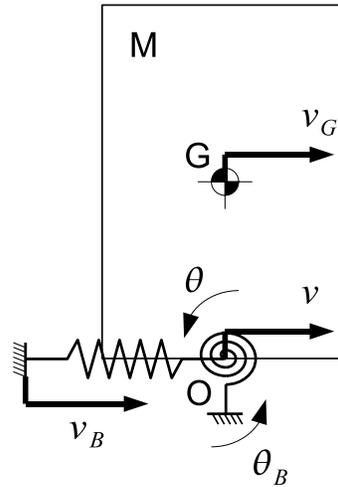


Figura 3.6: Problema Horizontal

La matriz de rigidez necesaria, se implementa partir de los términos correspondientes a los grados de libertad que pertenecen al problema de la otra matriz calculada en 3.2.2, la cual define el comportamiento horizontal y a cabeceo del terreno.

$$[K_{hor}] = \begin{bmatrix} K_{yy} & K_{y\theta} \\ K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Es importante recordar que cada término de la matriz es función de  $\omega$  y posee parte real y parte imaginaria

De la mecánica tradicional, se obtienen las ecuaciones que definen el desplazamiento horizontal y el giro como sólido rígido del cuerpo, estas están referidas a su centro de gravedad y ya se muestran expresadas en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{aligned} -\omega^2 M V_G &= F_{ext}^G \\ -\omega^2 I \theta_G &= M_{ext}^G \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aunque en este caso sólo se conocen las resultantes de las fuerzas y momentos exteriores en el centro de la base (O), y estas son las debidas a las impedancias del terreno.

$$\begin{pmatrix} F_{ext}^O \\ M_{ext}^O \end{pmatrix} = -[K_{hor}] \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Las fuerzas y momentos elásticos y de amortiguamiento, al igual que en el problema vertical, son dependientes del desplazamiento y giro relativo.

$$\begin{aligned} V &= V_B + \bar{V} \\ \theta &= \theta_B + \bar{\theta} \end{aligned}$$

Al tratarse de un sólido rígido, el giro en el centro de gravedad ( $\theta_G$ ) y en el centro de la base ( $\theta_O$ ) son iguales y se puede simplificar la nomenclatura prescindiendo del subíndice.

Si se efectúa un traslado de las fuerzas y momentos resultantes del sistema de la base al centro de gravedad (el traslado de una fuerza origina la misma fuerza y el momento que equilibra el cambio de su punto de aplicación) se tiene que:

$$F_{ext}^G = F_{ext}^O \quad (3.13)$$

$$M_{ext}^G = M_{ext}^O + F_{ext}^O (\overline{OG}) \quad (3.14)$$

$$M_{ext}^G = M_{ext}^O - \omega^2 M V_G (\overline{OG})$$

sustituyendo la ecuación 3.12 en estas, se completa el sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 M & 0 \\ -\omega^2 M \overline{OG} & I \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_G \\ \theta \end{pmatrix} - [K_{hor}] \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

la cinemática del sólido rígido, permite expresar el desplazamiento del centro de gravedad en función del desplazamiento del centro de la base y el giro del cuerpo.

$$\begin{pmatrix} \omega^2 M & 0 \\ -\omega^2 M \overline{OG} & I \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V - \theta \overline{OG} \\ \theta \end{pmatrix} - [K_{hor}] \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{pmatrix} \omega^2 M & -\omega^2 M \overline{OG} \\ -\omega^2 M \overline{OG} & I \omega^2 + \omega^2 M \overline{OG}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \theta \end{pmatrix} - [K_{hor}] \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

En último lugar se definen todas las expresiones en función del desplazamiento y giro relativos

$$\begin{pmatrix} \omega^2 M & -\omega^2 M \overline{OG} \\ -\omega^2 M \overline{OG} & I \omega^2 + \omega^2 M \overline{OG}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V} + V_B \\ \bar{\theta} + \theta_B \end{pmatrix} - [K_{hor}] \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega^2 M & -\omega^2 \overline{MOG} \\ -\omega^2 \overline{MOG} & I\omega^2 + \omega^2 \overline{MOG}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} - [K_{hor}] \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -\omega^2 M & \omega^2 \overline{MOG} \\ \omega^2 \overline{MOG} & -(I\omega^2 + \omega^2 \overline{MOG}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_B \\ \theta_B \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Una vez está el sistema de ecuaciones completamente planteado, cuyas incógnitas son  $\bar{V}$  y  $\bar{\theta}$  sólo queda resolver:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \omega^2 M - K_{yy} & -\omega^2 \overline{MOG} - K_{y\theta} \\ -\omega^2 \overline{MOG} - K_{\theta y} & \omega^2(I + \overline{MOG}^2) - K_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -\omega^2 M V_B + \omega^2 \overline{MOG} \theta_B \\ \omega^2 \overline{MOG} V_B - \omega^2(I + \overline{MOG}^2) \theta_B \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

y se tiene como resultados finales al problema:

$$\bar{V} = \frac{\begin{vmatrix} -\omega^2 M V_B + \omega^2 \overline{MOG} \theta_B & -\omega^2 \overline{MOG} - K_{y\theta} \\ \omega^2 \overline{MOG} V_B - \omega^2(I + \overline{MOG}^2) \theta_B & \omega^2(I + \overline{MOG}^2) - K_{\theta\theta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega^2 M - K_{yy} & -\omega^2 \overline{MOG} - K_{y\theta} \\ -\omega^2 \overline{MOG} - K_{\theta y} & \omega^2(I + \overline{MOG}^2) - K_{\theta\theta} \end{vmatrix}} \quad (3.21)$$

$$\bar{\theta} = \frac{\begin{vmatrix} \omega^2 M - K_{yy} & -\omega^2 M V_B + \omega^2 \overline{MOG} \theta_B \\ -\omega^2 \overline{MOG} - K_{\theta y} & \omega^2 \overline{MOG} V_B - \omega^2(I + \overline{MOG}^2) \theta_B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega^2 M - K_{yy} & -\omega^2 \overline{MOG} - K_{y\theta} \\ -\omega^2 \overline{MOG} - K_{\theta y} & \omega^2(I + \overline{MOG}^2) - K_{\theta\theta} \end{vmatrix}} \quad (3.22)$$

Para resolver estos problemas se ha programado el software necesario que combina los resultados de los dos primeros pasos y soluciona para cada frecuencia el sistema correspondiente. Los resultados de estos problemas (vertical y horizontal) son las funciones de transferencia equivalentes a las obtenidas por el método directo, y por tanto las que serán objeto de comparación y estudio

### 3.3. EL MEC EN AMBAS METODOLOGÍAS

#### 3.3.1. Método Directo

Para obtener la respuesta de la estructura cilíndrica, en término de los desplazamientos y giro en su base, se ha utilizado un programa de ordenador desarrollado en el Departamento de Ingeniería Civil de la UPLGC, basado en el Método de los Elementos de Contorno (MEC). En el primer capítulo ya se han explicado las diferentes ventajas e inconvenientes de este método frente a otros procedimientos de resolución directa. Y en el capítulo segundo, se explicó el aparataje matemático del método en el que se basa el código de este software, el cual ha tenido que ser modificado para poder incluir en el cálculo la propagación de un campo incidente a través de un campo de agua.

Mediante este software, se plantea y resuelve un sistema de ecuaciones que comprende a cada nodo del macrosistema, el cual ha sido previamente discretizado. Con lo cual se obtendrá el campo de tensiones y desplazamientos en todo punto de la discretización. Estos resultados, al encontrarse adimensionalizados con respecto a los desplazamientos en un punto de campo lejano, constituyen la función de transferencia del sistema. Lo cual permite conocer la respuesta del modelo para cualquier excitación. Sencillamente, si se desea obtener el campo de desplazamientos (o de tensiones) que sufriría la estructura frente a un terremoto determinado, se deberá multiplicar la transformada de la función excitadora por la función de transferencia calculada. Si además se desea conocer la respuesta temporal, solo resta aplicar la antitransformada correspondiente.

El cálculo del campo incidente en el sistema es necesario para el programa, ya que las tensiones y desplazamientos que origina, al ser operados por la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones planteado, generan los términos del vector del lado derecho. En un apartado posterior, se explicará la metodología que sigue el programa para calcular estos términos.

Para este estudio, de forma general, se admitirá como válida y suficiente, las funciones de transferencia de los desplazamientos y el giro de la base en el punto central de la misma como elemento objetivo de comparación entre las metodologías

analizadas. Estas funciones serán la respuesta del sistema a dos trenes de ondas de incidencia vertical de tipos P y S los cuales se modelan para que produzcan en un punto de campo libre (alejado de la influencia de la presencia de la cimentación) un desplazamiento armónico cuya amplitud es de una unidad adimensional. ( $1 e^{i\omega t}$ )

### 3.3.2. La Interacción Cinemática

Este cálculo se lleva a cabo a través del mismo software de elementos de contorno utilizado en el método directo, por lo cual será necesario discretizar el sistema.

También se hace necesario el cálculo en este punto de los desplazamientos y tensiones generados por el campo incidente, ya que como se nombró anteriormente, esos valores son parte del sistema de ecuaciones a resolver para obtener el campo de desplazamientos y tensiones de cada nodo. Ya se ha indicado que en un apartado posterior se estudiará en profundidad el proceso para calcular dichos valores.

Si bien en este estudio, se hace uso del MEC para resolver la obtención de los desplazamientos debidos a la interacción cinemática no es la única metodología a utilizar, existe numerosa bibliografía que trata el tema de interacción cinemática entre suelo y cimentación, así como gran cantidad de datos que permite una aproximación a los valores requeridos.

### 3.3.3. Cálculo de Rigideces

De acuerdo a su definición, los términos de la matriz de rigidez se obtendrán imponiendo desplazamientos (o giros) armónicos unitarios en las caras lateral e inferior de la estructura cilíndrica que se encuentren en contacto con el terreno, e integrando las tensiones que aparecen en dichos contornos a fin de obtener las fuerzas (o momentos) resultantes. El momento resultante al aplicar un giro unitario a la base de la cimentación se calcula con respecto a un eje diametral situado en la base de la estructura circular.

Al igual que en el estudio de la difracción de ondas causada por la presencia en el terreno de la estructura semi-enterrada, para el cálculo de las características de rigidez y amortiguamiento del suelo se ha utilizado un programa de ordenador

desarrollado en el Departamento de Ingeniería Civil de la ULPGC, basado en la formulación tridimensional del Método de los Elementos de Contorno (MEC). La imposición de movimientos armónicos en la superficie de contacto cilindro-suelo provoca la propagación de ondas elásticas en el suelo hacia el infinito. El uso de un método de dominio presenta graves inconvenientes por la necesidad de truncar la discretización imponiendo condiciones de contorno. Por el contrario, el MEC resulta especialmente apropiado para atacar este problema, pues no requiere cerrar la discretización de los medios infinitos, incorporando de forma automática el amortiguamiento por radiación. Este es el motivo por el que el MEC ha sido ampliamente utilizado en este tipo de problemas. Cada estrato del terreno se modela como un medio viscoelástico lineal, homogéneo e isótropo. Dividiendo el contorno de cada región elástica en elementos (se han empleado elementos cuadriláteros y triangulares, de nueve y seis nodos, respectivamente, con interpolación cuadrática) pueden escribirse, para cada región, la ecuación matricial del MEC que, en forma compacta lleva al sistema de  $3N$  ecuaciones

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{t} \quad (3.23)$$

siendo  $N$  el número de nodos en el contorno  $\Gamma$ , los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{t}$  contienen todos los valores nodales de desplazamientos y tensiones en  $\Gamma$ . Las matrices  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$  ( $3N \times 3N$ ) contienen los coeficientes de integración de la solución fundamental por las funciones de forma sobre cada elemento. Una vez escrita la ecuación (3.23) para cada estrato, el sistema global de ecuaciones se obtiene imponiendo las condiciones de contorno:

- sobre la superficie libre la condición de tensiones nulas
- sobre los contornos en contacto suelo-estructura cilíndrica se imponen desplazamientos (o giros) unitarios de sólido rígido
- a lo largo de los contornos frontera entre dos estratos se impone equilibrio de tensiones y compatibilidad de desplazamientos

### 3.3.4. Campo incidente y Campo difractado

Ya se ha comentado la necesidad de calcular el campo incidente en el sistema. A continuación se describe el porqué de su necesidad y la forma matemática de obtener sus términos.

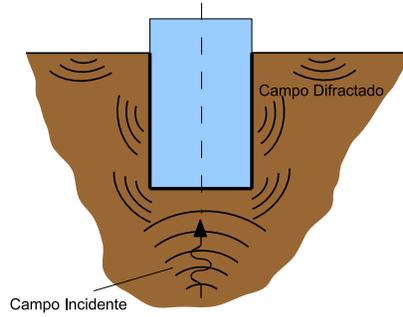


Figura 3.7: Campo Incidente y Campo Difractado

Se ha considerado un campo de ondas elásticas armónicas planas en el terreno que incide verticalmente desde el infinito. La presencia de la estructura cilíndrica semienterrada provoca una distorsión del campo de movimientos en comparación al producido en zonas alejadas. Así, el campo de desplazamientos puede considerarse como la superposición de dos problemas (figura 3.7). El primero lo constituye el campo provocado por el tren de ondas incidente sobre el semiespacio viscoelástico estratificado ( $\mathbf{u}_I^S$ ) cuya expresión analítica es conocida y su obtención se describirá a continuación. El segundo representa el campo difractado por la presencia de la estructura circular ( $\mathbf{u}_D^S$ ). El campo total en cada estrato será la suma de los dos ( $\mathbf{u}_T^S = \mathbf{u}_I^S + \mathbf{u}_D^S$ ). El sistema de ecuaciones se obtiene planteando el MEC para el campo difractado en cada región. Así en el estrato  $k$

$$\mathbf{H}^k \mathbf{u}_D^k = \mathbf{G}^k \mathbf{t}_D^k \quad (3.24)$$

Teniendo en cuenta las consideraciones realizadas para el campo total en cada dominio, la ecuación (3.24) en el mismo estrato puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{H}^k \mathbf{u}_T^k - \mathbf{G}^k \mathbf{t}_T^k = \mathbf{H}^k \mathbf{u}_I^k - \mathbf{G}^k \mathbf{t}_I^k \quad (3.25)$$

El segundo miembro de (3.25) es dato y pasa al vector del lado derecho del sistema de ecuaciones. Escritas las ecuaciones (3.25) para todos los estratos, ya en términos de campo total, se aplican las condiciones de contorno y las condiciones en las interfases. En la superficie libre del terreno se prescribe ausencia de tensiones. En los nodos de las interfases entre estratos se prescribe equilibrio de tensiones y continuidad de desplazamientos.

### Cálculo del campo incidente en un semiespacio

A fin de calcular los valores que conforman el vector del lado derecho, es necesario obtener las amplitudes de la onda incidente.

La excitación sísmica se modela mediante trenes de ondas armónicas planas P y S que inciden verticalmente desde zonas muy profundas del terreno. Cuando la onda sísmica alcanza la superficie libre, se produce un efecto de difracción que genera otra onda descendente. Así el efecto global del sismo se verá influido por el conjunto de la onda incidente (ascendente) de amplitud  $A_I$  y la onda reflejada (descendente) de amplitud  $A_R$ .

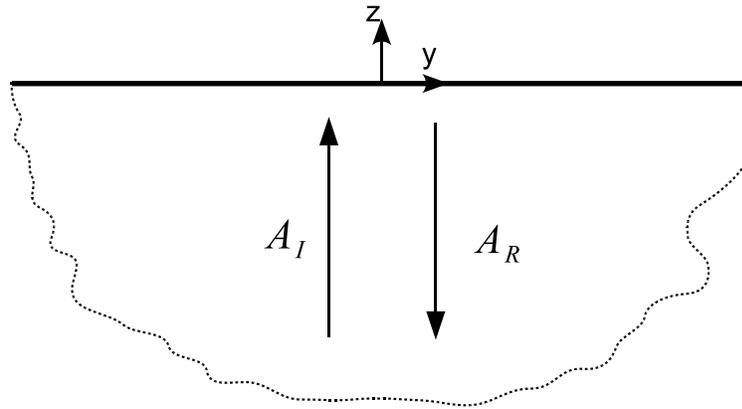


Figura 3.8: Propagación de ondas en un semiespacio

#### ■ Incidencia vertical de ondas P

En el caso de que la onda incidente fuese del tipo P los desplazamientos y las tensiones en función de las características mecánicas del semiespacio y la profundidad serán:

$$v = w = 0$$

$$u = \left( A_I e^{\frac{-i\omega z}{c_P}} + A_R e^{\frac{i\omega z}{c_P}} \right) (e^{i\omega t}) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \lambda \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2G) \varepsilon_{zz}\end{aligned}\tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= \lambda \left( \frac{i\omega}{C_P} \right) \left( -A_I e^{-\frac{i\omega z}{C_P}} + A_R e^{\frac{i\omega z}{C_P}} \right) (e^{i\omega t}) \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2G) \left( \frac{i\omega}{C_P} \right) \left( -A_I e^{-\frac{i\omega z}{C_P}} + A_R e^{\frac{i\omega z}{C_P}} \right) (e^{i\omega t})\end{aligned}$$

A fin de despejar las amplitudes de la onda reflejada e incidente, se establecen las condiciones de contorno en la superficie libre ( $z=0$ ) donde debe cumplirse que:

$$u = 1e^{i\omega t}\tag{3.28}$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

Despejando en (3.26) y (3.27) después de haber sustituido estos valores, se obtiene que  $A_I = A_R = \frac{1}{2}$ . Así pues los campos de desplazamiento y tensiones responden a las expresiones:

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{i\omega z}{C_P}} + e^{\frac{i\omega z}{C_P}} \right) e^{i\omega t} \\ \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= \frac{1}{2} \lambda \left( \frac{i\omega}{C_P} \right) \left( -e^{-\frac{i\omega z}{C_P}} + e^{\frac{i\omega z}{C_P}} \right) (e^{i\omega t}) \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{2} (\lambda + 2G) \left( \frac{i\omega}{C_P} \right) \left( -e^{-\frac{i\omega z}{C_P}} + e^{\frac{i\omega z}{C_P}} \right) (e^{i\omega t})\end{aligned}\tag{3.29}$$

#### ■ Incidencia vertical de ondas S

El proceso a seguir es totalmente idéntico al correspondiente para ondas P, las únicas diferencias son que los desplazamientos originados tienen como dirección principal el eje  $y$ ; los términos no nulos del tensor de tensiones no son los de la diagonal principal sino los términos cruzados  $\sigma_{yz}$ ; y la velocidad de propagación de onda es:  $C_S$

Así que, partiendo de:

$$u = w = 0$$

$$v = \left( A_I e^{-\frac{i\omega z}{C_S}} + A_R e^{\frac{i\omega z}{C_S}} \right) (e^{i\omega t})\tag{3.30}$$

y

$$\sigma_{yz} = G \left( \frac{i\omega}{C_S} \right) \left( -A_I e^{-\frac{i\omega z}{C_S}} + A_R e^{\frac{i\omega z}{C_S}} \right) (e^{i\omega t}) \quad (3.31)$$

Para unas condiciones de contorno en la superficie libre ( $z=0$ ) análogas a las del caso anterior

$$v = 1e^{i\omega t} \quad (3.32)$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

Se obtiene que las ecuaciones que rigen los desplazamientos y las tensiones en el semiespacio son:

$$v = \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{i\omega z}{C_S}} + e^{\frac{i\omega z}{C_S}} \right) e^{i\omega t} \quad (3.33)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{1}{2} G \left( \frac{i\omega}{C_S} \right) \left( -e^{-\frac{i\omega z}{C_S}} + e^{\frac{i\omega z}{C_S}} \right) (e^{i\omega t})$$

### Cálculo del campo incidente en un suelo estratificado

En un caso más cercano a la realidad, se supone que el semiespacio se encuentra dividido en estratos, cada uno con su extensión y propiedades mecánicas. En una generalización de lo explicado en el apartado anterior, se puede decir que conforme la onda va encontrando en su propagación vertical fronteras entre los medios de diferentes características mecánicas se van produciendo ondas incidentes y reflejadas, de tal manera que en cada medio por el que se transmite el sismo, existe una onda ascendente de amplitud  $A_I^n$  y una onda descendente  $A_R^n$

Mediante las condiciones de compatibilidad de desplazamientos y equilibrio de tensiones, se puede despejar el valor de estas amplitudes, y determinar una expresión general para terrenos con un número indefinido de estratos.

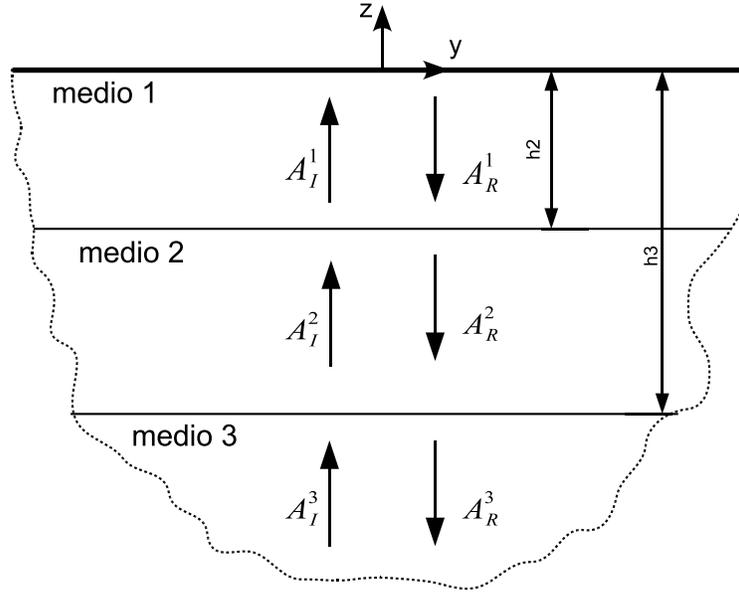


Figura 3.9: Propagación de ondas en un suelo estratificado

### ■ Incidencia vertical de ondas P

Los desplazamientos y tensiones en cualquier estrato  $n$  son del tipo:

$$v = w = 0$$

$$u^n = \left( A_I^n e^{\frac{-i\omega z}{C_{Pn}}} + A_R^n e^{\frac{i\omega z}{C_{Pn}}} \right) (e^{i\omega t}) \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^n &= \sigma_{yy}^n = \lambda_n \varepsilon_{zz}^n \\ \sigma_{zz}^n &= (\lambda_n + 2G_n) \varepsilon_{zz}^n \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^n &= \sigma_{yy}^n = \lambda_n \left( \frac{i\omega}{C_{Pn}} \right) \left( -A_I^n e^{\frac{-i\omega z}{C_{Pn}}} + A_R^n e^{\frac{i\omega z}{C_{Pn}}} \right) (e^{i\omega t}) \\ \sigma_{zz}^n &= (\lambda_n + 2G_n) \left( \frac{i\omega}{C_{Pn}} \right) \left( -A_I^n e^{\frac{-i\omega z}{C_{Pn}}} + A_R^n e^{\frac{i\omega z}{C_{Pn}}} \right) (e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

Para establecer cuáles serán las amplitudes de las ondas incidente y reflejada en cada estrato, se deberán aplicar las condiciones de contorno correspondientes.

Así en la superficie ( $z = 0$ ) resulta que:

$$u = 1 e^{i\omega t} \quad (3.36)$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

sustituyendo en (3.34) y (3.35) resolvemos que  $A_I^1 = A_R^1 = \frac{1}{2}$ . Así pues los campos de desplazamiento y tensiones responden a las expresiones:

$$u^1 = \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{i\omega z}{C_{P1}}} + e^{\frac{i\omega z}{C_{P1}}} \right) e^{i\omega t} \quad (3.37)$$

$$\sigma_{zz}^1 = \frac{1}{2} (\lambda_1 + 2G_1) \left( \frac{i\omega}{C_{P1}} \right) \left( -e^{-\frac{i\omega z}{C_{P1}}} + e^{\frac{i\omega z}{C_{P1}}} \right) (e^{i\omega t})$$

En la interfase entre los medios 1 y 2 ( $z = -h_2$ ) se impone equilibrio de tensiones y continuidad cinemática

$$u^1 = u^2 \quad (3.38)$$

$$\sigma_{zz}^1 = \sigma_{zz}^2$$

Con ello se obtienen las siguientes expresiones para las amplitudes de las ondas en el medio 2

$$A_I^2 = \frac{1}{4} e^{\frac{-i\omega h_2}{C_{P2}}} \left[ (1 + K) e^{\frac{i\omega h_2}{C_{P1}}} + (1 - K) e^{\frac{-i\omega h_2}{C_{P1}}} \right] \quad (3.39)$$

$$A_R^2 = \frac{1}{4} e^{\frac{i\omega h_2}{C_{P2}}} \left[ (1 - K) e^{\frac{i\omega h_2}{C_{P1}}} + (1 + K) e^{\frac{-i\omega h_2}{C_{P1}}} \right]$$

en donde  $K$  es una constante que depende de las propiedades de ambos estratos

$$K = \frac{\lambda_1 + 2G_1}{\lambda_2 + 2G_2} \frac{C_{P2}}{C_{P1}} \quad (3.40)$$

Siguiendo el mismo proceso se puede despejar las amplitudes de un estrato  $k$  en base a las del estrato inmediatamente superior  $k-1$ , estando situado el primero a una profundidad  $H$  desde la superficie libre

$$A_I^k = \frac{1}{2} e^{\frac{-i\omega H}{C_{Pk}}} \left[ (1 + K) A_I^{k-1} e^{\frac{i\omega H}{C_{Pk-1}}} + (1 - K) A_R^{k-1} e^{\frac{-i\omega H}{C_{Pk-1}}} \right] \quad (3.41)$$

$$A_R^k = \frac{1}{2} e^{\frac{-i\omega H}{C_{Pk}}} \left[ (1 - K) A_I^{k-1} e^{\frac{i\omega H}{C_{Pk-1}}} + (1 + K) A_R^{k-1} e^{\frac{-i\omega H}{C_{Pk-1}}} \right]$$

Ahora, la constante de propiedades  $K$  queda definida de manera general como:

$$K = \frac{\lambda_{k-1} + 2G_{k-1}}{\lambda_k + 2G_k} \frac{C_{Pk}}{C_{Pk-1}} \quad (3.42)$$

### ■ Incidencia vertical de ondas SH

El procedimiento a seguir para este caso es análogo al del apartado anterior. En este caso, los desplazamientos serán del tipo:

$$u = w = 0$$

$$v^n = \left( A_I^n e^{\frac{-i\omega z}{C_{Sn}}} + A_R^n e^{\frac{i\omega z}{C_{Sn}}} \right) (e^{i\omega t}) \quad (3.43)$$

Se vuelve a obtener los términos del tensor de tensiones por derivación, y en este caso el único término no nulo es:

$$\sigma_{yz}^n = G_n \left( \frac{i\omega}{C_{Sn}} \right) \left( -A_I^n e^{\frac{-i\omega z}{C_{Sn}}} + A_R^n e^{\frac{i\omega z}{C_{Sn}}} \right) (e^{i\omega t}) \quad (3.44)$$

Recurriendo a las condiciones de contorno en la superficie libre se tiene que en  $z = 0$

$$v = 1 e^{i\omega t} \quad (3.45)$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

Donde es fácil despejar de (3.43) y (3.44) que las amplitudes en el estrato superior toman al igual que en el apartado anterior valores tal que  $A_I^1 = A_R^1 = \frac{1}{2}$

Para calcular el resto de amplitudes, se aplican las condiciones de compatibilidad de desplazamientos y equilibrio de tensiones en la interfase de los medios 1 y 2. Por lo tanto a una profundidad  $h_2$  deberá cumplirse que:

$$v^1 = v^2 \quad (3.46)$$

$$\sigma_{yz}^1 = \sigma_{yz}^2$$

con ello se obtienen las siguientes expresiones para las amplitudes de las ondas en el medio 2

$$A_I^2 = \frac{1}{4} e^{\frac{-i\omega h_2}{C_{S2}}} \left[ \left( 1 + \frac{G_1 C_{S2}}{G_2 C_{S1}} \right) e^{\frac{i\omega h_2}{C_{S1}}} + \left( 1 - \frac{G_1 C_{S2}}{G_2 C_{S1}} \right) e^{\frac{-i\omega h_2}{C_{S1}}} \right] \quad (3.47)$$

$$A_R^2 = \frac{1}{4} e^{\frac{i\omega h_2}{C_{S2}}} \left[ \left( 1 - \frac{G_1 C_{S2}}{G_2 C_{S1}} \right) e^{\frac{i\omega h_2}{C_{S1}}} + \left( 1 + \frac{G_1 C_{S2}}{G_2 C_{S1}} \right) e^{\frac{-i\omega h_2}{C_{S1}}} \right]$$

de igual forma para dos estratos cualesquiera consecutivos  $k-1$  y  $k$  cuya interfase se encuentra a una profundidad  $H$  desde la superficie libre se impone:

$$v^{k-1} = v^k \quad (3.48)$$

$$\sigma_{yz}^{k-1} = \sigma_{yz}^k$$

y así se obtiene la relación entre las amplitudes de las ondas de ambas capas:

$$A_I^k = \frac{1}{2} e^{-\frac{i\omega H}{C_{Sk}}} \left[ \left( 1 + \frac{G_{k-1}}{G_k} \frac{C_{Sk}}{C_{Sk-1}} \right) A_I^{k-1} e^{\frac{i\omega H}{C_{Sk-1}}} + \left( 1 - \frac{G_{k-1}}{G_k} \frac{C_{Sk}}{C_{Sk-1}} \right) A_R^{k-1} e^{-\frac{i\omega H}{C_{Sk-1}}} \right]$$

$$A_R^k = \frac{1}{2} e^{\frac{i\omega H}{C_{Sk}}} \left[ \left( 1 - \frac{G_{k-1}}{G_k} \frac{C_{Sk}}{C_{Sk-1}} \right) A_I^{k-1} e^{\frac{i\omega H}{C_{Sk-1}}} + \left( 1 + \frac{G_{k-1}}{G_k} \frac{C_{Sk}}{C_{Sk-1}} \right) A_R^{k-1} e^{-\frac{i\omega H}{C_{Sk-1}}} \right] \quad (3.49)$$

expresiones que ya pueden introducirse en (3.43) y (3.44)

### Cálculo del campo incidente en un semiespacio con una capa de agua

Como último caso de este estudio, se debe cuantificar de alguna forma la influencia en la propagación de la onda sísmica de una masa de agua que descansa sobre el terreno.

La onda se transmiten por el agua en forma ondas de presión, no de desplazamientos como lo hace a través de los cuerpos sólidos. Si se define el equilibrio de un elemento diferencial del fluido (figura 3.10), se tendrá que en el dominio del tiempo:

$$[p - (p + dp)] A = \rho A dx \ddot{u} \quad (3.50)$$

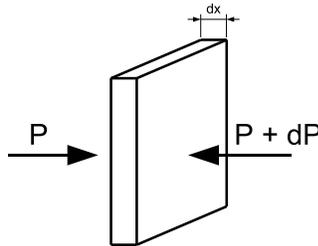


Figura 3.10: elemento diferencial de agua

donde la presión y los desplazamientos son del tipo:

$$p = P e^{i\omega t} \quad (3.51)$$

$$u = U e^{i\omega t}$$

Expresando (3.50) en el dominio de la frecuencia y despejando la amplitud del desplazamiento se obtendrá

$$[P - (P + dP)] A e^{i\omega t} = -\rho A dx \omega^2 U e^{i\omega t} \quad (3.52)$$

$$-\frac{dP}{dx} = -\rho \omega^2 U \quad (3.53)$$

$$U = \frac{1}{\rho \omega^2} \frac{dP}{dx} \quad (3.54)$$

De esta forma ya queda definido el comportamiento de la onda en propagación a través del fluido. Donde al contrario que en el medio sólido, la variable principal es la presión y la derivada el desplazamiento.

Las diferentes amplitudes para cada pareja de ondas (incidente y reflejada) serán calculadas como en los casos anteriores aplicando las correspondientes condiciones de contorno

### ■ Incidencia vertical de ondas P

En este particular los desplazamientos verticales que recorren los estratos sólidos, se transmiten a la capa líquida en formas de ondas de presión.

Así en el agua, las ondas de presión serán del tipo:

$$p^a = \left( P_I^a e^{-\frac{i\omega z}{c_a}} + P_R^a e^{\frac{i\omega z}{c_a}} \right) (e^{i\omega t}) \quad (3.55)$$

y su variable derivada, es decir, los desplazamientos, tomarán la forma de:

$$u^a = \frac{1}{\rho_a \omega^2} p'_{/z} = \frac{1}{\rho_a \omega^2} (-i k_a) \left[ P_I^a e^{-\frac{i\omega z}{c_a}} - P_R^a e^{-\frac{i\omega z}{c_a}} \right] (e^{i\omega t}) \quad (3.56)$$

Ya se ha visto anteriormente que los desplazamientos y tensiones en un estrato'n' serán tal que:

$$v = w = 0$$

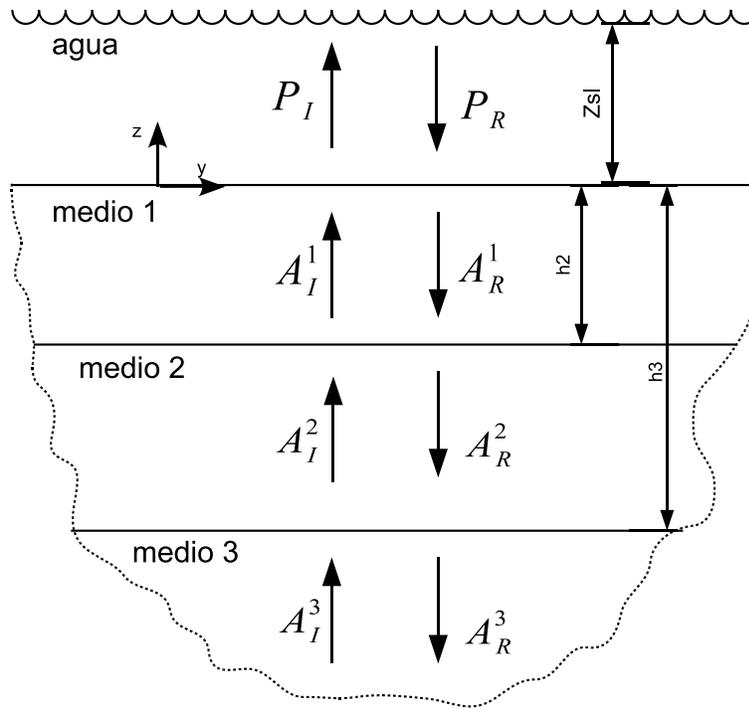


Figura 3.11: Propagación de ondas en un suelo estratificado y una capa de agua

$$u^n = \left( A_I^n e^{\frac{-i\omega z}{C_{Pn}}} + A_R^n e^{\frac{i\omega z}{C_{Pn}}} \right) (e^{i\omega t}) \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^n &= \sigma_{yy}^n = \lambda_n \varepsilon_{zz}^n \\ \sigma_{zz}^n &= (\lambda_n + 2G_n) \varepsilon_{zz}^n \end{aligned}$$

(3.58)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^n &= \sigma_{yy}^n = \lambda_n \left( \frac{i\omega}{C_{Pn}} \right) \left( -A_I^n e^{\frac{-i\omega z}{C_{Pn}}} + A_R^n e^{\frac{i\omega z}{C_{Pn}}} \right) (e^{i\omega t}) \\ \sigma_{zz}^n &= (\lambda_n + 2G_n) \left( \frac{i\omega}{C_{Pn}} \right) \left( -A_I^n e^{\frac{-i\omega z}{C_{Pn}}} + A_R^n e^{\frac{i\omega z}{C_{Pn}}} \right) (e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

Para despejar las diferentes amplitudes aplicamos las condiciones de contorno en la superficie libre y las interfases. En el equilibrio la presión en la superficie ( $z = Z_{sl}$ ) debe ser nula, así se plantea que:

$$P_I^a e^{-\frac{i\omega Z_{sl}}{C_a}} + P_R^a e^{\frac{i\omega Z_{sl}}{C_a}} = 0 \quad (3.59)$$

En la interfase agua terreno, se dará ahora la misma condición de contornos en

desplazamiento que en los casos anteriores

$$u^1 = 1e^{i\omega t} \quad (3.60)$$

aunque en este caso y por la ley de compatibilidad, los desplazamientos en agua y terreno deben ser iguales:

$$u^a = u^1 = 1e^{i\omega t} \quad (3.61)$$

por lo que en  $z=0$ , queda que en (3.56)

$$\frac{1}{\rho_a \omega^2} \left( \frac{-i\omega}{C_a} \right) [P_I^a - P_R^a] = 1 \quad (3.62)$$

y de (3.57)

$$A_I^1 + A_R^1 = 1 \quad (3.63)$$

según la ley de equilibrio, las presiones en el agua, deberán ser iguales y de signo contrario a las tensiones en el terreno en el punto de contacto ( $z = 0$ )

$$\sigma_{zz}^1 = -p^a$$

$$(\lambda_1 + 2G_1) \left( \frac{i\omega}{C_{P1}} \right) (-A_I^1 + A_R^1) = -(P_I^a + P_R^a) \quad (3.64)$$

En el resto de interfases, las condiciones de contorno a aplicar tienen la misma estructura que en el apartado anterior, y de forma general toma sentido las ecuaciones

$$u^{k-1} = u^k \quad (3.65)$$

$$\sigma_{zz}^{k-1} = \sigma_{zz}^k$$

Con (3.59) y (3.62) se establece un sistema de ecuaciones, cuyas incógnitas son las amplitudes de onda en el agua, y cuya solución es:

$$P_I^a = \frac{i\rho_a \omega}{C_a} \frac{1}{1 + e^{-2i\frac{\omega}{C_a} Z_{sl}}} \quad (3.66)$$

$$P_R^a = -\frac{i\rho_a \omega}{C_a} \frac{e^{-2i\frac{\omega}{C_a} Z_{sl}}}{1 + e^{-2i\frac{\omega}{C_a} Z_{sl}}} \quad (3.67)$$

Para resolver las amplitudes del estrato superior, se toman los valores recién obtenidos, y se sustituyen en (3.64), obteniéndose otra ecuación tal que:

$$(\lambda_1 + 2G_1) \left( \frac{i\omega}{C_{P1}} \right) (-A_I^1 + A_R^1) = -\frac{i\rho_a\omega}{C_a} \left( \frac{1 - e^{-2i\frac{\omega}{C_a}Z_{sl}}}{1 + e^{-2i\frac{\omega}{C_a}Z_{sl}}} \right) \quad (3.68)$$

que unido a la ecuación (3.63) forma un sistema de ecuaciones que tiene como solución los valores:

$$A_I^1 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{i\rho_a}{C_a} \frac{C_{P1}}{(\lambda_1 + 2G_1)} \frac{1 - e^{-2i\frac{\omega}{C_a}Z_{sl}}}{1 + e^{-2i\frac{\omega}{C_a}Z_{sl}}} \right] \quad (3.69)$$

$$A_R^1 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{i\rho_a}{C_a} \frac{C_{P1}}{(\lambda_1 + 2G_1)} \frac{1 - e^{-2i\frac{\omega}{C_a}Z_{sl}}}{1 + e^{-2i\frac{\omega}{C_a}Z_{sl}}} \right] \quad (3.70)$$

Para el resto de los estratos el proceso es idéntico al realizado en apartados anteriores, ya que sólo consiste en despejar los valores de las amplitudes de cada capa de terreno en función de la inmediatamente superior. Este cálculo está descrito para la propagación del campo incidente en un semiespacio estratificado y tiene como solución:

$$A_I^k = \frac{1}{2} e^{\frac{-i\omega H}{C_{Pk}}} \left[ (1 + K) A_I^{k-1} e^{\frac{i\omega H}{C_{Pk-1}}} + (1 - K) A_R^{k-1} e^{\frac{-i\omega H}{C_{Pk-1}}} \right] \quad (3.71)$$

$$A_R^k = \frac{1}{2} e^{\frac{-i\omega H}{C_{Pk}}} \left[ (1 - K) A_I^{k-1} e^{\frac{i\omega H}{C_{Pk-1}}} + (1 + K) A_R^{k-1} e^{\frac{-i\omega H}{C_{Pk-1}}} \right]$$

donde:

$$K = \frac{\lambda_{k-1} + 2G_{k-1}}{\lambda_k + 2G_k} \frac{C_{Pk}}{C_{Pk-1}} \quad (3.72)$$

### ■ Incidencia vertical de ondas S

Dado que este tipo de ondas se transmiten mediante tensiones tangenciales, no existe incidencia por parte de esta onda en el agua. Así que el problema se reduce al ya calculado en la sección anterior ‘propagación de ondas S en suelos estratificados’. A forma de resumen las soluciones para este caso son:

Desplazamientos:

$$u = w = 0$$

$$v^n = \left( A_I^n e^{\frac{-i\omega z}{C_{Sn}}} + A_R^n e^{\frac{i\omega z}{C_{Sn}}} \right) (e^{i\omega t}) \quad (3.73)$$

Tensiones:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{yz}^n = G_n \left( \frac{i\omega}{C_{Sn}} \right) \left( -A_I^n e^{\frac{-i\omega z}{C_{Sn}}} + A_R^n e^{\frac{i\omega z}{C_{Sn}}} \right) (e^{i\omega t}) \quad (3.74)$$

Amplitudes estrato superior:

$$A_I^1 = A_R^1 = \frac{1}{2} \quad (3.75)$$

Amplitudes resto de estratos:

$$A_I^k = \frac{1}{2} e^{-\frac{i\omega H}{C_{Sk}}} \left[ \left( 1 + \frac{G_{k-1}}{G_k} \frac{C_{Sk}}{C_{Sk-1}} \right) A_I^{k-1} e^{\frac{i\omega H}{C_{Sk-1}}} + \left( 1 - \frac{G_{k-1}}{G_k} \frac{C_{Sk}}{C_{Sk-1}} \right) A_R^{k-1} e^{-\frac{i\omega H}{C_{Sk-1}}} \right]$$

$$A_R^k = \frac{1}{2} e^{\frac{i\omega H}{C_{Sk}}} \left[ \left( 1 - \frac{G_{k-1}}{G_k} \frac{C_{Sk}}{C_{Sk-1}} \right) A_I^{k-1} e^{\frac{i\omega H}{C_{Sk-1}}} + \left( 1 + \frac{G_{k-1}}{G_k} \frac{C_{Sk}}{C_{Sk-1}} \right) A_R^{k-1} e^{-\frac{i\omega H}{C_{Sk-1}}} \right] \quad (3.76)$$

## 3.4. DESCRIPCIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS FÍSICAS Y GEOMÉTRICAS

### 3.4.1. La estructura

La estructura planteada en la figura 1.1 ofrece demasiados huecos y esquinas los cuales incrementarían notablemente el número de grados de libertad, y la posibilidad de generar problemas de esquina (superabundancia de incógnitas). Así que a fin de poder procesarlo de manera más efectiva, se han optado por varias simplificaciones:

- Simplificación de la base del cilindro, dotándolo de un fondo totalmente plano (figura 3.12)

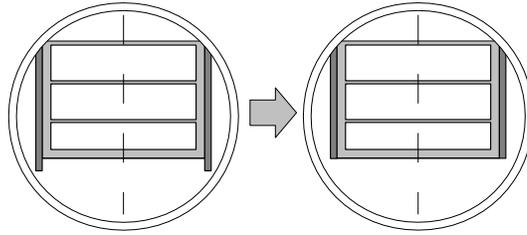


Figura 3.12: Detalle de la simplificación en la configuración estructural

- Incorporación de la pantalla al cuerpo del cilindro, considerando ambos como el mismo dominio de hormigón
- Supresión de espacios entre forjados en la parte baja del cilindro. Dada la alta rigidez estructural de este conjunto se considera como si fuera una parte maciza.
- Con la intención de mantener ciertas propiedades dinámicas de la estructura original, como la altura del centro de gravedad, se divide el macizo en dos dominios y se calculan las densidades que deben tener cada uno para cumplir con esta premisa.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, la estructura de hormigón armado queda simplificada como se muestra en la figura 3.13.

Las propiedades de cada dominio se muestran en la tabla siguiente

	<b>Dominio 1</b>	<b>Dominio 2</b>
$\nu$	0.2	0.2
$\rho$	$2685.85 \text{ kg/m}^3$	$2253.42 \text{ kg/m}^3$
$\xi$	0.05	0.05
$G$	$11,500 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$	$11,500 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$

Donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson;  $\rho$  la densidad;  $\xi$  el factor de amortiguamiento; y  $G$  es el coeficiente de rigidez transversal

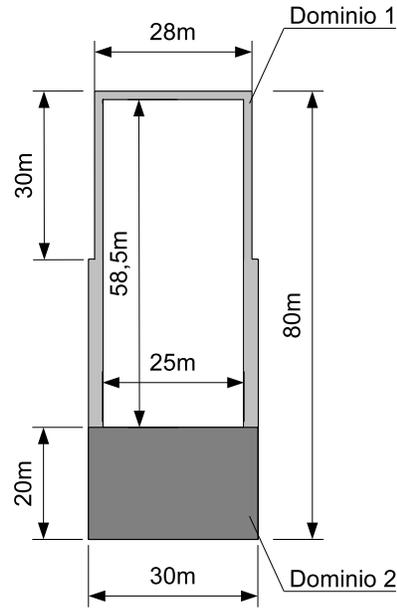


Figura 3.13: Dominios de la estructura

### 3.4.2. El terreno

La caracterización del terreno está basada en materiales y una configuración bastante común en geología. La roca sedimentaria, forma suelos más o menos bien consolidados conteniendo normalmente un 50 % de materiales arcillosos y otro 50 % de minerales de cuarzo. Se dispondrá desde el punto de vista geotécnico de tres estratos:

- Una capa superior de 37 metros de profundidad, compuesta en su mayoría por arcilla roja considerándose de dura a muy dura.
- Una segunda capa, hasta los 46 metros de profundidad, formada principalmente de marga (conglomerado de caliza y arcilla)
- La estructura se apoyará en un último estrato de rocas arcillosas sedimentarias

Se debe tener en cuenta la posibilidad de que si la estructura es utilizada en sistemas hidroeléctricos, sera necesario contar con una altura de 10 metros de agua, lo que hace definir la sección del terreno tal y como queda en la figura 3.14

Las propiedades del terreno quedan definidas en la siguiente tabla:

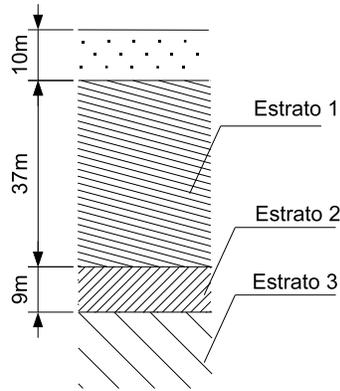


Figura 3.14: Estratigrafía

	Estrato1	Estrato2	Estrato3
$\nu$	0.3	0.3	0.3
$\rho$	$2000 \text{ kg/m}^3$	$2100 \text{ kg/m}^3$	$2200 \text{ kg/m}^3$
$\xi$	0.05	0.05	0.05
$G$	$5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$	$1,029 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$	$2,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
$C_S$	$500 \text{ m/s}$	$700 \text{ m/s}$	$1000 \text{ m/s}$

Las constantes físicas son las mismas que en la tabla anterior y  $C_S$  es la velocidad de propagación de ondas secundarias (tipo S) a través del material.

Existe una fórmula que relaciona las velocidades de propagación primaria y secundaria:

$$C_P = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} C_S \quad (3.77)$$

Las propiedades para el agua son las conocidas, una densidad de  $1000 \text{ kg/m}^3$ , un factor de amortiguamiento nulo y una velocidad de propagación de onda de  $1438,6 \text{ m/s}$

Capítulo 4

Modelo de Elementos de Contorno  
del problema a analizar

---

## INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describen los problemas y las mallas los cuales serán los ejemplos de aplicación para los métodos directo e indirecto, y los que servirán para su posterior comparación . [4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5].

El estudio se ha estructurado en forma de fases sucesivas, las cuales van incrementando su complejidad con cada evolución. Esto consigue una mejor comprensión de la influencia en la respuesta del sistema de las diferentes características del sistema. Además, se consiguen con estos diferentes ejemplos en los que aplicar ambas metodologías y comparar sus resultados. Así que este hecho ha desembocado en la formulación de 6 problemas diferentes:

- Problema I

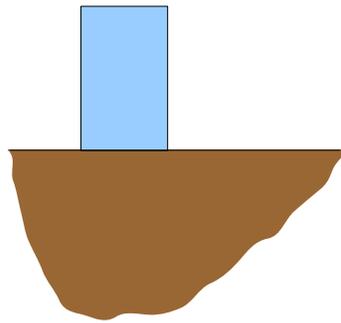


Figura 4.1: Problema I

El problema más sencillo consiste en colocar sobre un semiespacio un cilindro infinitamente rígido de dimensiones menores a los de la estructura real, y se le somete a las dos sollicitaciones sísmicas previstas.

- Problema II

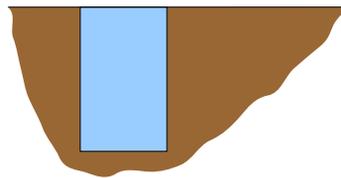


Figura 4.2: Problema II

A continuación en el siguiente problema se considera que el mismo cilindro se encuentra totalmente enterrado en el semiespacio, en este punto aparecen efectos de interacción cinemática en el campo incidente, debido a la presencia de la cimentación.

La comparación con el problema I desvelará los efectos de el soterramiento en la respuesta.

■ Problema III

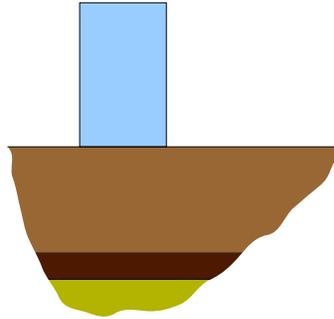


Figura 4.3: Problema III

Para el problema III se vuelve a colocar el mismo cilindro apoyado en la superficie. En esta ocasión el terreno presenta una disposición de estratos, sus propiedades físicas son diferentes entre sí, lo cual alterará el campo incidente. También serán aplicadas las cargas sísmicas correspondientes a los dos tipos de ondas. La comparación con el problema I, muestra la influencia que ejercen la presencia de los estratos en la respuesta dinámica.

■ Problema IV

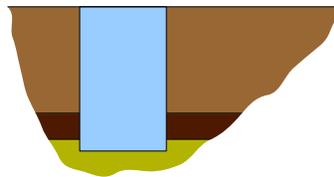


Figura 4.4: Problema IV

El último problema en el que está presente el cilindro, consiste en considerar que se encuentra enterrado totalmente en el terreno estratificado. Las características físicas fueron descritas en el capítulo anterior y el cilindro cuenta con la masa total de la estructura de hormigón a la que sustituye.

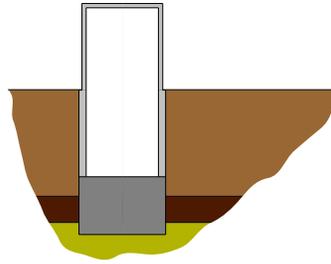


Figura 4.5: Problema V

- Problema V

En este modelo, se sustituye el cilindro por la geometría real con el valor de rigidez propio del hormigón. Se sitúa en su posición correspondiente donde los 50 metros inferiores están enterrados en el suelo estratificado. Es de suma importancia el efecto de la rigidez de la estructura, factor que el método indirecto no puede incluir en sus resultados mientras que el directo si lo hace.

- Problema VI

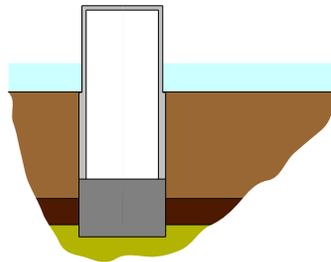


Figura 4.6: Problema VI

El último problema, añade un medio potencial por encima de la superficie libre del terreno. Lo cual tendrá efecto en la respuesta dinámica del sistema frente a los dos tipos de ondas incidentes. Dicho efecto se podrá cuantificar mediante la comparación de resultados entre el problema V y el presente.

El MEC requiere que sólo se discreticen las superficies que delimitan los diferentes dominios. Así por ejemplo discretizar el terreno sólo requerirá un plano que defina su parte superior, y los correspondientes a las secciones que marcan la confluencia de estratos.

Dado la existencia de una doble simetría geométrica y de cargas, permite que el problema se simplifique a un cuarto de la geometría, ahorrando así grados de libertad y por tanto tiempo de computación. Esto es posible gracias a la implementación del programa basado en el MEC.

A continuación se describen en detalle las diferentes mallas conformadas por las superficies que definen la estructura y las superficies que delimitan los estratos y la parte libre del terreno.

## 4.1. PROBLEMA I

El primer problema consiste en un cilindro de 50 metros de altura y 30 de diámetro apoyado sobre un terreno sin estratificar. La estructura maciza cuenta con la masa total del problema original y las propiedades del terreno serán las correspondientes al estrato superior descrito en el apartado [3.4.2] del capítulo anterior.

El modelo esta conformado por dos dominios, uno correspondiente al terreno y otro a la estructura y 3 contornos. Dado que en la esquina superior del cilindro son conocidas las tensiones en ambas caras, no es necesario duplicar los nodos que la conforman.

Así el problema discretizado en elementos de contorno tendrá el aspecto de la figura 4.8

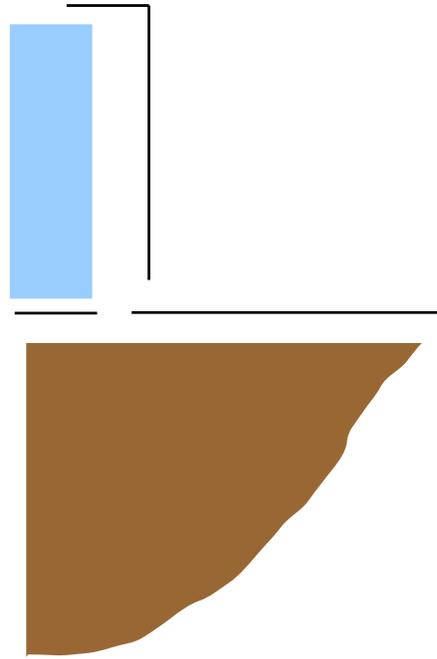


Figura 4.7: Dominios y contornos del Problema I

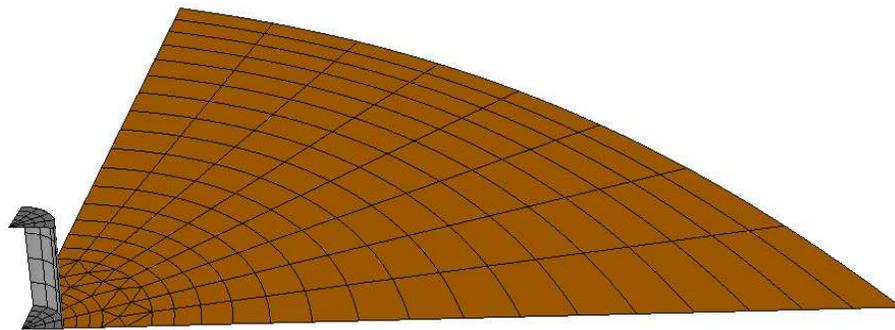


Figura 4.8: Malla Problema I

#### 4.1.1. La estructura

El cilindro se discretiza de manera sencilla, no hay necesidad de duplicar nodos en el vértice superior que une la tapa con la pared, pero sí en la inferior donde confluyen dos dominios diferentes (el hormigón y el terreno). Los elementos rectangulares de 9 nodos se distribuyen uniformemente en las tapas superior e inferior del cilindro siguiendo un patrón radial de 4 elementos en  $90^\circ$ . En el vértice se recurre a triángulos en una malla más apropiada al pequeño espacio y se evita la deformidad de los elementos. A lo largo de la pared se continúa con la rejilla de elementos cuadrangulares formada en las tapas manteniendo una malla conforme y se divide

de manera uniforme manteniendo un ratio de aspecto adecuado.

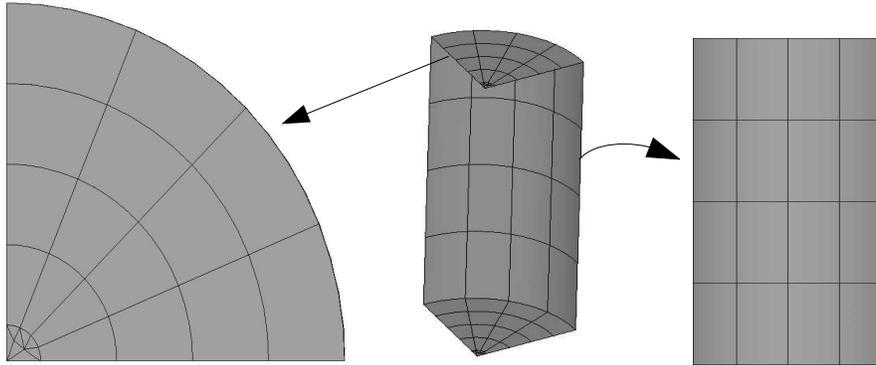


Figura 4.9: Estructura Problema I

#### 4.1.2. La Superficie Libre

Se tomó una superficie libre de longitud igual a 10 veces la altura del cilindro, lo que son unos 500 m. Se utilizan principalmente elementos de 9 nodos, y se concentra la mayor parte de los mismos en la zona cercana a la estructura. En esta zona, los elementos de la superficie libre abarcan  $22.5^\circ$  (4 elementos por arco) mientras que en la más externa, para evitar la deformidad de las divisiones, debido a la concentración de los mismos, se pasa a otro patrón donde existen 8 elementos en cada arco. Para evitar la disconformidad de malla se establece una zona de transición a base de elementos triangulares de 6 nodos.

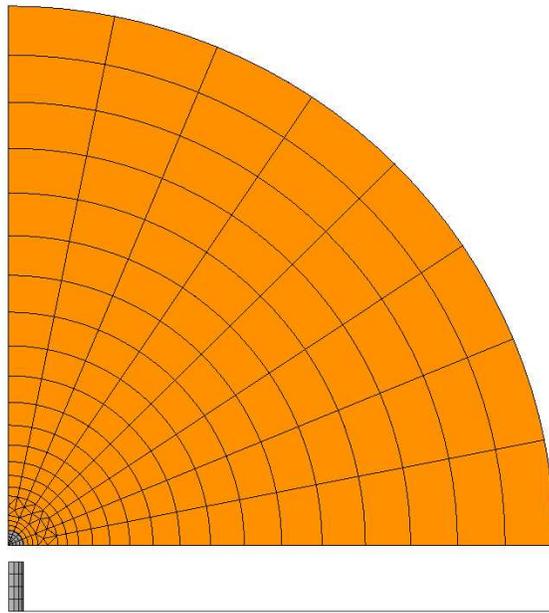


Figura 4.10: Superficie Libre Problema I

Para los problemas necesarios a resolver en el método de los tres pasos, la interacción cinemática y las rigideces del terreno, se conforma una malla con la discretización del terreno y sólo la tapa inferior del cilindro, en donde serán aplicadas las cargas para el cálculo de rigidez.

## 4.2. PROBLEMA II

En este problema, el cilindro se encuentra enterrado en el semiespacio. Su parte superior se encuentra a ras de suelo. Las propiedades de la estructura y el terreno son idénticas a las del problema anterior. Del que difiere sólo en su configuración geométrica.

Cuenta de nuevo con dos dominios diferentes y 4 contornos, ya que en esta ocasión si aparece un problema de esquina en la superficie del cilindro.

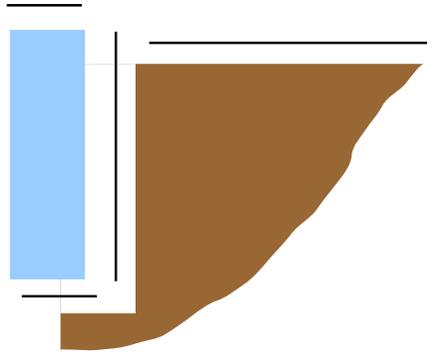


Figura 4.11: Dominios y contornos del Problema II

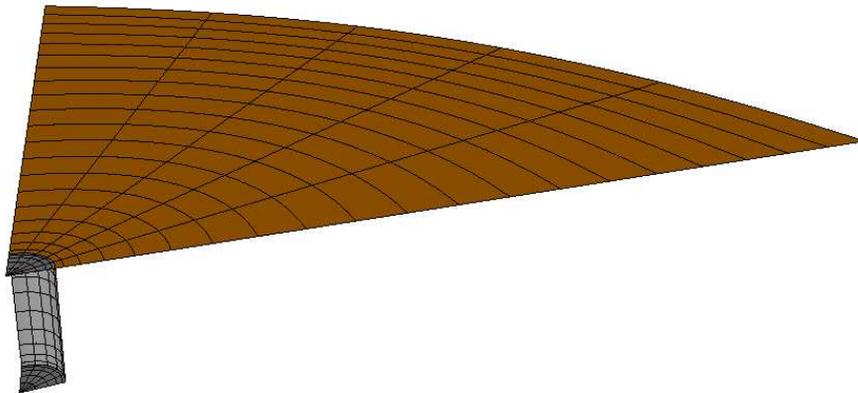


Figura 4.12: Malla Problema II

#### 4.2.1. La estructura

En esta ocasión se utiliza un patrón de cinco elementos por arco en los  $90^\circ$  que se discretizan. Este diseño se prolonga formando una malla conforme a lo largo de todo el cilindro. Los elementos cuadrangulares más cercanos a los bordes se trazan más pequeños para comprobar si el efecto del incremento en la densidad de nodos cercanos a esquinas es apreciable. Ahora en las esquinas superiores es necesario duplicar nodos, ya que será de utilidad a la hora de desvincular la tapa superior del resto de la malla.

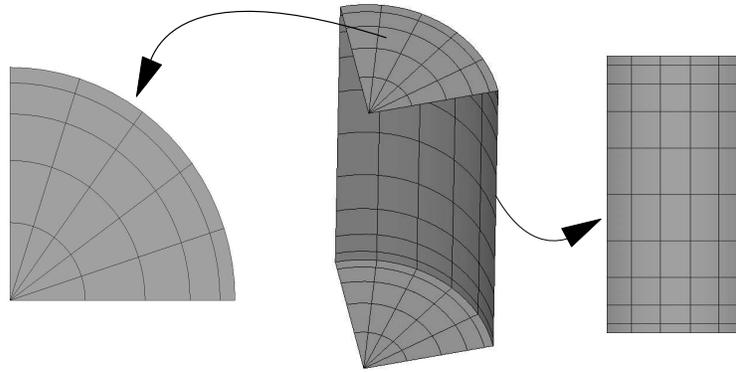


Figura 4.13: Estructura Problema II

### 4.2.2. La Superficie Libre

Se toma como superficie libre a discretizar una longitud equivalente a 10 veces la profundidad del pozo excavado. Para la malla se prolonga el modelo iniciado en el cilindro. Consistente en cinco elementos rectangulares por arco y 20 a lo largo del radio. También se concentran elementos en la zona más próxima a la estructura a fin de que el ratio de aspecto en todos los elementos de la superficie libre sea similar.

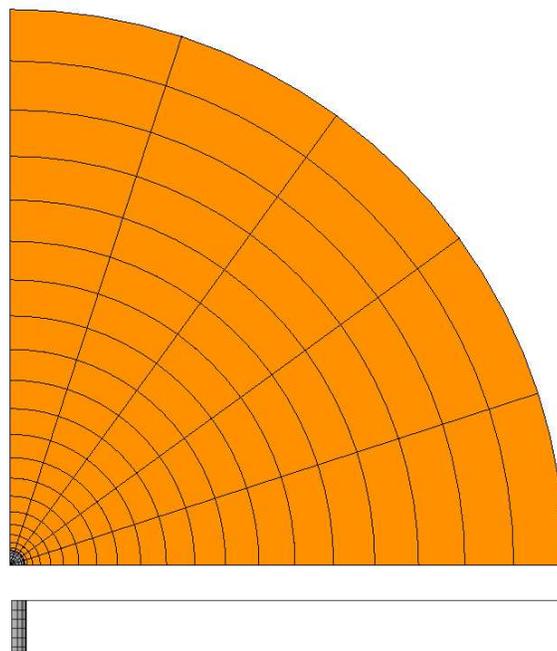


Figura 4.14: Superficie Libre Problema II

En esta ocasión para el modelo de los tres pasos Se utiliza una malla compuesta

por la superficie libre, la pared discretizada del cilindro, y su tapa inferior. Con lo cual resulta en la configuración de un semiespacio con un pozo perforado del tamaño del cilindro.

### 4.3. PROBLEMA III

Para este problema se vuelve a desenterrar la estructura, y ya se incluye la estratigrafía del terreno. Por lo tanto se aumenta el número de dominios hasta 4, y se delimitan con 5 contornos. Al comparar este problema con el primero, se podrá observar la influencia de la estratigrafía en la respuesta ante una misma excitación.

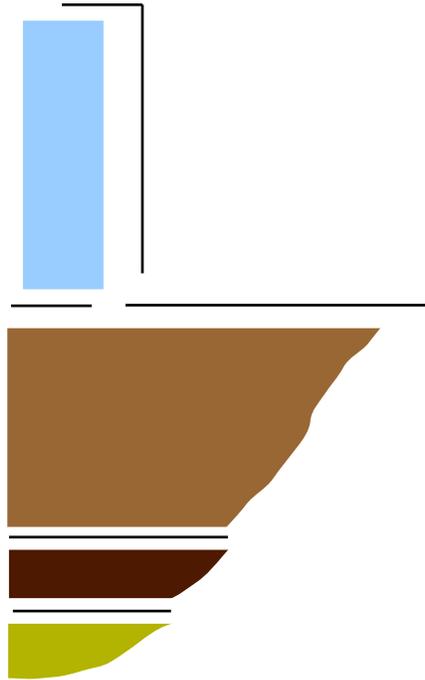


Figura 4.15: Dominios y contornos del Problema III

#### 4.3.1. La Estructura

La realidad es que este problema es un calco del primero, sólo ha sido necesaria la inclusión de dos superficies discretizadas que modelen las interfases entre los diferentes estratos, así que el cilindro mantiene su discretización original.

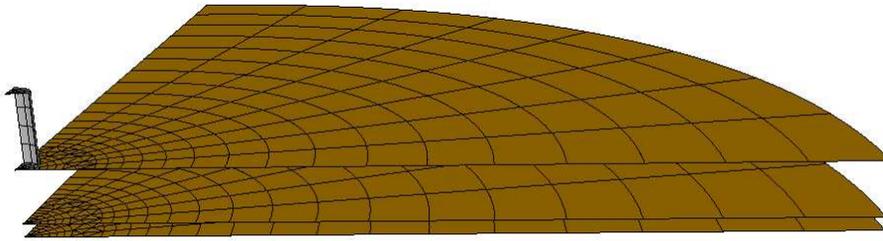


Figura 4.16: Malla Problema III

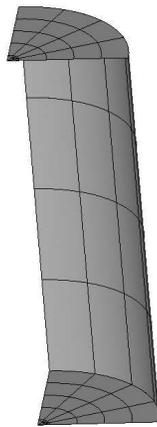


Figura 4.17: Estructura Problema III

### 4.3.2. La Superficie Libre

Para este modelo, en el que se requiere introducir la estratigrafía, y dado que sólo se discretiza las superficies que limitan los dominios, para incluir los diferentes estratos, se añaden dos planos en forma de cuña circular de  $90^\circ$  a las distancias correspondientes a las profundidades de las interfases entre estratos. La superficie libre y las dos interfases serán mallas idénticas situadas a diferentes cotas. También se optó por discretizar la superficie hasta una distancia de 500 m (10 veces la altura del cilindro)

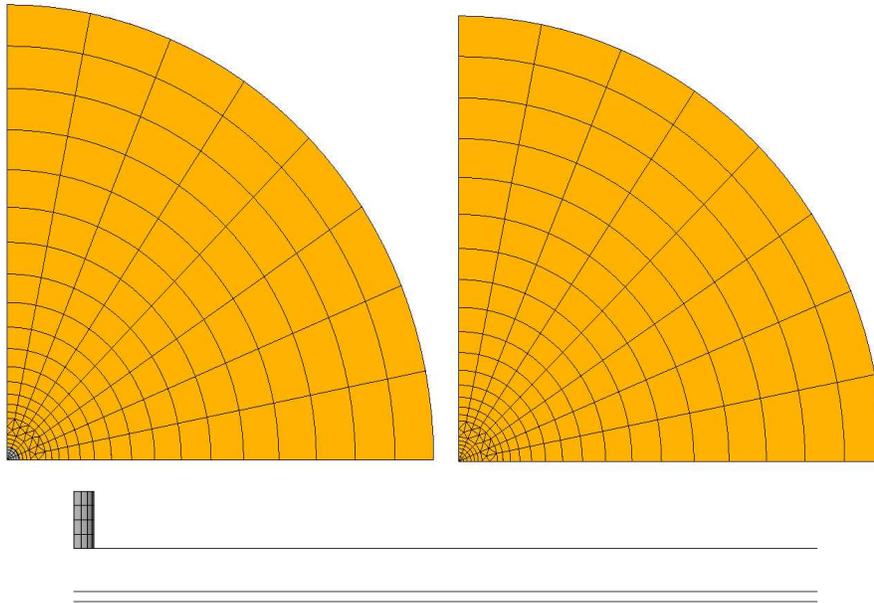


Figura 4.18: Superficie Libre Problema III

En la figura 4.18 se muestra a la izquierda la discretización de la superficie libre, y a la derecha la malla de una interfase entre dos estratos, la única diferencia es la zona en la que se apoya el cilindro dibujada en diferente color. Para el problema de los tres pasos, el modelo lo constituirán tres planos paralelos

#### 4.4. PROBLEMA IV

Cómo último modelo antes de adoptar la configuración geométrica definitiva, se le añaden los diferentes estratos al problema II. Es decir, el cilindro se encuentra enterrado en un suelo estratificado. Cuenta el modelo con 4 dominios que deben ser discretizados en 8 contornos, la unión entre cada frontera entre estratos y la estructura implica que al unirse tres contornos que limitan tres dominios diferentes, deben triplicarse los nodos pertenecientes a esa curva. Comparando los resultados de este problema con el II y con el III podemos establecer el grado de influencia que tiene la composición del terreno y la posición del cilindro sobre el mismo.

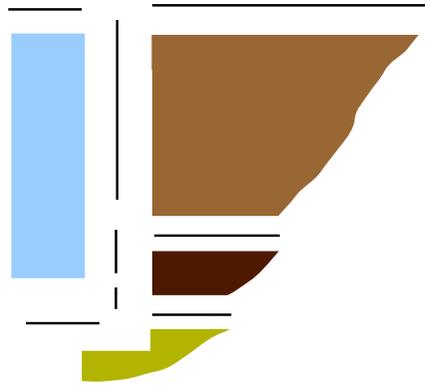


Figura 4.19: Dominios y contornos del Problema IV

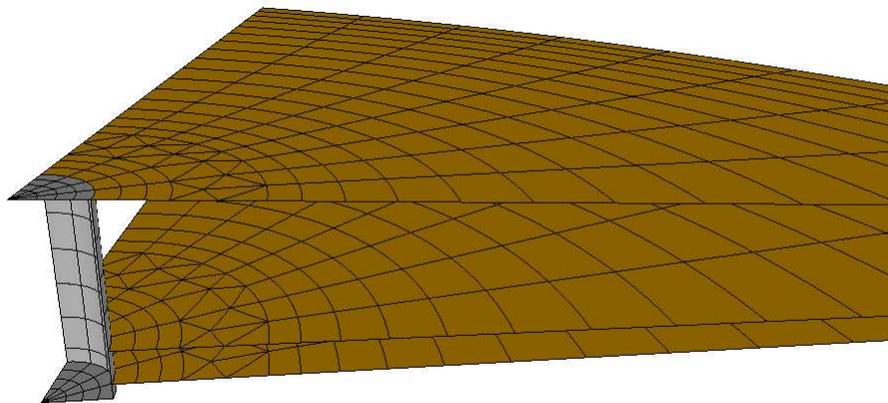


Figura 4.20: Malla Problema IV

#### 4.4.1. La Estructura

Se debe en este momento prestar especial atención al mallado del cilindro, sobre todo en su parte lateral. Para poder aplicar sin problemas el método de los elementos de contorno, los diferentes contornos deben confluir con los límites de otros contornos. Así se reestructuran las cotas de los elementos a lo largo de la pared para que puedan coincidir con los planos donde confluyen los planos de interfase entre estratos. A esto es debido que en la imagen 4.21 la fila de elementos inferiores aparezcan más estrechos que los demás. Ya que es por esa cota donde coincide con la discretización del contorno que divide a los estratos inferiores. La discretización de las tapas es idéntica la del problema anterior.

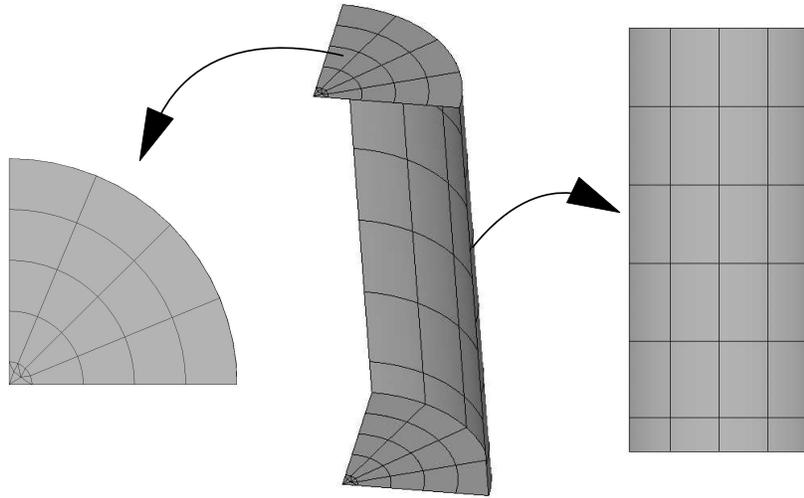


Figura 4.21: Estructura Problema IV

#### 4.4.2. La Superficie Libre

La configuración adoptada vuelve a ser la de un radio de diez veces la profundidad de la excavación, y el modelo de malla es el mismo que se ha explicado en los problemas I y III. Ahora se cuenta con dos superficies extra que se unen con el cilindro a la altura de líneas duplicadas de nodos previamente preparados.

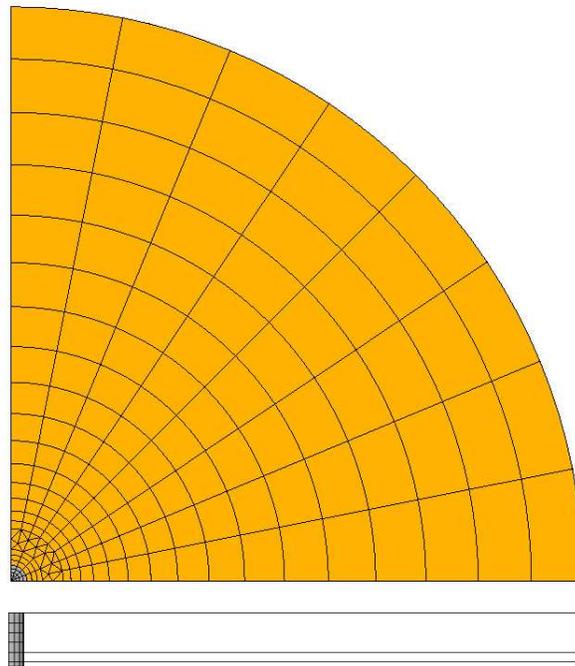


Figura 4.22: Superficie Libre Problema IV

Considerando sólo los tres planos que determinan la estratigrafía, la pared lateral y el fondo del cilindro se define el modelo necesario para calcular los pasos intermedios del método indirecto.

## 4.5. Problema V

En este problema se abandona la estructura simplificada (el cilindro) para sustituirla por la configuración estructural definitiva, modelada mediante el conjunto de dos dominios que asemejan las características físicas de la estructura inicial. El modelo cuenta con 5 dominios, dos pertenecientes a la estructura y 3 pertenecientes a los estratos, y la geometría se define por medio de 13 contornos.

Las propiedades ya se describieron en el capítulo inmediatamente anterior a este, así como las simplificaciones geométricas aplicadas. Por lo que el problema quedará tal y como muestra la figura 4.24.



Figura 4.23: Dominios y contornos del Problema V

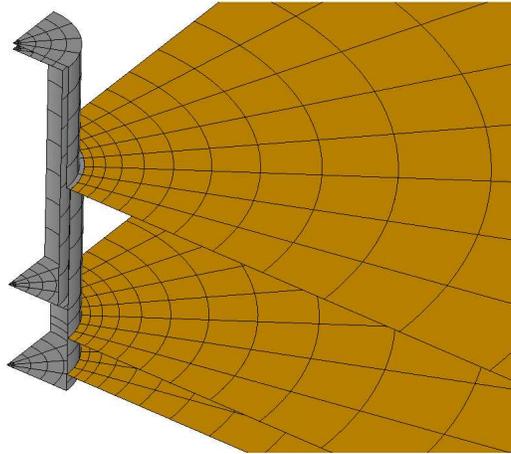


Figura 4.24: Malla Problema V

#### 4.5.1. La Estructura

Ahora se trabaja sobre el modelo de 80 metros de altura y 30 de diámetro. Cuenta con dos dominios delimitados, la parte inferior es un cilindro macizo y la parte superior es un cilindro hueco. Por lo que la malla resultante es tal y como aparece en la figura 4.25. Abundan en esta discretización los nodos duplicados, ya que está formado por numerosos contornos, debido a la inclusión de los estratos y a las esquinas que tiene el modelo.

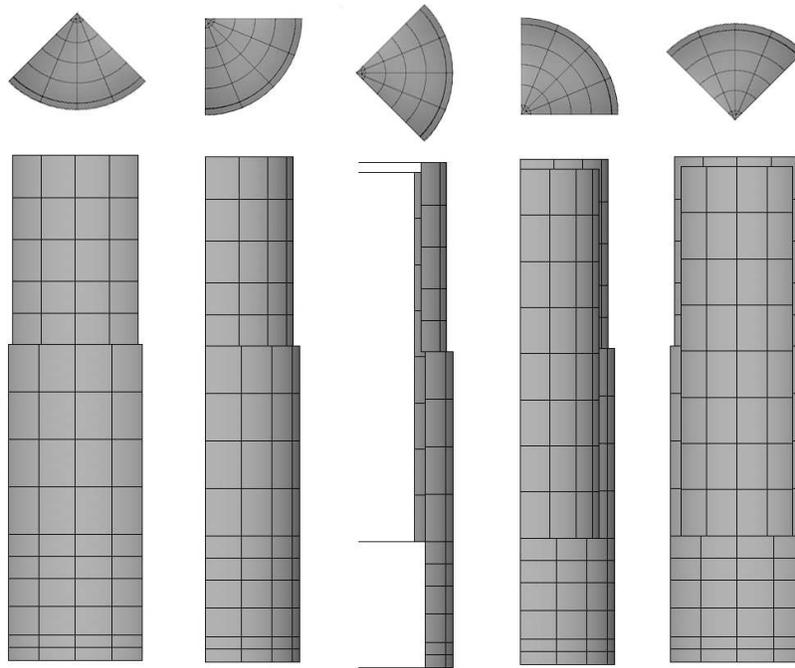


Figura 4.25: Estructura Problema V

### 4.5.2. La Superficie Libre

En esta ocasión se opta por una malla de 8 elementos por arco de  $90^\circ$  y de un radio discretizado al igual que en los casos anteriores de 10 veces la longitud del pozo excavado. Entre la superficie y la estructura, aparece una disconformidad de malla (por un lado se tiene 4 elementos y por el otro 8) que se salva aplicando el mismo procedimiento que para un problema de esquina (Estrategia de colocación no nodal).

Para el problema de los tres pasos la malla utilizada será la misma que en el problema IV (la geometría del pozo y la composición del terreno son idénticas en ambos casos).

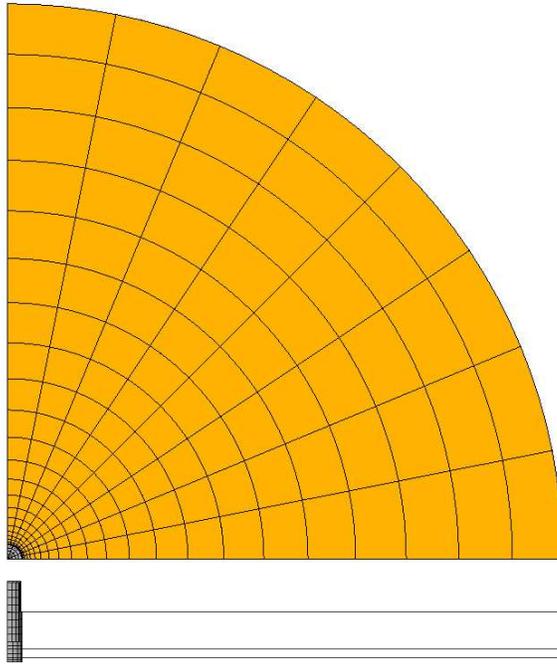


Figura 4.26: Superficie libre Problema V

## 4.6. Problema VI

Ya que la superficie libre del agua no es necesario que sea discretizada, la misma malla del problema V es utilizada para realizar los cálculos de este caso. La única condición necesaria radica en la necesidad de aplicar las condiciones de contorno correspondientes en las superficies de la estructura que estén en contacto con el medio potencial (en previsión de este caso ya se preparó la malla en el problema anterior). Al incluir un dominio potencial al conjunto, el número de contornos no varía con respecto al anterior pero si lo hace el de dominios, que eleva su número a 6.

En este problema no se aplica el Método Indirecto de resolución, ya que la presencia de la masa de agua lo hace incompatible con el modelo dinámico equivalente planteado, por lo cuál se hace innecesaria la preparación de un modelo del terreno y la perforación.

**NOTA:** Aunque estas fueron las mallas utilizadas en un primer momento debido a los resultados obtenidos para los problemas IV, V y VI se realizó una optimización de las mismas cuyo proceso se explica detalladamente en el Apéndice A. Con las mallas de este apéndice se obtuvieron las respuestas mostradas en el capítulo siguiente

correspondientes a dichos problemas



Capítulo 5

## Resultados

---

## INTRODUCCIÓN

Se ha tratado de transmitir en capítulos anteriores el conocimiento necesario para poder calcular, representar y entender los resultados que se presentan a continuación. Estos resultados se muestran ordenados por problemas, los cuales han sido descritos en el capítulo anterior. Cada problema se resuelve primero por el método indirecto, recalando cada uno de sus tres pasos y representando las diferentes soluciones parciales. Después se procede a calcular la respuesta dinámica del sistema en el punto de estudio (el nodo central de la base inferior). Una vez se han representado e interpretado las funciones de transferencia correspondientes, se vuelven a calcular las mismas por el método directo. Estas nuevas curvas se representan sobre los desplazamientos calculados por el método indirecto y se analizan las posibles discrepancias. En función del problema, se procede al análisis de la influencia de alguna característica (grado de enterramiento, estratos...) a través de la comparación con otro problema ya resuelto.

## 5.1. PROBLEMA I



Este ejemplo, que consiste en un cilindro infinitamente rígido apoyado en el terreno sin estratificar (figura 5.2), se modela como dos dominios delimitados por tres contornos, dos que delimitan el perfil del conjunto y uno común a ambos dominios. Se realizan dos simulaciones diferentes: una en la que se le aplica una onda del tipo P (dirección de propagación de la onda y de desplazamientos en el *eje z*) y otra en la que se le aplica una onda de tipo SH (la onda incidente se propaga en el sentido positivo del *eje z* y conlleva desplazamientos que tienen valores no nulos en en eje *y*). Esta última perturbación provocará, al estar ambos movimientos acoplados, un giro en la estructura que también puede ser medido.

En este problemas y los siguientes, se tomará como parámetro objetivo de comparación para la onda P el desplazamiento vertical de un punto situado en el centro de la base del cilindro; y para la onda SH el desplazamiento horizontal del mismo punto y el giro de la base. Este giro puede ser calculado en radianes dividiendo el incremento de desplazamiento vertical en el extremo de la base con respecto al punto central de la misma ( $u_z^e - u_z^c$ ) por la longitud del radio en metros (figura 5.1)

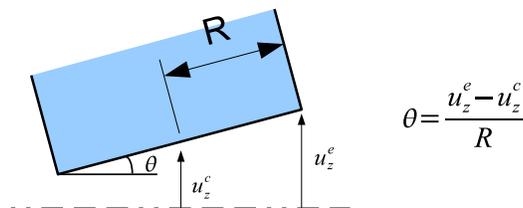


Figura 5.1: Cálculo del valor del giro de la base

Estas curvas se muestran adimensionalizadas respecto la amplitud del desplazamiento en un punto del terreno lo suficientemente alejado de la estructura, donde el campo reflejado se haya amortiguado totalmente, es decir, el efecto local de la cimentación sea inapreciable. Esta localización se denomina punto de campo lejano. Así, en la figura 5.2 se muestran los desplazamientos que intervienen en la relación.

El movimiento del punto central de la base, ya sea vertical u horizontal y el de referencia en un punto de campo lejano. Para el giro los valores que se representan tienen unidades de rad/m. Por tanto, éstas curvas pueden ser consideradas las representaciones gráficas de la función de transferencia del sistema.

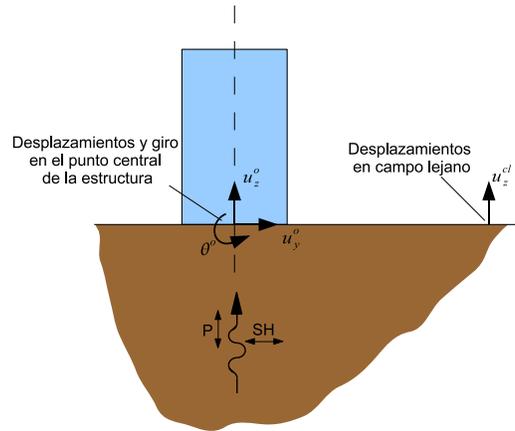


Figura 5.2: Adimensionalización de desplazamientos

Los desplazamientos a calcular, serán por tanto:

$$u_z = \frac{u_z^o}{u_z^{cl}} \quad u_y = \frac{u_y^o}{u_y^{cl}} \quad \theta = \frac{\theta^o}{u_y^{cl}}$$

Estos valores se representan frente a la frecuencia ( $\omega$ ), que también ha sido adimensionalizada ( $a_0$ ), en función de una característica física del terreno, la velocidad de propagación de ondas de tipo S ( $C_S$ ) del semiespacio, y el radio de la estructura.

$$a_0 = \omega \cdot \frac{R}{C_S} \quad (5.1)$$

El estudio abarca las frecuencias ( $\omega$ ) entre 0 y 25 Hz, lo que es lo mismo, valores de  $a_0$  comprendidos entre 0 y 4,7. Se ha escogido este rango de frecuencias ya que es el que abarca las principales frecuencias naturales del sistema.

### 5.1.1. Método Indirecto

Como ya se ha comentado en numerosas ocasiones, el método indirecto busca plantear un sistema simplificado cuya respuesta sea lo más aproximada posible a la del sistema original. Para ello trata el cálculo de manera escalonada en varios problemas secuenciales.

## Interacción Cinemática

Como se explicó en 3.2.1 la primera parte del método implica calcular los desplazamientos del terreno sin tener en cuenta la influencia de la masa de hormigón y considerando infinitamente rígida la zona de contacto entre estructura y terreno. El modelo resultante es un semiespacio sometido a un campo incidente que genera un desplazamiento de amplitud unitaria ( $1 e^{i\omega t}$ ) en la superficie. Dado que la onda incidente se propaga de manera vertical y que todos los puntos de la superficie se encuentran a la misma cota, tendrán desplazamiento unitario, por lo que una cimentación superficial infinitamente rígida no tendrá ninguna influencia en el desplazamiento del suelo (figura 5.3). Esta respuesta será utilizada como excitación en el modelo dinámico equivalente planteado en el tercer paso.

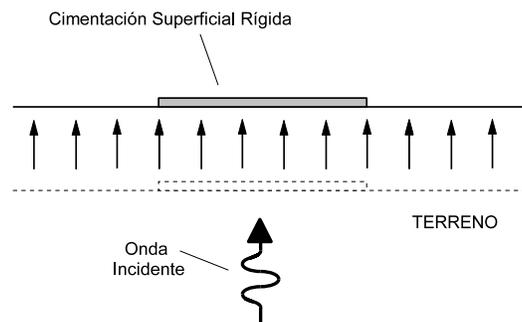


Figura 5.3: Influencia de la geometría de la cimentación en el campo incidente

## Cálculo de Impedancias

Para calcular las impedancias equivalentes del terreno se aplica, como se explicó en [3.2.2], un desplazamiento armónico unitario en los contornos de contacto entre terreno y estructura. En este problema se conocen los desplazamientos y las tensiones son incógnitas. Al resolver el sistema, se obtiene una distribución de tensiones la cual es necesario integrar con respecto al punto deseado (en este caso, el centro de la base) y se tiene como resultado una fuerza o momento (según si se ha aplicado un desplazamiento o un giro) equivalente a la impedancia del terreno para ese grado de libertad. A fin de determinar todos los valores necesarios para el problema, se llevan a cabo tres ejercicios, y cada uno de ellos, para todo el rango de frecuencias. Aplicando en el primero (Fig. 5.4a) un desplazamiento vertical unitario, en el segundo (Fig. 5.4b) un desplazamiento horizontal y en el último (Fig. 5.4c) un giro unitario.

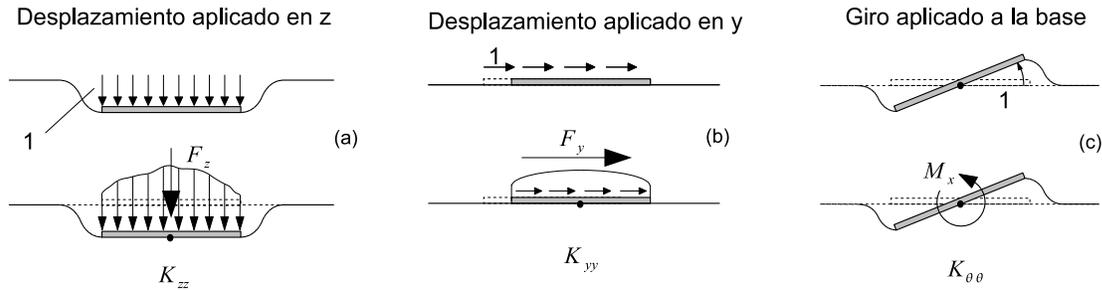


Figura 5.4: Cálculo de impedancias

Las rigideces a giro y a desplazamiento horizontal, se encuentran vinculadas, ya que las condiciones de contorno soldadas que se han impuesto establecen que al aplicar un desplazamiento horizontal el giro debe ser nulo, y viceversa. Por lo cual aparece un esfuerzo que impide dicho giro o desplazamiento, este valor se corresponde con el término cruzado de la matriz de rigidez. Si se hubiesen tomado condiciones de contorno relajadas, es decir, tensión vertical nula si se aplica un desplazamiento horizontal, y tensión horizontal nula si se aplica un giro unitario, los términos cruzados hubieran sido igual a cero.

Como recordatorio, se puede rescatar del primer capítulo la ecuación:

$$K(\omega) = k_s(k + i\omega c^*) \quad (5.2)$$

donde  $k_s$  representa el valor estático de la rigidez, y  $k$  y  $c^*$  son los coeficientes que representan la parte real e imaginaria de la rigidez dinámica del terreno. Estos coeficientes son dependientes de la frecuencia. Para una interpretación en mayor profundidad acerca del cálculo de impedancias en cimentaciones, se puede consultar numerosa bibliografía como Domínguez (2003) o Emperador (1988).

En las figuras 5.5, 5.6 y 5.7 aparecen representados los valores correspondientes a las soluciones por frecuencia de dichos problemas. Se muestran por separados la parte real, relacionada con la rigidez del terreno, y la parte imaginaria de la respuesta, está última vinculada con el amortiguamiento del mismo. Al dividir este valor por  $a_o$ , se obtiene el coeficiente de amortiguamiento dinámico. Ambos valores se encuentran escalados con respecto al valor de la impedancia estática.

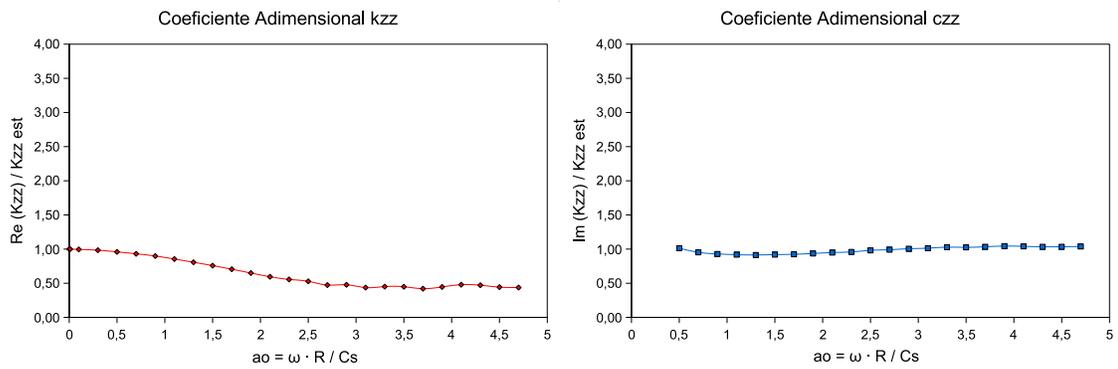


Figura 5.5: Impedancia Vertical

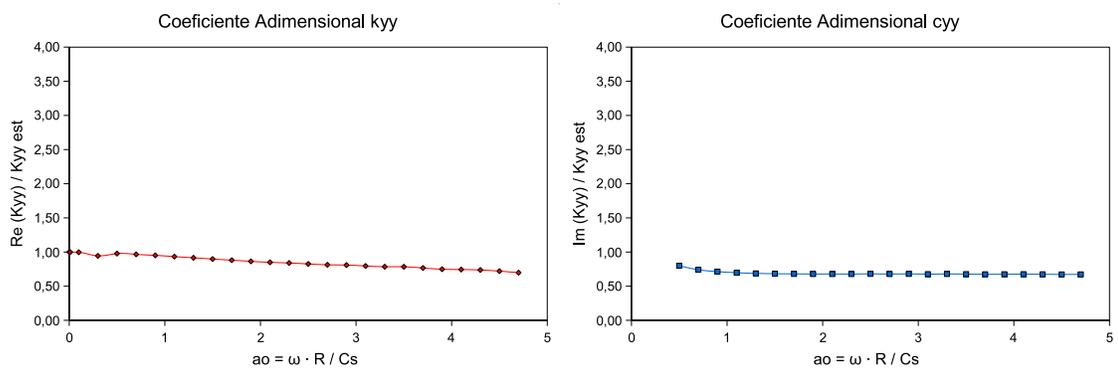


Figura 5.6: Impedancia Horizontal

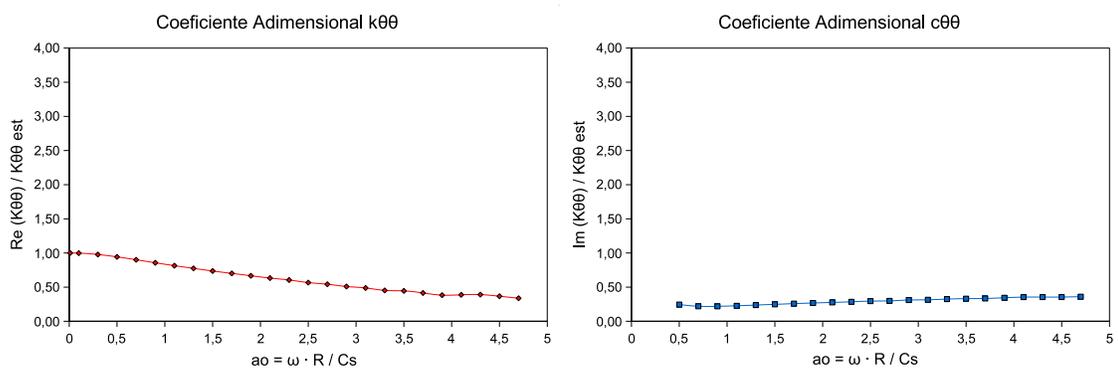


Figura 5.7: Impedancia a Cabeceo

### Problema Dinámico Equivalente

Una vez se han concluido los dos primeros pasos, se pasa a resolver el sistema dinámico equivalente de 3 grados de libertad. Aunque al encontrarse el problema vertical desacoplado del resto, se puede descomponer en dos problemas diferentes para mayor simplicidad (figura 5.8), uno para cada sollicitación. El problema vertical, cuya solución es el desplazamiento en el *eje z* de un punto situado en el centro de la base, y el problema horizontal, el cual resuelve las incógnitas en desplazamiento en el *eje y*, y el giro de la base. Estos sistemas se resuelven frecuencia a frecuencia con los datos obtenidos del desplazamiento del suelo y las impedancias equivalentes, estos se consideran respectivamente como el desplazamiento aplicado a la base del sistema, y como las características de resortes y amortiguadores. Ambos problemas poseen una masa de  $61,3 \cdot 10^6 \text{ kg}$  y una inercia igual a  $3,51 \cdot 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

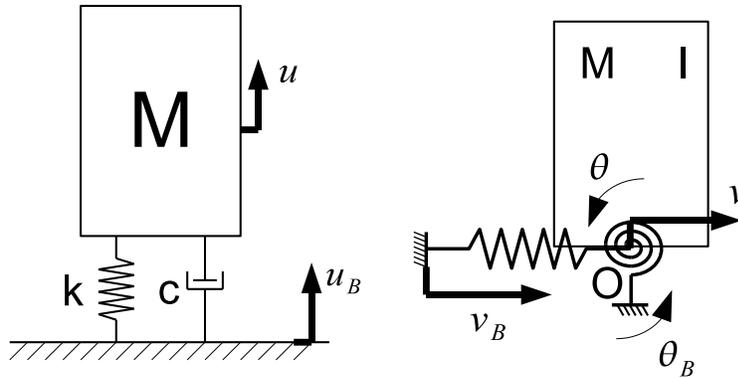


Figura 5.8: Problema Dinámico Equivalente

En la figura 5.9 se representan los valores de las componentes real, imaginaria y módulo del desplazamiento vertical. Obtenido de resolver frecuencia a frecuencia el primer problema equivalente mostrado.

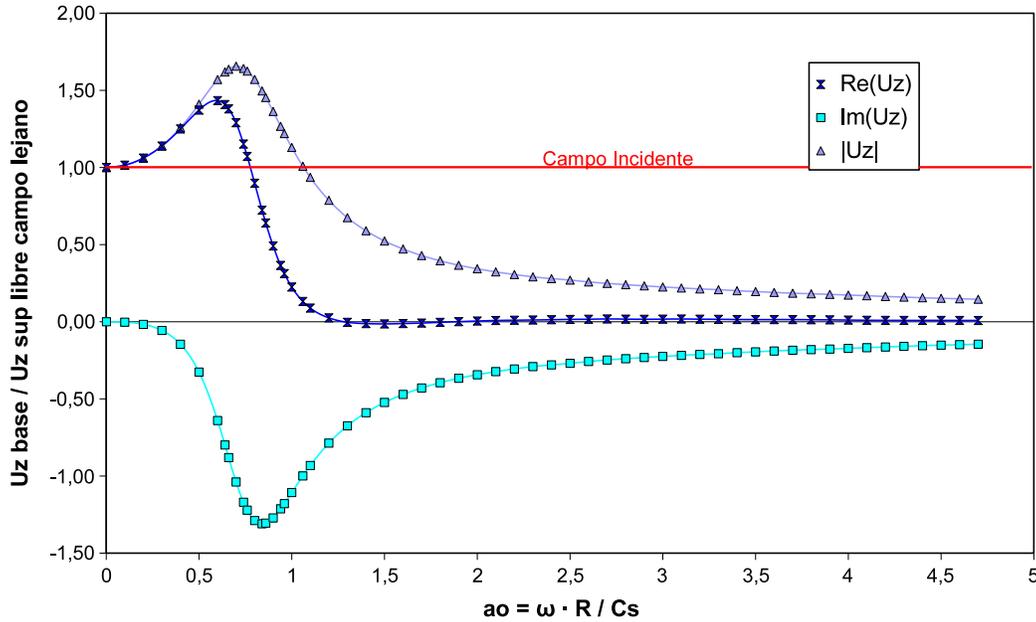


Figura 5.9: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Onda P

En la misma gráfica (fig. 5.9) se ha representado el desplazamiento originado por el campo incidente en el semiespacio como una línea roja. La masa de la estructura es la única diferencia entre ambos conjuntos de datos. Puede entenderse que la masa al vibrar en la frecuencia natural del sistema ( $a_0 = 0,8$ ) se amplien los desplazamientos de la estructura con respecto a los de la superficie libre. Mientras que a mayores frecuencias, es la inercia de la masa en unión con el amortiguamiento del terreno lo que impide que el punto inferior de la base se mueva con la misma amplitud que el campo excitación.

La forma de esta función de transferencia puede ser explicada a través de el modelo de la figura 5.10. Es un sistema de un sólo grado de libertad, cuya masa es la de la estructura y su rigidez se corresponde con el valor estático del sistema estudiado en este apartado. Como se puede apreciar, no posee amortiguamiento alguno. A la base se le aplica un movimiento armónico de amplitud unitaria.

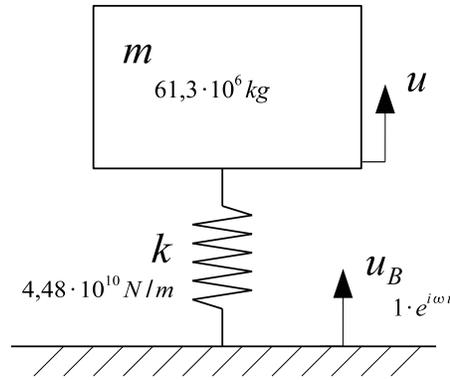


Figura 5.10: Modelo de 1gdl sin amortiguamiento

El módulo de la respuesta se representa junto a los valores ya mostrados de desplazamiento vertical del sistema, así en la gráfica de la figura 5.11 se muestra en rojo los resultados de este sencillo modelo. Se puede apreciar que los valores de la respuesta tienden a infinito en el entorno de el valor de la frecuencia natural del sistema ( $\omega_n = \sqrt{K_{est}/M}$ ) y después disminuye hasta hacerse cero. La respuesta del cilindro sobre el semiespacio refleja una tendencia similar, con un pico muy marcado en el mismo entorno de frecuencia natural (es lógico que ambos sistemas tengan frecuencias naturales muy semejantes). La razón de que los valores de la curva no se hagan infinitos en ese punto es la presencia del amortiguamiento debido al semiespacio.

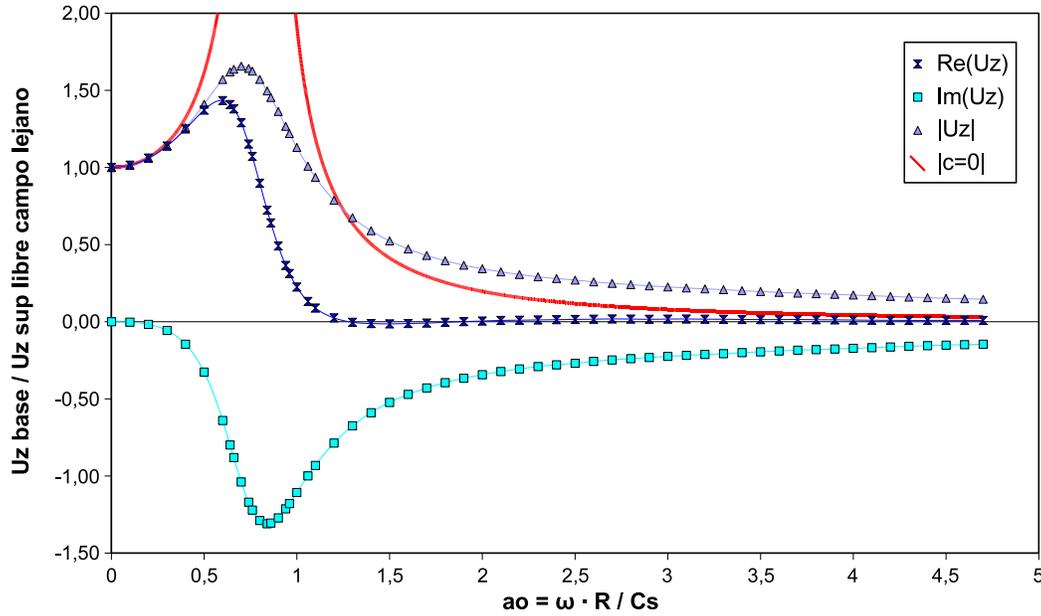


Figura 5.11: Influencia del amortiguamiento

Si se somete el sistema suelo-estructura a una onda SH (propagación en el sentido positivo del *eje z* y desplazamientos en la dirección del *eje y*), se puede dibujar la función de transferencia del sistema para los desplazamientos horizontales del punto central y el giro en la base. Estas gráficas son las figuras 5.12 y 5.13 respectivamente.

La parte real del desplazamiento horizontal, a bajas frecuencias aumenta progresivamente, esto es, amplifica el desplazamiento provocado por el campo incidente hasta un máximo situado en el entorno de la frecuencia  $a_0 = 0,3$ . Después desciende bruscamente hasta un mínimo. Aparece un segundo máximo vinculado posiblemente a la frecuencia natural de un segundo modo de vibración. La parte imaginaria es negativa en todo el rango de frecuencias, lo que indica que la respuesta se encuentra retrasada con respecto a la excitación en todo momento. En el ángulo superior izquierdo de la gráfica, se muestra una sección ampliada de las componentes de la respuesta a frecuencias bajas.

En la gráfica de la figura 5.13 se representa el giro de la base frente a la frecuencia. Al estar calculado en el mismo problema que el desplazamiento horizontal (Onda SH), es de esperar que presente las mismas frecuencias naturales. A bajas frecuencias, el giro que se produce es antihorario cuando el desplazamiento en el

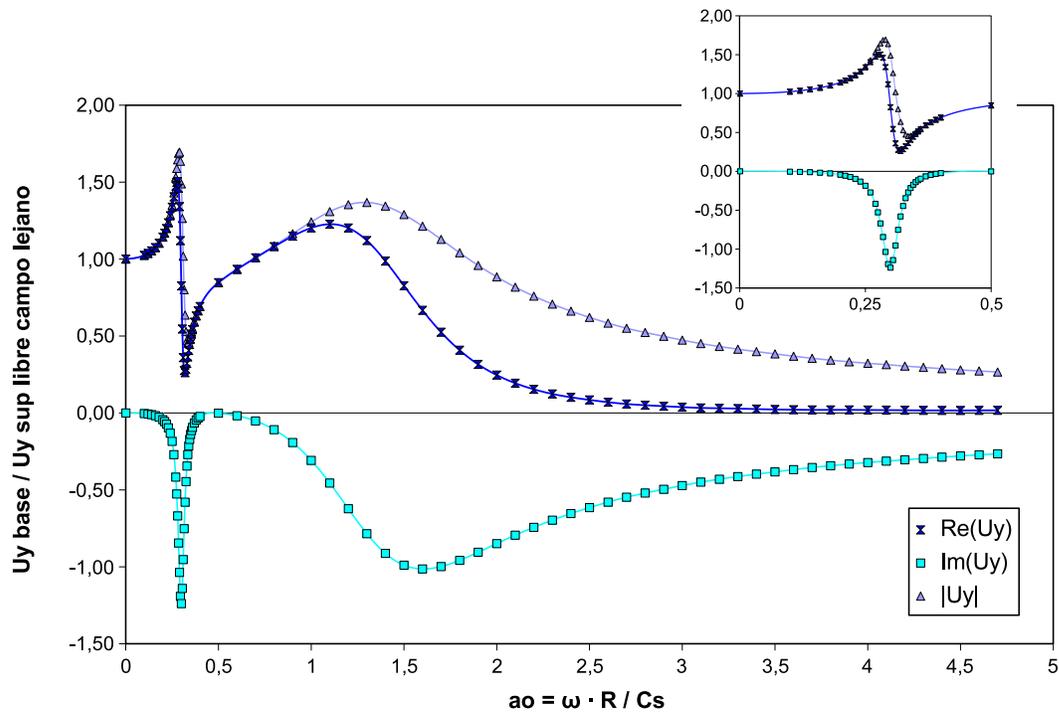


Figura 5.12: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Onda SH

campo lejano es positivo. El valor del giro aumenta hasta la frecuencia natural del primero modo de vibración, donde alcanza su máximo. Al igual que en el desplazamiento horizontal, aparece un segundo máximo, de menor valor que el primero, cercano a la frecuencia 1.5

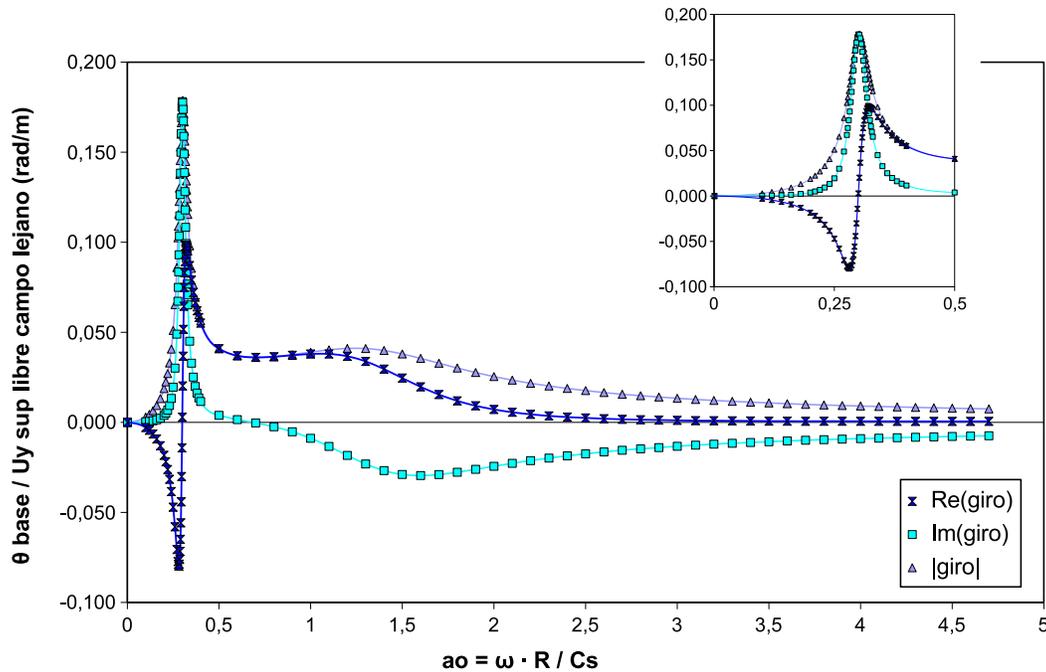


Figura 5.13: Giro de la Base. Onda SH

Aunque sólo se hayan presentado los resultados en desplazamientos en el centro de la base, y el giro de la misma, el movimiento de cualquier otro punto de la estructura puede ser calculado mediante sencillas reglas cinemáticas.

### 5.1.2. Método Directo

Mediante el modelo de elementos de contorno, se puede plantear un macrosistema que abarque el conjunto de suelo y estructura. Planteando el sistema de ecuaciones obtenido en 2.6, se tiene como incógnitas todos los desplazamientos y tensiones desconocidos del modelo. Cada nodo de un medio viscoelástico del diseño aporta al sistema 6 variables (3 desplazamientos y 3 tensiones), las cuales serán en su totalidad incógnitas si el nodo pertenece a alguna interfase, de otro modo serán conocidos el desplazamiento o bien la tensión a través de las condiciones de contorno. De esta forma, al resolver el sistema, quedan definidos totalmente el campo de desplazamientos y el campo de tensiones. Para comparar esta metodología con la indirecta, se somete el modelo a las dos sollicitaciones sísmicas, y de estos dos conjuntos de soluciones, se toman las correspondientes al desplazamiento vertical y horizontal del nodo situado en el centro de la base de la estructura y el giro de la misma.

A fin de comparar ambas soluciones, se representan sobre la misma gráfica. En la figura 5.14, se muestra el desplazamiento vertical del punto de estudio y se observa que ambas son coincidentes, casi no existiendo diferencia apreciable entre ambas a lo largo de todo el rango de frecuencias. En línea continua se muestran los resultados del método directo y en línea de puntos los del indirecto. Este criterio se aplicará en todo el capítulo.

En las figuras 5.15 y 5.16 se representan el desplazamiento en el *eje y* del punto central y el giro de la base resultantes de someter al sistema a una onda tipo SH. Las distancias entre las curvas de ambos métodos son casi nulas, incluso en las frecuencias más bajas donde las oscilaciones son mayores. En conclusión se puede decir que para este problema, la precisión de ambos sistemas es casi idéntica.

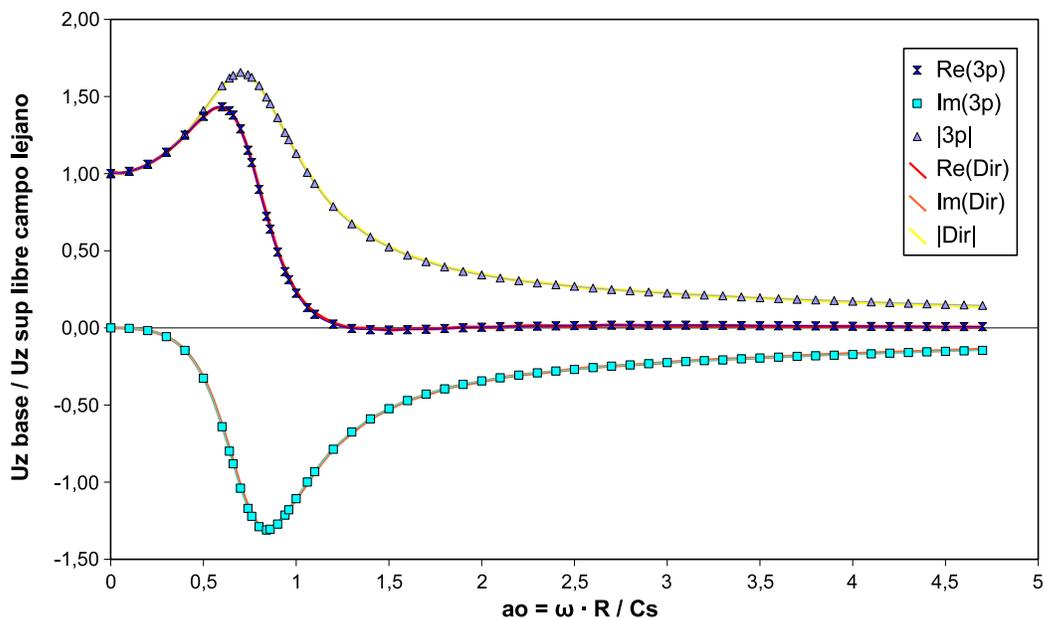


Figura 5.14: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Comparación de Resultados. Onda P

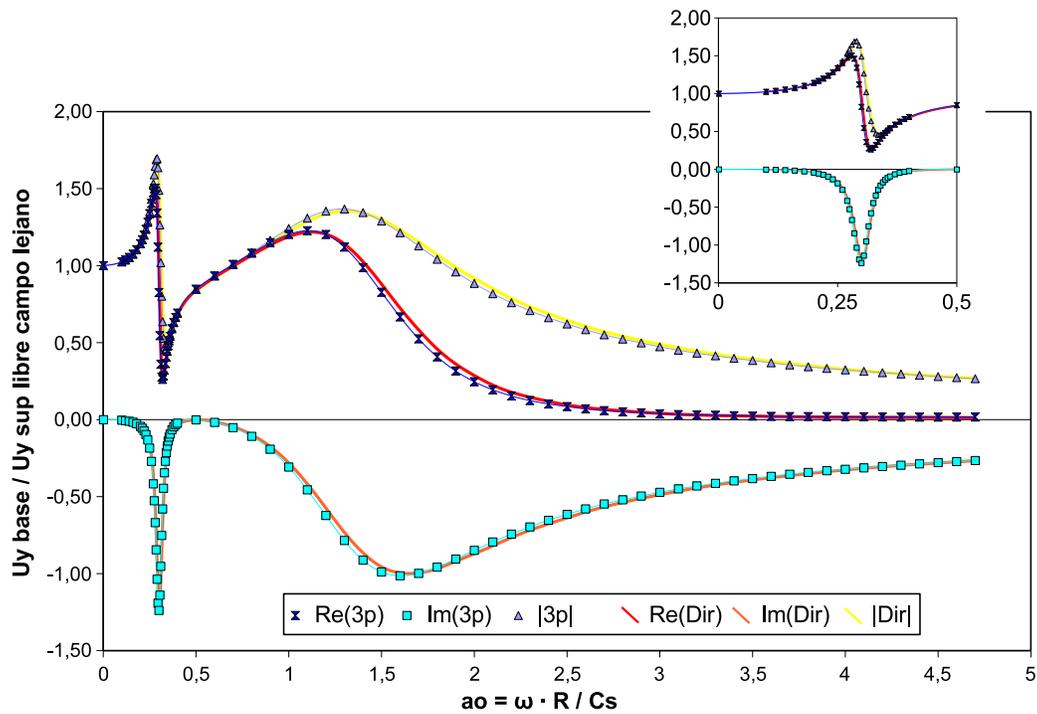


Figura 5.15: Desplazamiento Horizontal del punto central de la base. Comparación de Resultados. Onda SH

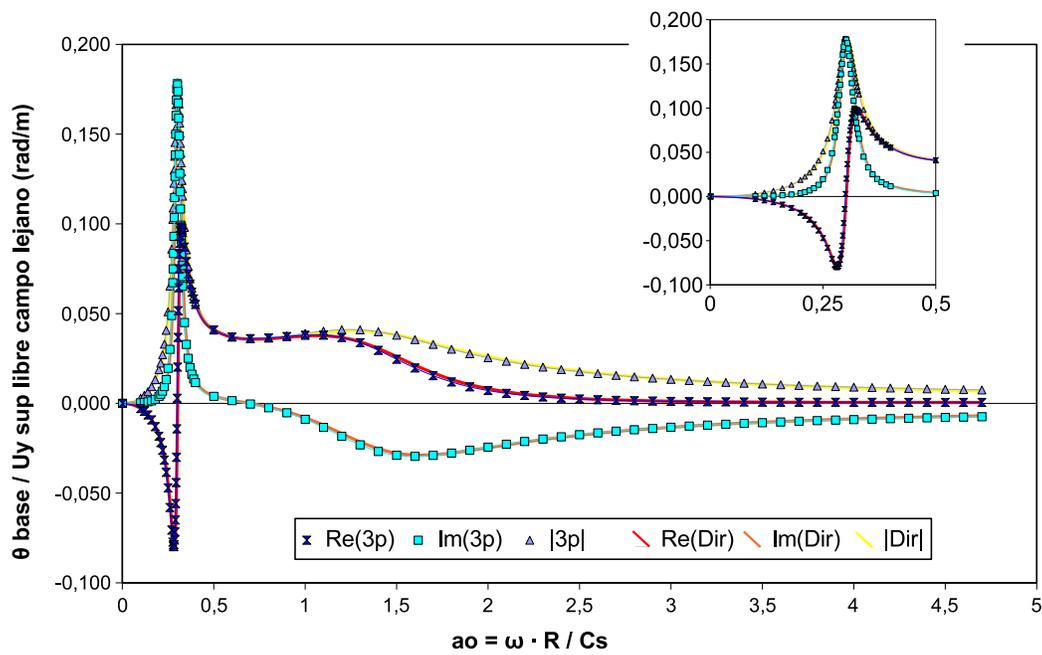


Figura 5.16: Giro de la Base. Comparación de Resultados. Onda SH

**NOTA:** En B.1.1 se pueden encontrar estas gráficas comparando por separado las componentes real, imaginaria y módulo del desplazamiento

## 5.2. PROBLEMA II

En este problema el cilindro de rigidez infinita se encuentra enterrado hasta su cota superior en un terreno sin estratificar. Los dos dominios están delimitados en esta ocasión por cuatro contornos, se hace necesario ‘partir’ la discretización (duplicar nodos) en el vértice enterrado del cilindro ya que aparece un problema de esquina. Es decir, en uniones de contornos en ángulo donde las tensiones sean desconocidas a ambos lados, si sólo hay un nodo existe mayor número de incógnitas que de ecuaciones.

Los desplazamientos a calcular serán los de un punto situado en el centro de la base inferior del cilindro, por lo tanto a 50 metros por debajo de la cota de superficie libre. Estos valores se adimensionalizan con respecto a los de un punto de campo lejano (figura 5.17). Se calculan los casos de ondas P y ondas SH.

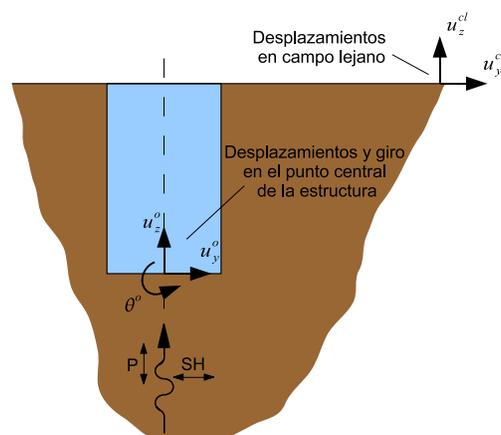


Figura 5.17: Adimensionalización de desplazamientos

### 5.2.1. Método Indirecto

#### Interacción Cinemática

En este modelo, la superficie de contacto suelo-estructura, que debe considerarse infinitamente rígida, es un pozo excavado en el terreno de 50 metros de profundidad y 30 metros de diámetro. Los desplazamientos provocados por el sismo no son, como en el caso anterior, iguales a los de campo lejano. La amplitud del desplazamiento provocado por la onda incidente varía con la profundidad y la frecuencia, y el punto a considerar esta a cota negativa, a esto se le debe añadir el efecto de las ondas reflejadas, ya que la presencia del pozo excavado modifica el campo de desplazamientos, lo que se conoce como efecto local (figura 5.18).

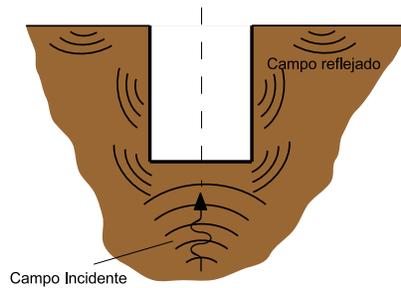


Figura 5.18: Campo Incidente y Campo Reflejado

En las figuras 5.19, 5.20 y 5.21 aparecen las componentes de los desplazamientos vertical y horizontal, y el giro de la base en el punto estudiado. Estos valores se encuentran adimensionalizados con respecto a los desplazamientos de un punto de campo lejano. Se observa la variación con la frecuencia del desplazamiento del punto de referencia a diferencia de el problema anterior, destacando el evidente efecto que genera la excavación en el campo incidente. En el sistema dinámico equivalente, estas funciones serán utilizadas como los desplazamientos aplicados a la base del modelo para cada frecuencia.

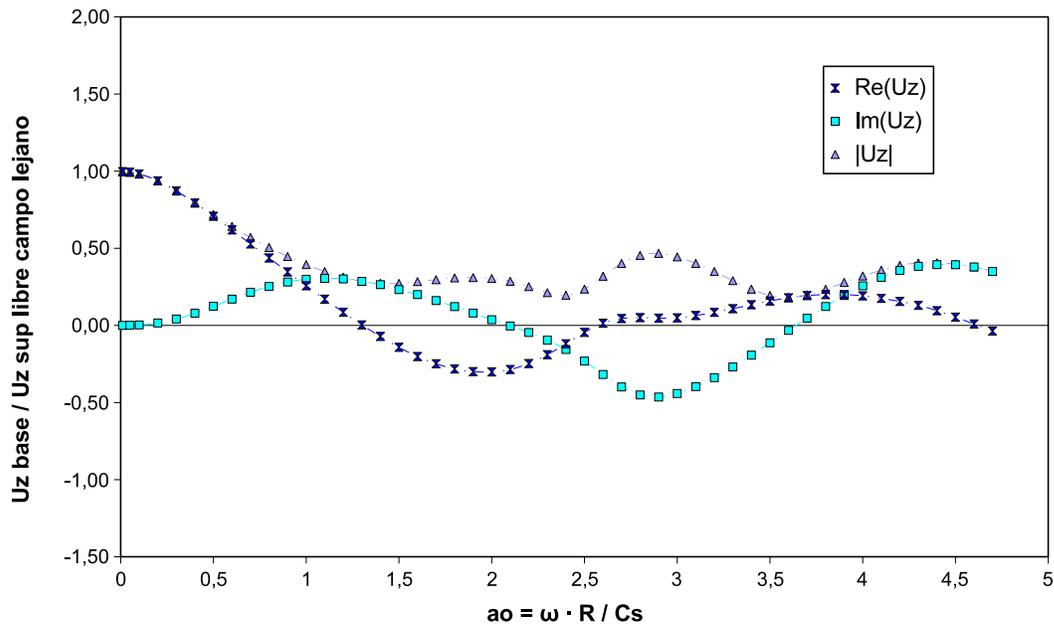


Figura 5.19: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Onda P

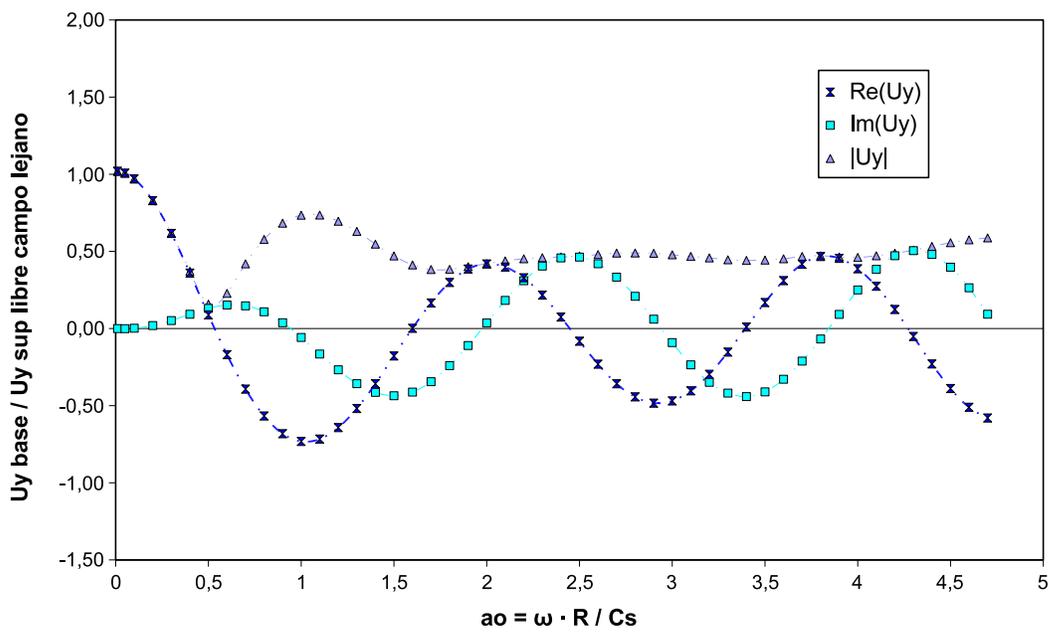


Figura 5.20: Desplazamiento Horizontal del punto central de la base. Onda SH

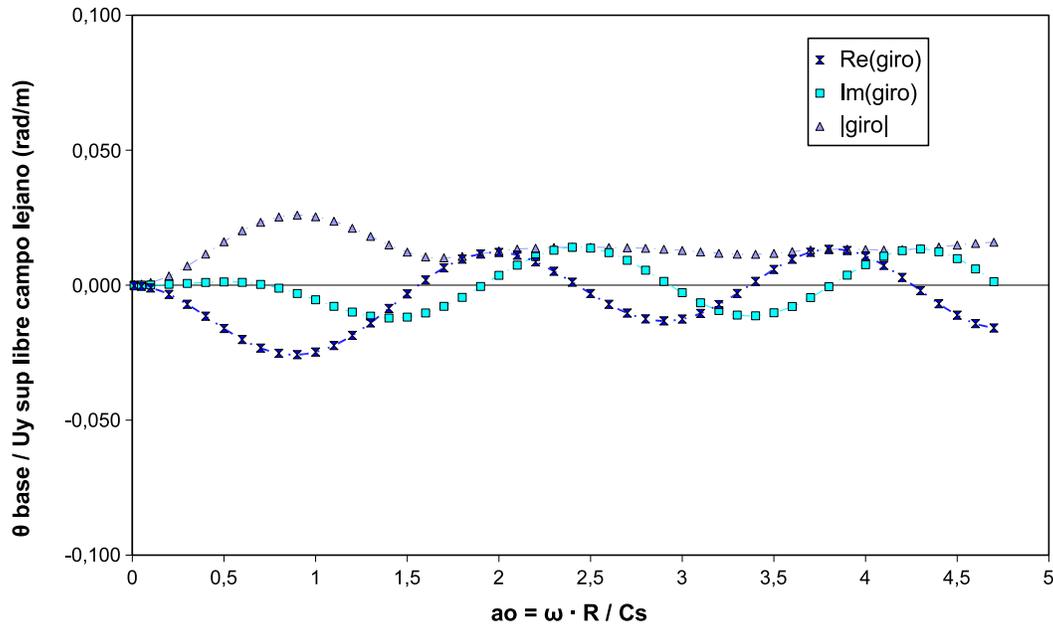


Figura 5.21: Giro de la Base. Onda SH

### Cálculo de Impedancias

Se calculan las resultantes de las impedancias vertical, horizontal y a cabeceo del problema de la forma ya conocida. En esta ocasión no sólo se aplica un desplazamiento unitario a la base sino también a las paredes. Los campos de tensiones resultantes se integran con respecto al punto de estudio. Las impedancias equivalentes en el centro de la base darán valor numérico para cada frecuencia a los respectivos resortes y amortiguadores del sistema simplificado. En las figuras 5.22, 5.23 y 5.24 se muestran respectivamente las componentes de la rigidez vertical, horizontal y a cabeceo del terreno.

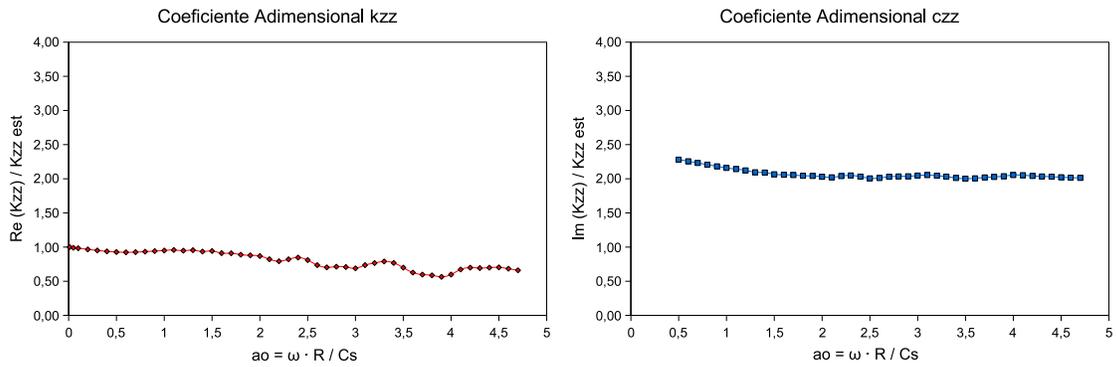


Figura 5.22: Impedancia Vertical

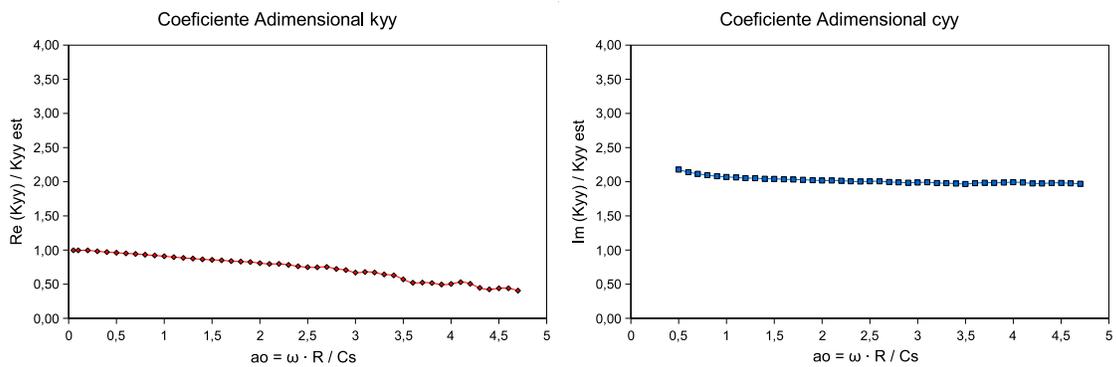


Figura 5.23: Impedancia Horizontal

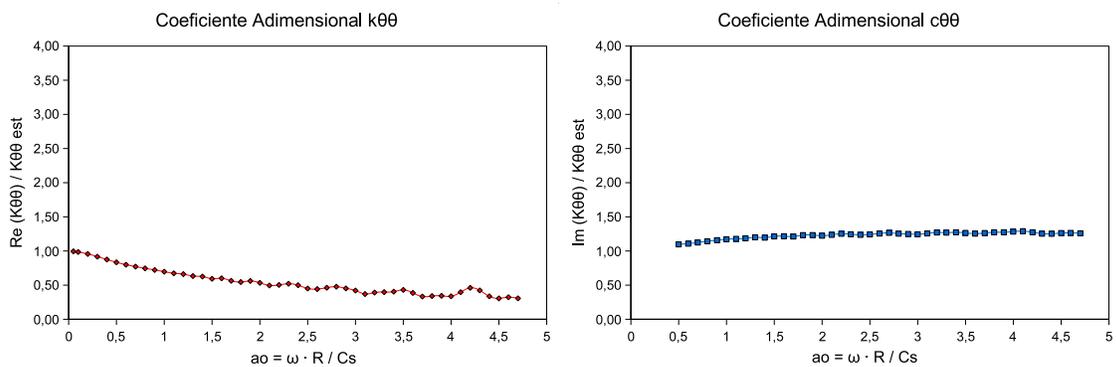


Figura 5.24: Impedancia a Cabeceo

### Sistema dinámico equivalente

Ya calculadas las condiciones para cada frecuencia, es decir, desplazamiento de la base y valores del resorte y el amortiguador, sólo resta calcular, mediante las fórmulas que rigen sistemas oscilantes de este tipo, el desplazamiento en el punto central de la base. Al realizar los cálculos para cada frecuencia, en el caso del problema vertical, se obtienen los desplazamientos cuyas componentes aparecen representadas en la figura 5.25. Analíticamente, la frecuencia natural es  $a_0 = 1.2$ , aunque no se aprecia en la gráfica. Esto es debido a que al enterrar la estructura, el amortiguamiento crece de manera importante, con lo cual el máximo no es muy pronunciado.

Si se comparan estas curvas con las obtenidas en el primer paso, se puede observar la influencia de la masa. A bajas frecuencias el desplazamiento del terreno y de la estructura son muy similares, el alto amortiguamiento provoca que se muevan de forma casi solidaria, mientras que a frecuencias más altas, las fuerzas inerciales de la estructura aumentan su efecto, desacoplando ambos movimientos.

El problema horizontal tiene como soluciones los valores de desplazamiento y giro que se muestran en las figuras 5.26 y 5.27. En frecuencias cuasiestáticas, el sistema formado por suelo estructura de se desplaza de manera solidaria y sin generar ningún giro en la base. El valor absoluto del desplazamiento, al igual que el del giro, alcanzan valores máximos en la frecuencia  $a_0 = 1$  y una vez superado el pico, permanecen más o menos estables hasta el final del rango de frecuencias estudiado. Las componentes mantienen variaciones senoidales de amplitudes decrecientes en el caso de la parte real, y crecientes para la parte imaginaria.

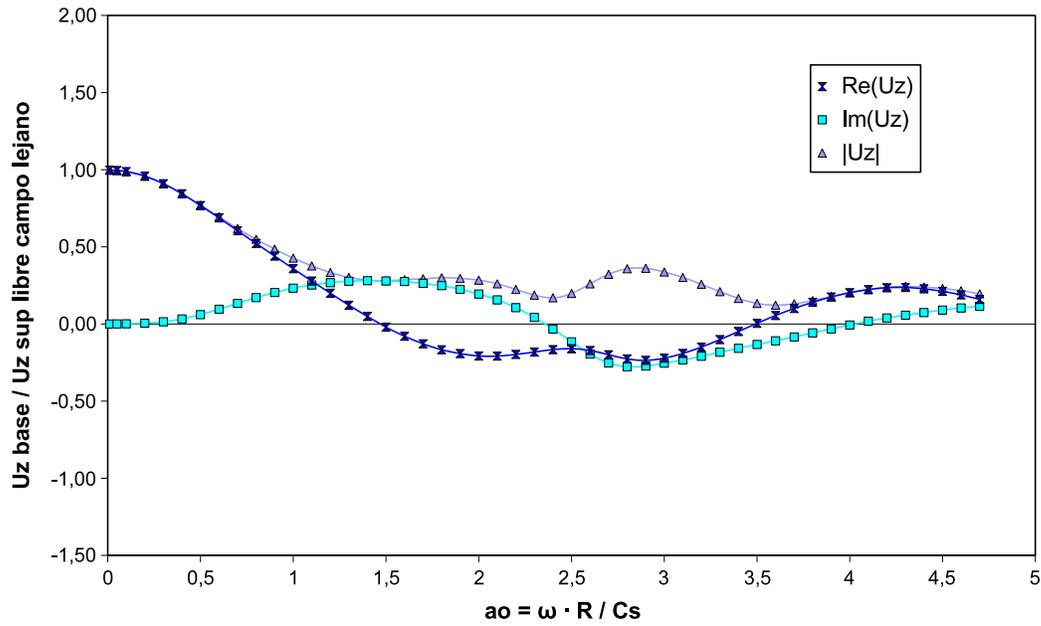


Figura 5.25: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Onda P

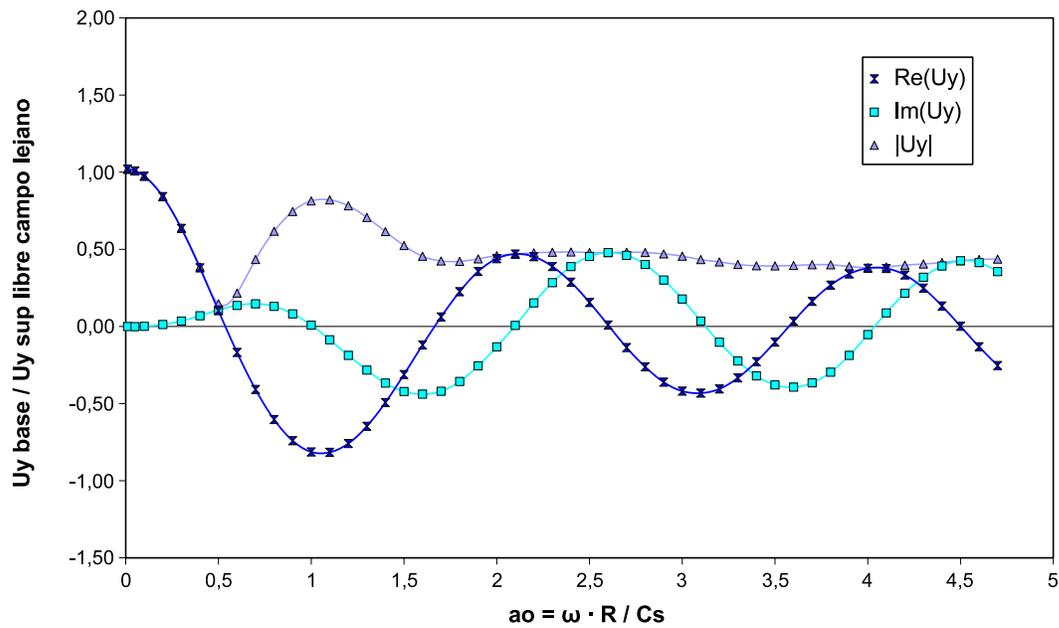


Figura 5.26: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Comparación de Resultados. Onda SH

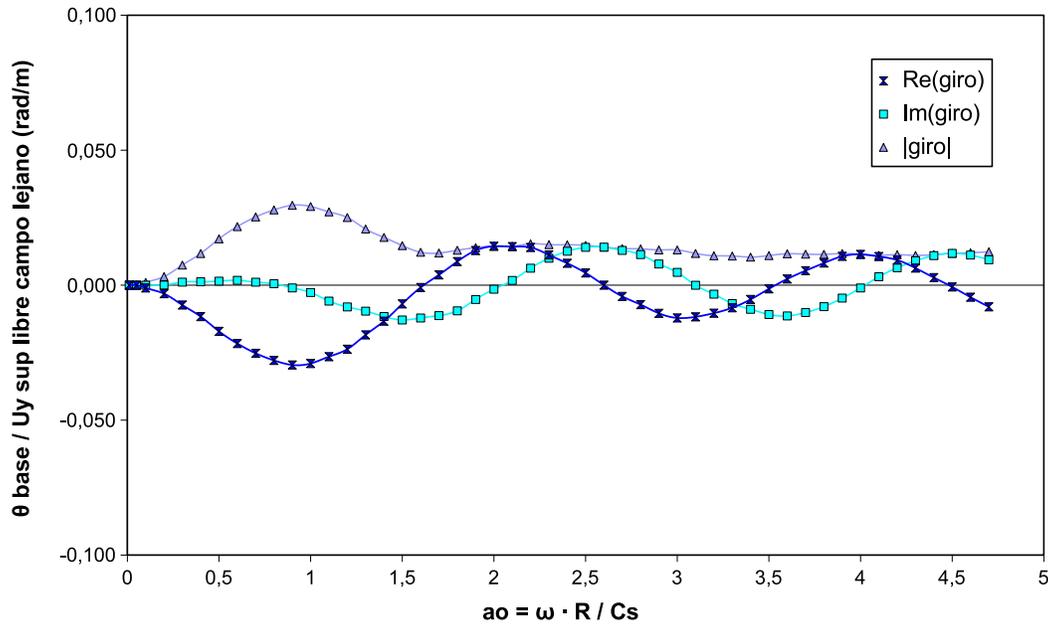


Figura 5.27: Giro de la Base. Comparación de Resultados. Onda SH

### 5.2.2. Método Directo

Resolviendo el modelo de elementos de contorno con todos los dominios acoplados, se obtienen los campos de desplazamiento y tensiones en todos los contornos para ambos problemas, vertical y horizontal. Los resultados correspondientes al problema vertical en el punto central de la base se muestra en la figura 5.28 superpuestos con los obtenidos por el método de los tres pasos. Ambos son coincidentes y apenas se puede buscar alguna diferencia entre ellos. Repitiendo el proceso para el problema horizontal, se consiguen las gráficas comparativas del desplazamiento en el *eje y* (figura 5.29) y del giro en la base (figura 5.30). Las coincidencias en desplazamientos es absoluta, mientras que en giro aparecen algunas diferencias en frecuencias altas: los picos obtenidos por el método indirecto son mayores que los respectivos del método directo, aunque el valor de la diferencia es mínimo.

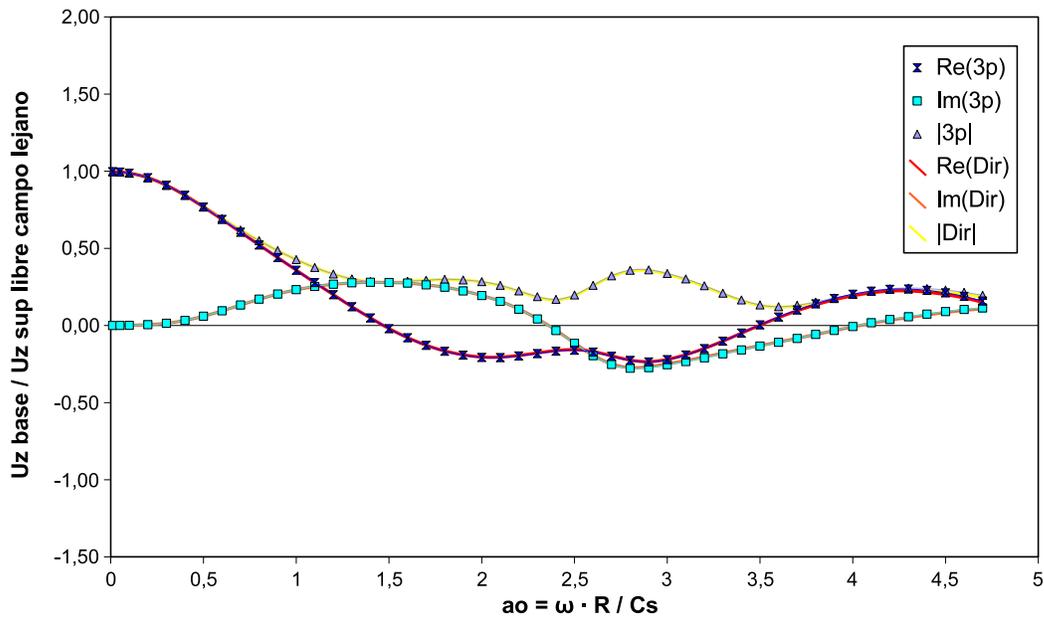


Figura 5.28: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Comparación de Resultados. Onda P

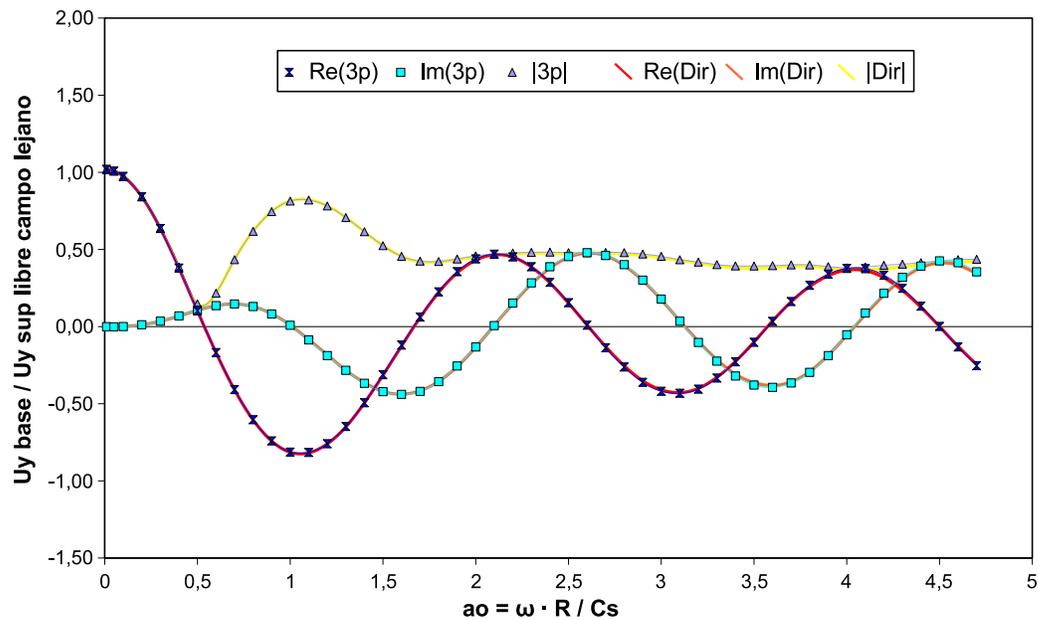


Figura 5.29: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Comparación de Resultados. Onda SH

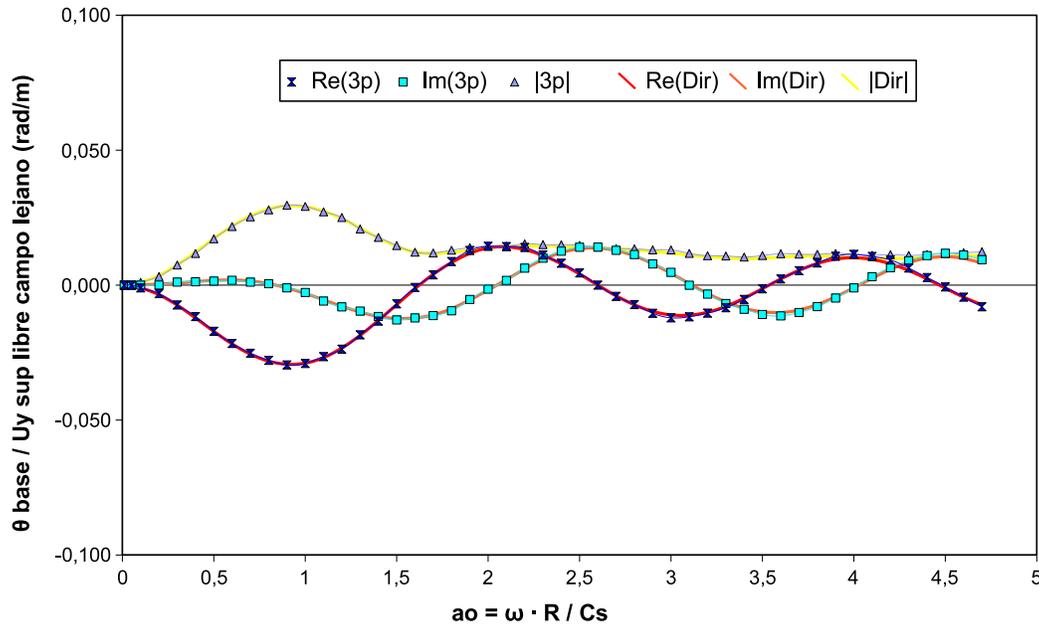


Figura 5.30: Giro de la Base. Comparación de Resultados. Onda SH

**NOTA:**En B.2.1 se pueden encontrar estas gráficas comparando por separado las componentes real, imaginaria y módulo del desplazamiento

### 5.2.3. Influencia del Enterramiento

Al variar la posición de la estructura con referencia al terreno, se aprecia un importante cambio en la respuesta del sistema frente a una misma excitación, como se observa en las diferencias entre las respuestas de los problemas I y II. En principio hay que aclarar, que al comparar los desplazamientos de estos dos modelos, no se enfrentan desplazamientos y giros del mismo punto geométrico. Mientras el perteneciente al primer problema está situado a nivel de la superficie libre, el punto a examen del segundo, se encuentra 50 metros por debajo. Así pues, al variar el grado de soterramiento de la estructura, se altera, en términos del sistema equivalente dinámico, la impedancia, y el movimiento en la base del sistema. En el primer aspecto, la rigidez del sistema se incrementa al enterrar la estructura. La superficie de contacto se hace mucho mayor, y por tanto las tensiones necesarias para que la estructura se desplace. El campo incidente también varía, ya que no es igual el desplazamiento en la superficie que a cincuenta metros bajo la misma, y además se ve alterado por la presencia de la estructura, cuya cimentación genera un campo reflejado.

En el problema vertical (figura 5.31) se aprecia como al enterrar la estructura el pico de la frecuencia natural desaparece. Esto es debido en su mayor medida a que el amortiguamiento del sistema se incrementa en gran medida, a la vez que la rigidez estática vertical del problema II es de un orden de casi diez veces mayor que la del problema I. Esto hace que la frecuencia natural se desplace hacia frecuencias mayores.

En el problema horizontal, tanto en el desplazamiento (figura 5.32) como en el giro (figura 5.33), también desaparece el pico de la frecuencia natural. Es de destacar que a altas frecuencias, a pesar de que el comportamiento en valor absoluto es muy similar (se mantiene estable en cifras muy parecidas), tienen lugar dos situaciones totalmente dispares. Mientras en el primer problema el desfase de la respuesta con respecto a la excitación permanece constante, en el segundo varía completamente mientras el módulo permanece constante.

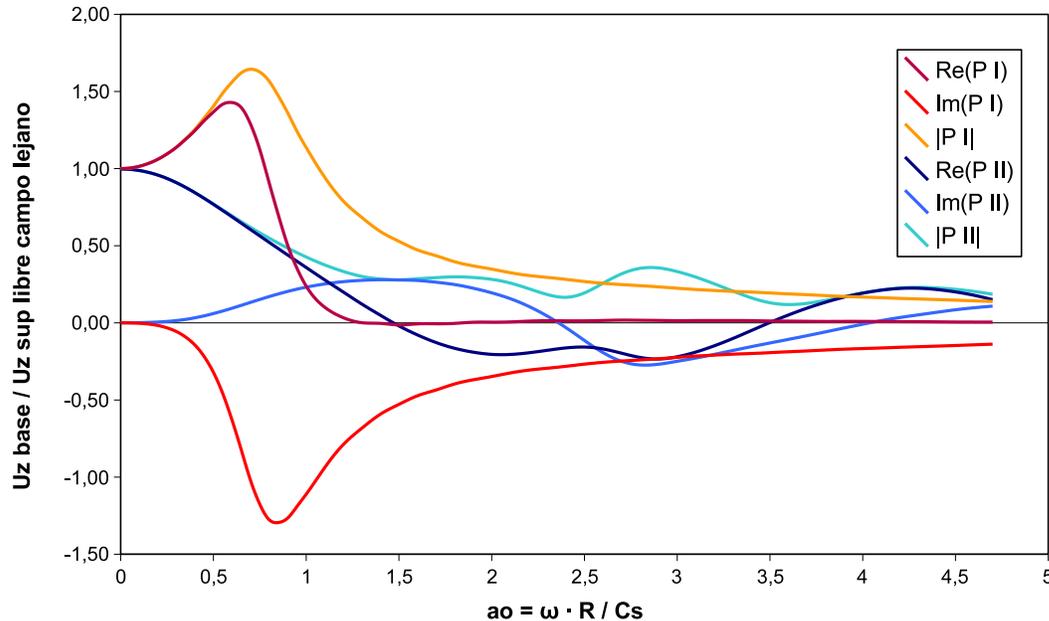


Figura 5.31: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Onda P

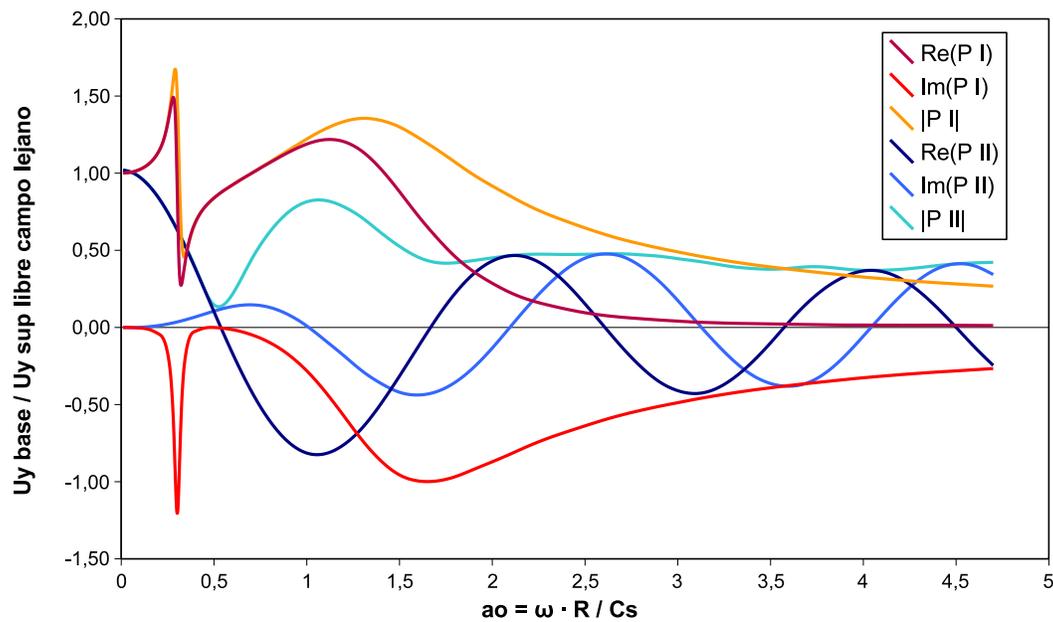


Figura 5.32: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Onda SH

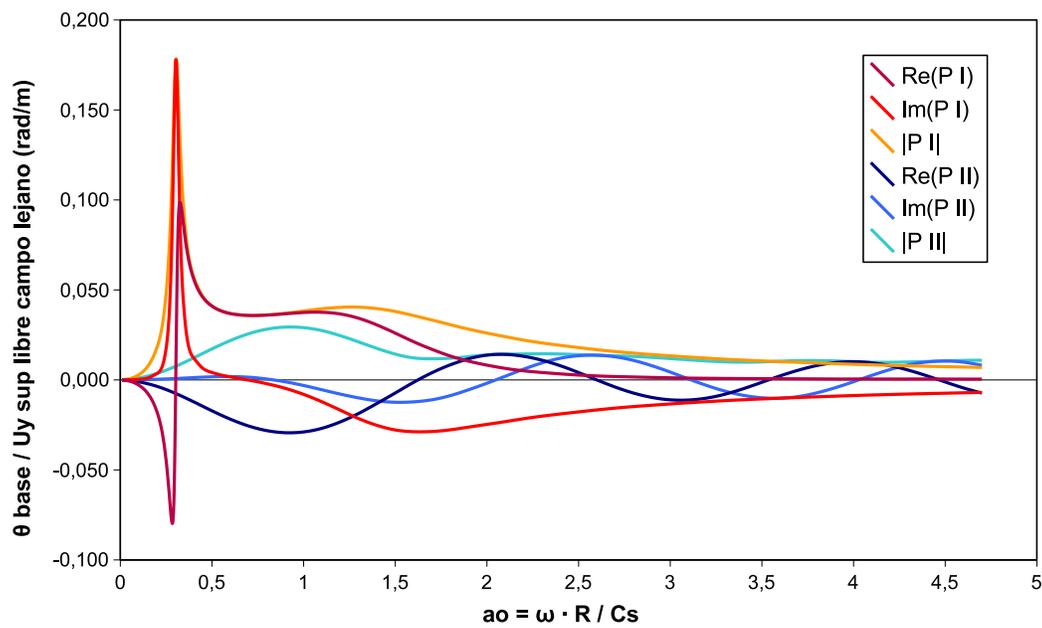


Figura 5.33: Giro de la Base. Onda SH

**NOTA:** En B.2.2 se pueden encontrar estas gráficas comparando por separado las componentes real, imaginaria y módulo del desplazamiento.

### 5.3. PROBLEMA III



En este problema, se vuelve a situar la estructura infinitamente rígida en la superficie y se incluyen los diferentes estratos del terreno en el sistema. Ahora el modelo está compuesto por 4 dominios definidos por 5 contornos. Como parámetros de evaluación entre ambas metodologías se vuelven a tomar los desplazamientos horizontal y vertical de un punto situado en el punto central de la tapa inferior del cilindro y el giro de la base, adimensionalizados con respecto al desplazamiento en un punto de campo lejano (figura 5.34). También se somete al modelo a las dos sollicitaciones sísmicas ya utilizadas.

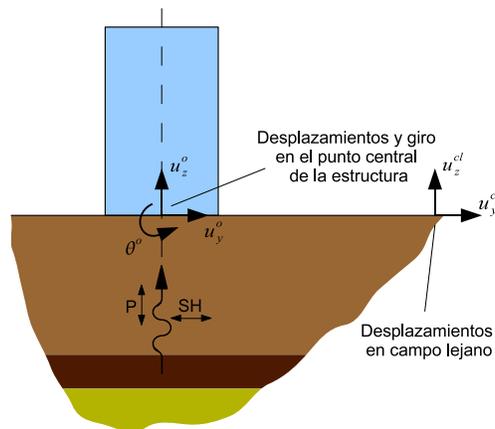


Figura 5.34: Adimensionalización de desplazamientos

#### 5.3.1. Método Indirecto

Ya se ha visto, que el objetivo principal de este método es formar un sistema simplificado oscilante cuya solución sea los desplazamientos del punto deseado. En

este problema, la excitación de la base toma los valores del campo de desplazamientos inducido por el sismo, y la impedancia es la equivalente a la del terreno y la cimentación sin masa en dicho punto.

### Interacción Cinemática

Al igual que en el caso del problema I, no existe nada que altere el campo de desplazamientos incidente. La zona de contacto entre suelo y estructura, la cual ha de ser considerada como infinitamente rígida, se encuentra en la superficie. Por lo tanto, la amplitud de los desplazamientos que se apliquen al sistema equivalente serán independientes de la frecuencia de excitación e iguales a  $1 \cdot e^{i\omega t}$ .

### Cálculo de Impedancias

Solucionando los ya conocidos problemas de rigidez horizontal, vertical y a cabeceo, se obtienen, calculando la resultante en el punto central de la base de los campos de tensiones generados, los valores mostrados en las gráficas de las figuras 5.35, 5.36 y 5.37.

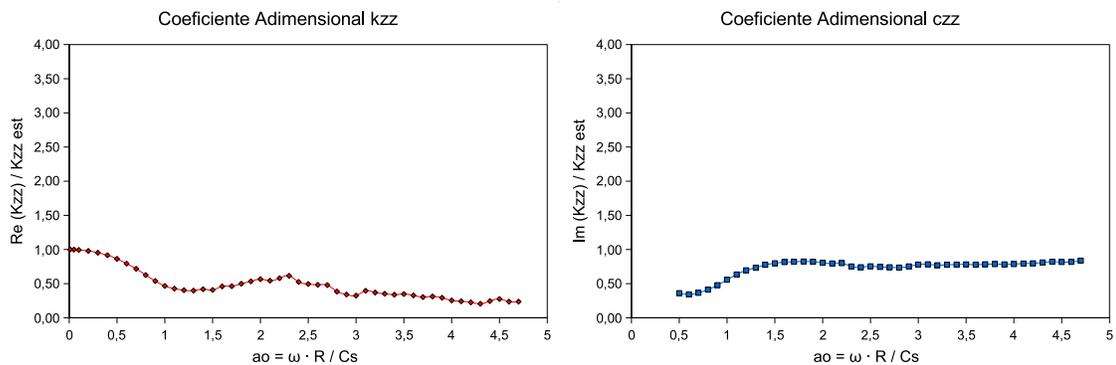


Figura 5.35: Impedancia Vertical

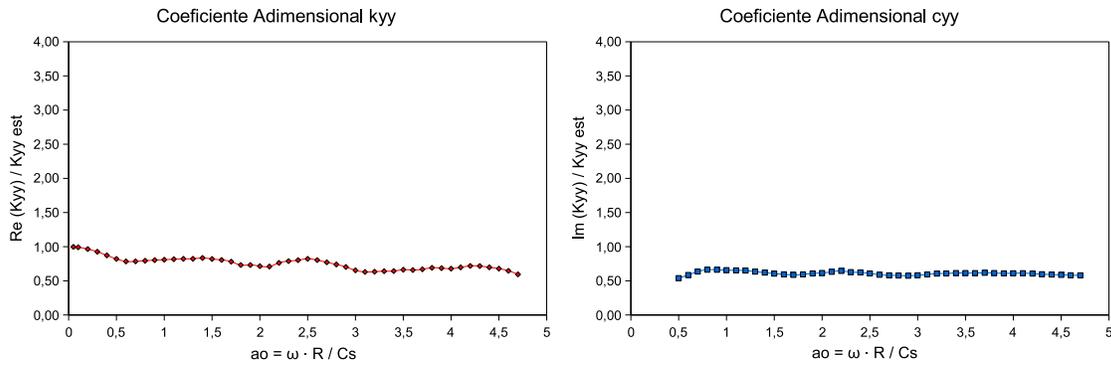


Figura 5.36: Impedancia Horizontal

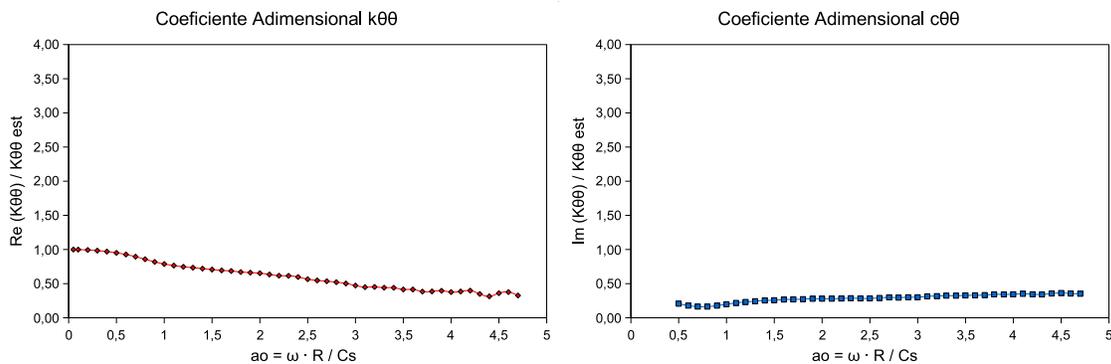


Figura 5.37: Impedancia a Cabeceo

### Sistema Dinámico Equivalente

Las respuestas del sistema simplificado presentan aproximadamente las mismas formas que el problema I. Algo totalmente lógico si se tiene en cuenta que ambos problemas sólo difieren en la configuración del terreno.

La figura 5.38 representa las componentes del desplazamiento vertical para el problema de Onda P. Esta función está completamente gobernada por la influencia de la masa. Así se observa cómo a frecuencias muy bajas, la estructura se desplaza sincrónicamente con la excitación. Pero según aumenta la frecuencia, las fuerzas de inercia provocan que los desplazamientos de la estructura sean cada vez mayores, llegando a un valor, en la frecuencia natural del sistema, que casi triplica la amplitud de excitación. Para frecuencias elevadas, las fuerzas inerciales de la estructura provoca que el desplazamiento sea inferior a la mitad de la excitación, estando además retrasado con respecto a la misma  $90^\circ$ , es decir, cuando la excitación alcanza un

máximo, la respuesta se encuentra en su punto neutro.

Para la onda SH, la figura 5.39 muestra como la parte real de la respuesta se eleva en un pico en el punto de 0,3 y desciende rápidamente para volver a subir después en un segundo máximo menos acentuado que el primero en 1,2. La parte imaginaria tiene un comportamiento similar, pero en valores negativos, presenta los mismos picos, un mínimo muy marcado en 0,3 y otro más suave algo retrasado con respecto al real en 1,5.

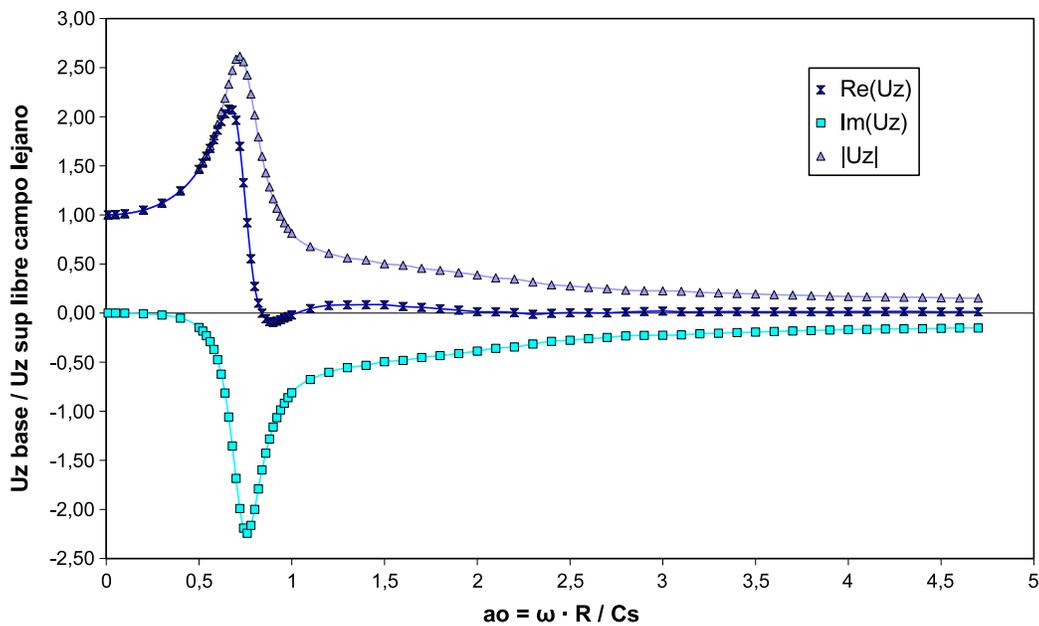


Figura 5.38: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Onda P

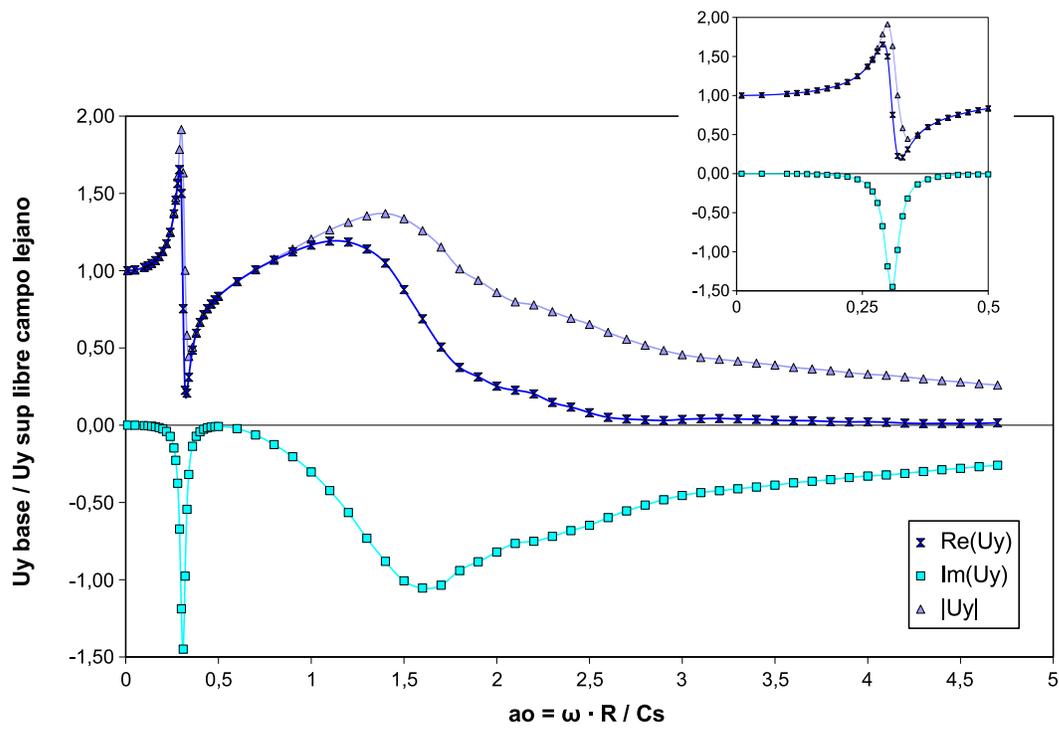


Figura 5.39: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Onda SH

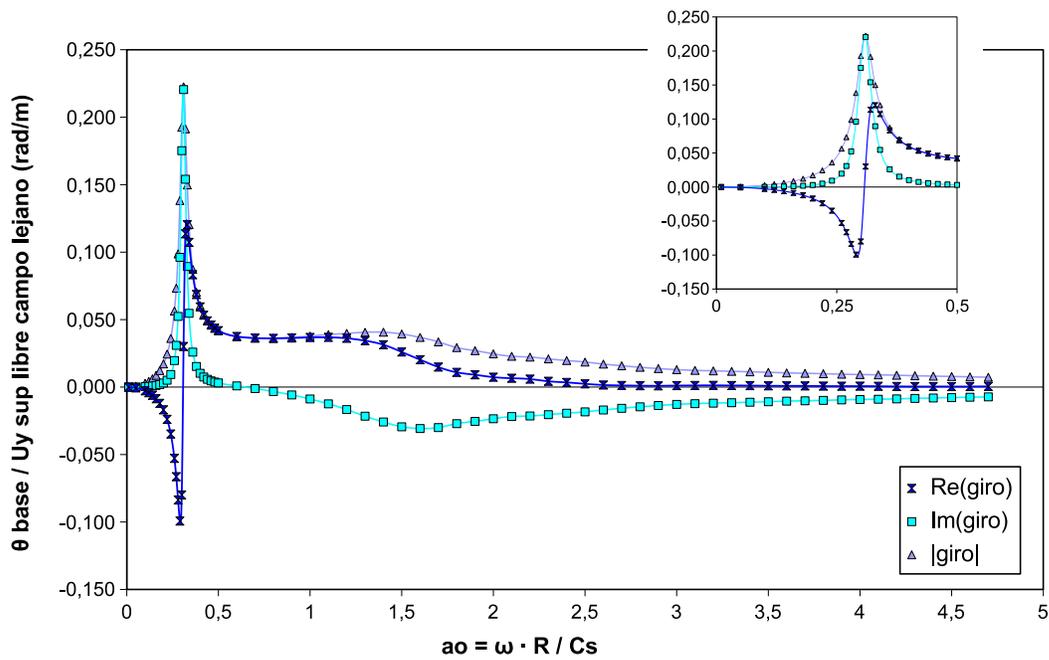


Figura 5.40: Giro de la Base. Onda SH)

### 5.3.2. Método Directo

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones correspondiente al modelo de elementos de contorno, se representa los desplazamientos del nodo deseado para ambos problemas.

En la figura 5.41, se representa el desplazamiento vertical resultante a una onda P calculado por el método directo frente a su equivalente en el método indirecto. Se observa claramente que ambas metodologías ofrecen la misma precisión en la respuesta para la onda vertical. También en el problema horizontal, comparando los desplazamientos horizontales (figura 5.42) y los resultados para el giro de la base (figura 5.43), se comprueba que las soluciones de ambos métodos, aplicados a este problema, son muy similares.

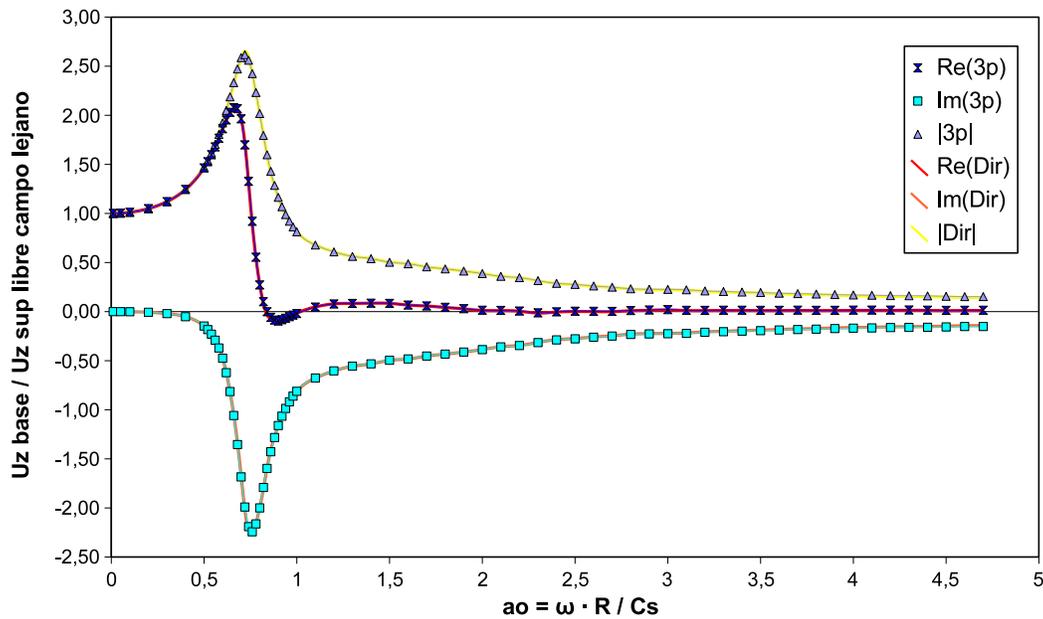


Figura 5.41: Desplazamiento Vertical en el centro de la base. Comparación de Resultados. Onda P

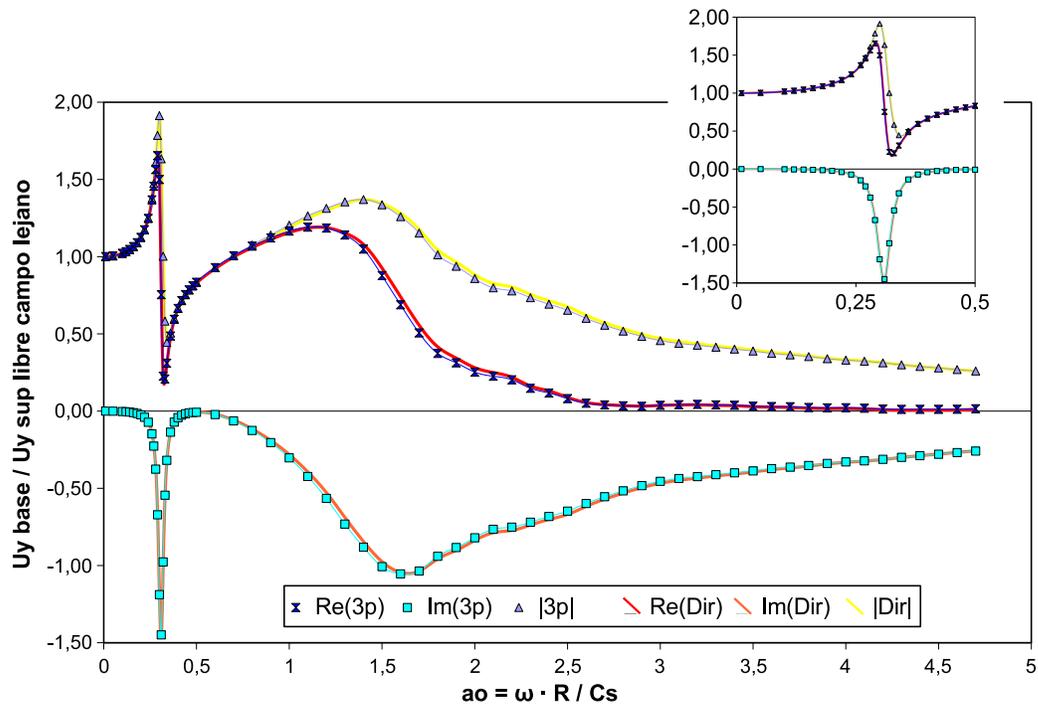


Figura 5.42: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Comparación de Resultados. Onda SH

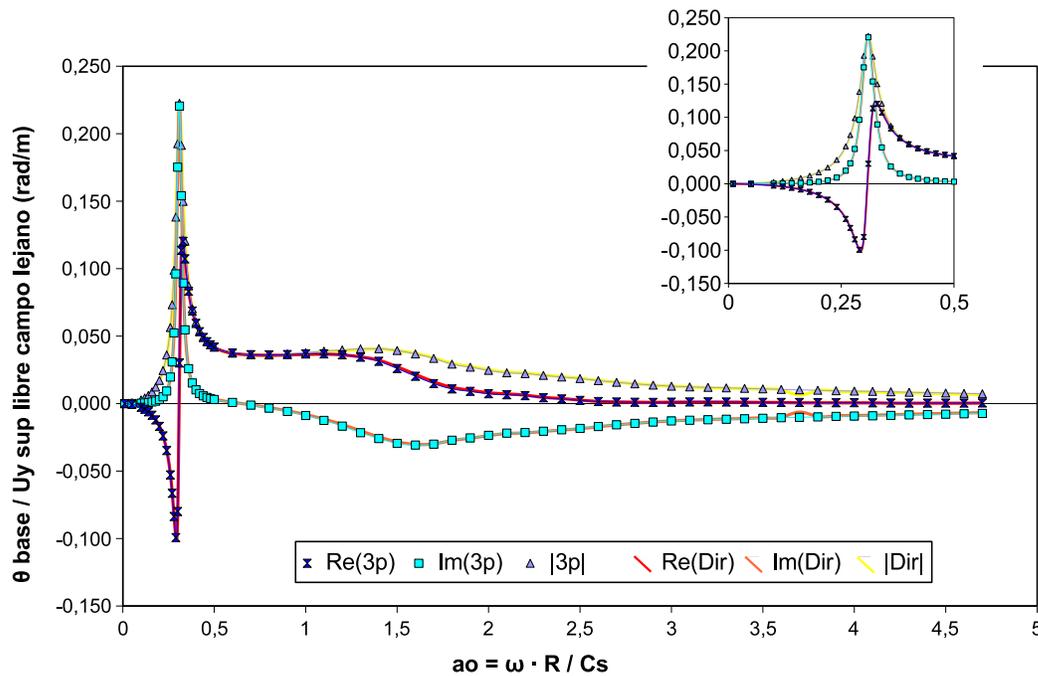


Figura 5.43: Giro de la base. Comparación de Resultados. Onda SH

**NOTA:**En B.3.1 se pueden encontrar estas gráficas comparando por separado las componentes real, imaginaria y módulo del desplazamiento.

### 5.3.3. Influencia de la estratigrafía

La única diferencia existente entre el problema I y el problema III, radica en la configuración del terreno. Mientras que el primero se compone de un semiespacio homogéneo en toda su extensión, en el segundo muestra un perfil estratificado, así pues, las diferencias que se puedan observar entre sus respuestas se deben integralmente a este factor.

Frente a una onda vertical (figura 5.44), la frecuencia natural parece desplazarse un poco hacia valores más elevados. Esto es debido a que la rigidez del conjunto estratificado es ligeramente mayor que la del semiespacio homogéneo. En la ecuación  $\omega_n = \sqrt{K_{est}/M}$ , frecuencia natural y rigidez son directamente proporcionales. Aunque más que la localización del efecto, radica mayor diferencia en la amplitud del mismo. A pesar de que, como se observa en la ecuación (3.9), el desplazamiento es inversamente proporcional a la rigidez, se debe tener en cuenta que en este término se debe incluir el factor dinámico de amortiguación, el cual para estas frecuencias, es mucho menor en el tercer problema que en el primero. Esto último se debe a que la energía sufre un efecto de encapsulamiento en el estrato por lo que se disipa menos energía. Por lo tanto a menor amortiguamiento mayor pico de respuesta.

Para la sollicitación horizontal, (figuras 5.45 y 5.46) la comparativa corrobora lo observado en el problema vertical: las respuestas difieren mayormente en la zona de la frecuencia natural del sistema, y en el resto oscilan en torno a los mismos valores. En la zona de bajas frecuencias, el problema en terreno estratificado alcanza mayores valores absolutos que el equivalente sin estratificar, y se observa además un leve desplazamiento de la frecuencia natural.

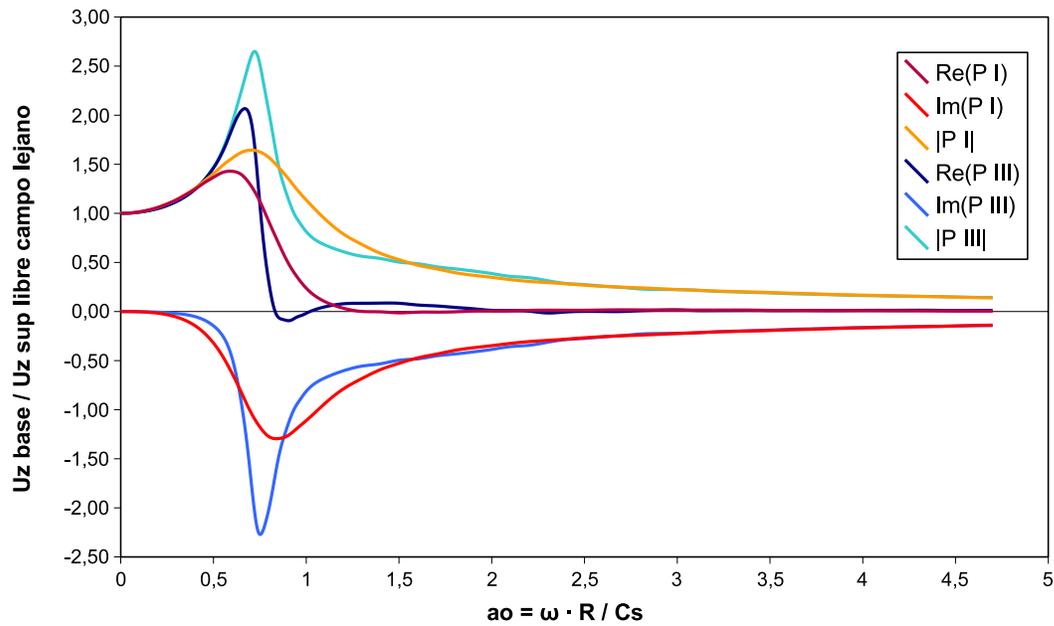


Figura 5.44: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Onda P

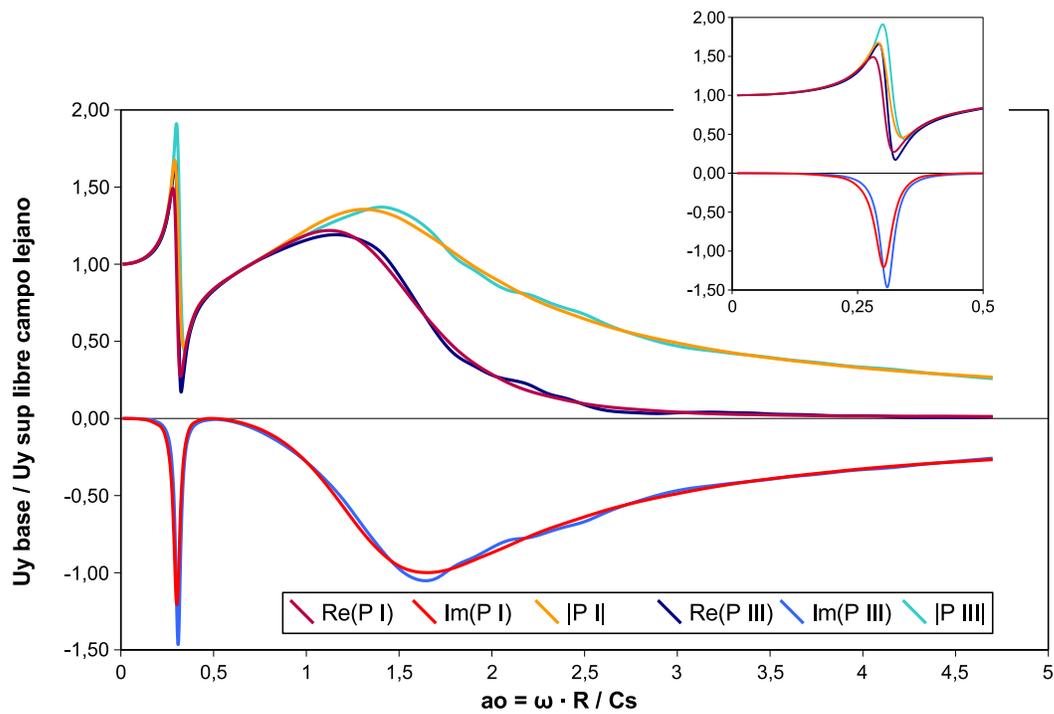


Figura 5.45: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Onda SH

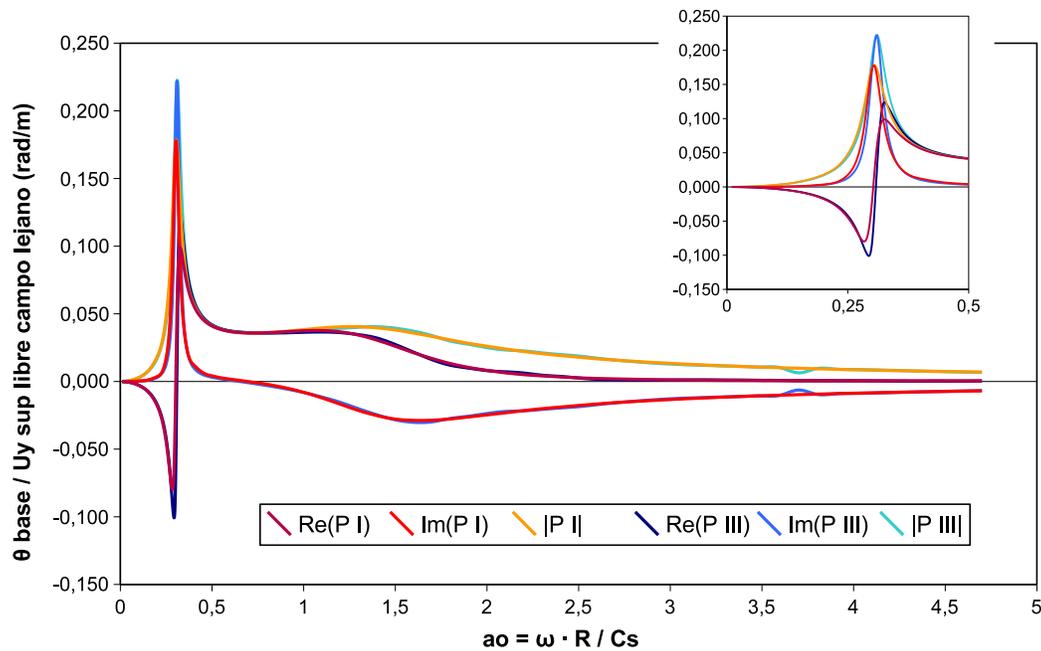
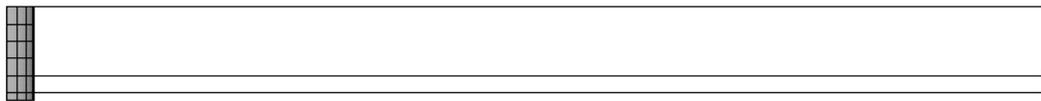


Figura 5.46: Giro de la base. Onda SH

**NOTA:** En B.3.2 se pueden encontrar estas gráficas comparando por separado las componentes real, imaginaria y módulo del desplazamiento.

## 5.4. PROBLEMA IV



En este modelo se sitúa la estructura, la cual sigue considerándose infinitamente rígida, enterrada en su totalidad en el terreno, el cuál presenta su estratigrafía real. Las propiedades de esta estratigrafía se encuentran descritas en el apartado 3.4.2. En este problema se definen los 4 dominios existentes mediante 8 contornos. El objetivo de ambas metodologías vuelve a ser calcular los desplazamientos vertical y horizontal en el centro de la tapa inferior, así como el giro de la misma. Éstos se adimensionalizan con respecto al desplazamiento de un punto de campo lejano. (figura 5.47)

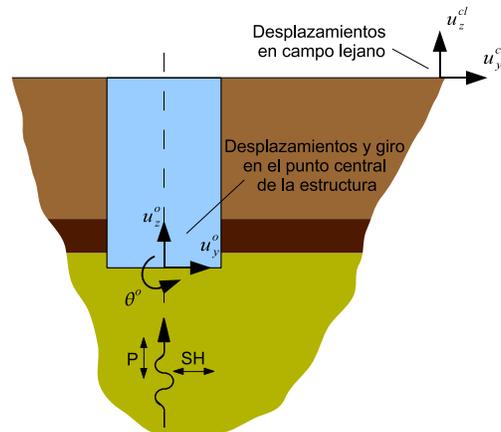


Figura 5.47: Adimensionalización de desplazamientos

### 5.4.1. Método Indirecto

#### Interacción Cinemática

Se calculan los desplazamientos generados por las dos sollicitaciones sísmicas en el punto central de la base para ambos problemas, a fin de poder utilizarlos como excitación en el sistema dinámico equivalente. Estos desplazamientos y giro sufren variaciones con respecto al de campo libre debido a la profundidad a la que se encuentra el punto de cálculo y a la interacción del pozo excavado con el campo incidente. En las figuras 5.48, 5.49 y 5.50 se muestran las gráficas de resultados del desplazamiento vertical para la onda P y el desplazamiento horizontal y el giro que sufre el suelo ante una onda SH.

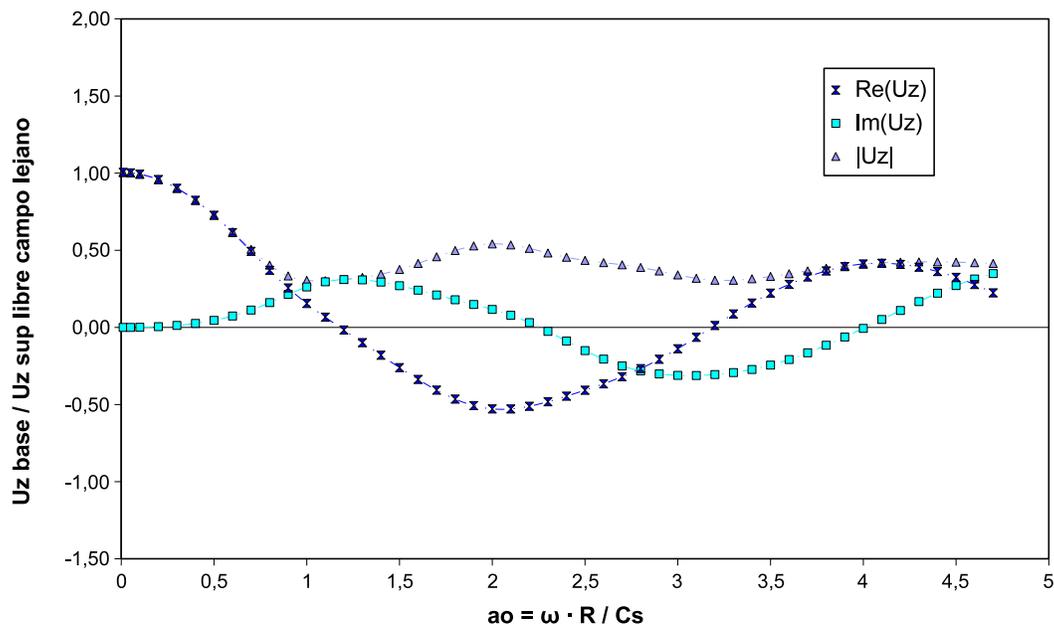


Figura 5.48: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Onda P

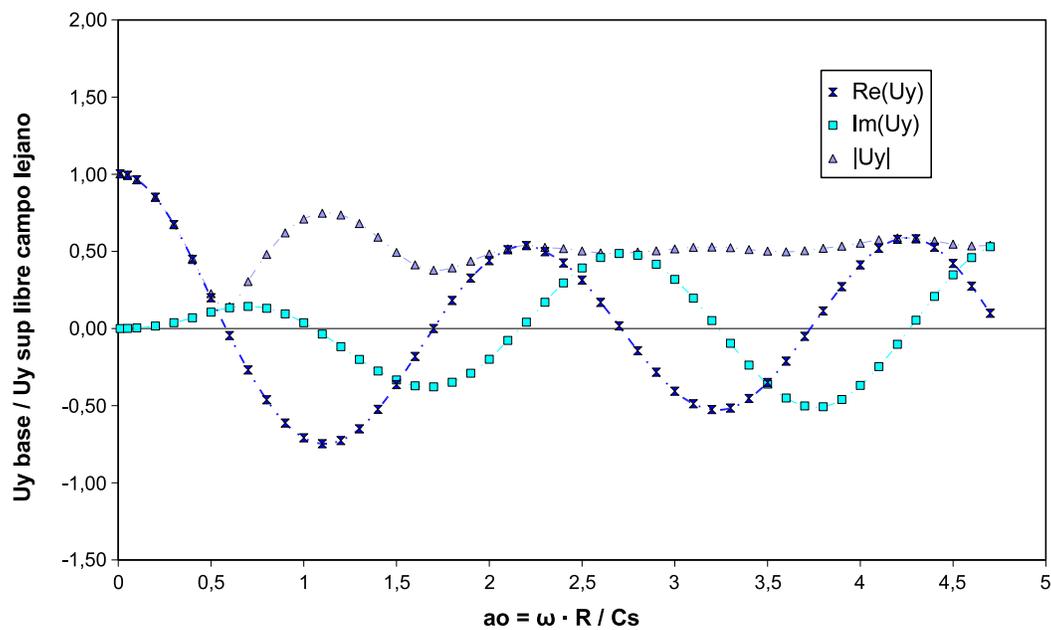


Figura 5.49: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Onda SH

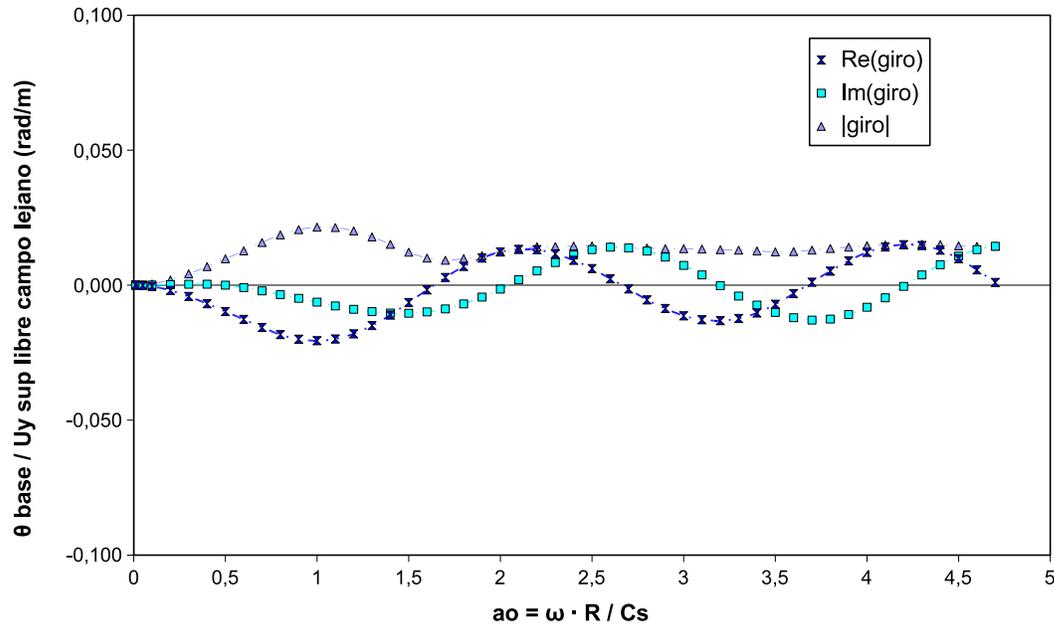


Figura 5.50: Giro de la Base. Onda SH

### Cálculo de Impedancias

La impedancia equivalente en el punto central de la base, se calcula mediante los problemas ya descritos, rigidez vertical (figura 5.51), rigidez horizontal (figura 5.52) y rigidez a cabeceo (figura 5.53). Debido a la estratigrafía, que cuenta con estratos de mayor dureza que el superior, lo que aporta rigidez al conjunto, las rigideces estáticas de cada grado de libertad son mayores que sus equivalentes en el semiespacio, aunque los valores de amortiguamiento dinámico son significativamente menores, lo cual tendrá su efecto en la cantidad de energía que pueda disipar.

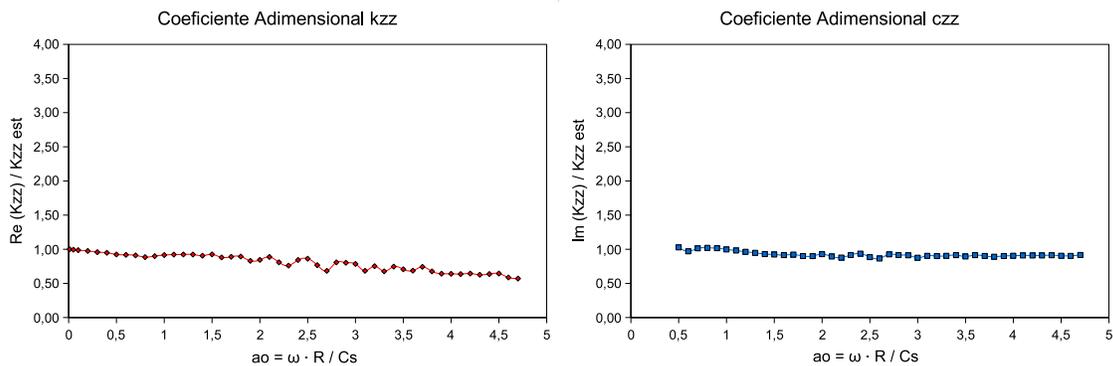


Figura 5.51: Impedancia Vertical

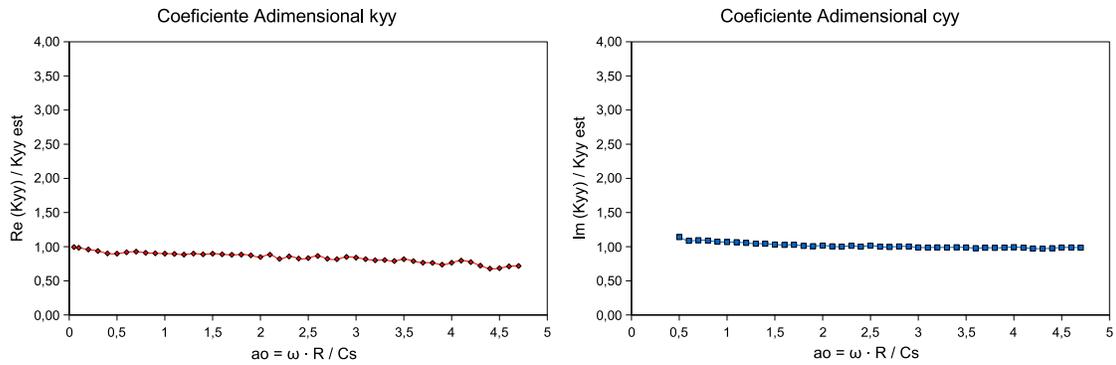


Figura 5.52: Impedancia Horizontal

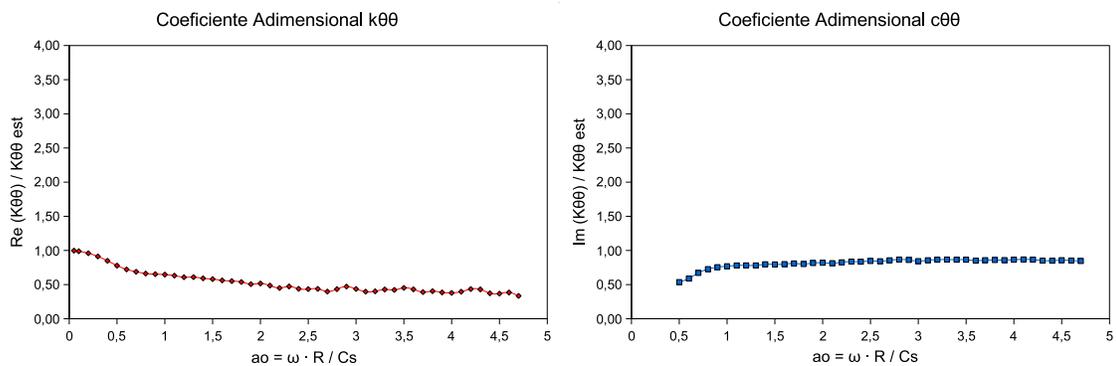


Figura 5.53: Impedancia a Cabeceo

### Problema Dinámico Equivalente

Con los datos necesarios para resolver los problemas de uno y dos grados de libertad (vertical y horizontal), se procede para cada frecuencia a calcular los desplazamientos y giros correspondientes. En la figura 5.54 se representan los valores del desplazamiento en  $z$  del punto central de la base frente a una onda P. Si se calcula la frecuencia de resonancia de manera analítica ( $\omega_n = \sqrt{K/M}$ ) se obtiene un valor adimensional de 2.1, punto donde el valor absoluto del desplazamiento alcanza un máximo. Si se compara con la gráfica presentada en la figura 5.48, puede comprobarse que a frecuencias bajas (menores que  $a_0 = 1$ ) el comportamiento de ambas curvas es muy similar, mientras que se incrementa la diferencia a medida que aumenta la frecuencia. Esto indica que la respuesta está gobernada a bajas frecuencias por la interacción cinemática entre suelo y la cimentación, mientras que en frecuencias mayores la interacción dinámica marca la diferencia entre ambas curvas.

Esto mismo ocurre en el problema horizontal, en desplazamientos y giro (figuras 5.55 y 5.56). Las gráficas se aproximan en frecuencias bajas a los valores calculados en el problema de interacción cinemática, pero se distancian a frecuencias mayores. Se aprecia que el desfase entre las ondas de excitación y respuesta, varía de forma cíclica mientras que el módulo de desplazamiento se mantiene estable.

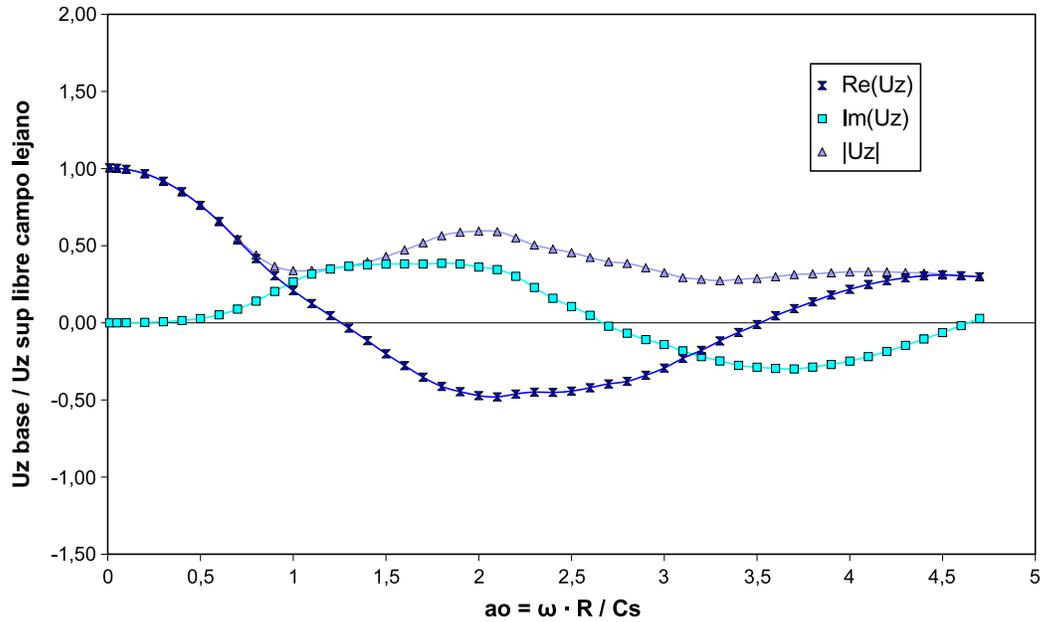


Figura 5.54: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Onda P

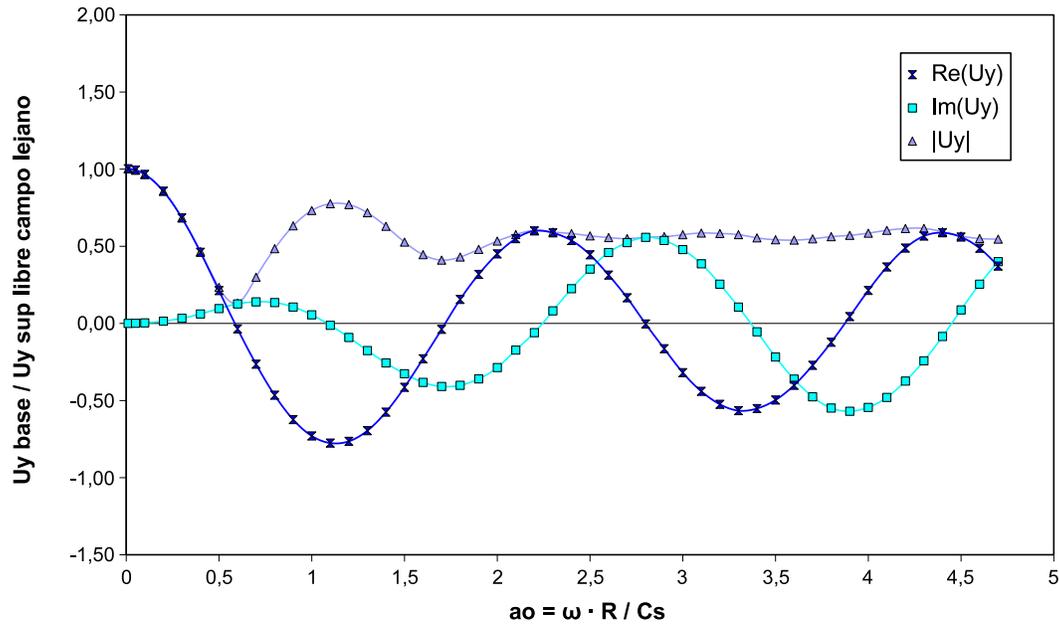


Figura 5.55: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Onda SH

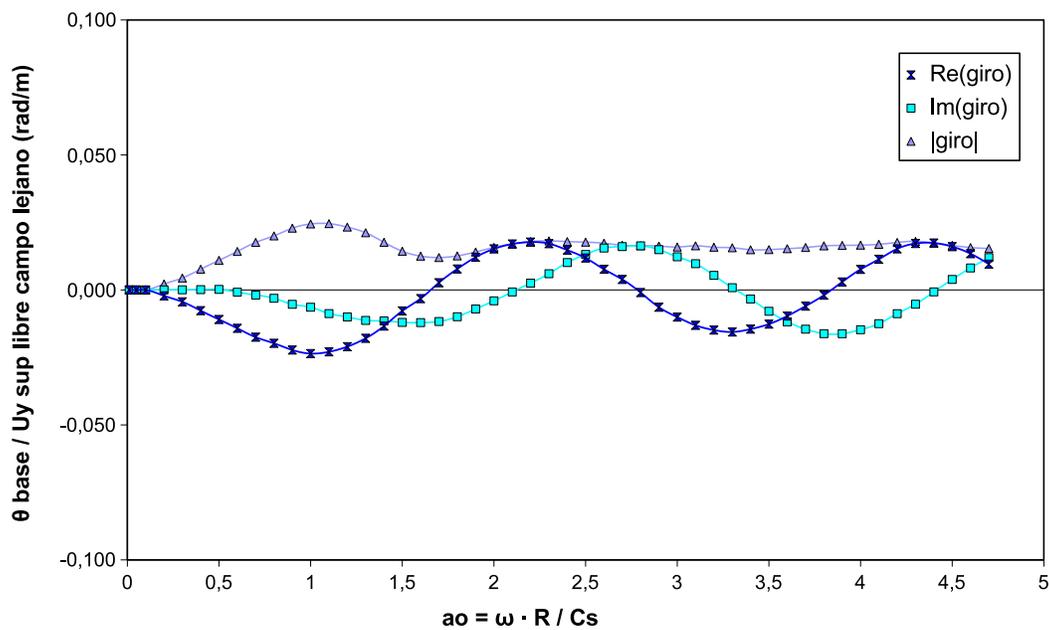


Figura 5.56: Giro de la Base. Onda SH

### 5.4.2. Método Directo

Después de plantear el sistema y resolver los campos de desplazamientos y tensiones en todos los nodos del modelo, se recogen en las gráficas de las figuras 5.57, 5.58 y 5.59 las componentes de los desplazamientos y giro calculados para los dos tipos de onda. Además se presentan confrontados a los equivalentes obtenidos por el método de los tres pasos.

Se aprecia que ambas metodologías alcanzan el mismo nivel de exactitud, y sólo en el giro (figura 5.59) y en altas frecuencias, el método de elementos de contorno alcanza valores de máximos y mínimos menores que los del método indirecto.

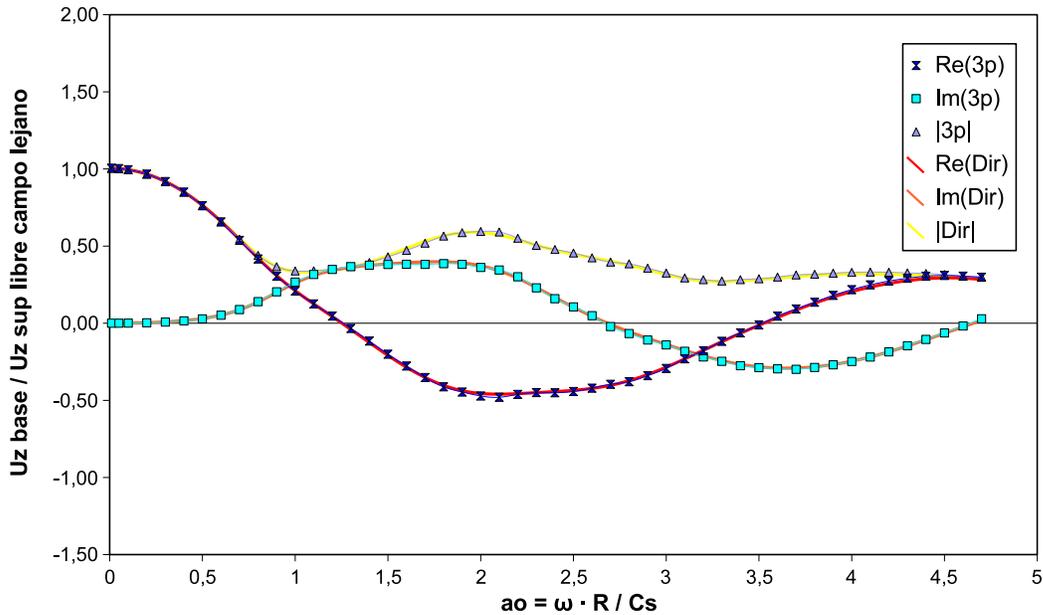


Figura 5.57: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Comparación de Resultados. Onda P

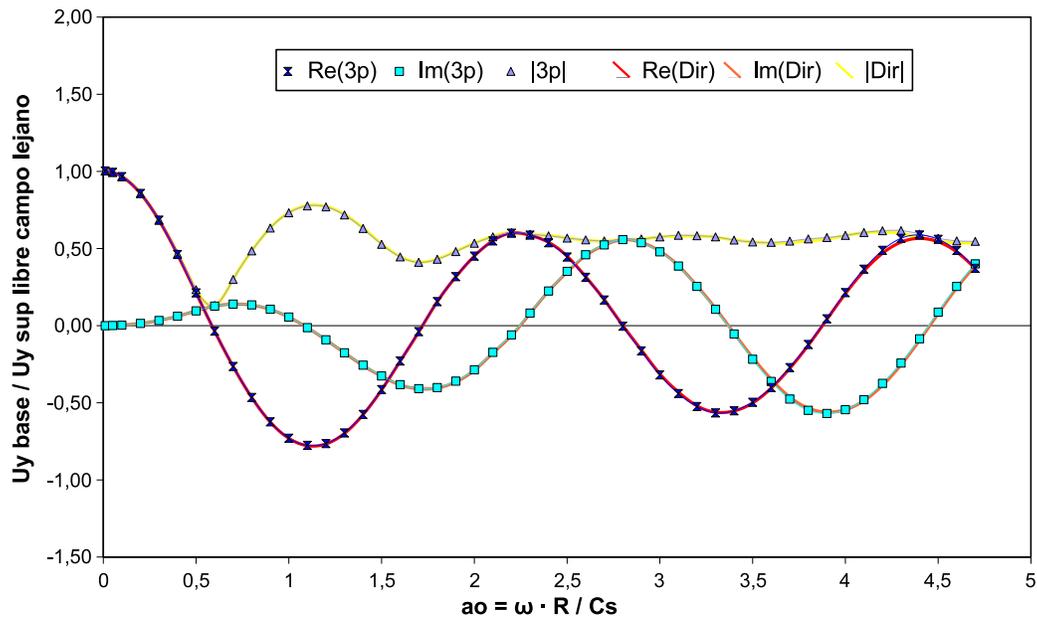


Figura 5.58: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Comparación de Resultados. Onda SH

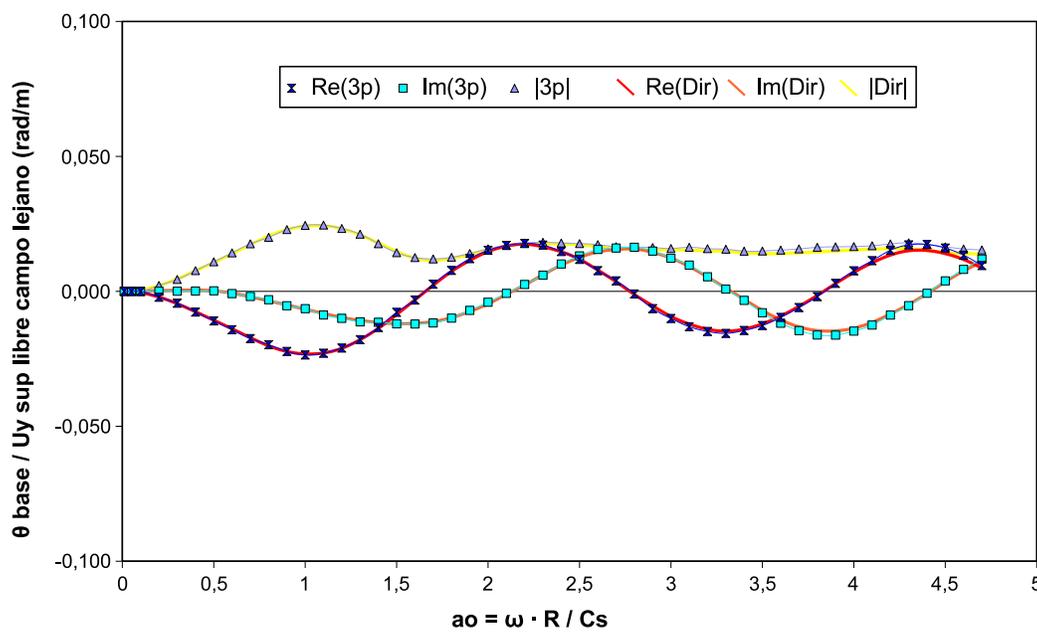


Figura 5.59: Giro de la Base. Comparación de Resultados. Onda SH

**NOTA:**En B.4.1 se pueden encontrar estas gráficas comparando por separado las componentes real, imaginaria y módulo del desplazamiento.

### 5.4.3. Influencia de la estratigrafía

Al igual que se hizo al finalizar el problema III, se puede comparar el problema actual con el modelo II. Ambos poseen exacta configuración geométrica y su única diferencia radica en que el terreno en el que se encuentran soterrados. El primero consiste en un semiespacio, y el segundo de un terreno estratificado. A pesar de que en el problema II no se apreciara con claridad una respuesta característica en su frecuencia natural ( $a_0 = 1.2$ ), en la respuesta vertical de este modelo (figura 5.60) se aprecia un pico en el desplazamiento absoluto en la frecuencia  $a_0 = 2.0$ . Este desplazamiento a frecuencias más altas se debe al aumento de rigidez estática del conjunto del terreno. Los desplazamientos en otras frecuencias son generalmente mayores en el problema estratificado, ya que aunque la rigidez sea levemente superior (lo cual provocaría que los desplazamientos fueran menores) el amortiguamiento dinámico para todas las frecuencias es menor, debido al efecto de encapsulamiento de la energía disipada en los estratos, lo que aumenta la amplitud de la respuesta. Este mismo efecto se puede apreciar en el desplazamiento horizontal (figura 5.61) y en el giro (figura 5.62)

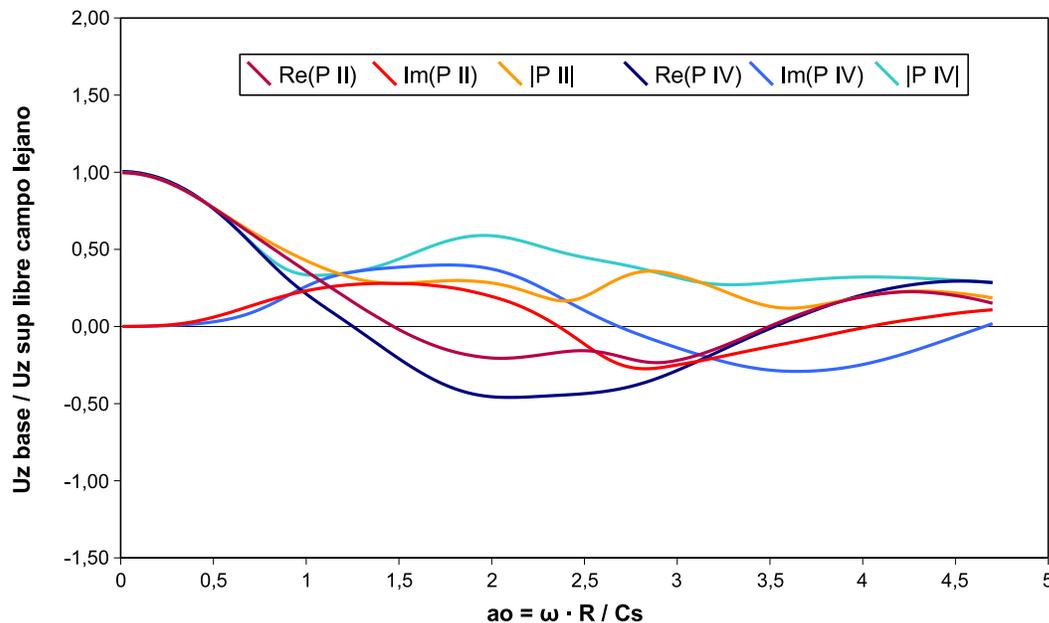


Figura 5.60: Onda P

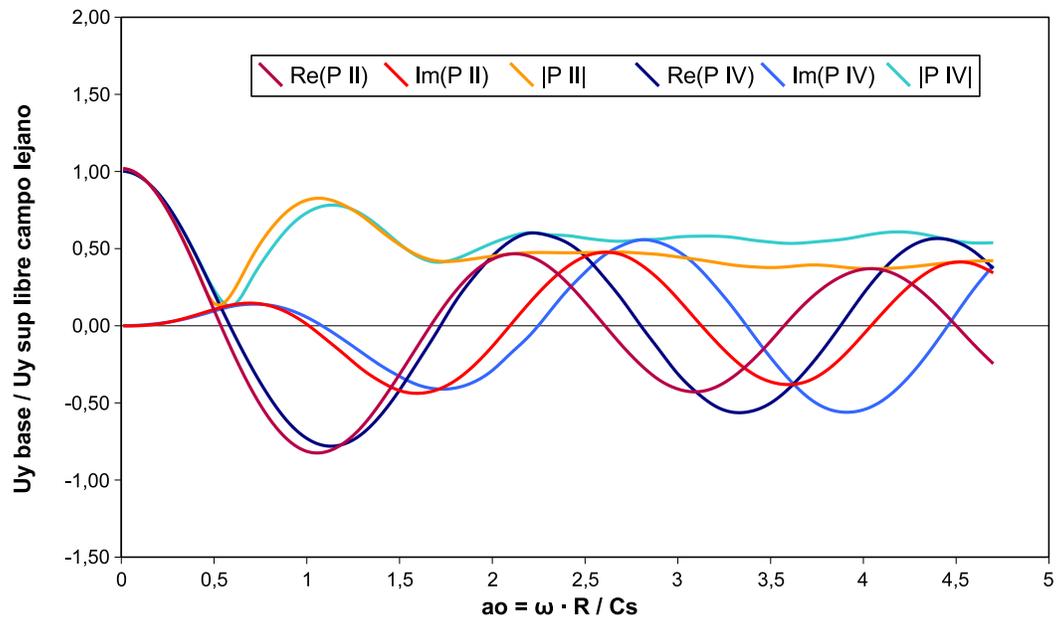


Figura 5.61: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Onda SH

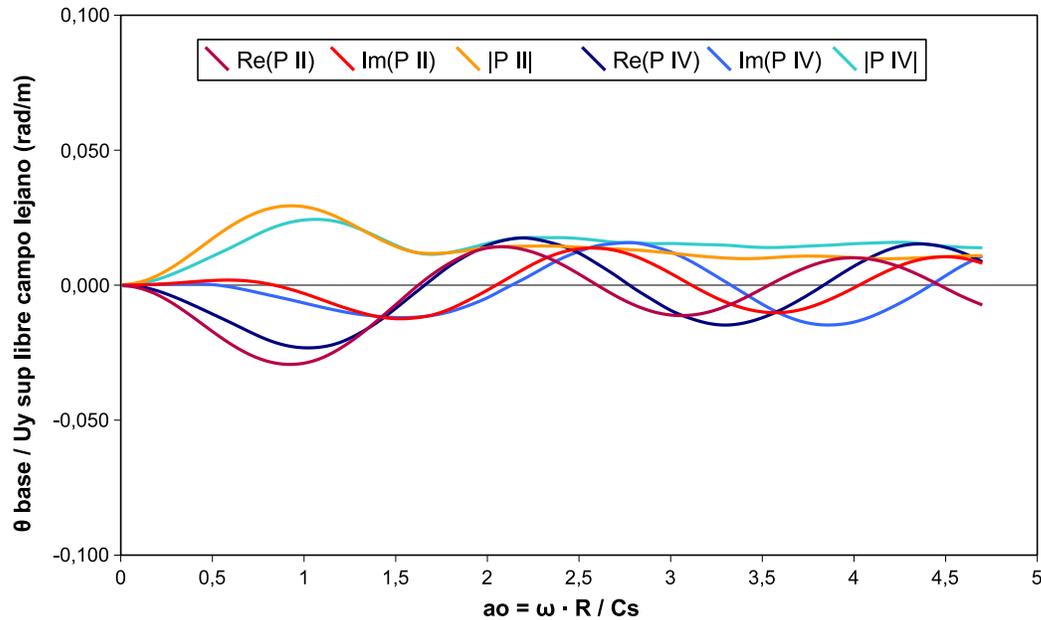


Figura 5.62: Onda SH (Giro)

**NOTA:** En B.4.2 se pueden encontrar estas gráficas comparando por separado las componentes real, imaginaria y módulo del desplazamiento.

## 5.5. PROBLEMA V



En este modelo la geometría de la estructura abandona su forma cilíndrica y se adopta la forma del problema central del estudio, una estructura de 80 metros de alto y 30 de diámetro en su parte inferior, enterrada 50 m en un terreno estratificado. Consta de 5 dominios (2 pertenecientes a la estructura y 3 a los estratos) delimitados por 13 contornos diferentes. La estructura posee la flexibilidad correspondiente a su material, hormigón. se desecha la consideración de rigidez infinita presente en los cuatro primeros problemas. Como objetivo para ambos métodos se toma el cálculo de los desplazamientos en el punto central de la parte inferior de la estructura. Se adimensionalizan con respecto a los desplazamientos en un punto de campo lejano

en la superficie (figura 5.63). En este problema no tiene sentido hablar de giro de la base, ya que al no comportarse como un sólido rígido, no puede calcularse el ángulo mediante la fórmula expresada en la figura 5.1, ya que el giro no es uniforme a lo largo de la sección.

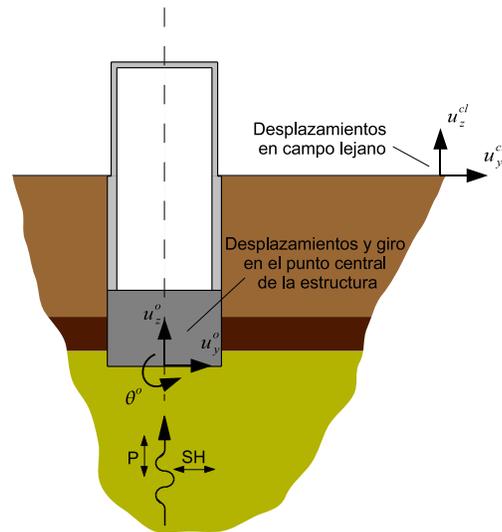


Figura 5.63: Adimensionalización de desplazamientos

### 5.5.1. Método Indirecto

Para establecer un modelo dinámico equivalente, es necesario obtener las rigideces equivalentes y resolver el problema de interacción cinemática en el punto deseado. Pero el modelo obtenido al eliminar la estructura y considerar infinitamente rígidas las zonas de contacto suelo-estructura plantea el mismo esquema que el resuelto en el problema IV. Con lo cual se pueden tomar los mismos valores de solución del problema de interacción cinemática y del cálculo de rigideces equivalentes en el punto central de la base.

En el problema vertical, según el método de los tres pasos, los únicos factores que intervienen en la respuesta para cada frecuencia son la masa, la impedancia y la excitación. Dado que estos son iguales en el problema IV y en el problema V, la respuesta en el *eje z* (figura 5.64) será idéntica en ambos casos, al igual que su interpretación.

La solución del problema horizontal, si difiere del equivalente en el problema IV, ya que también son factores de la respuesta, la inercia de la estructura y la altura del centro de gravedad. La respuesta, que se muestra en la figura 5.65, muestra a frecuencias bajas (cercanas a la frecuencia de resonancia) desplazamientos mayores que en el problema anterior. Esto es provocado porque ahora la inercia en torno al eje correspondiente de la base es mayor, lo que incrementa el efecto de interacción dinámica. A frecuencias más altas también se deja notar disminuyendo levemente los valores máximos de la función. La mayor inercia de la estructura le hace responder de forma más lenta a los cada vez más rápidos desplazamientos de la excitación.

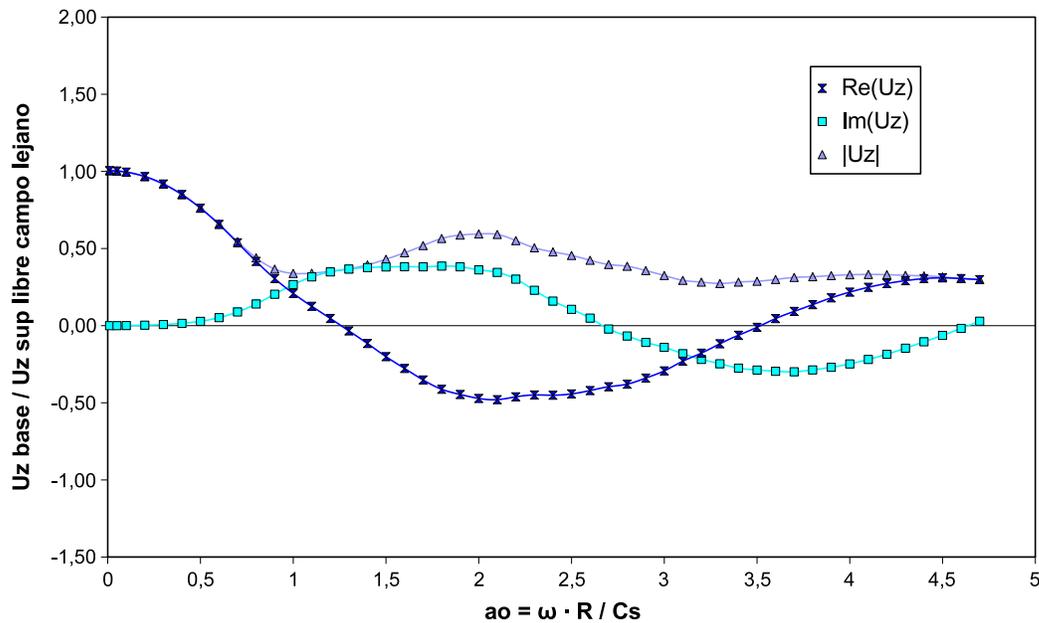


Figura 5.64: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Comparación Resultados. Onda P

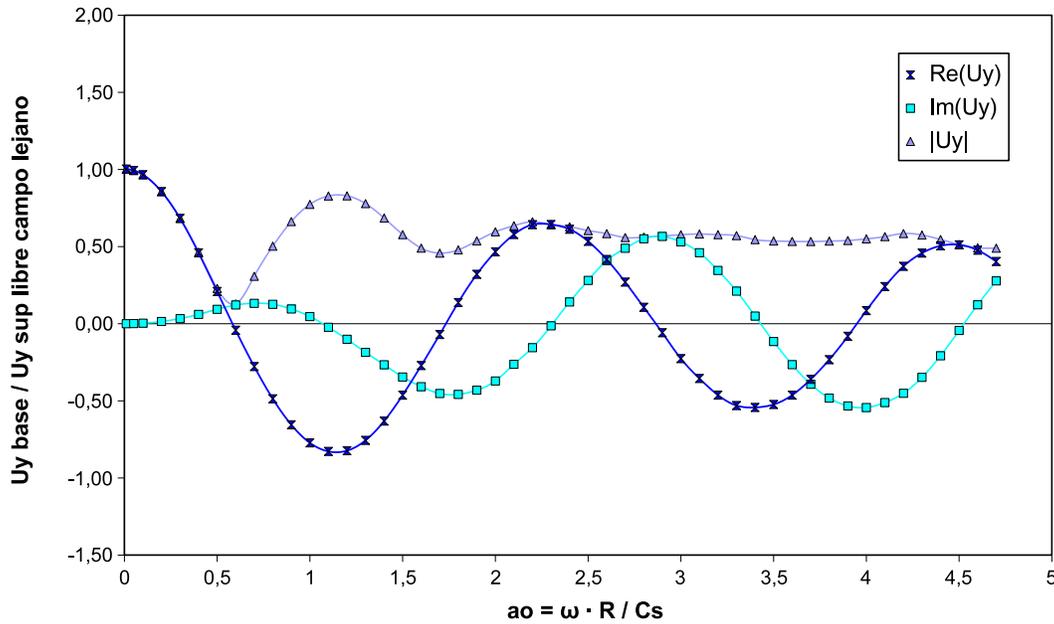


Figura 5.65: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Comparación Resultados. Onda SH

### 5.5.2. Método Directo

En el método de los tres pasos, no se puede incluir el efecto que tiene la rigidez en la respuesta del problema. Sin embargo, en el macrosistema modelado para el método de los elementos de contorno, se tiene en cuenta todas las propiedades de cada dominio. Al resolver el sistema para una sollicitación vertical y representar los desplazamientos en el *eje z* del punto central de la base con los calculados en el método indirecto (figura 5.66), se observa que las diferencias son mucho más notables de lo que cabría de esperar. A bajas frecuencias no se aprecian diferencias por lo que la rigidez carece de influencia. Para valores mayores, la distancia se hace evidente, el modelo que considera la rigidez describe mayores desplazamientos. La respuesta en estas frecuencias depende más de la interacción dinámica y la menor rigidez de la estructura permite deformaciones y por tanto mayores desplazamientos de sus puntos.

Frente a una onda SH, la respuesta del desplazamiento horizontal en el centro de la base (figura 5.66) presenta ciertas singularidades en su comparación con la respuesta del método indirecto. La frecuencia natural se desplaza hacia valores menores

al disminuir la impedancia del sistema. Y en altas frecuencias, los desplazamientos son mayores en el modelo de rigidez infinita. Esto es debido al campo de deformaciones en la estructura, la cuál frente a una onda horizontal ya no se comporta como un sólido rígido, sino que se deforma en función de la resistencia de su entorno.

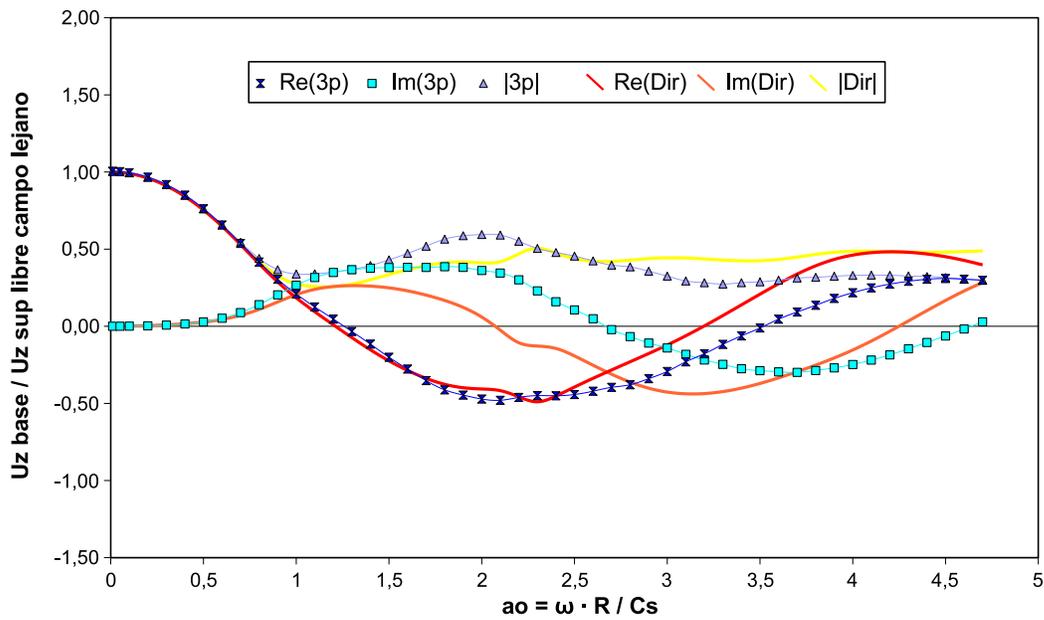


Figura 5.66: Desplazamiento Vertical del punto central de la base. Onda P

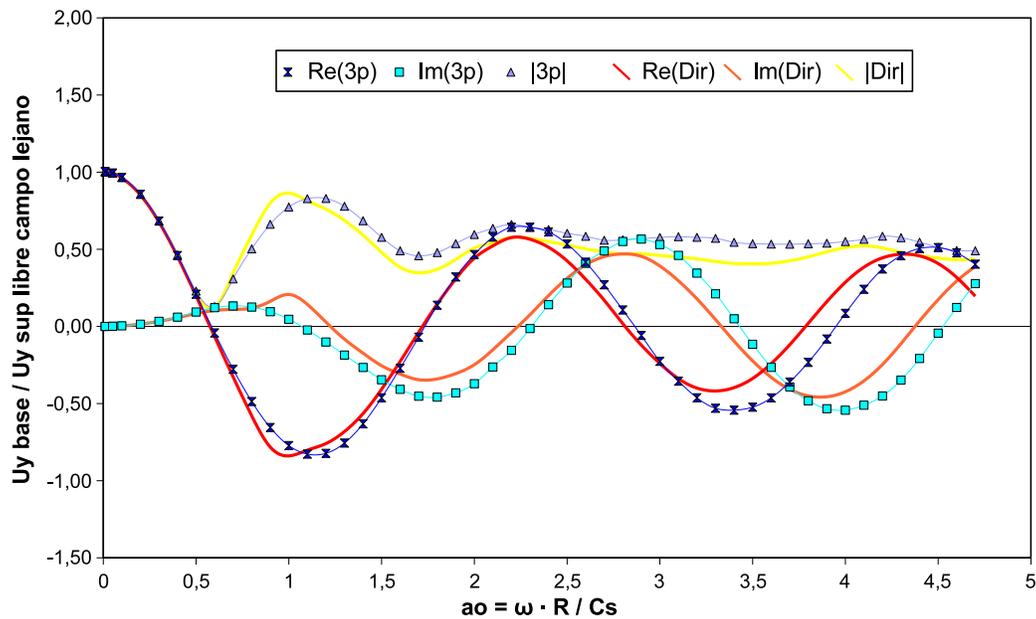


Figura 5.67: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base

**NOTA:** En B.5.1 se pueden encontrar estas gráficas comparando por separado las componentes real, imaginaria y módulo del desplazamiento.

## 5.6. PROBLEMA VI

El modelo utilizado para este problema es el mismo que en el anterior. Sólo difiere en la presencia de una capa de agua de 10 metros de altura, la cual se considera como un medio potencial. La dificultad de acoplar este cuerpo líquido al sistema dinámico equivalente, impide calcular mediante el método indirecto las soluciones correspondientes, así que sólo se muestran los desplazamientos vertical y horizontal del punto central de la base obtenidos por el método directo. Se encuentran adimensionalizados con respecto a un punto de campo libre situado en la parte superior del terreno, por debajo de la cota de la superficie libre del agua (figura 5.68)

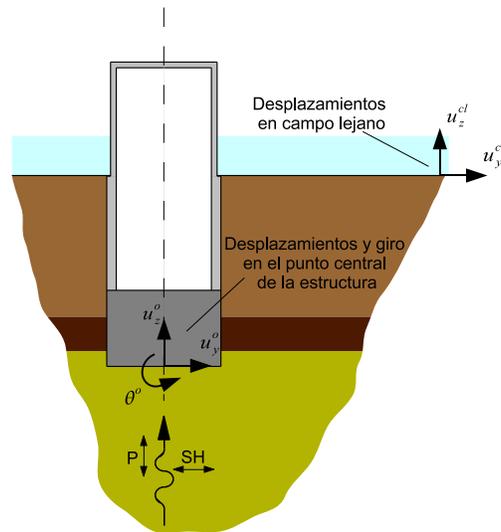


Figura 5.68: Adimensionalización de desplazamientos

Representando la respuesta vertical del punto central de la base (figura 5.69) se observa el mismo comportamiento descrito para estructuras enterradas. Los máximos de las curvas pueden desplazarse ligeramente hacia frecuencias más bajas, debido al incremento de la masa del sistema. Se puede considerar como un sistema de dos masas (el conjunto suelo-estructura por un lado, y el agua por el otro).

Observando el desplazamiento producido por el problema horizontal 5.70, se puede decir que el comportamiento no se ve demasiado alterado por la presencia del agua.

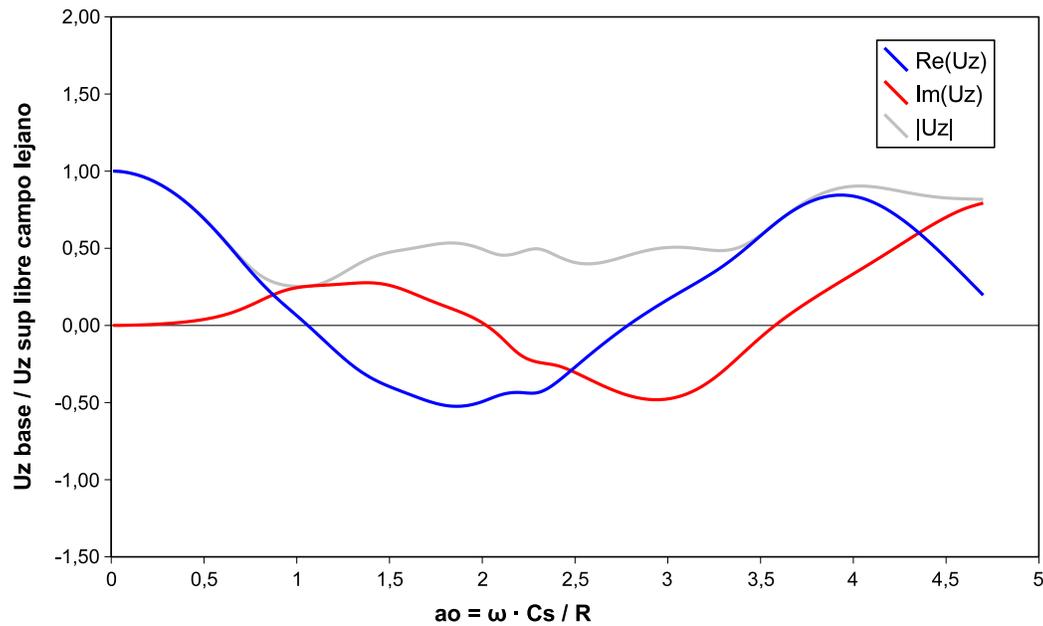


Figura 5.69: Desplazamiento Vertical en el centro de la base. Onda P

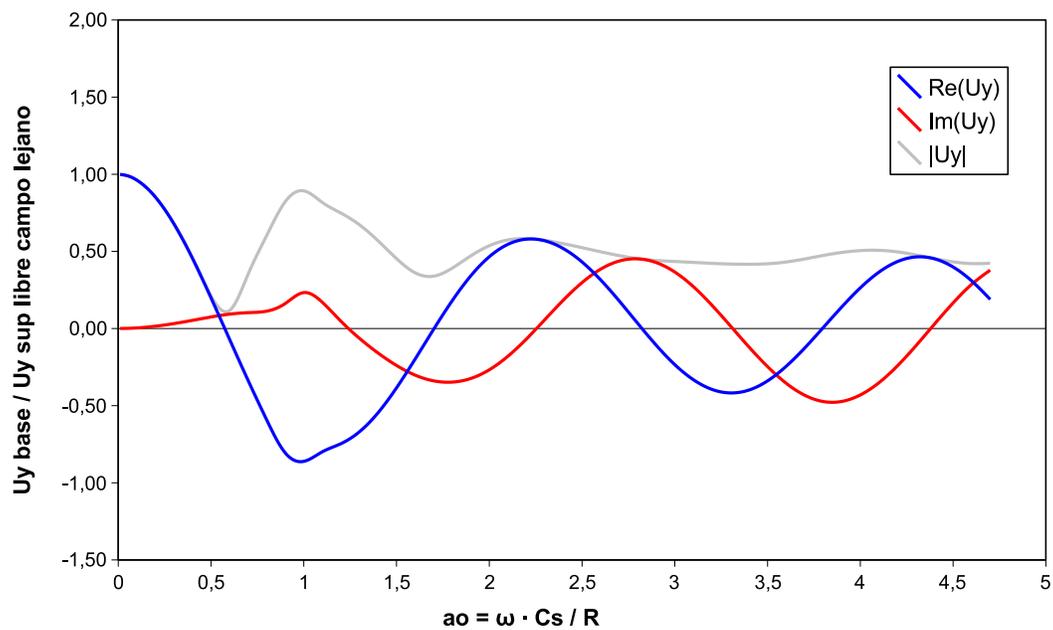


Figura 5.70: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Onda SH

### 5.6.1. Influencia de el agua

Para poder evaluar correctamente la influencia del agua, lo más eficiente es representar los valores de ambos problemas V y VI frente a frente.

En el problema vertical (figura 5.71), se aprecian como se dijo grandes diferencias sobretodo en frecuencias altas. Para frecuencias bajas la diferencia radica en el adelanto de la respuesta debido al incremento de la masa. Pero aparece una segunda frecuencia natural que rompe con la tendencia del valor absoluto a estabilizarse, debido posiblemente a que ambas masas, agua y estructura se desplazan al sincrónicamente incrementando las fuerzas inerciales del conjunto.

Para el desplazamiento horizontal (figura 5.72), las diferencias son casi nulas. Esto es debido en mayor parte a que la onda incidente del tipo SH se transmite por cortante, esfuerzo que el agua no es capaz de soportar, y por lo tanto es incapaz de transmitir, por lo que no ejerce ninguna influencia en la respuesta.

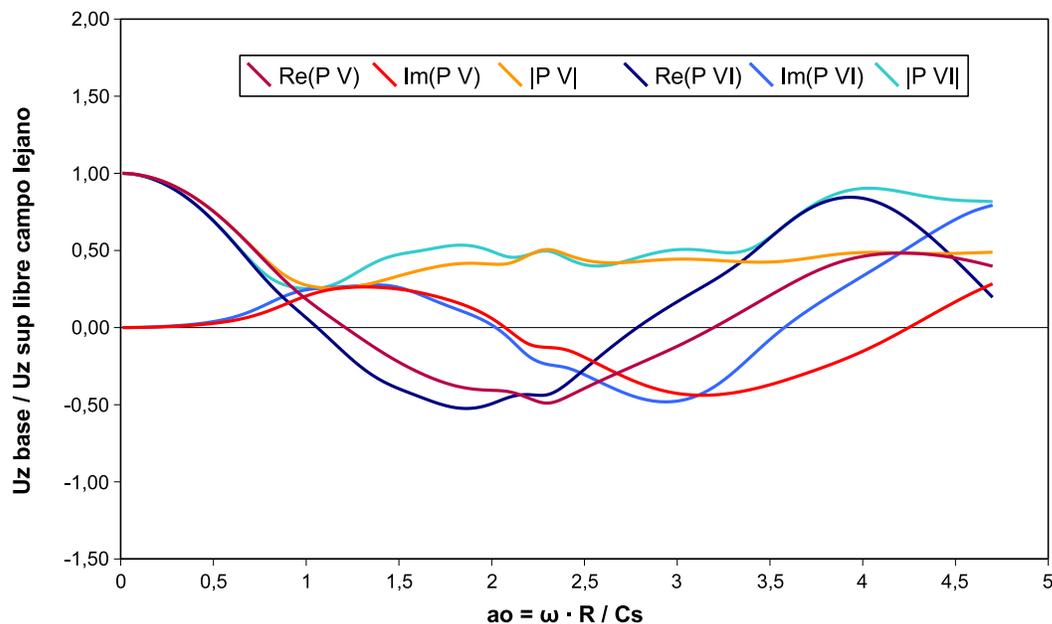


Figura 5.71: Desplazamiento Vertical en el centro de la base. Onda P

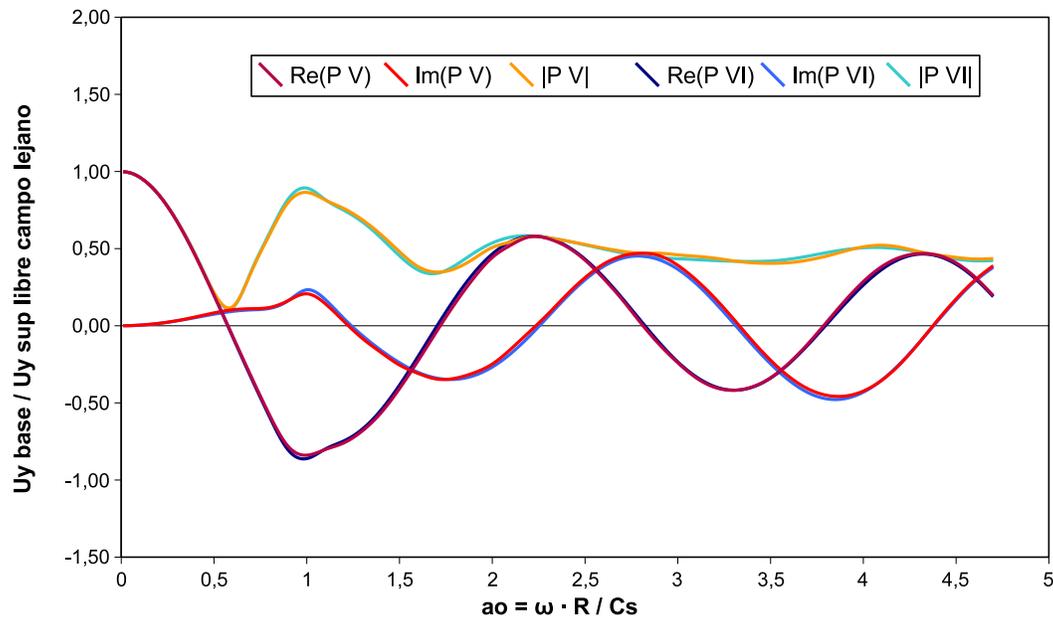


Figura 5.72: Desplazamiento Horizontal en el centro de la base. Onda SH

**NOTA:**En B.6.1 se pueden encontrar estas gráficas comparando por separado las componentes real, imaginaria y módulo del desplazamiento.



Capítulo 6

# Revisión, Conclusiones y Desarrollos Futuros

---



En este PFC se aborda un estudio comparativo entre las dos metodologías habituales en el cálculo sísmico de una estructura. La estructura utilizada en el análisis es una construcción enterrada que puede corresponderse con la configuración de un silo, el pozo de bombeo de una central hidroeléctrica o el caso de un reactor nuclear. Ésta se encuentra embebida en un terreno estratificado cuyo perfil es perfectamente conocido y es dato del problema. Se ha abordado el estudio de la respuesta sísmica de esta estructura ante trenes de ondas sísmicas planas P y S que se propagan verticalmente y que inciden en la zona de localización de la construcción. El problema es analizado en el dominio de la frecuencia y, como se ha comentado al principio, se aborda comparativamente desde dos estrategias diferenciadas: por un lado se afronta el problema considerando el modelo conjunto suelo-estructura, con interacción rigurosa entre ambos medios, sometido a los trenes de ondas indicados. Este planteamiento es conocido como Método Directo y es totalmente riguroso pero su principal inconveniente es el alto número de grados de libertad necesarios. Por otra parte se analiza el problema haciendo uso de una metodología indirecta, cuyo planteamiento supone abordar el problema desde tres fases sucesivas. Este método indirecto (Método de los Tres Pasos), en primer lugar analiza en que medida la presencia de la estructura modifica el campo incidente, este efecto es conocido como interacción cinemática. En una segunda fase se resuelve numéricamente la obtención de las impedancias (amortiguamiento+rigidez) del terreno. En el tercer y último paso se estudia la estructura unida a un bastidor mediante los resortes y amortiguadores obtenidos del paso segundo, y sometida a la sollicitación correspondiente al movimiento de dicho bastidor de acuerdo al campo incidente modificado obtenido del primer paso. En nuestro problema, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de la estructura en esta tercera fase son las correspondientes a un sistema dinámico de dos grados de libertad a lo sumo. Esta metodología indirecta supone, como se ha visto en los resultados presentados, ciertas simplificaciones del problema si bien su aplicación conduce a un modelo de menor número de grados de libertad.

Tanto el método directo como la primera y segunda fase del método indirecto se tratan numéricamente haciendo uso del Método de los Elementos de Contorno. El software utilizado para resolver estos problemas ha sido desarrollado en la división de Mecánica de los Medios Continuos Y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería. Este software permite el análisis de modelos en los que existen medios de diferente naturaleza que interac-

túan entre sí. En el problema tratado tanto la estructura como los estratos del suelo se consideran sólidos viscoelásticos. La estructura se encuentra también en contacto con una lámina de agua que es considerada como un fluido no viscoso compresible.

Se han obtenido resultados desde ambas metodologías para el problema descrito. Asimismo se ha realizado un estudio paramétrico de los diferentes factores que influyen en la respuesta del sistema, para ello el problema original se ha resuelto a partir de cuatro modelos previos en un índice creciente de complejidad. Esta forma de enfocar este estudio paramétrico es también una aportación interesante del proyecto. Con el estudio de estos problemas se ha analizado la influencia de factores como: la inercia de la estructura, la interacción cinemática, el enterramiento, la estratigrafía, la rigidez de la estructura y la presencia o no de una lámina de agua superficial. Las conclusiones aportadas por estas soluciones, se han ido desgranando a lo largo de los diferentes modelos. La elección de la estructura analizada no es casual, ya que en estructuras enterradas el efecto sobre la respuesta dinámica de los factores analizados es determinante y no se presenta en estructuras convencionales cimentadas a nivel de la superficie (o con un escaso grado de enterramiento). Es por tanto necesario que la metodología utilizada permita simular correctamente el efecto del enterramiento de la interacción cinemática, del perfil del terreno en el análisis del problema.

Por otra parte desde el punto de vista de la comparación del método directo y de la metodología indirecta cabe decir que esta última, comúnmente utilizada en la mayor parte de los análisis dinámicos llevados a cabo en la práctica, es perfectamente adecuada para estructuras con un alto grado de rigidez. Si la estructura es flexible, la metodología directa se hace necesaria. En el caso que ha sido estudiado este efecto se hace especialmente apreciable para el caso de ondas P.

Si bien se trata de un trabajo con un objetivo y un alcance muy concretos, los cuales se han completado muy satisfactoriamente, pueden plantearse desarrollos futuros de este trabajo: en el sentido de utilizar las funciones de transferencia obtenidas en el dominio de la frecuencia para obtener resultados en el dominio del tiempo a partir de un acelerograma dado usando la FFT; o bien plantear la obtención de espectros de respuesta máxima que permitan un análisis de la estructura de acuerdo a metodologías convencionales.





Apéndice A

## Mejora de las Mallas

---



Al obtener las soluciones de los tres primeros modelos, que consistían en un cilindro apoyado sobre un terreno, estratificado y sin estratificar; y un cilindro enterrado en un semiespacio, se observó que las mallas utilizadas daban resultados bastante buenos. Es decir, las funciones de transferencia se representaban como curvas suaves y de tendencia marcada. Sin embargo, al someter a una excitación de tipo P a los modelos IV y V se obtenía como respuesta una función irregular, en la figura A.1 se muestra la respuesta del centro de la tapa inferior del cilindro en el problema IV.

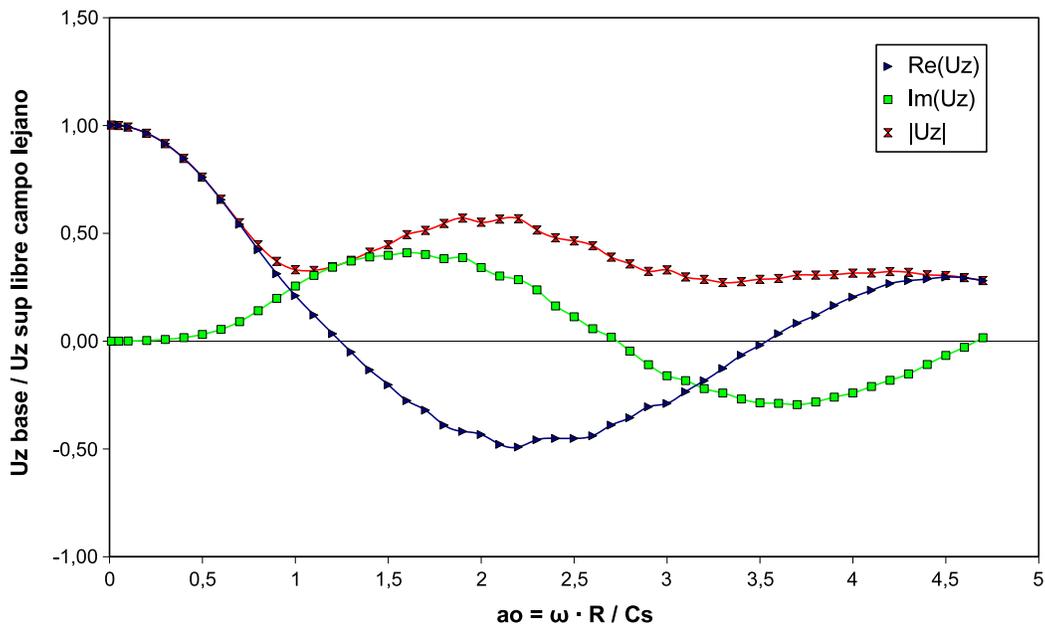


Figura A.1: Resultados malla original

Se observa que entre las frecuencias adimensionales 1,5 y 3,5 aparece un rizado en la respuesta, esta irregularidad es debido con toda probabilidad a la configuración de la malla utilizada. Para eliminar estos problemas numéricos, se desarrolló un proceso de rediseño de la malla, a fin de discernir cual sería la configuración que permitiese solventar estos inconvenientes.

Como paso inicial se opta por una malla de igual superficie libre discretizada (500 m.) pero de menor número de grados de libertad, es decir, una malla con menor número de elementos. Dado que la inclusión excesiva de incógnitas pueden generar problemas en la resolución del sistema.

Esta solución adoptada como se muestra en la figura A.2 no sólo no eliminó las

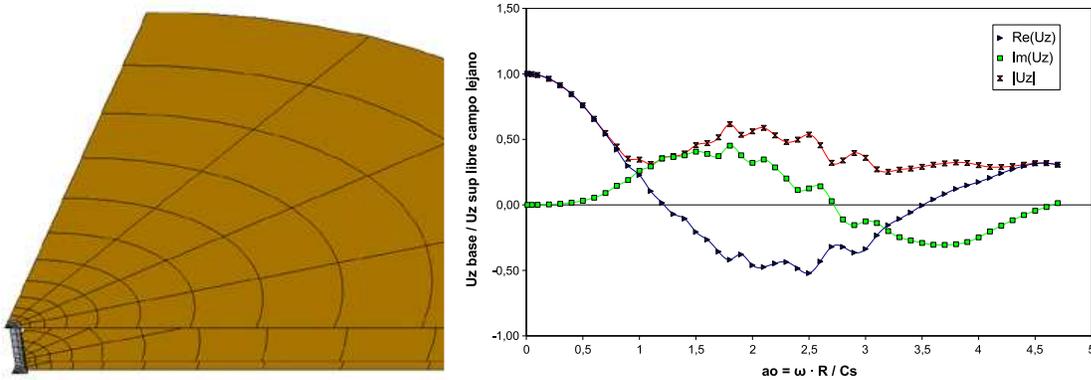


Figura A.2: Resultados Malla 2

perturbaciones en la gráfica original sino que amplió el rango de frecuencias en el que aparecían y las amplitudes de los picos.

Se trata con la siguiente malla de comprobar si una discretización más densa de la estructura mejoraría el cálculo de la respuesta. Por lo que se mantiene la misma superficie libre discretizada.

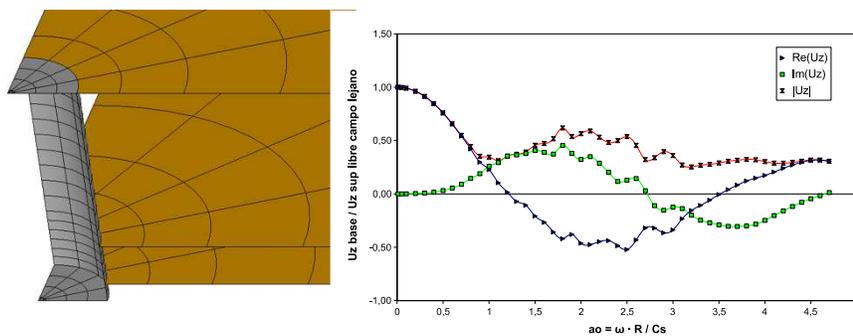


Figura A.3: Resultados Malla 3

Se obtuvo como resultado una gráfica idéntica a la anterior (Figura A.3). Por lo que se demostró que el número de divisiones a lo largo del eje vertical del cilindro no influyen en la respuesta, siempre y cuando las medidas de cada elemento se mantenga en unos ratios de proporción adecuados.

Posteriormente, se malló una superficie libre algo más corta (unas 6 veces la profundidad del pozo excavado) y de gran número de elementos

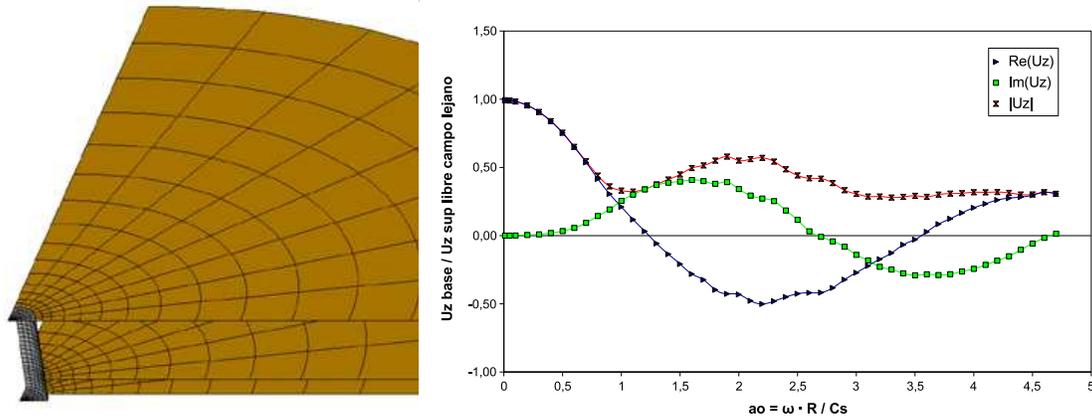


Figura A.4: Resultados Malla 4

La solución (Figura A.4) mejoró en gran cuantía con respecto a la malla planteada con anterioridad, aunque en su comparación con la original, se observa que si bien se reduce algo el rango de frecuencias en las que aparece, la amplitud de las interferencias son del mismo orden

Dados los últimos resultados, se opta por simplificar la malla del cilindro, reducir la superficie libre discretizada hasta el doble del pozo excavado (100m), y aunque no se aumenta el número de elementos en comparación con la anterior, si se incrementa la densidad. Es decir, existen casi el mismo número de elementos en menor superficie.

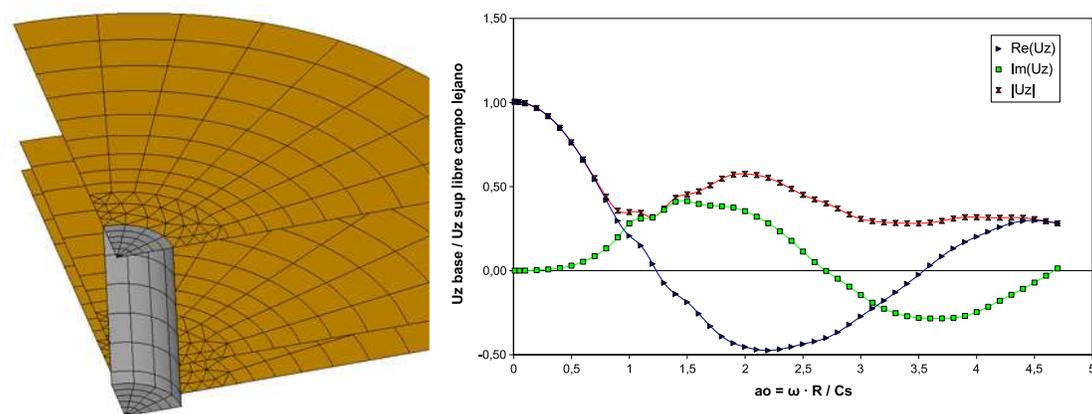


Figura A.5: Resultados Malla 5

La gráfica (Figura A.5) si bien dista aún de ser la óptima, suaviza la respuesta y disminuye el rango donde aparece el rizado y lo traslada hacia frecuencias más bajas.

Por último se continua con la tendencia de la última malla, y se acorta aún más la superficie libre, hasta igualarla con la profundidad de la excavación, y se incrementa aún más la densidad de elementos en los mismos.

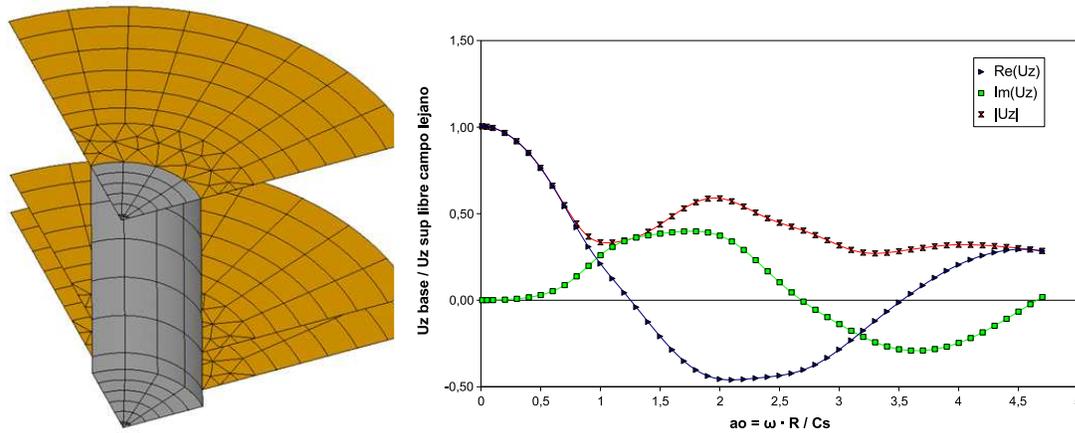


Figura A.6: Resultados Malla Definitiva

Ahora, con una malla de menor número de grados de libertad que la original, obtenemos una solución de mayor calidad. Una función de transferencia sin rizado alguno y en concordancia con el resto de resultados obtenidos

Por último se muestra en la figura A.7 una comparación centrada en un rango de frecuencias adimensional entre 1,5 y 3 y unas amplitudes de -0.25 y -0.55. Esto permite observar con detalle las pequeñas diferencias en la parte real de la respuesta para las diferentes mallas

En donde la malla 1 es la original y la malla 6 la que se tomó como definitiva. El orden impuesto es el mismo en el que se han descrito anteriormente.

Una vez definida la configuración de la malla, es pertinente comprobar que la nueva disposición es también válida para los problemas anteriores. Por tanto se volvieron a calcular los problemas I y II con unos parámetros de discretización idénticos a los definidos en la malla resultante de esta evolución (superficie libre discretizada de 50 m e idénticas divisiones en la superficie del cilindro). En las figuras A.8 y A.9 se muestran los resultados de ambos problemas, y se comprueba que la nueva discretización también es adecuada para los primeros modelos.

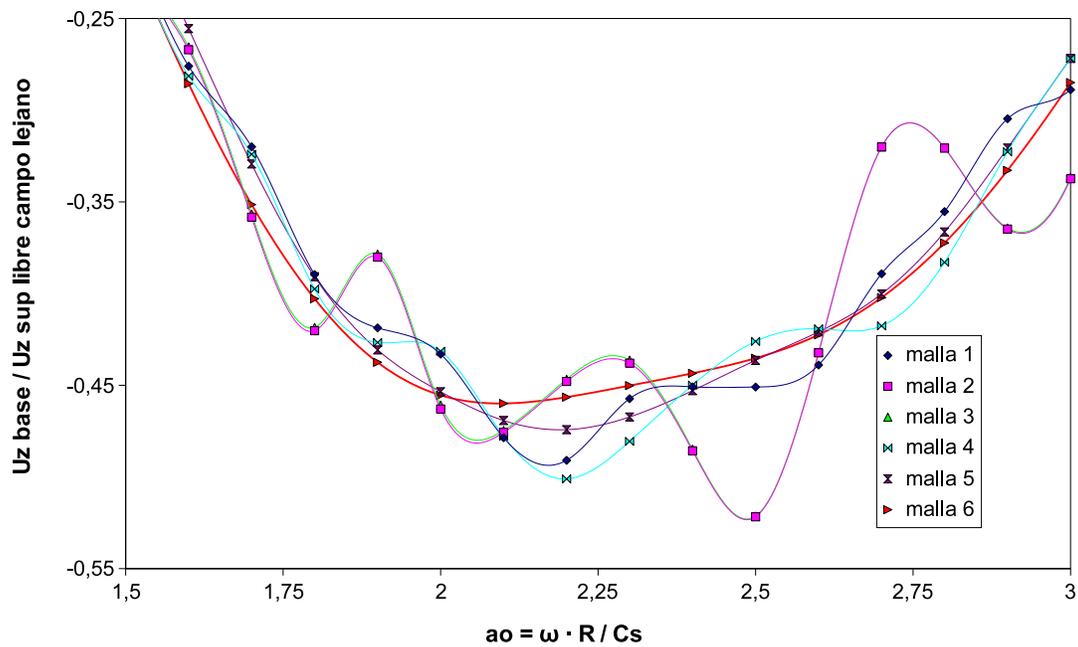


Figura A.7: Comparación Mallas

En base a esto también se modificó la malla del problema V, para la cual se conserva la discretización de la estructura explicada en el apartado 4.5 y para el terreno se utiliza la configuración determinada como óptima en este proceso. Quedando definitivamente tal cual se muestra en la figura A.10

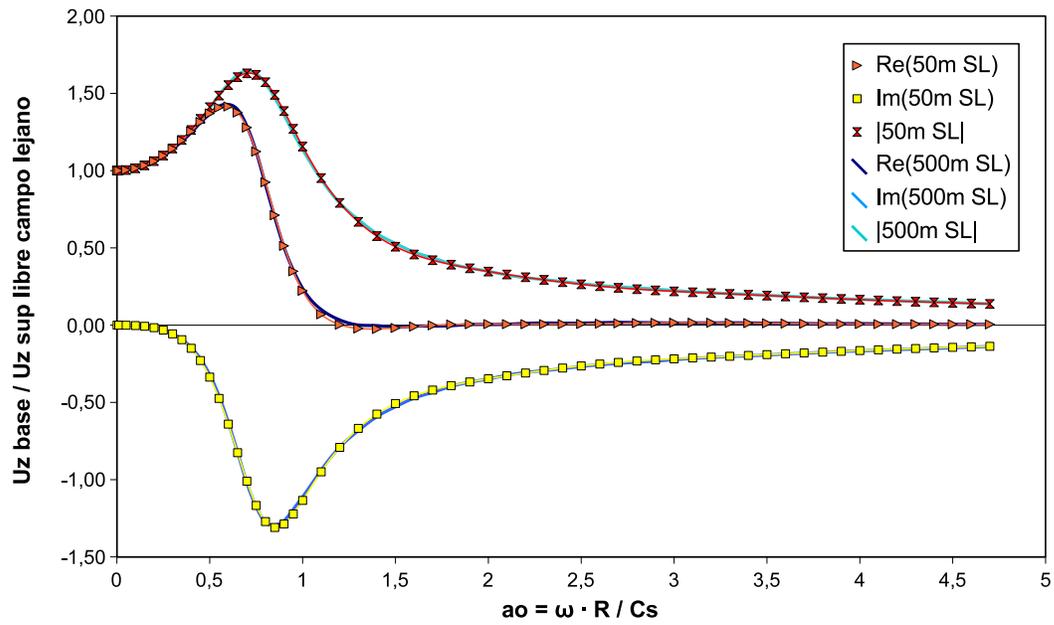


Figura A.8: Comparación mallas Problema I

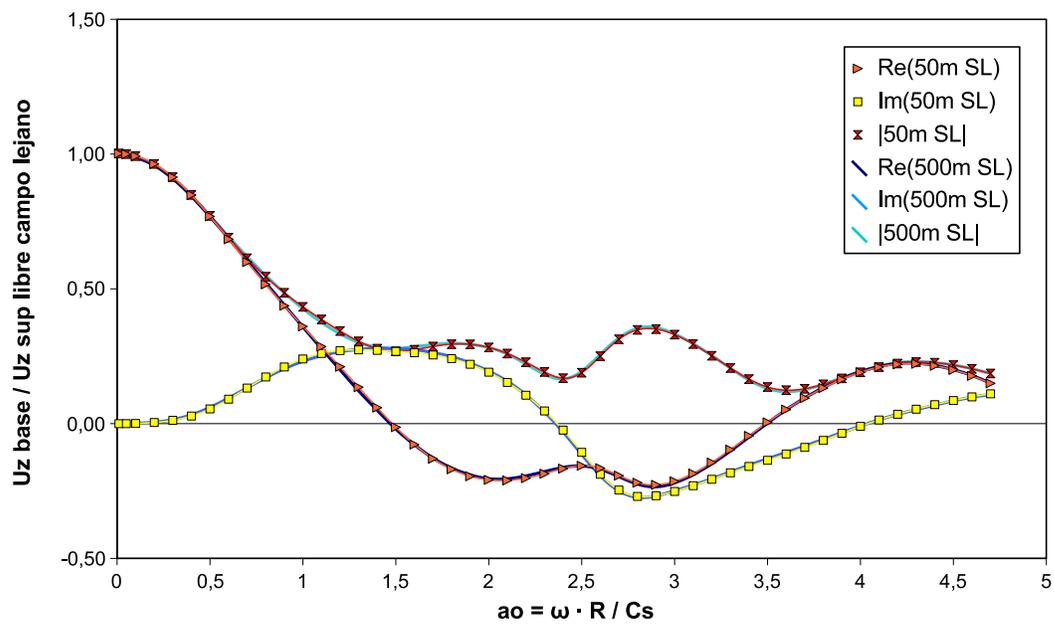


Figura A.9: Comparación Mallas Problema II

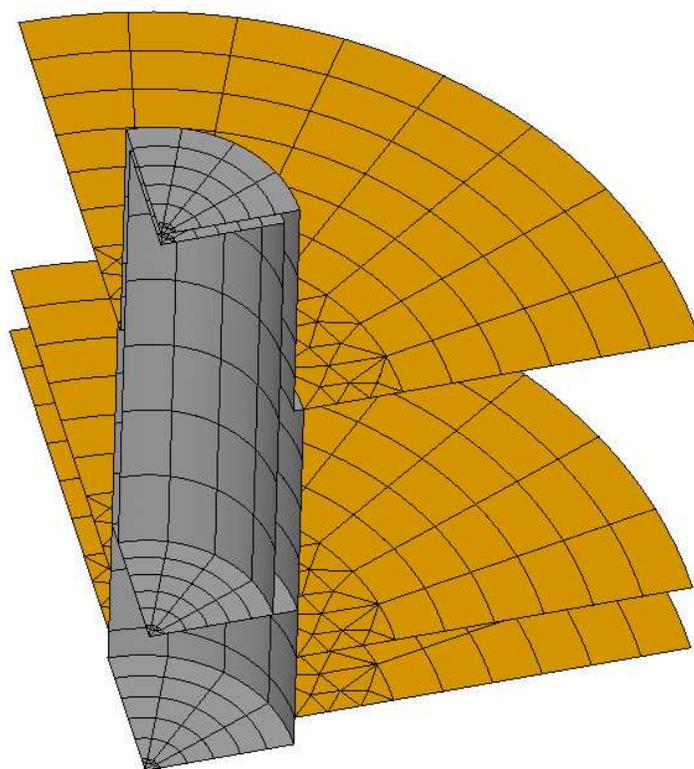


Figura A.10: Malla mejorada Problema V



Apéndice B

Gráficas

---

## INTRODUCCIÓN

En este apéndice se recopilan las gráficas de comparaciones entre método indirecto y método directo y entre problemas que aparecen en el capítulo 5, separadas en parte real, parte imaginaria y módulo.

## B.1. PROBLEMA I

### B.1.1. Comparación Método Directo y Método Indirecto

#### Onda P. Desplazamiento Vertical

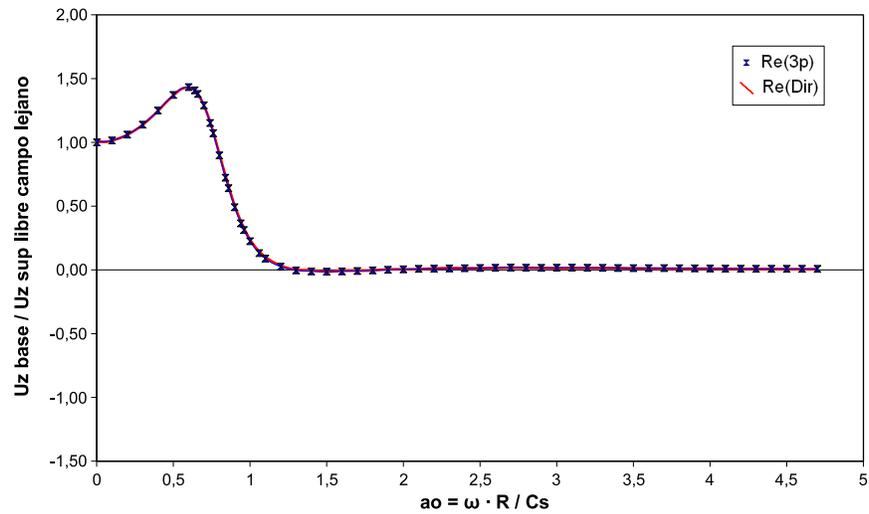


Figura B.1: Comparación Directo-Indirecto Problema I  $U_z$  (parte real)

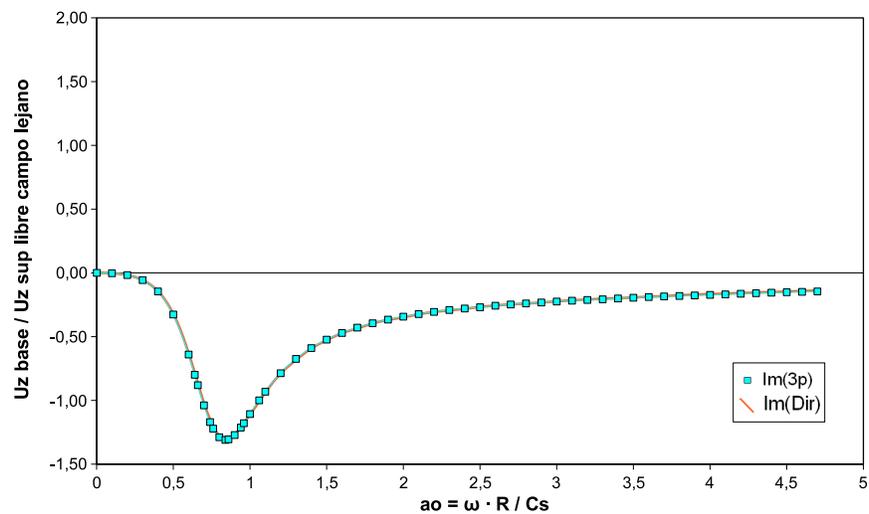


Figura B.2: Comparación Directo-Indirecto Problema I  $U_z$  (parte imaginaria)

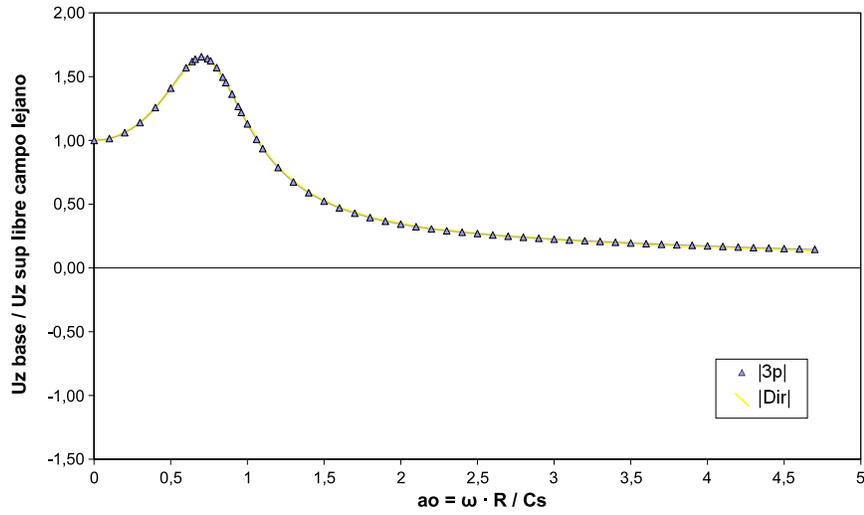


Figura B.3: Comparación Directo-Indirecto Problema I  $U_z$ (módulo)

### Onda SH. Desplazamiento Horizontal

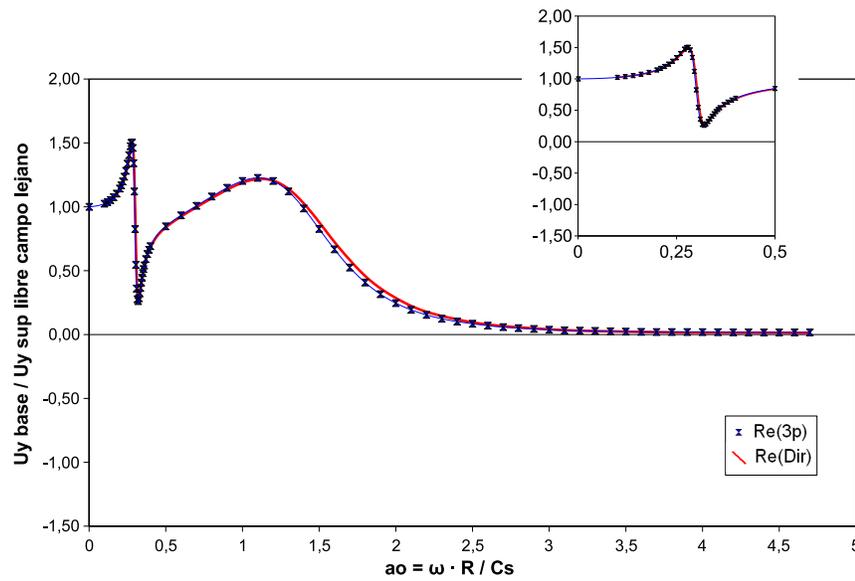
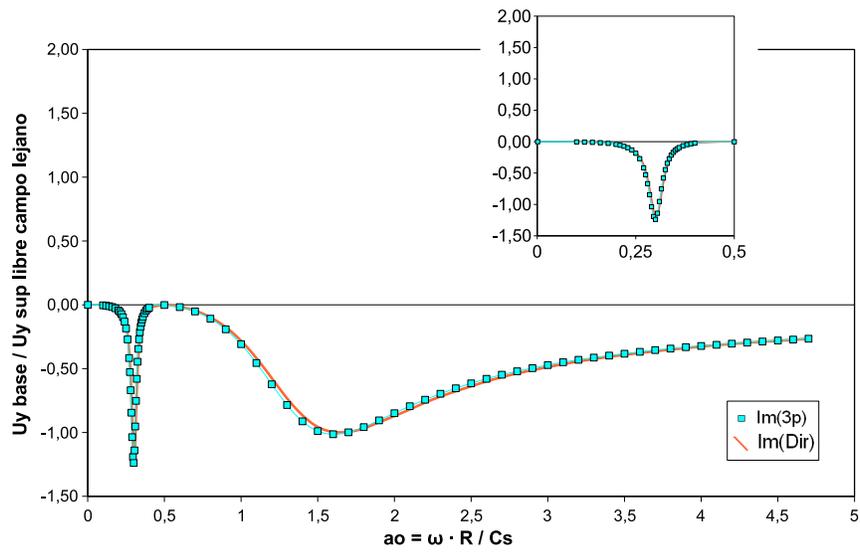
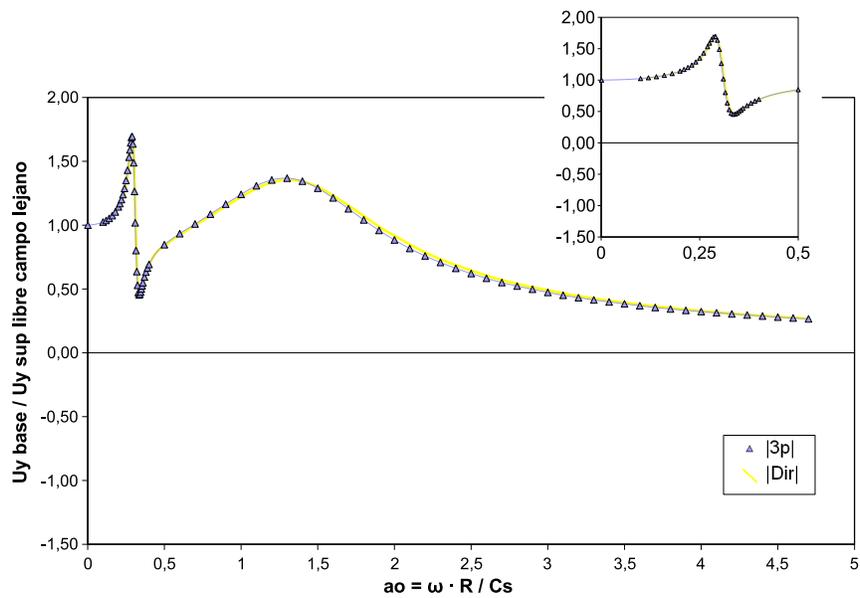
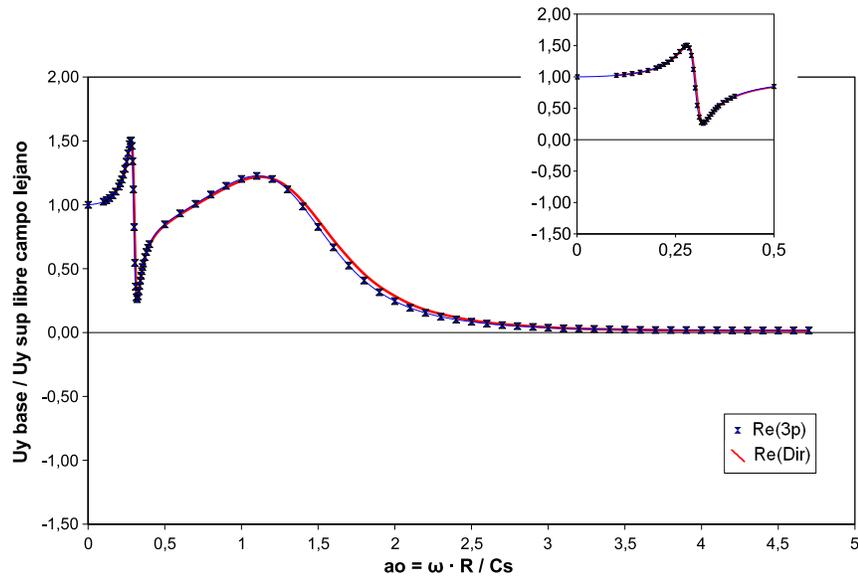
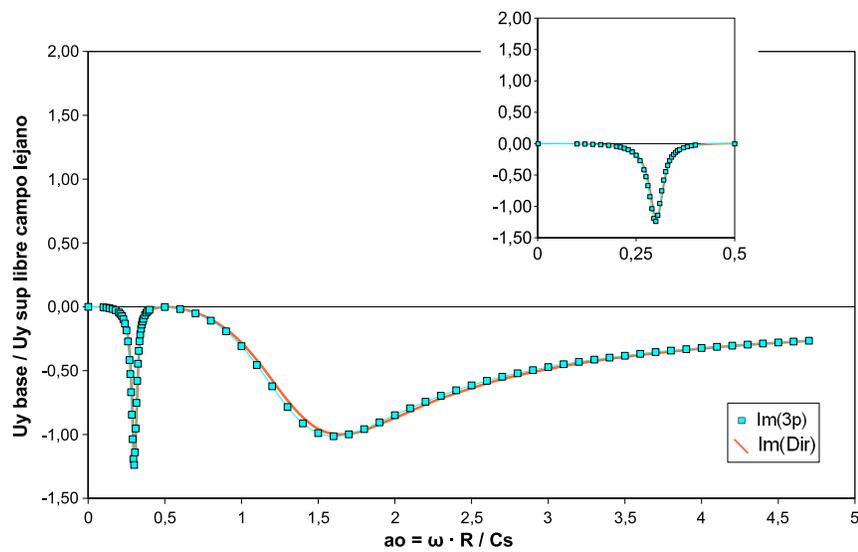


Figura B.4: Comparación Directo-Indirecto Problema I  $U_y$ (parte real)

Figura B.5: Comparación Directo-Indirecto Problema I  $U_y$ (parte imaginaria)Figura B.6: Comparación Directo-Indirecto Problema I  $U_y$ (módulo)

## Onda SH. Giro

Figura B.7: Comparación Directo-Indirecto Problema I *Giro*(parte real)Figura B.8: Comparación Directo-Indirecto Problema I *Giro*(parte imaginaria)

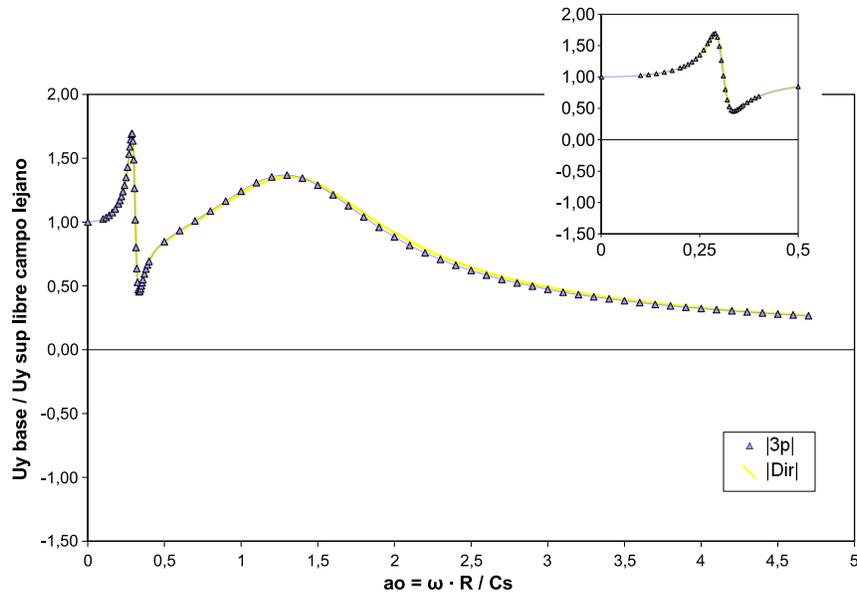


Figura B.9: Comparación Directo-Indirecto Problema I *Giro*(módulo)

## B.2. PROBLEMA II

### B.2.1. Comparación Método Directo y Método Indirecto

#### Onda P. Desplazamiento Vertical

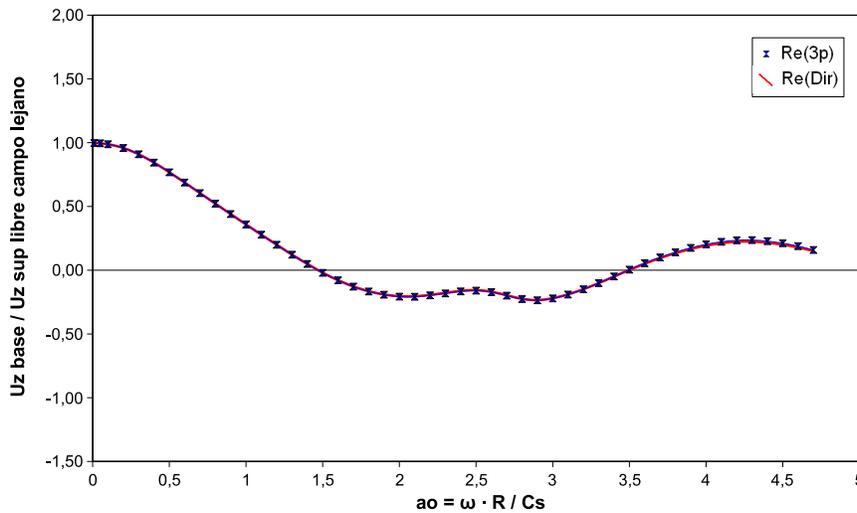


Figura B.10: Comparación Directo-Indirecto Problema II  $U_z$ (parte real)

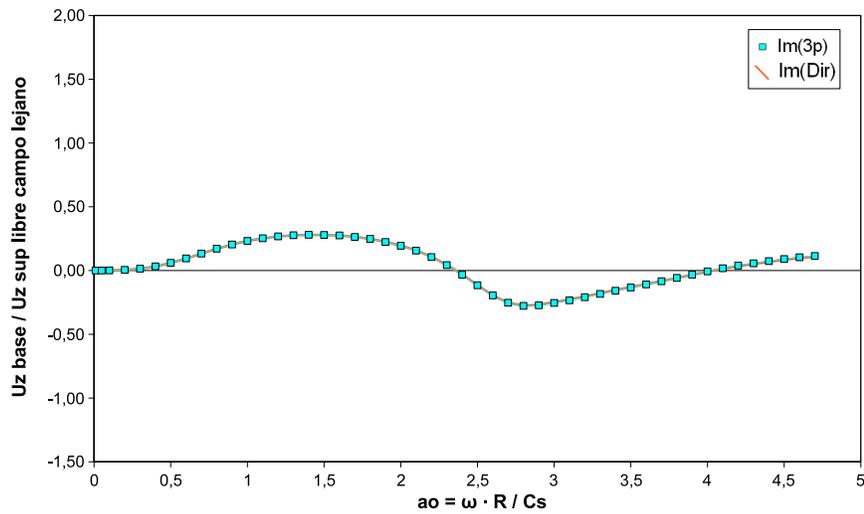


Figura B.11: Comparación Directo-Indirecto Problema II  $U_z$  (parte imaginaria)

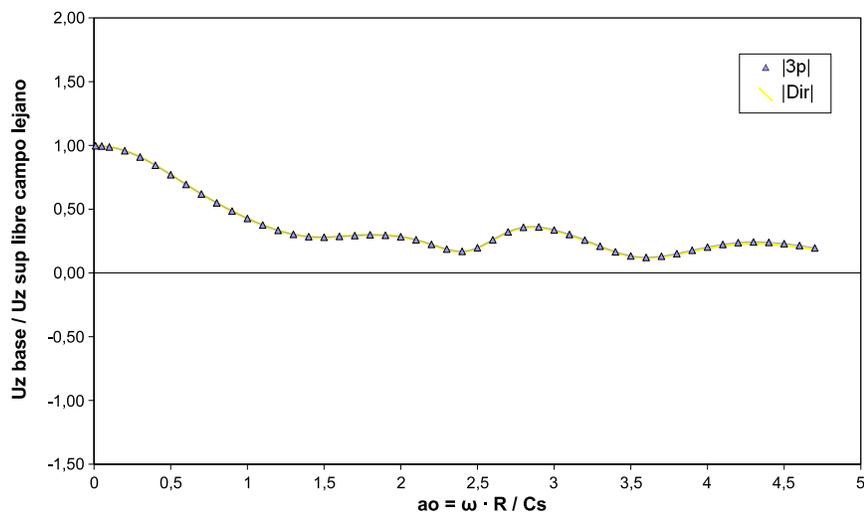
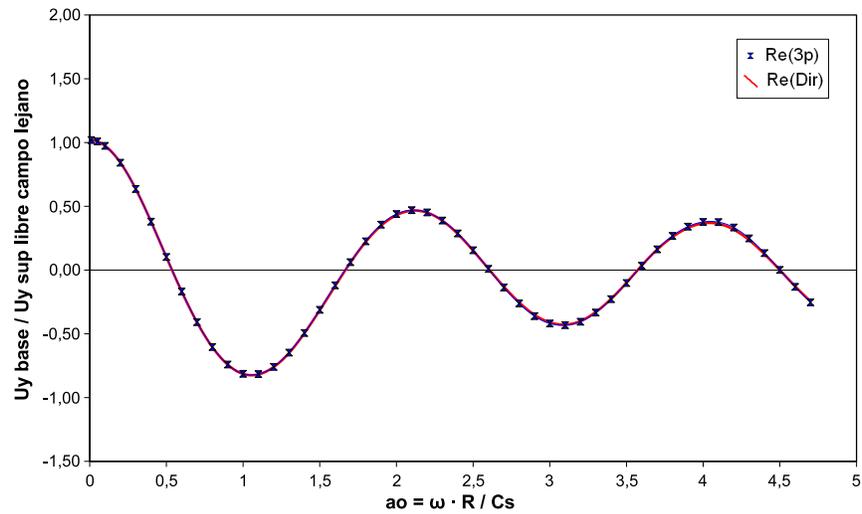
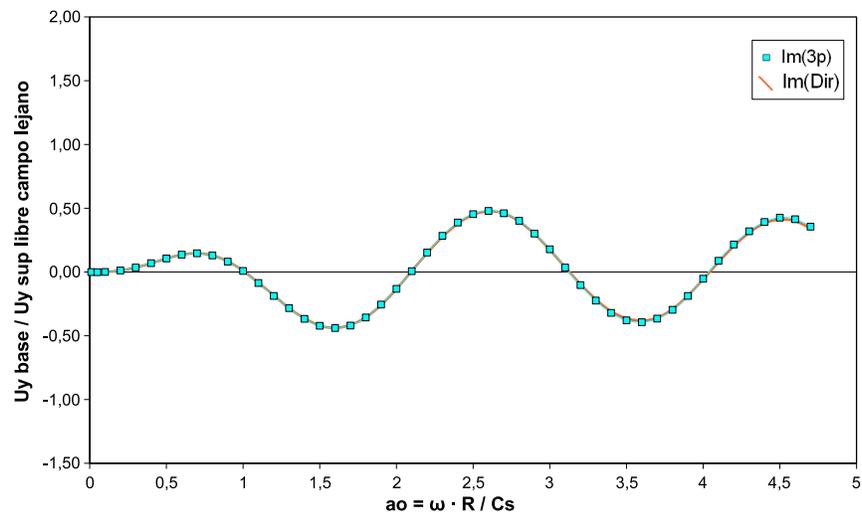


Figura B.12: Comparación Directo-Indirecto Problema II  $U_z$  (módulo)

## Onda SH. Desplazamiento Horizontal

Figura B.13: Comparación Directo-Indirecto Problema II  $U_y$  (parte real)Figura B.14: Comparación Directo-Indirecto Problema II  $U_y$  (parte imaginaria)

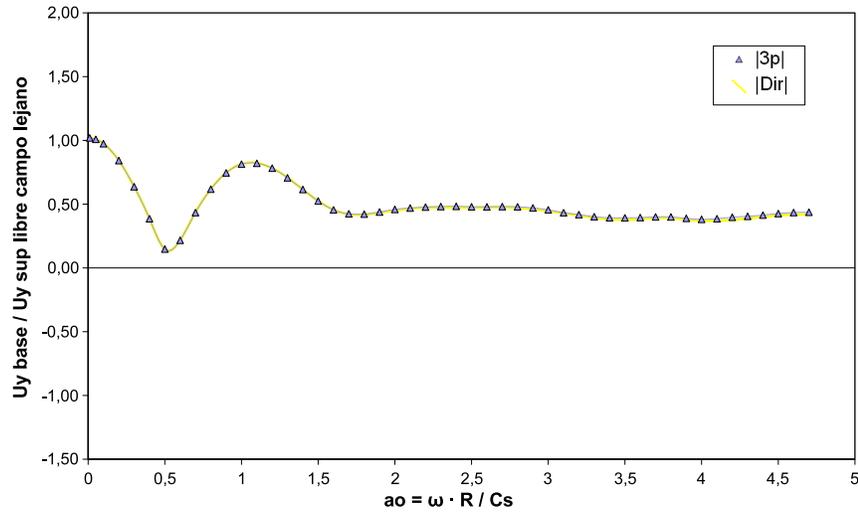


Figura B.15: Comparación Directo-Indirecto Problema II  $U_y$ (módulo)

### Onda SH. Giro

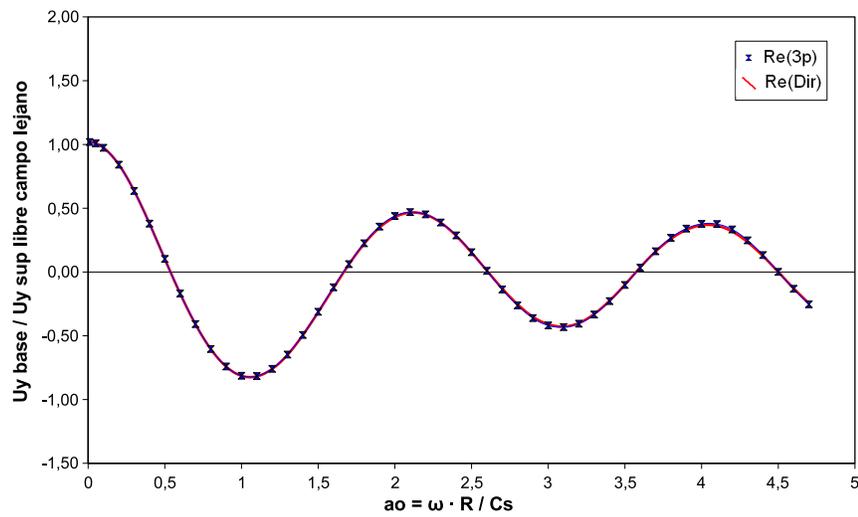
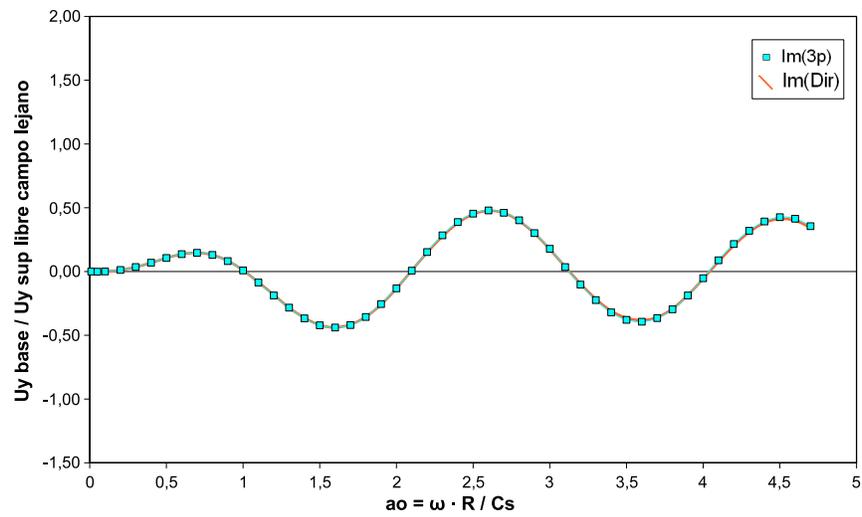
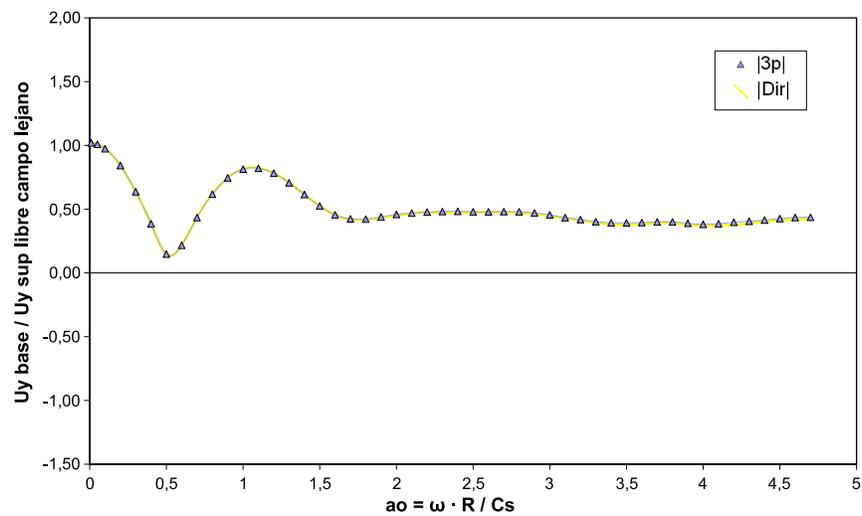


Figura B.16: Comparación Directo-Indirecto Problema II *Giro*(parte real)

Figura B.17: Comparación Directo-Indirecto Problema II *Giro*(parte imaginaria)Figura B.18: Comparación Directo-Indirecto Problema II *Giro*(módulo)

## B.2.2. Comparación Problema II y Problema I

### Onda P. Desplazamiento Vertical

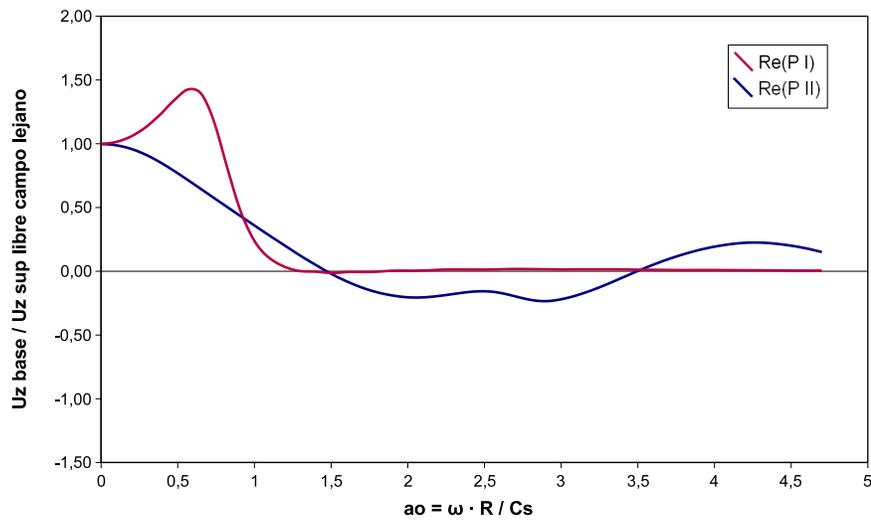


Figura B.19: Comparación Problema II-Problema I  $U_z$  (parte real)

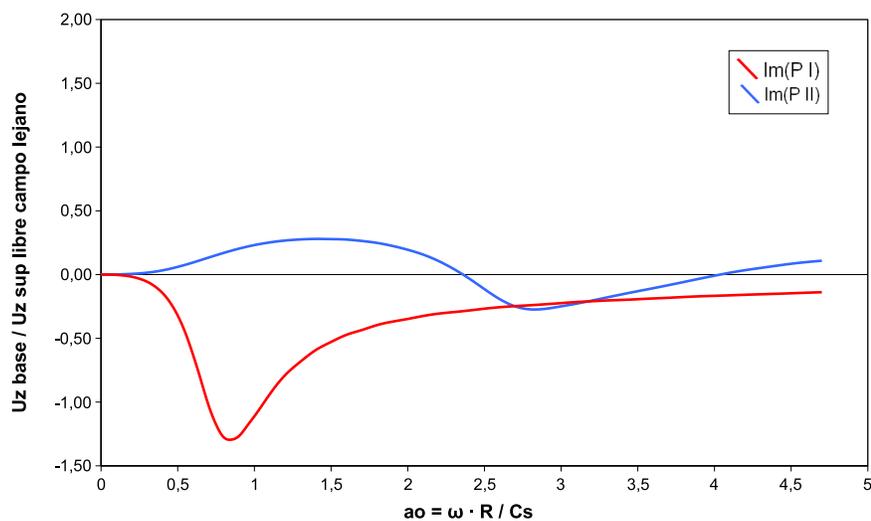
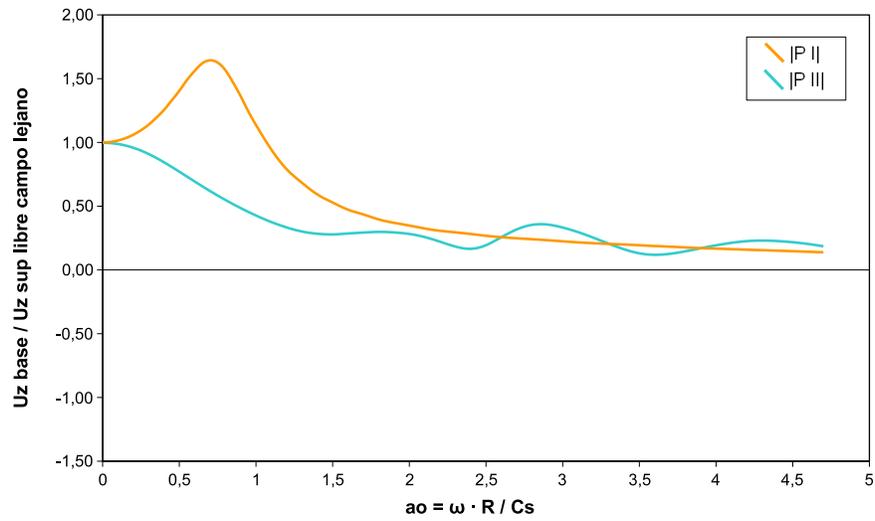
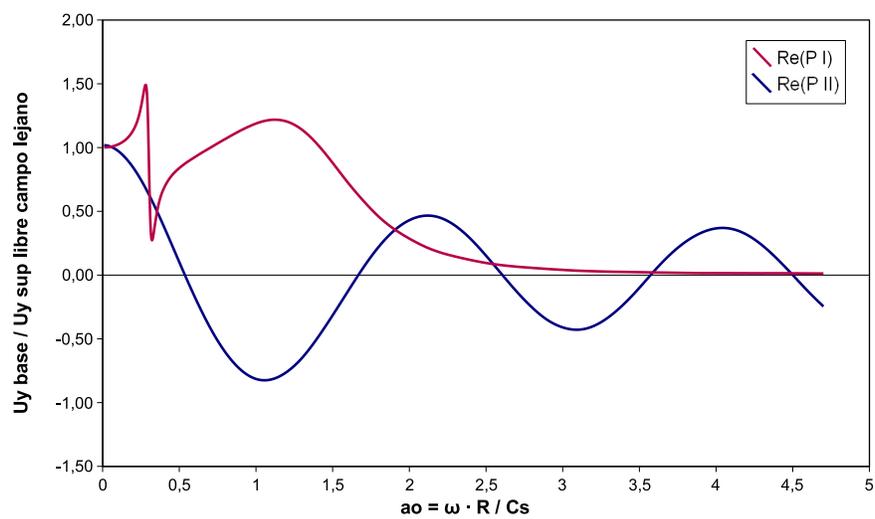


Figura B.20: Comparación Problema II-Problema I  $U_z$  (parte imaginaria)

Figura B.21: Comparación Problema II-Problema I  $U_z$ (módulo)

### Onda SH. Desplazamiento Horizontal

Figura B.22: Comparación Problema II-Problema I  $U_y$ (parte real)

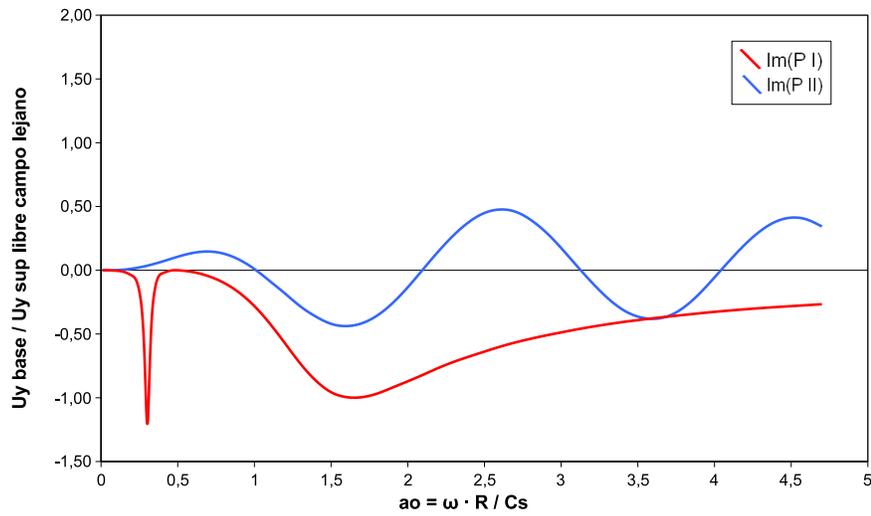


Figura B.23: Comparación Problema II-Problema I  $U_y$  (parte imaginaria)

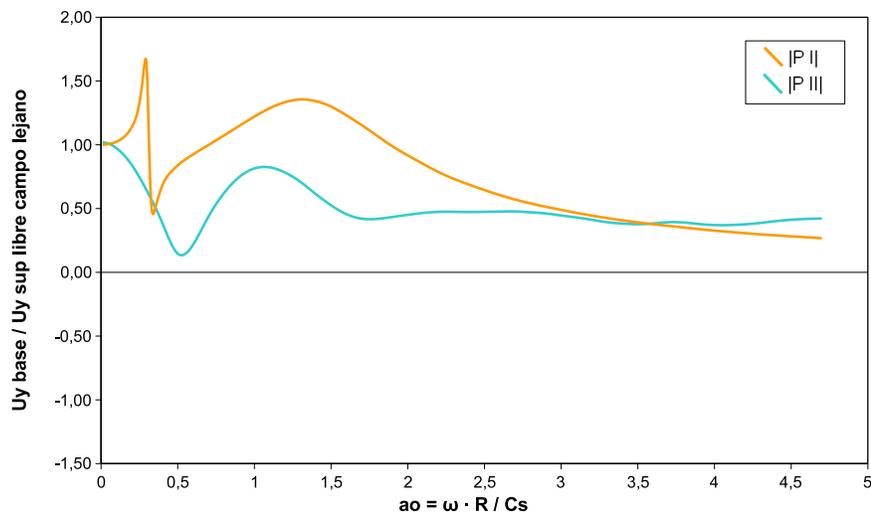
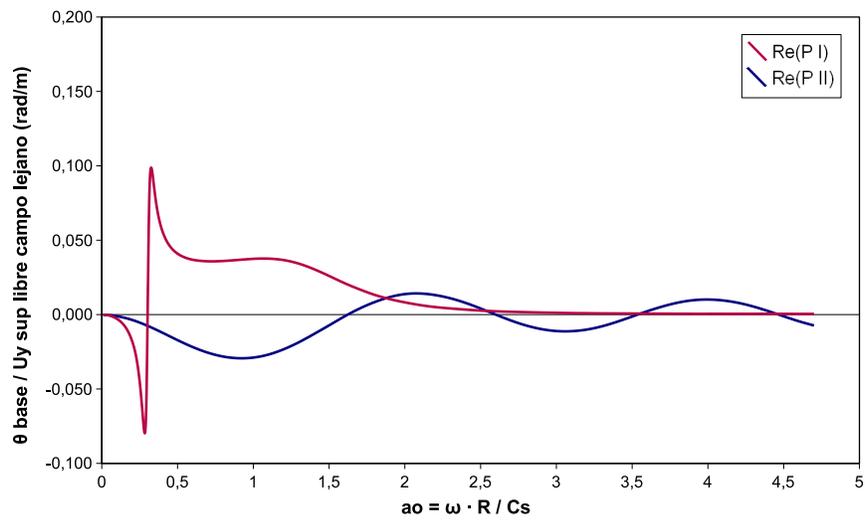
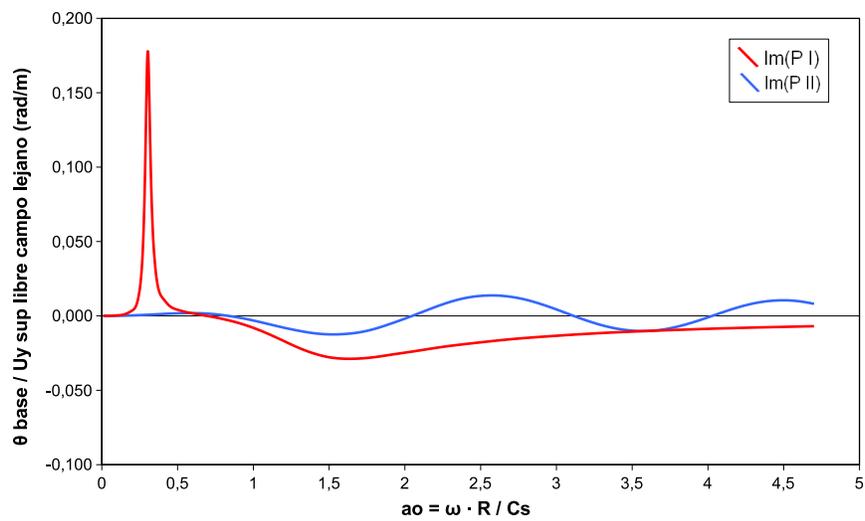


Figura B.24: Comparación Problema II-Problema I  $U_y$  (módulo)

## Onda SH. Giro

Figura B.25: Comparación Problema II-Problema I *Giro*(parte real)Figura B.26: Comparación Problema II-Problema I *Giro*(parte imaginaria)

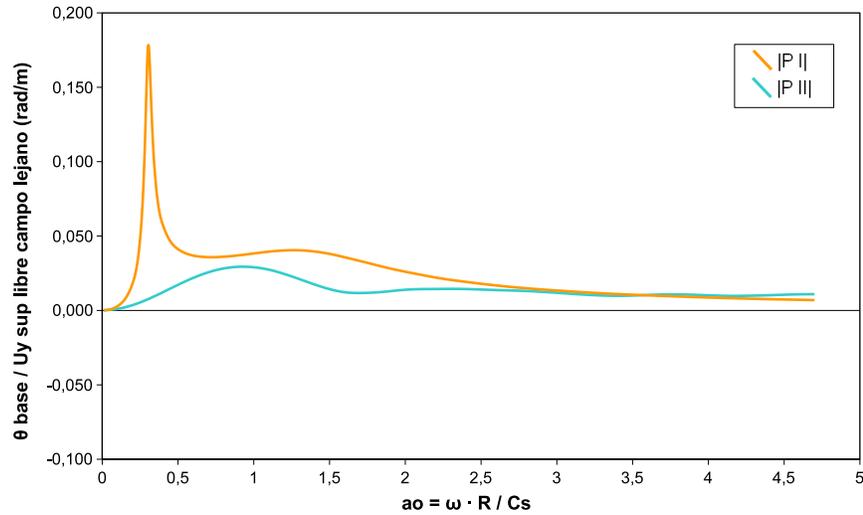


Figura B.27: Comparación Problema II-Problema I *Giro*(módulo)

### B.3. PROBLEMA III

#### B.3.1. Comparación Método Directo y Método Indirecto

##### Onda P. Desplazamiento Vertical

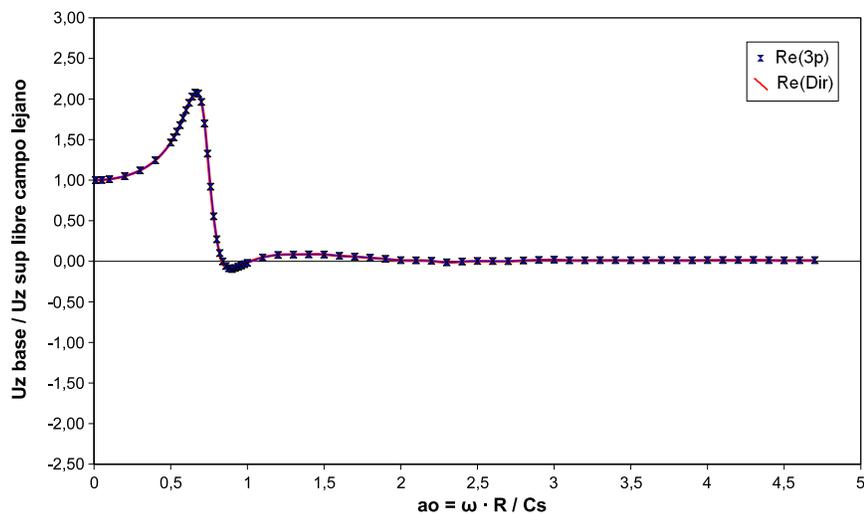
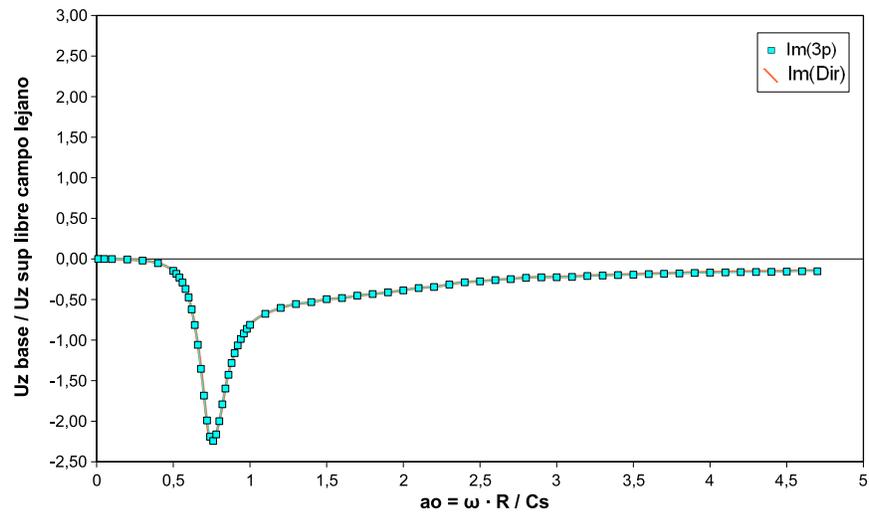
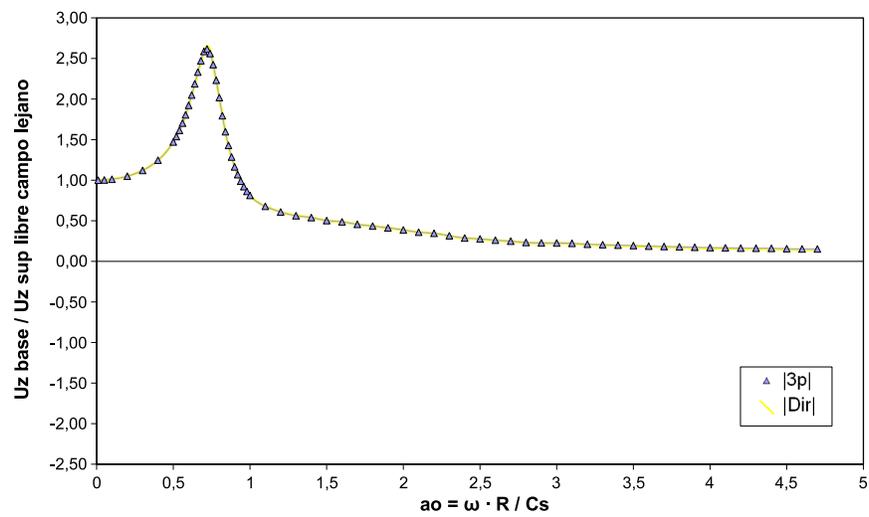
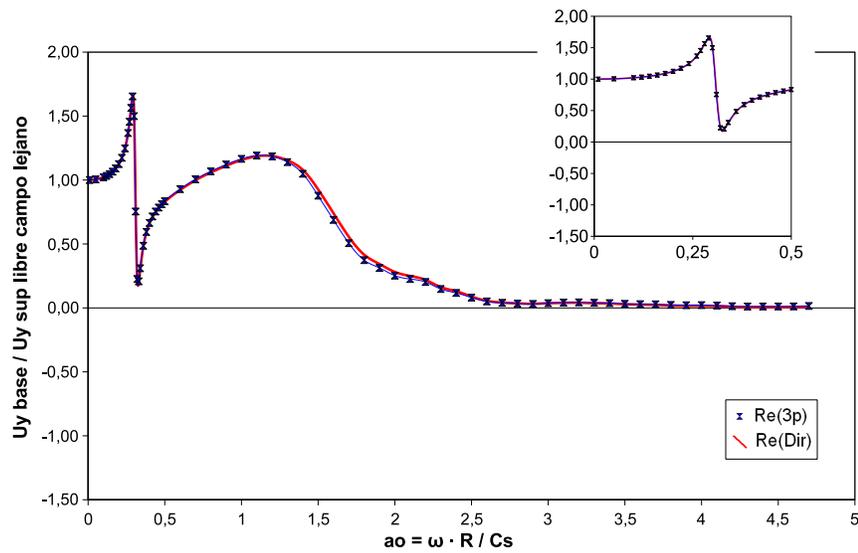
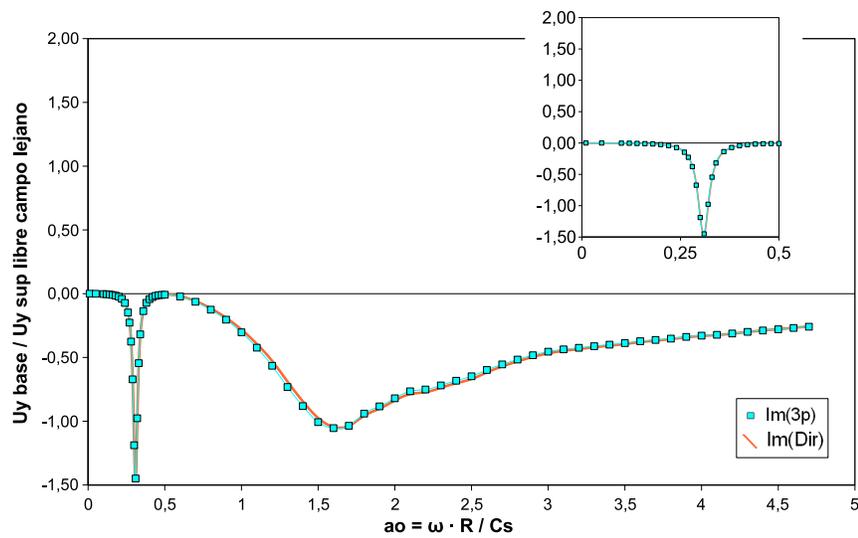
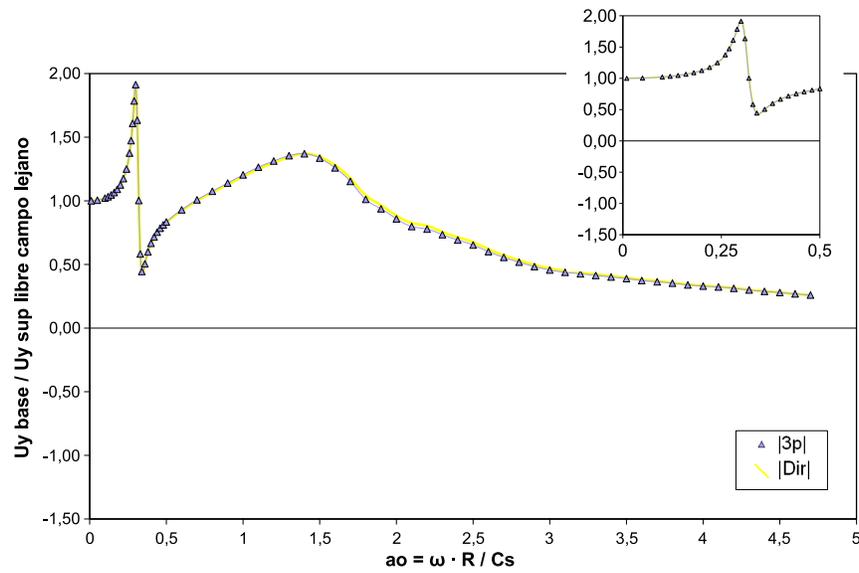


Figura B.28: Comparación Directo-Indirecto Problema III  $U_z$ (parte real)

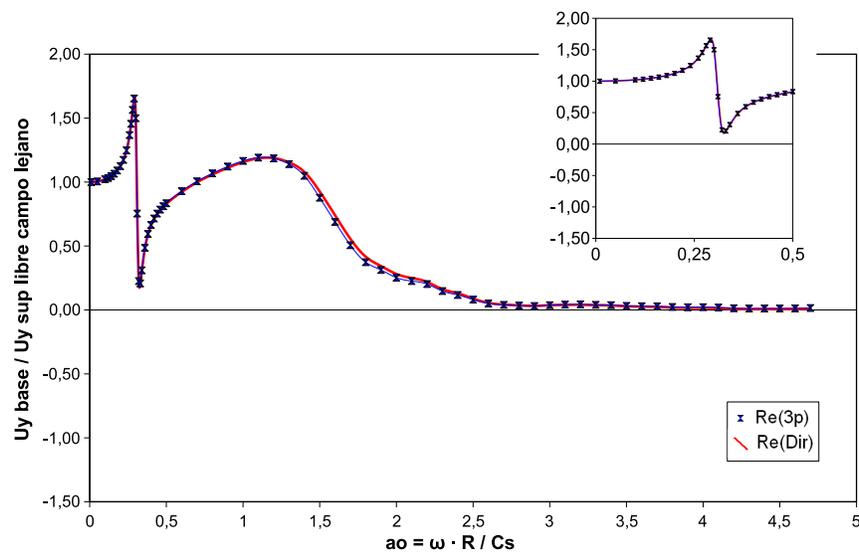
Figura B.29: Comparación Directo-Indirecto Problema III  $U_z$ (parte imaginaria)Figura B.30: Comparación Directo-Indirecto Problema III  $U_z$ (módulo)

## Onda SH. Desplazamiento Horizontal

Figura B.31: Comparación Directo-Indirecto Problema III  $U_y$  (parte real)Figura B.32: Comparación Directo-Indirecto Problema III  $U_y$  (parte imaginaria)

Figura B.33: Comparación Directo-Indirecto Problema III  $U_y$ (módulo)

### Onda SH. Giro

Figura B.34: Comparación Directo-Indirecto Problema III *Giro*(parte real)

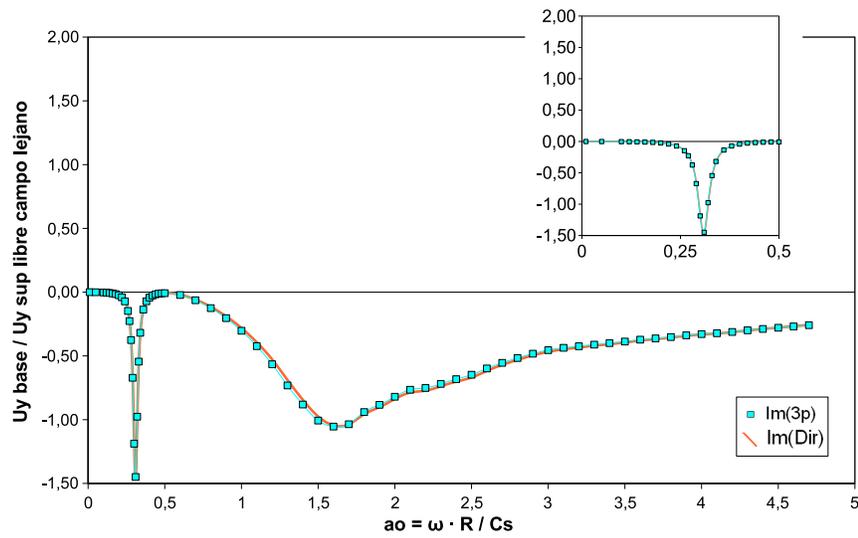


Figura B.35: Comparación Directo-Indirecto Problema III *Giro*(parte imaginaria)

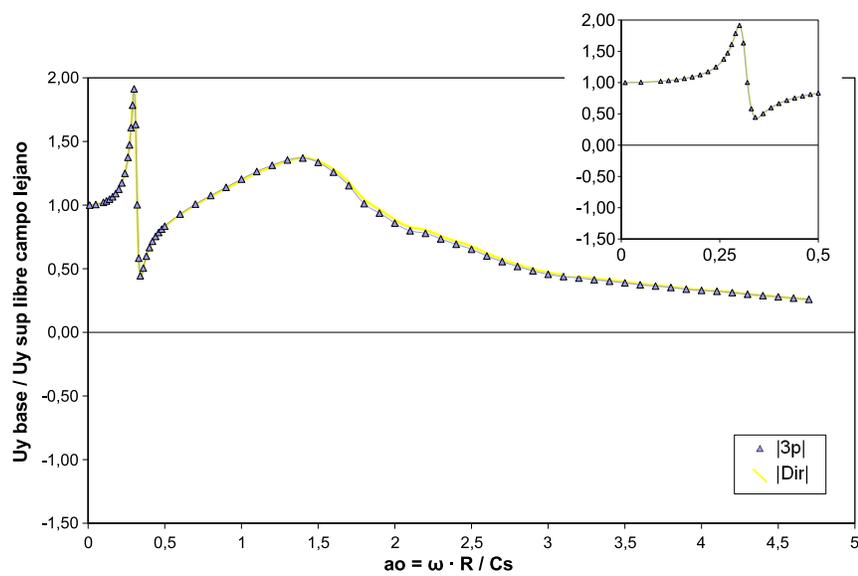


Figura B.36: Comparación Directo-Indirecto Problema III *Giro*(módulo)

### B.3.2. Comparación Problema III y Problema I

#### Onda P. Desplazamiento Vertical

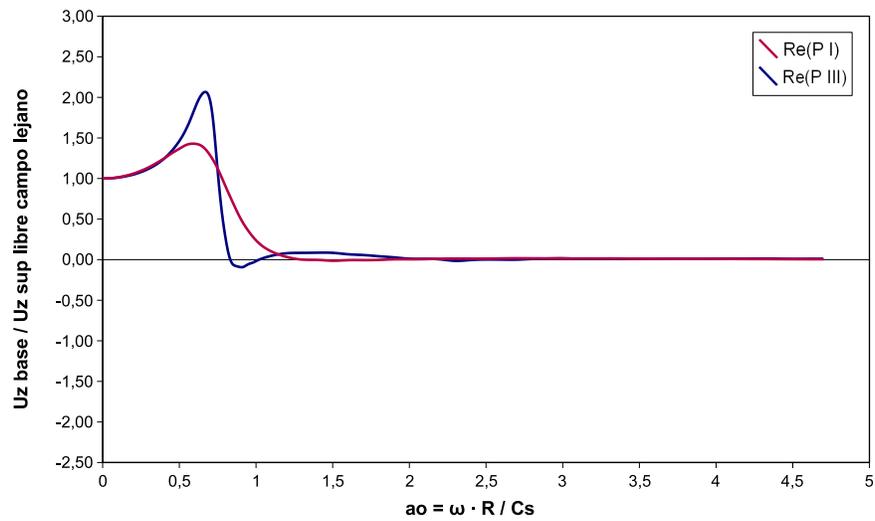


Figura B.37: Comparación Problema III-Problema I  $U_z$ (parte real)

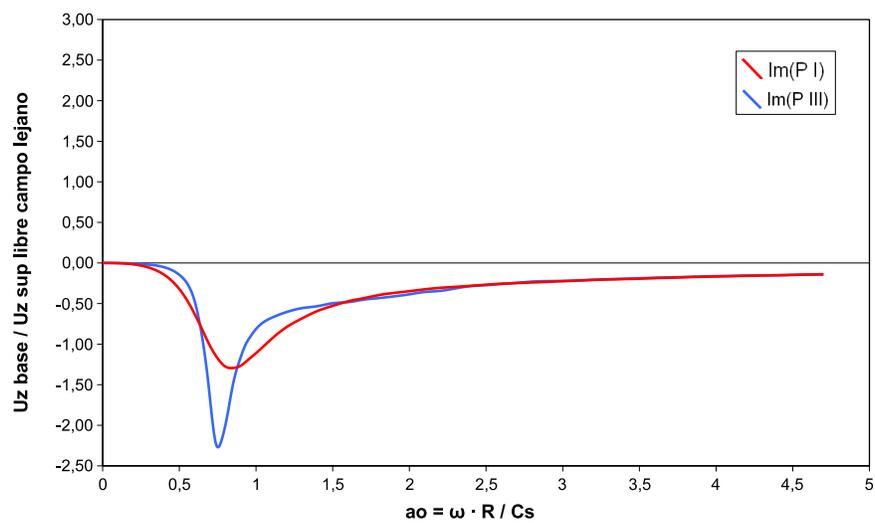


Figura B.38: Comparación Problema III-Problema I  $U_z$ (parte imaginaria)

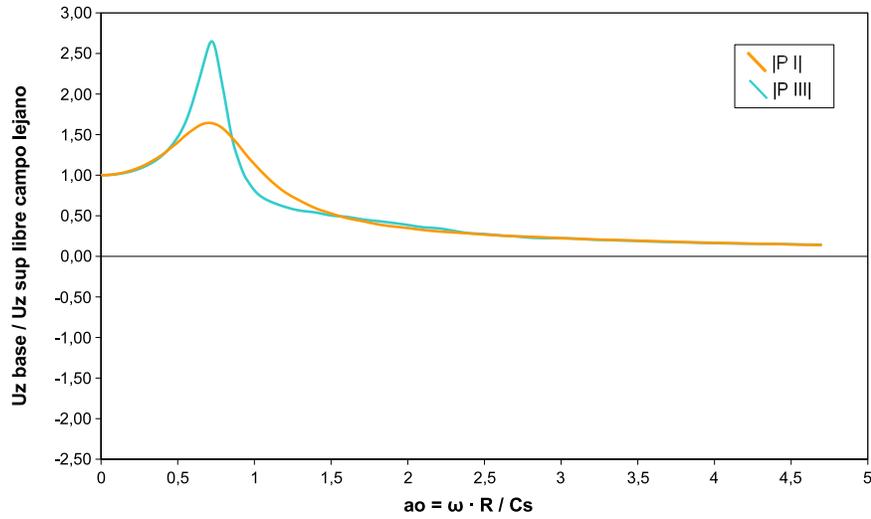


Figura B.39: Comparación Problema III-Problema I  $U_z$ (módulo)

### Onda SH. Desplazamiento Horizontal

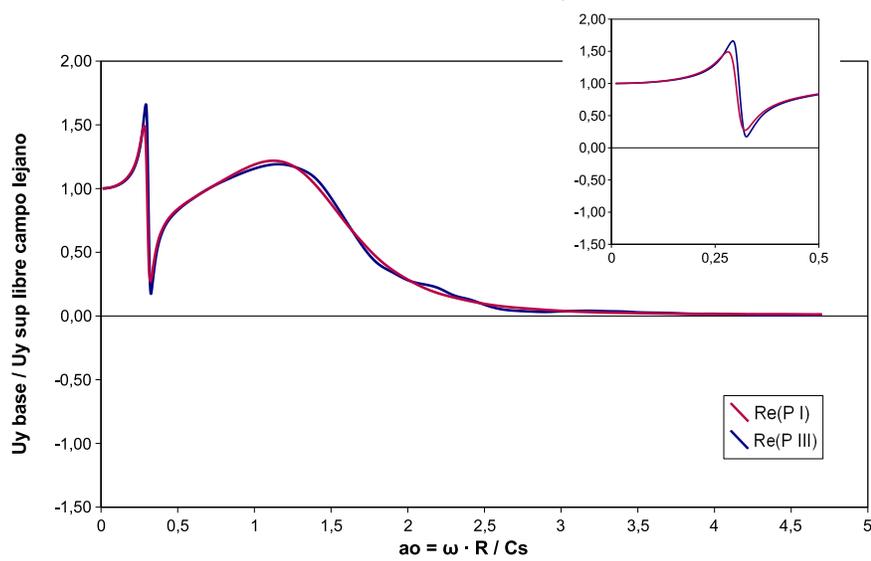


Figura B.40: Comparación Problema III-Problema I  $U_y$ (parte real)

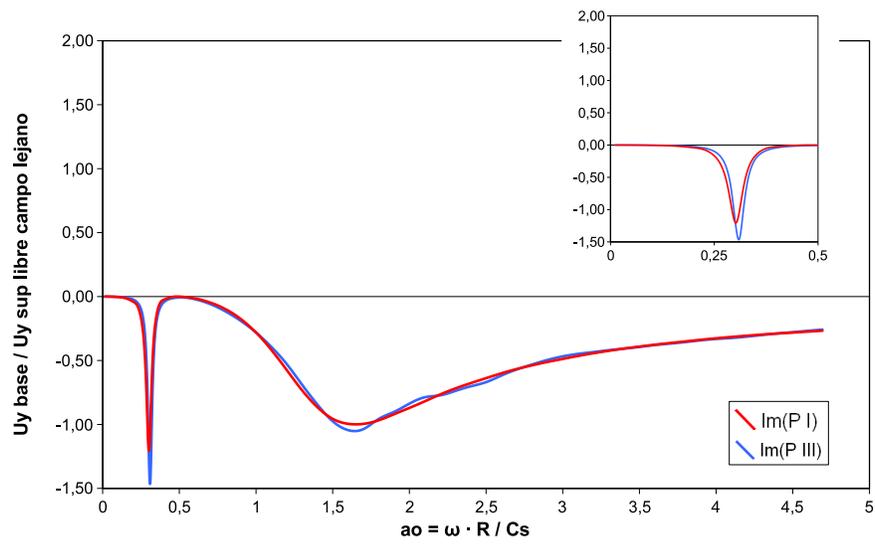


Figura B.41: Comparación Problema III-Problema I  $U_y$  (parte imaginaria)

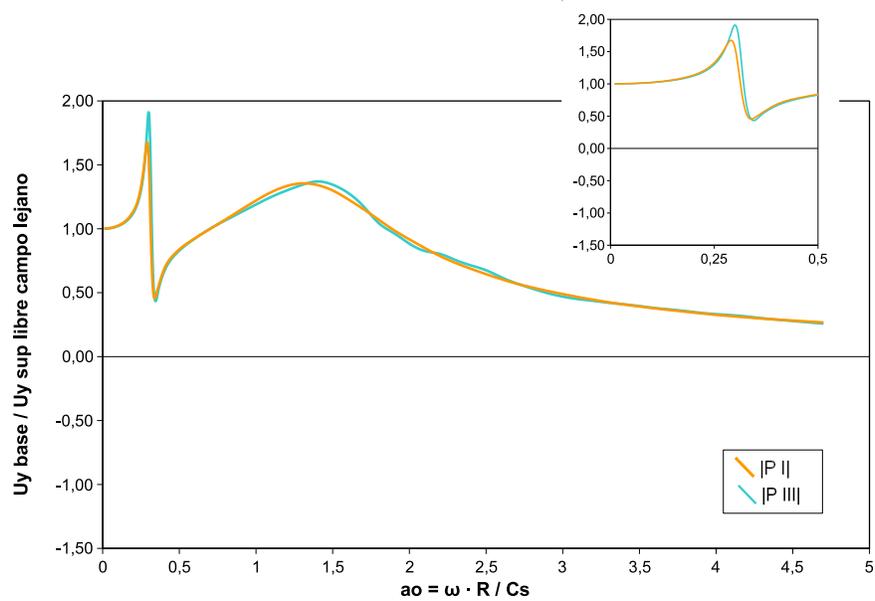
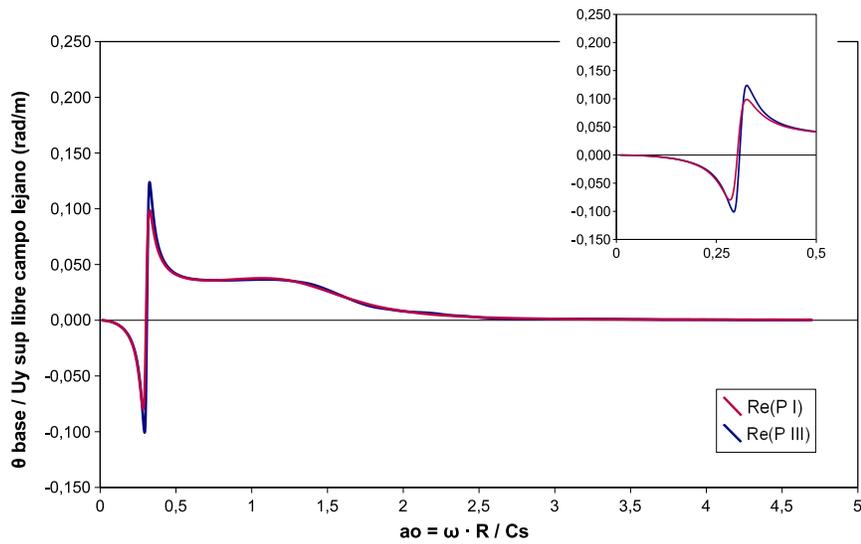
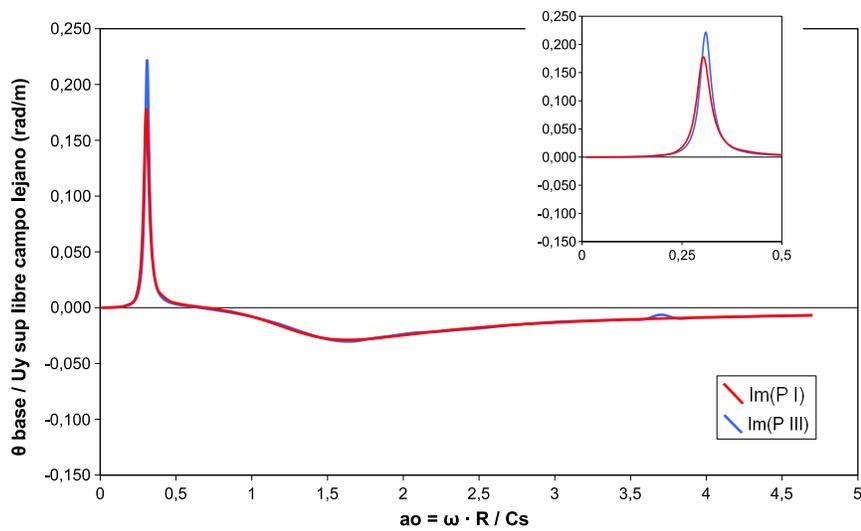


Figura B.42: Comparación Problema III-Problema I  $U_y$  (módulo)

## Onda SH. Giro

Figura B.43: Comparación Problema III-Problema I *Giro*(parte real)Figura B.44: Comparación Problema III-Problema I *Giro*(parte imaginaria)

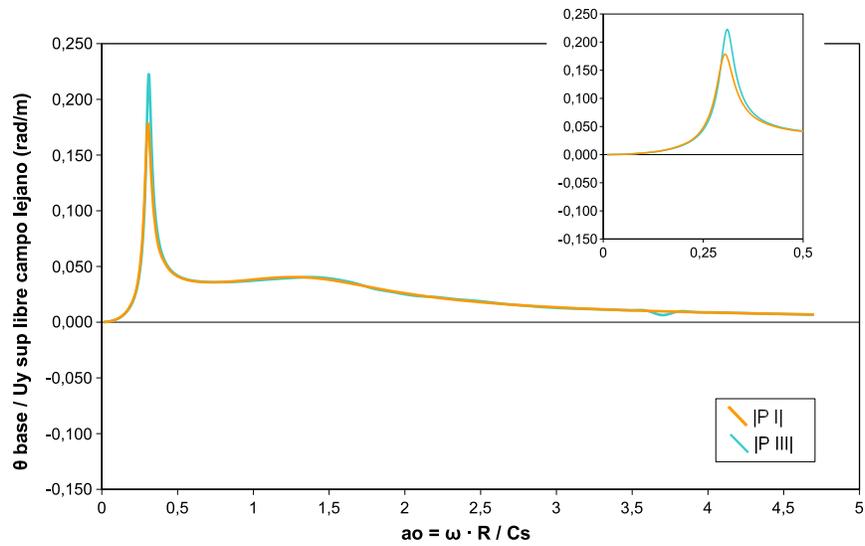


Figura B.45: Comparación Problema III-Problema I *Giro*(módulo)

## B.4. PROBLEMA IV

### B.4.1. Comparación Método Directo y Método Indirecto

#### Onda P. Desplazamiento Vertical

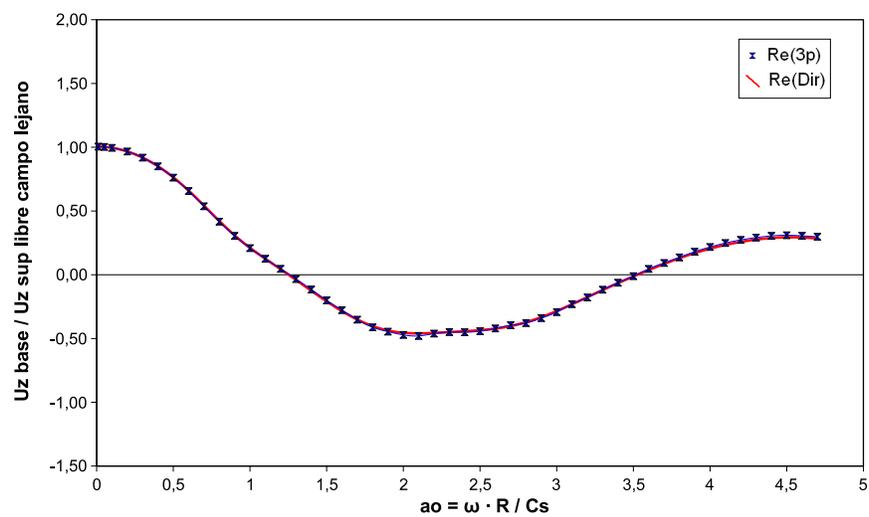


Figura B.46: Comparación Directo-Indirecto Problema IV  $U_z$ (parte real)

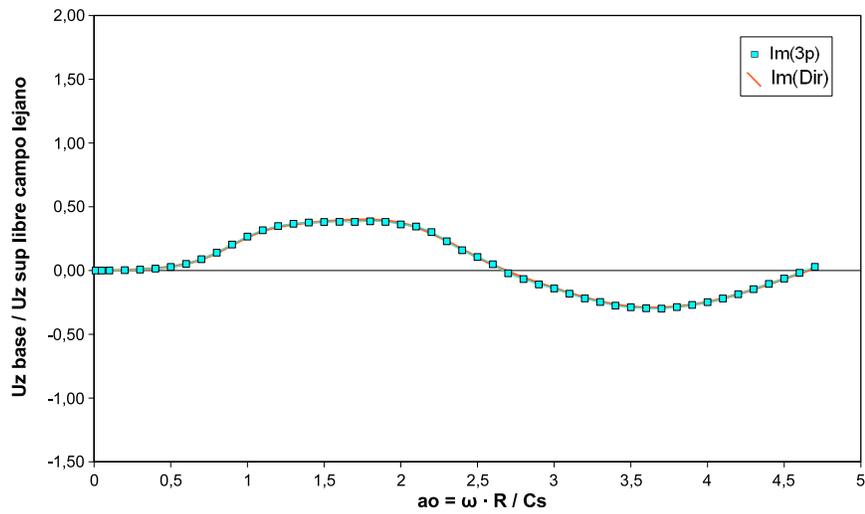


Figura B.47: Comparación Directo-Indirecto Problema IV  $U_z$ (parte imaginaria)

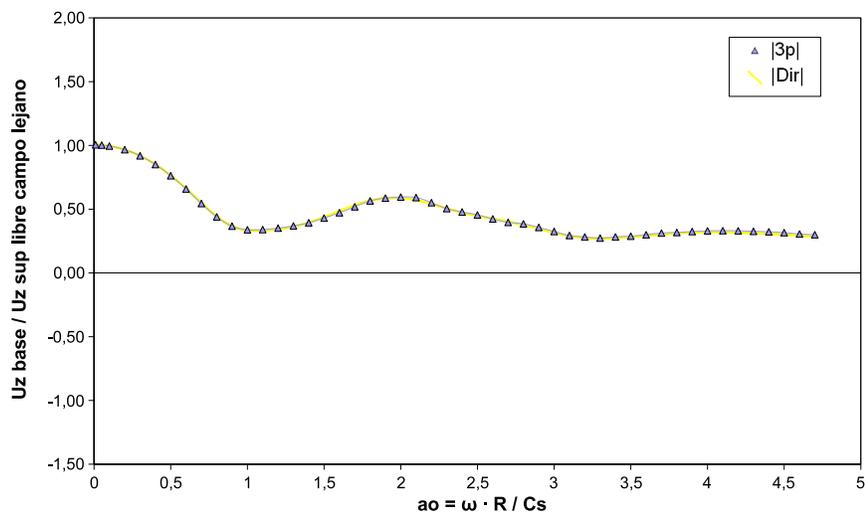
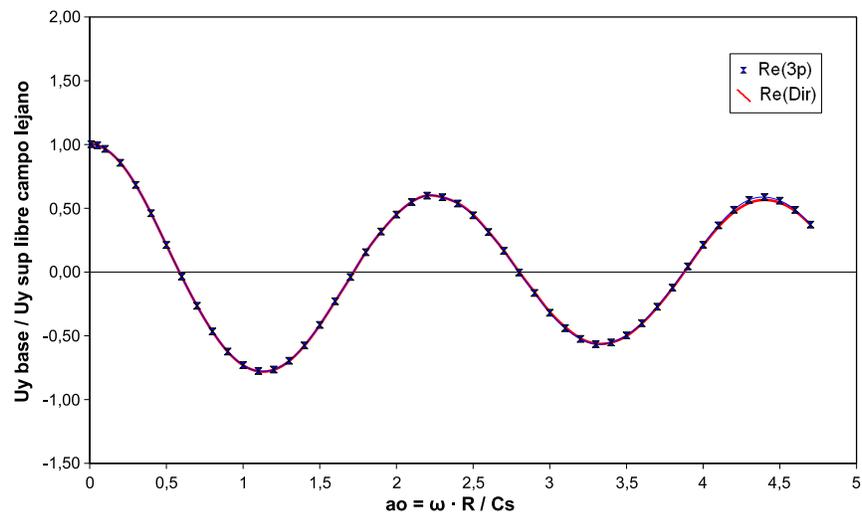
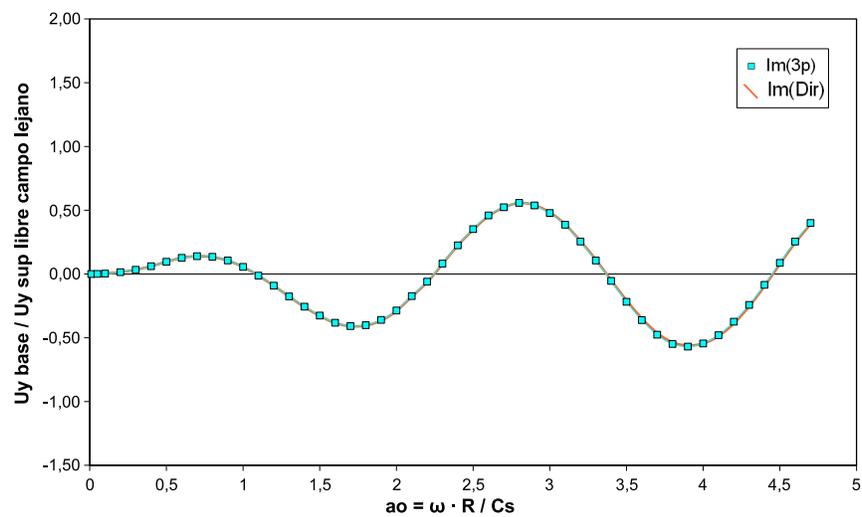


Figura B.48: Comparación Directo-Indirecto Problema IV  $U_z$ (módulo)

## Onda SH. Desplazamiento Horizontal

Figura B.49: Comparación Directo-Indirecto Problema IV  $U_y$ (parte real)Figura B.50: Comparación Directo-Indirecto Problema IV  $U_y$ (parte imaginaria)

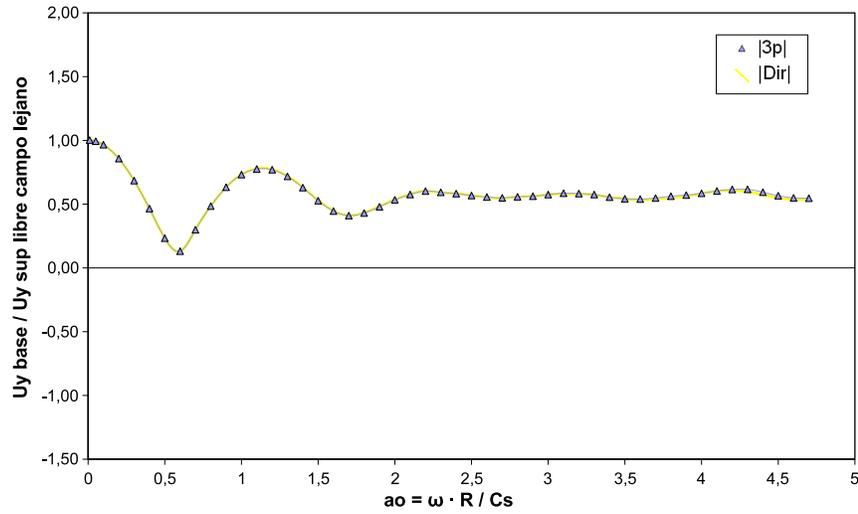


Figura B.51: Comparación Directo-Indirecto Problema IV  $U_y$ (módulo)

### Onda SH. Giro

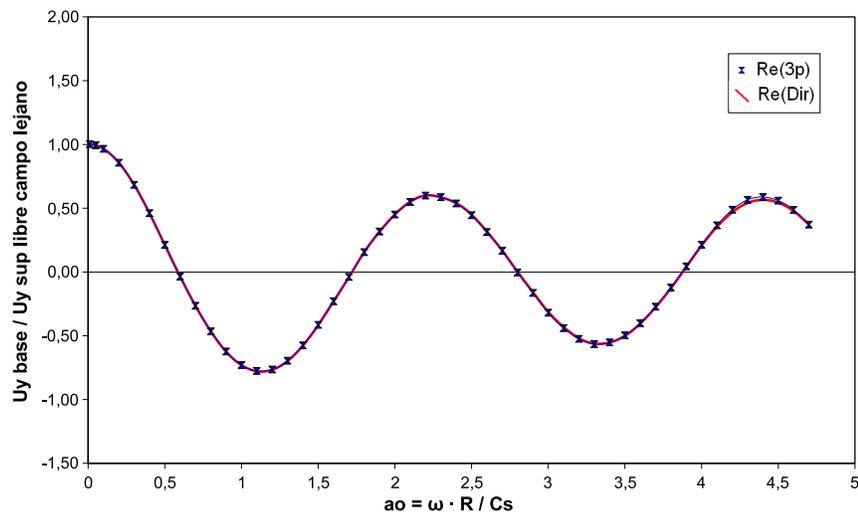
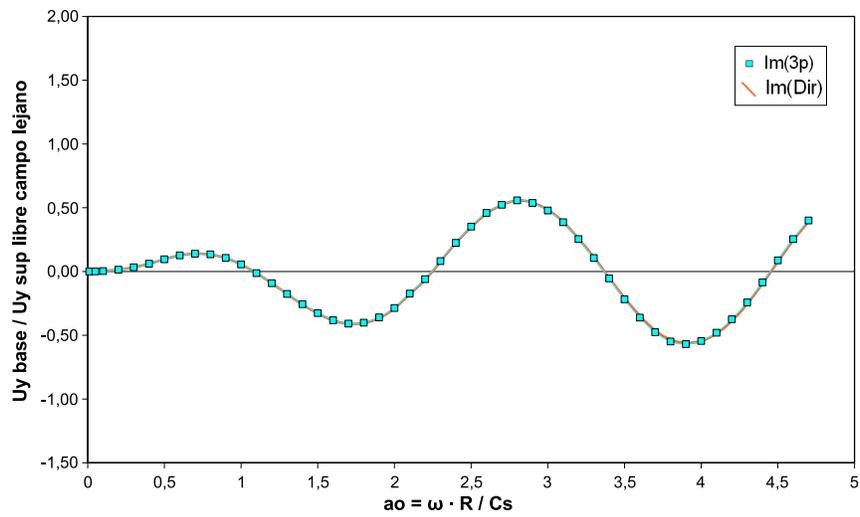
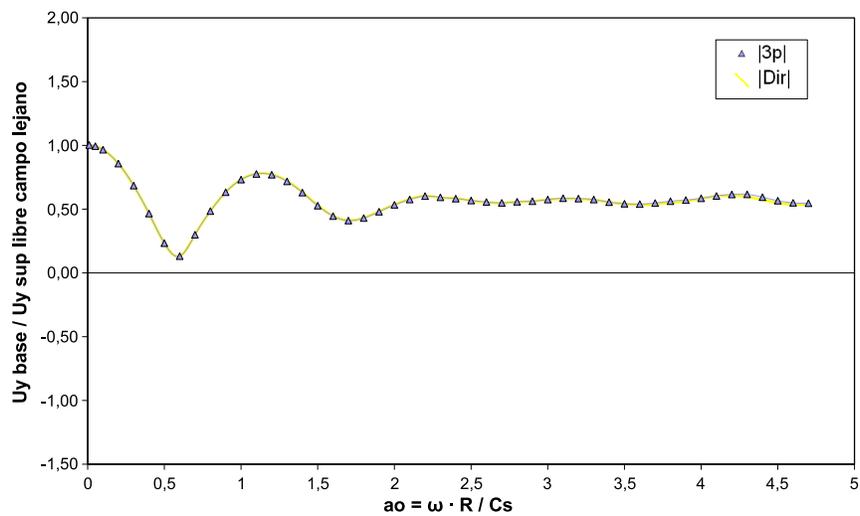


Figura B.52: Comparación Directo-Indirecto Problema IV *Giro*(parte real)

Figura B.53: Comparación Directo-Indirecto Problema IV *Giro*(parte imaginaria)Figura B.54: Comparación Directo-Indirecto Problema IV *Giro*(módulo)

## B.4.2. Comparación Problema IV y Problema II

### Onda P. Desplazamiento Vertical

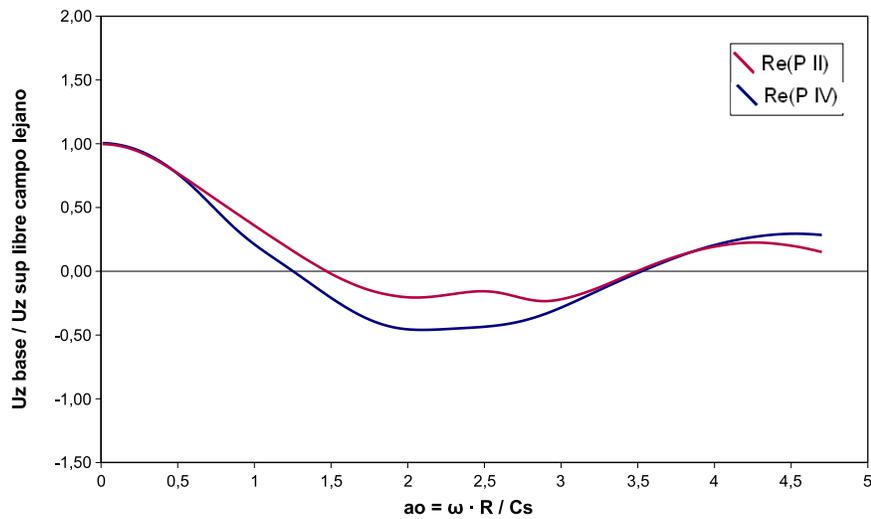


Figura B.55: Comparación Problema IV-Problema II  $U_z$ (parte real)

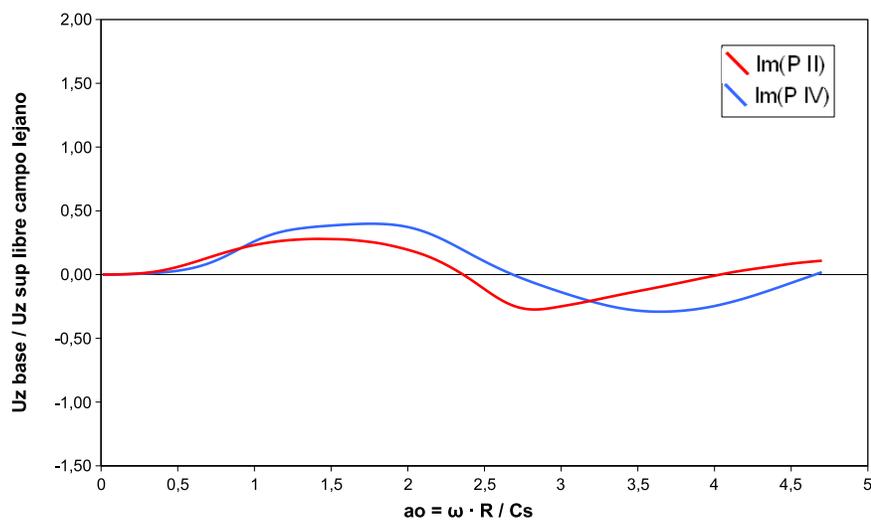
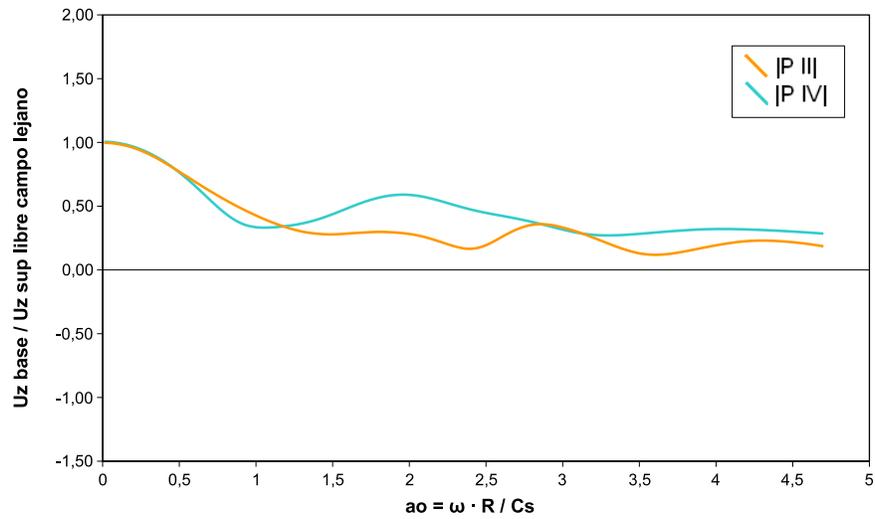
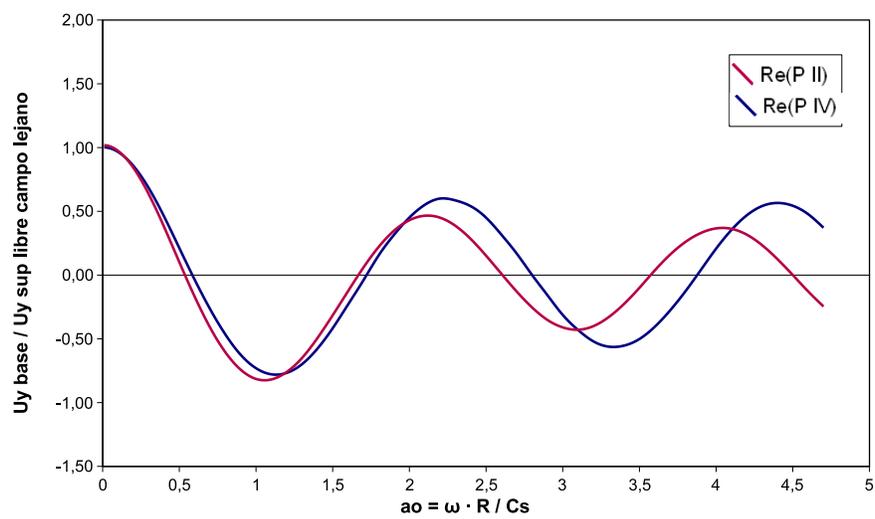


Figura B.56: Comparación Problema IV-Problema II  $U_z$ (parte imaginaria)

Figura B.57: Comparación Problema IV-Problema II  $U_z$ (módulo)

### Onda SH. Desplazamiento Horizontal

Figura B.58: Comparación Problema IV-Problema II  $U_y$ (parte real)

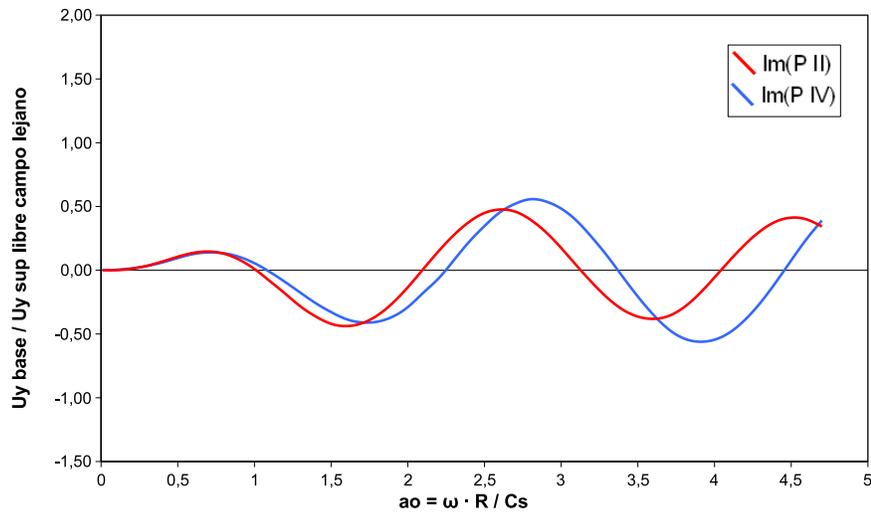


Figura B.59: Comparación Problema IV-Problema II  $U_y$ (parte imaginaria)

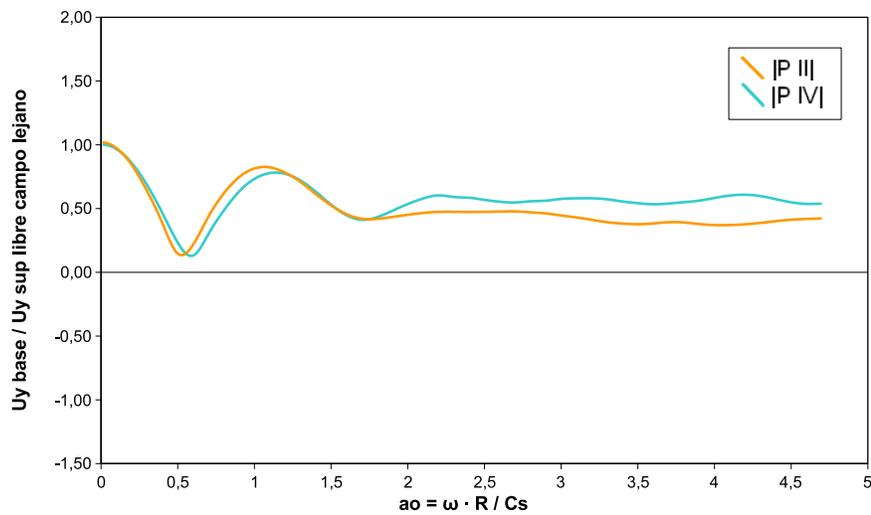
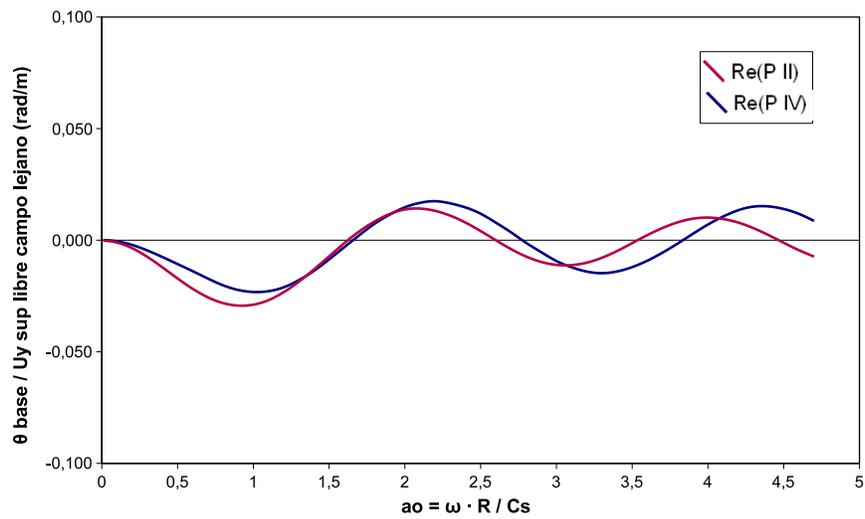
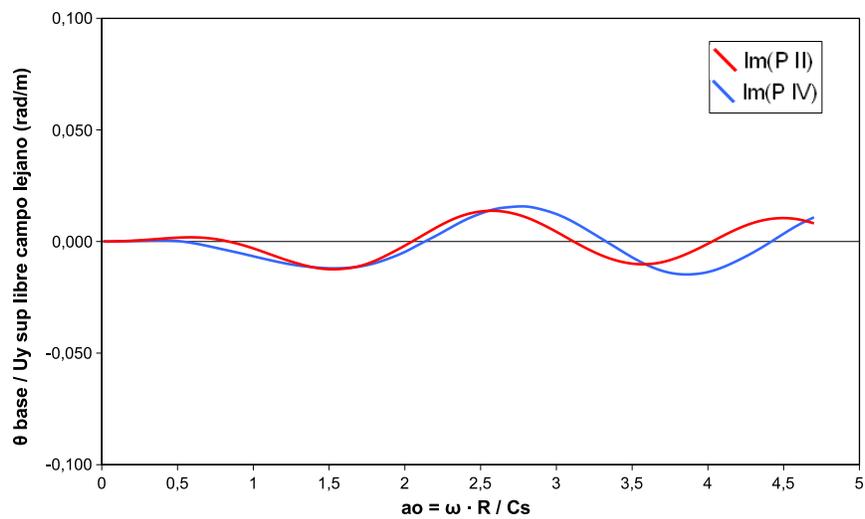


Figura B.60: Comparación Problema IV-Problema II  $U_y$ (módulo)

## Onda SH. Giro

Figura B.61: Comparación Problema IV-Problema II *Giro*(parte real)Figura B.62: Comparación Problema IV-Problema II *Giro*(parte imaginaria)

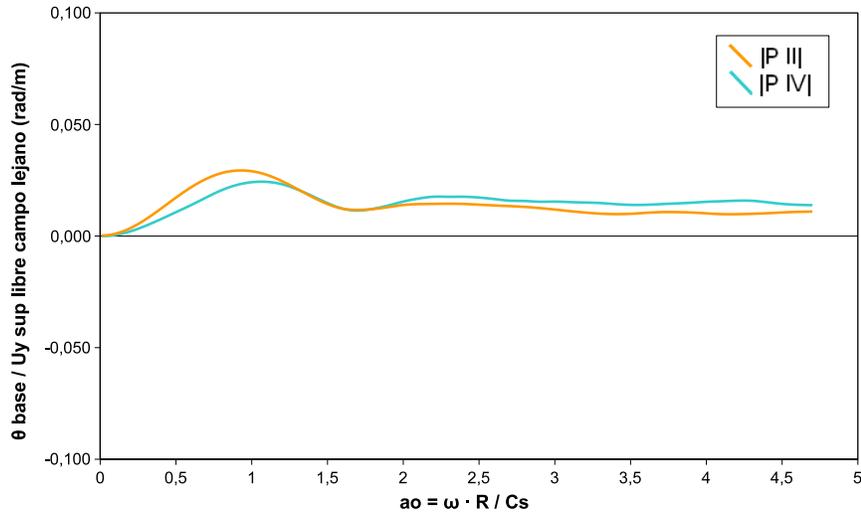


Figura B.63: Comparación Problema IV-Problema II *Giro*(módulo)

## B.5. PROBLEMA V

### B.5.1. Comparación Método Directo y Método Indirecto

#### Onda P. Desplazamiento Vertical

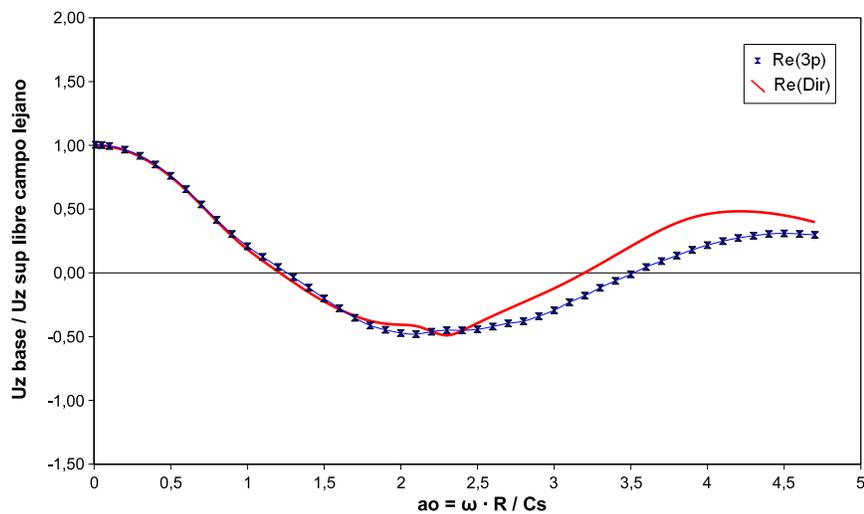
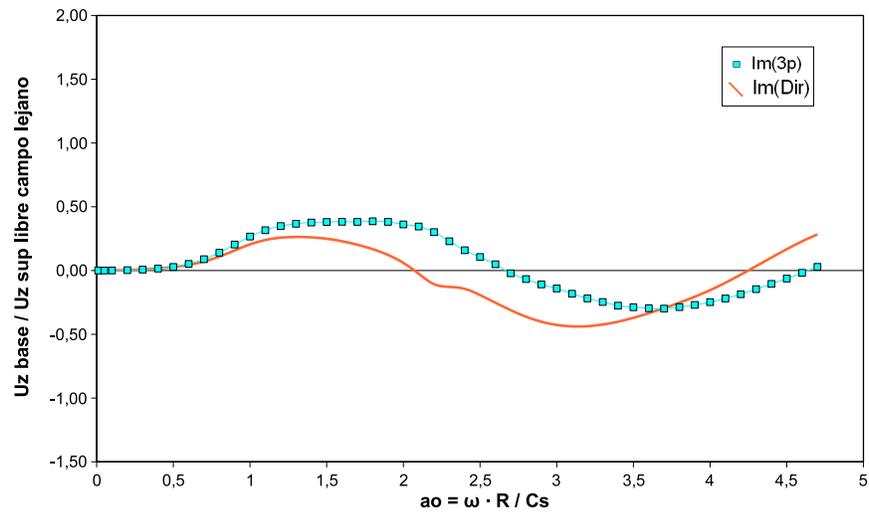
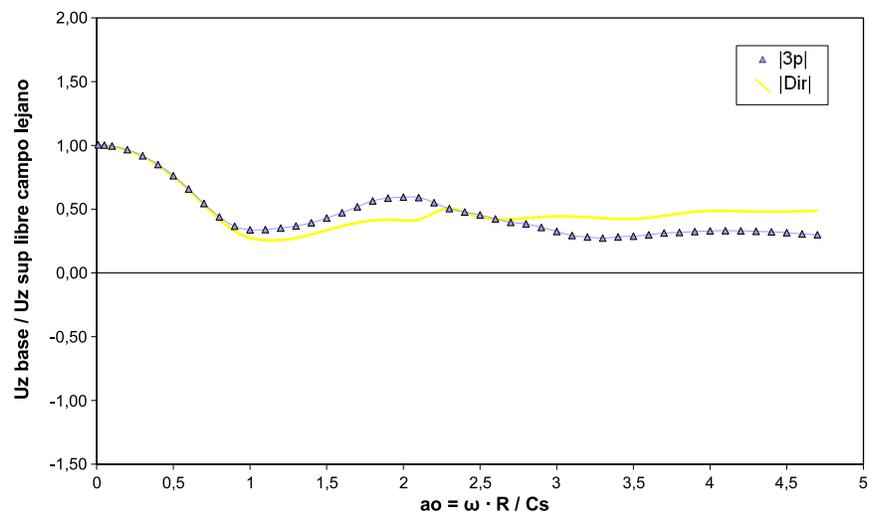
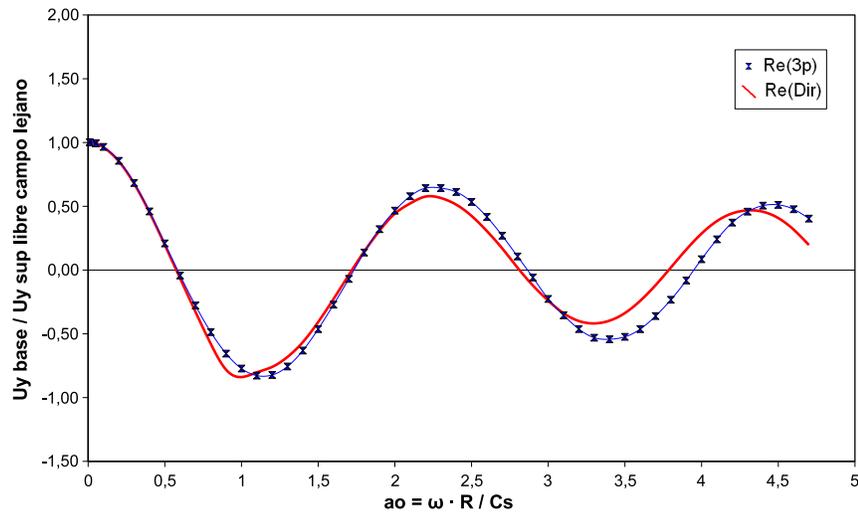
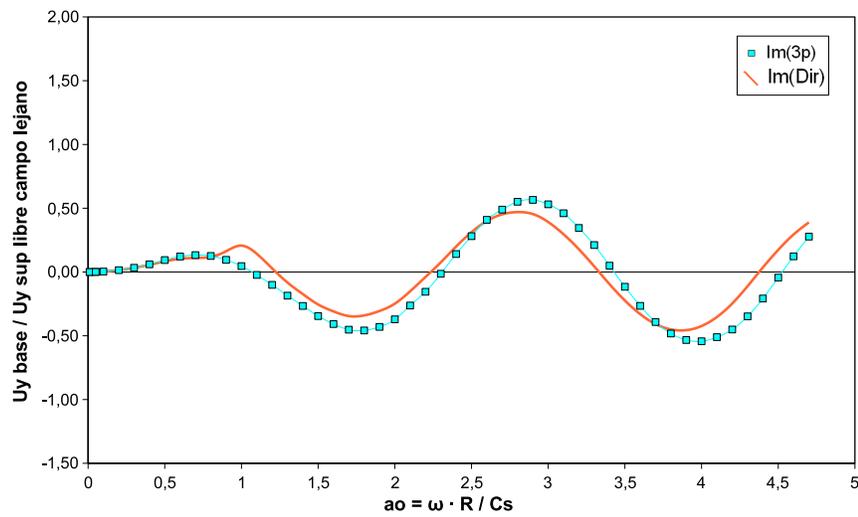


Figura B.64: Comparación Directo-Indirecto Problema V  $U_z$ (parte real)

Figura B.65: Comparación Directo-Indirecto Problema V  $U_z$ (parte imaginaria)Figura B.66: Comparación Directo-Indirecto Problema V  $U_z$ (módulo)

## Onda SH. Desplazamiento Horizontal

Figura B.67: Comparación Directo-Indirecto Problema V  $U_y$ (parte real)Figura B.68: Comparación Directo-Indirecto Problema V  $U_y$ (parte imaginaria)

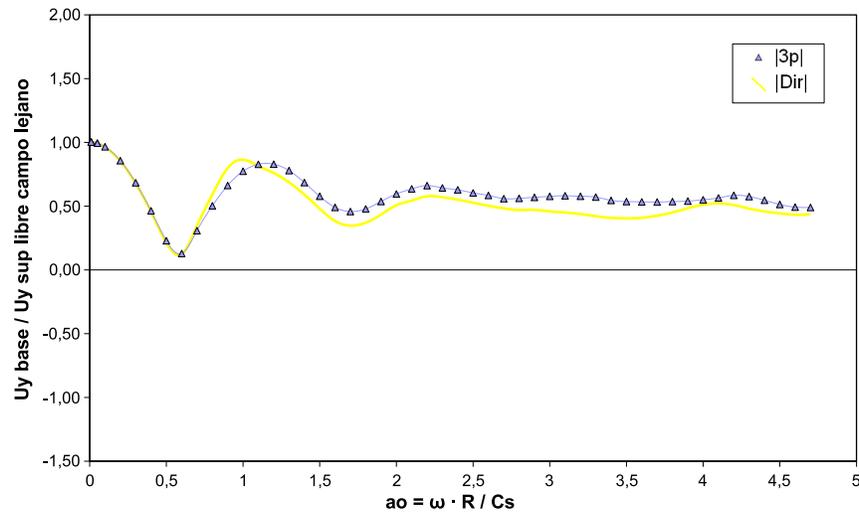


Figura B.69: Comparación Directo-Indirecto Problema V  $U_y$ (módulo)

## B.6. PROBLEMA VI

### B.6.1. Comparación Problema VI y Problema V

#### Onda P. Desplazamiento Vertical

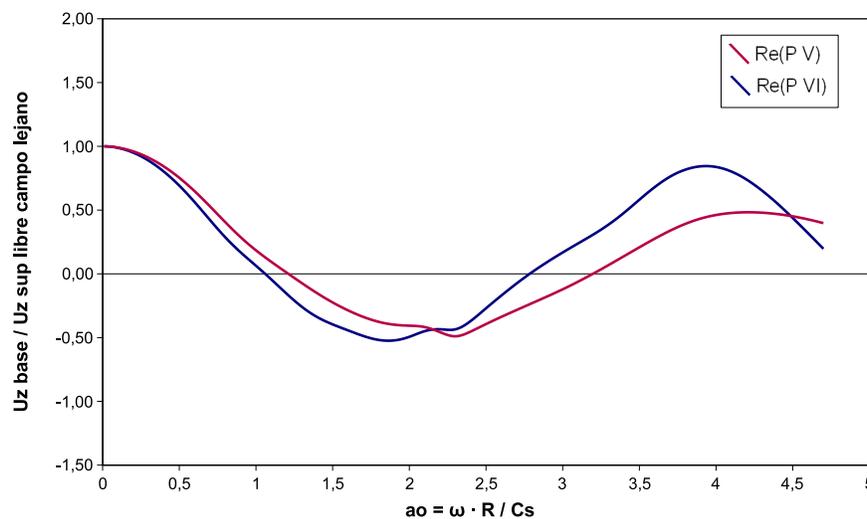


Figura B.70: Comparación Problema VI-Problema V  $U_z$ (parte real)

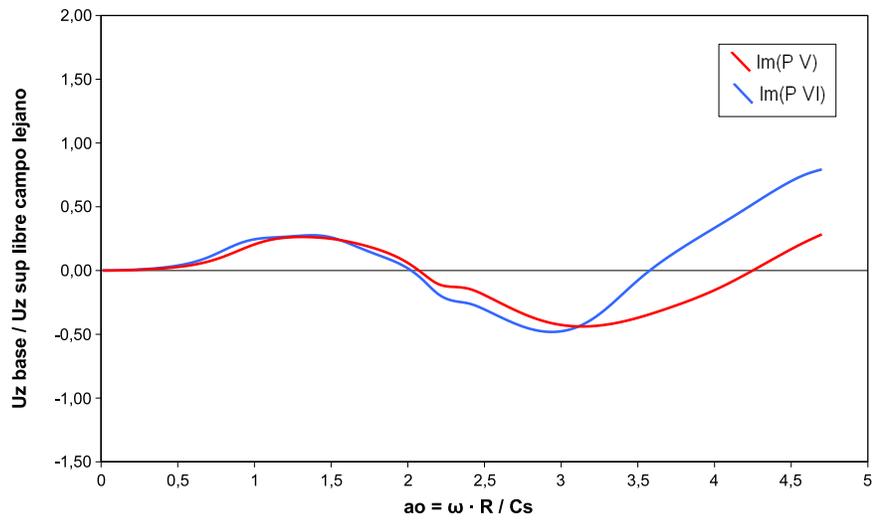


Figura B.71: Comparación Problema VI-Problema V  $U_z$ (parte imaginaria)

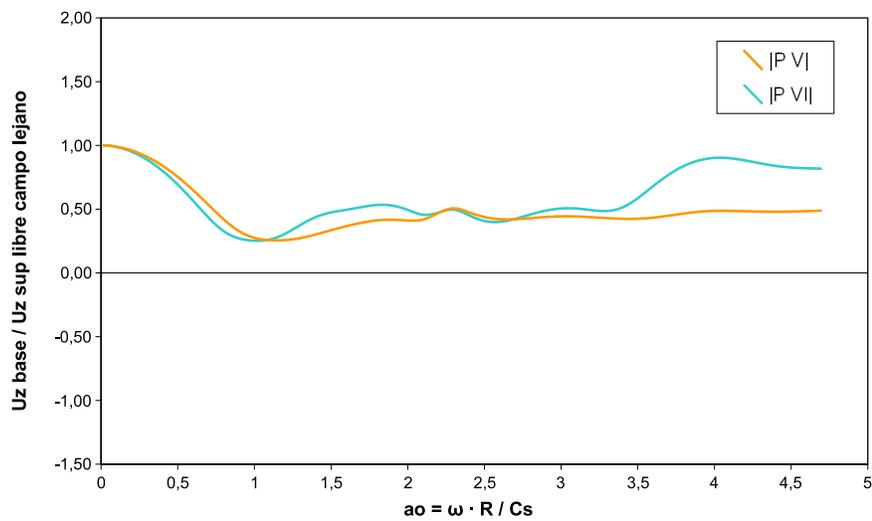
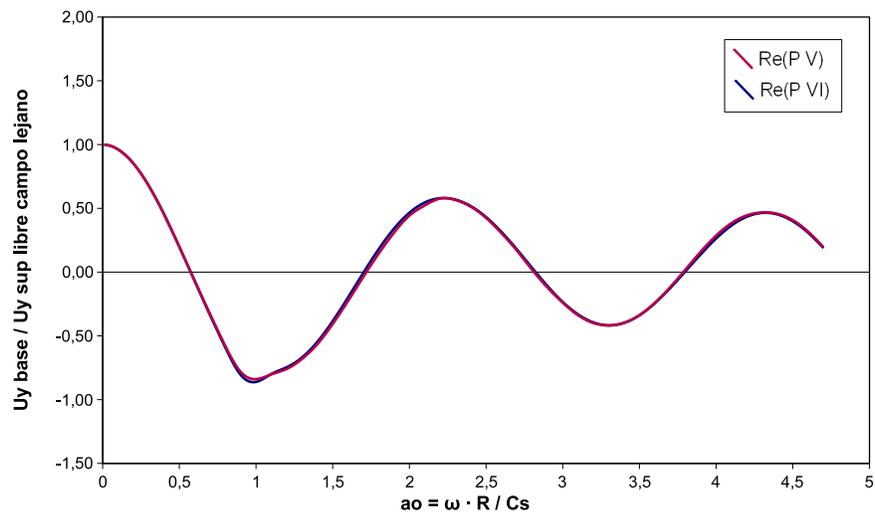
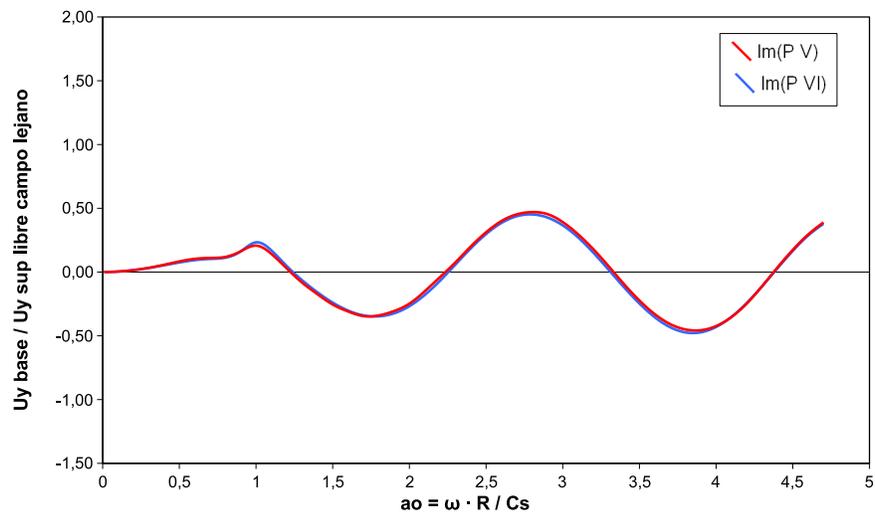


Figura B.72: Comparación Problema VI-Problema V  $U_z$ (módulo)

## Onda SH. Desplazamiento Horizontal

Figura B.73: Comparación Problema VI-Problema V  $U_y$ (parte real)Figura B.74: Comparación Problema VI-Problema V  $U_y$ (parte imaginaria)

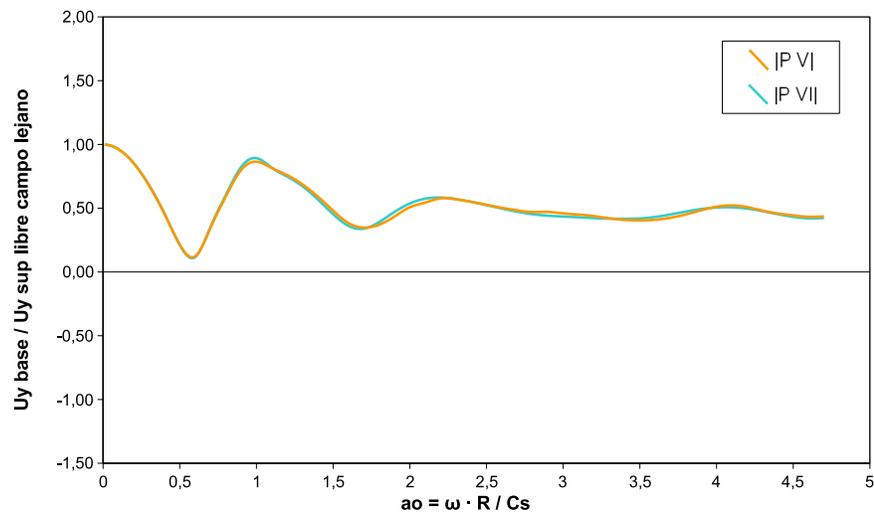


Figura B.75: Comparación Problema VI-Problema V  $U_y$ (módulo)

Apéndice C

## Tutorial GiD

---



El programa GiD es un pre y postprocesador desarrollado por el CIMNE (*International Center for Numerical Methods in Engineering*) con sede en Barcelona. Este software cuenta con un potente motor de CAD que permite al usuario, sin necesidad de grandes complicaciones ni demasiados conocimientos previos, definir geometrías en 3D y mallarlas. Además ofrece la posibilidad en si postprocesador de mostrar los resultados de cualquier cálculo, ya sea estructural, dinámica de fluidos o procesos térmicos.

Cuenta además con la posibilidad de importar y exportar datos de geometría CAD, mallas, resultados de los análisis en multitud de formatos. Lo que permite su compatibilidad con la mayoría de programas orientados a la ingeniería que se puedan encontrar en el mercado o bien programados por el propio usuario.

Este software ha sido adquirido, en su versión 8.0, por la división de Mecánica de los Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería (IUSIANI) vinculado a la ULPGC.

Para ejemplo de uso, se mostrarán los pasos básicos para conseguir realizar una geometría sencilla. Consistirá en la cuarta parte de un cilindro de 50 metros de altura y 30 de diámetro, apoyado en un semiespacio. Posteriormente se procederá a su mallado. El perfil del modelo con sus medidas es el que se muestra en el lado izquierdo de la figura C.1, donde aparecen señalados los dos dominios.

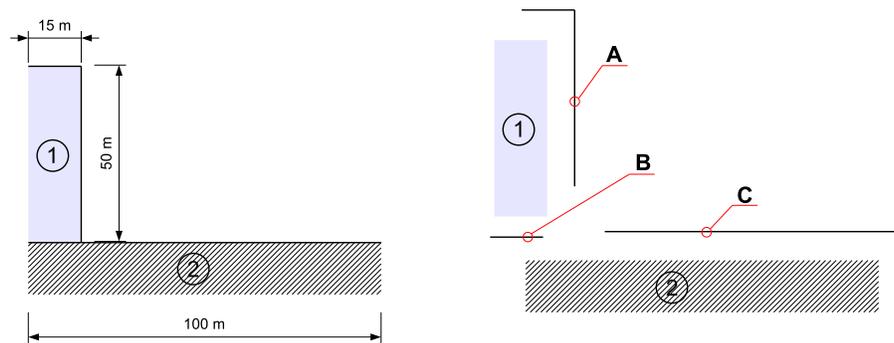


Figura C.1: Ejemplo a dibujar y mallar

Se dividirá el modelo en tres contornos (**A**, **B** y **C**) según se indica en el lado derecho la figura C.1, los cuales serán las superficies a dibujar. El contorno **A** se corresponde con la tapa superior y el lateral del cilindro; pueden discretizarse juntos

ya que no existe necesidad de duplicar nodos en la unión, con lo cual se restan grados de libertad al problema. El contorno **B** es la tapa inferior del cilindro. Y por último el contorno **C** modela el resto de la superficie libre.

## C.1. CREACIÓN DE LA GEOMETRÍA

### C.1.1. Entidades

Un concepto previo que se debe tener presente, es la diferente representación que GiD hace de cada una de las entidades propias de un diseño, así como las vinculaciones entre ellas, de orden inferior a superior, se pueden enumerar: punto (en negro), línea (en azul), superficie (en rosa) y volumen (en cian). Los colores especificados son los que aparecen por defecto en el programa.

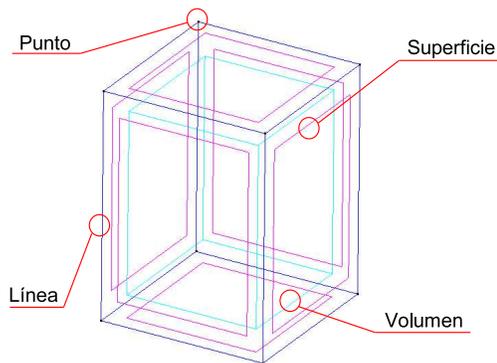


Figura C.2: Entidades en GiD

Como aparece en la figura C.2 todas las entidades son mostradas a la hora de esbozar un diseño, pero sólo las líneas y los puntos establecen las verdaderas dimensiones del modelo. La presencia de las superficies y el volumen simplemente sirve para indicar que diferentes líneas están asociadas en una superficie o que diversas superficies están asociadas en un volumen. Si no son formas tridimensionales predefinidas en el programa, se deben ir vinculando las entidades correspondientes en orden ascendente, así si se quiere crear un volumen para mallarlo, antes se deberá crear las superficies que se deben vincular y con anterioridad las líneas correspondientes.

### C.1.2. Capas

El GiD al igual que la mayoría de programas de CAD permite el uso de capas en sus diseños, lo cual es de gran utilidad a la hora de trabajar con diferentes dominios limitados a su vez por diferentes contornos. Por sencillez, se utilizará una capa para cada contorno. En concreto tres, una para la tapa superior y la pared, otra para la tapa inferior y la última para la superficie libre. En la barra de herramientas superior se encuentra el botón que activa la ventana de capas (Figura C.3) o bien mediante el menú **Utilidades** → **Capas**

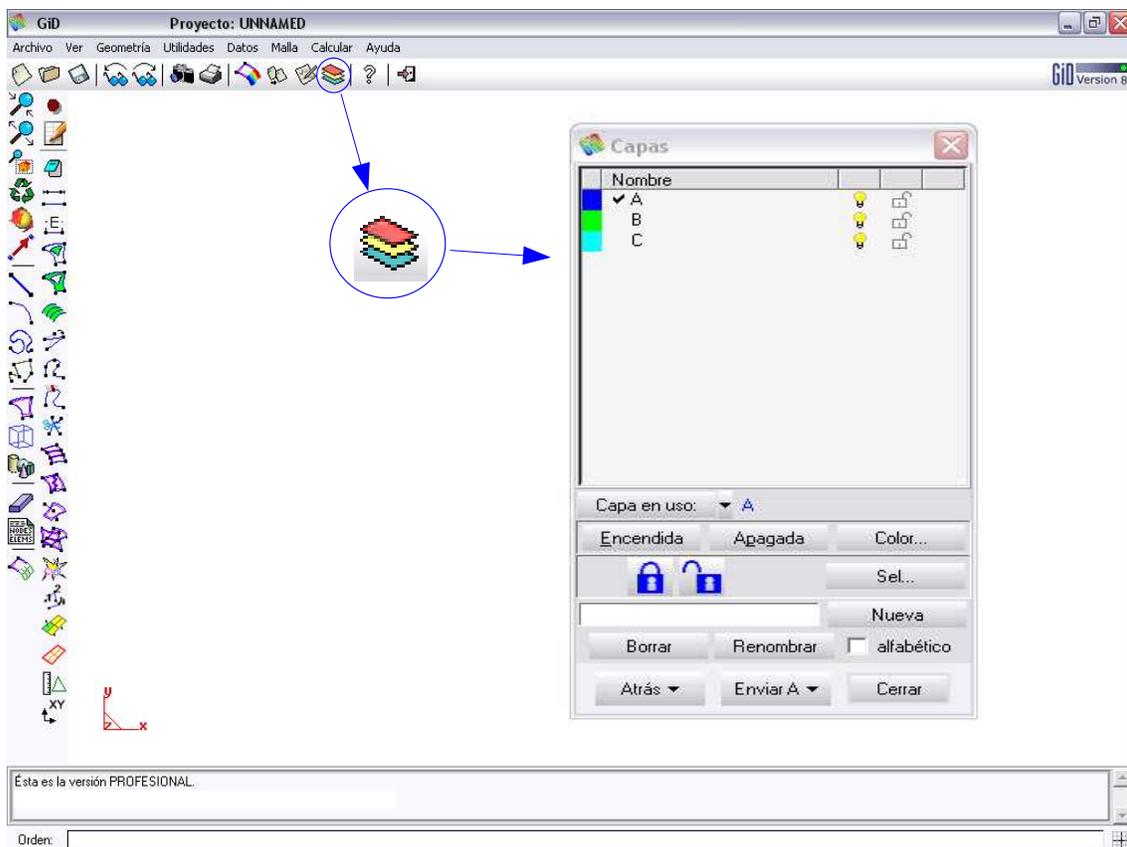


Figura C.3: Ventana principal y menú de capas

En este menú se pueden crear las diferentes capas a utilizar, para ello se introduce el nombre en el espacio correspondiente y se presiona el botón 'Nueva'. En esta misma ventana es donde se elige la capa en la cual se van a incluir las entidades que se dibujen a partir de ese momento (mediante un doble click en la capa deseada o mediante el botón 'Capa en Uso', así como la opción de ocultar capas a la vista, bloquearlas, renombrarlas, etc.

### C.1.3. Líneas

Una vez elegida la capa A, se procede a dibujar el contorno correspondiente, para ello, se elige la opción **Geometría** → **Crear** → **Línea Recta**, o se hace click en el botón correspondiente en la barra de herramientas.

Se introducen en la línea de comandos las coordenadas correspondientes a los puntos inicial y final de la línea deseada, en este caso  $(0,0,50)$   $(0,15,50)$ . Aquí bien se puede pulsar la tecla 'Esc' o el botón intermedio del ratón, para indicar que la línea está terminada; o bien se introduce la siguiente coordenada  $(0,15,0)$  y el programa trazará la línea que marca el perfil de la pared del cilindro. Si se opta por la primera opción, a la hora de dibujar la otra línea, aparece la opción de unirla con la primera o crear una línea totalmente independiente. Esto último quiere decir que en el punto de unión en realidad serán dos puntos situados en las mismas coordenadas.

Dado que el plano inicial mostrado por el programa es el XY, y se ha trazado una línea perpendicular a él, la perspectiva de esta será la de un punto, así que a fin de obtener otra vista desde la que tener una idea de como se desarrolla el dibujo, se deben utilizar las opciones de **Zoom**, y **Rotar**, en el submenú **Ver** o en el menú contextual (botón derecho del mouse). En la figura C.4 se muestra como quedaría la línea descrita vista desde una perspectiva isométrica.

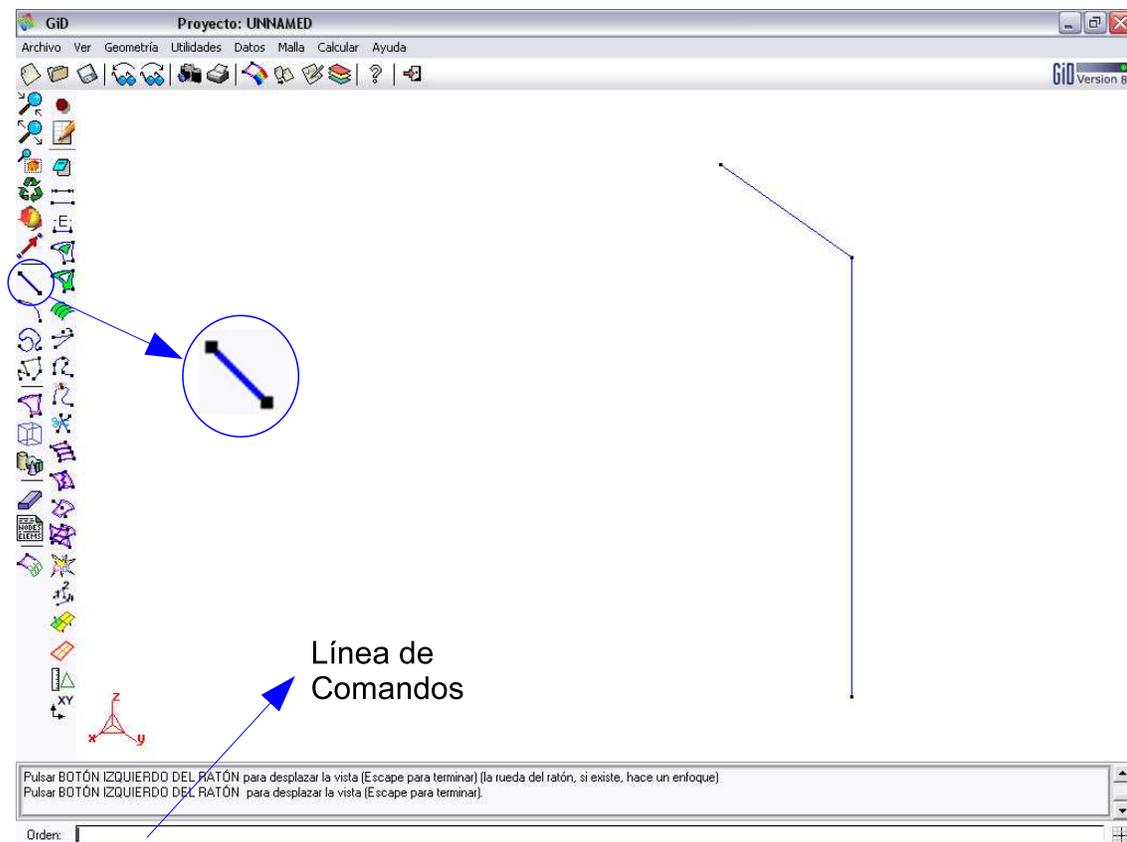


Figura C.4: Crear una Línea

### C.1.4. Copiar, Rotar y Extruir

El menú copiar de GiD, es una de las herramientas de diseño más versátiles que posee. Se accede a él mediante el botón '**Copiar**' o a través del menú **Utilidades** → **Copiar**. El objetivo en esta figura, es generar una superficie de revolución alrededor del eje Z cuya generatriz es la línea dibujada en la sección anterior. Para esto se selecciona *líneas* en la pestaña de entidades (objeto que se desea copiar); y la opción *rotación* en la pestaña de transformación (en esta pestaña se admiten múltiples opciones como simetría, traslación etc.). Una vez hecho esto, el menú se transforma, y aparece la opción de ángulo, que indica que arco abarcará la rotación (en este caso  $90^\circ$ ). En los puntos siguientes se deben introducir coordenadas del eje alrededor del cual se efectuará el giro. Bastará con introducir un valor positivo en la coordenada z del primer punto. Se debe tener en cuenta como se define el eje, ya que en función de su dirección el giro se definirá positivo en un sentido o en el contrario. En la opción de extruir se selecciona *Superficies*, serán generadas tantas superficies como líneas roten. Por último se hace click en seleccionar, se marcan las dos líneas dibujadas,

y al pulsar en el botón terminar, queda el diseño tal y como aparece en la figura C.5.

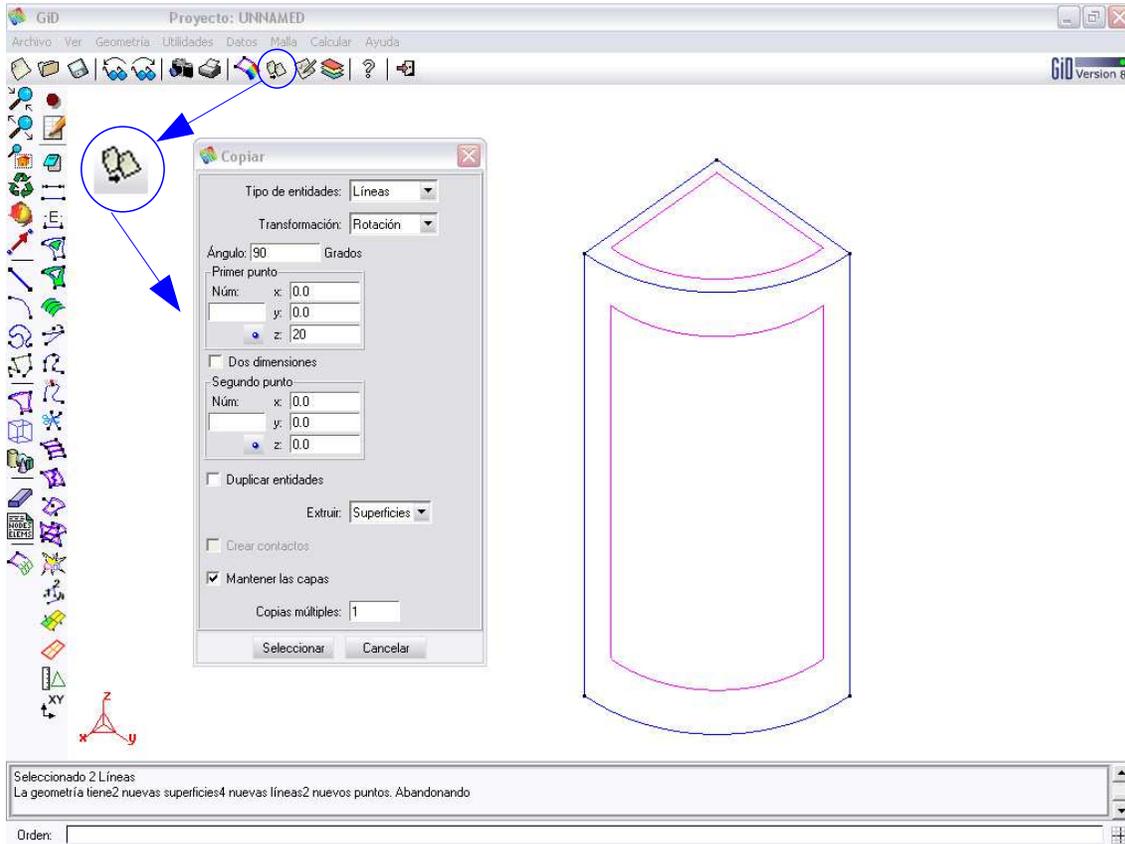


Figura C.5: Copiar, Rotar y Extruir

La numeración de entidades se otorga en función del orden en que han sido creadas. Este factor es muy importante a la hora de mallar la superficie, ya que los elementos seguirán el mismo orden en el que hayan sido creadas. Las normales de las superficies quedan definidas por el sentido de giro por el cual se ha conformado. Todas estas propiedades pueden consultar mediante el comando **Utilidades** → **Listar**, específicamente también se puede pintar en el modelo las normales de cada superficie mediante **Ver** → **Normales** → **Superficies**.

### C.1.5. Figura

Para terminar la figura, sólo es necesario repetir los paso anteriores en las otras dos capas (**B**, y **C**) con una línea en cada una, las coordenadas de la línea generatriz de la tapa inferior serán  $(0,0,0)$ ,  $(0,15,0)$ . Y las de la superficie libre  $(0,15,0)$ ,  $(0,100,0)$ .

Es recomendable desactivar la capa anterior en la que se ha trabajado, y así quitar de la vista del dibujo líneas que pueden complicar el diseño. En el menú **Ver** → **Iluminación** existen algunas opciones que permiten darle otro aspecto al modelo, sustituyendo el conjunto de líneas de colores que representan las diferentes entidades, por una iluminación orientable de las diferentes superficies, quedando con el aspecto que aparece en el lado derecho de la figura C.6

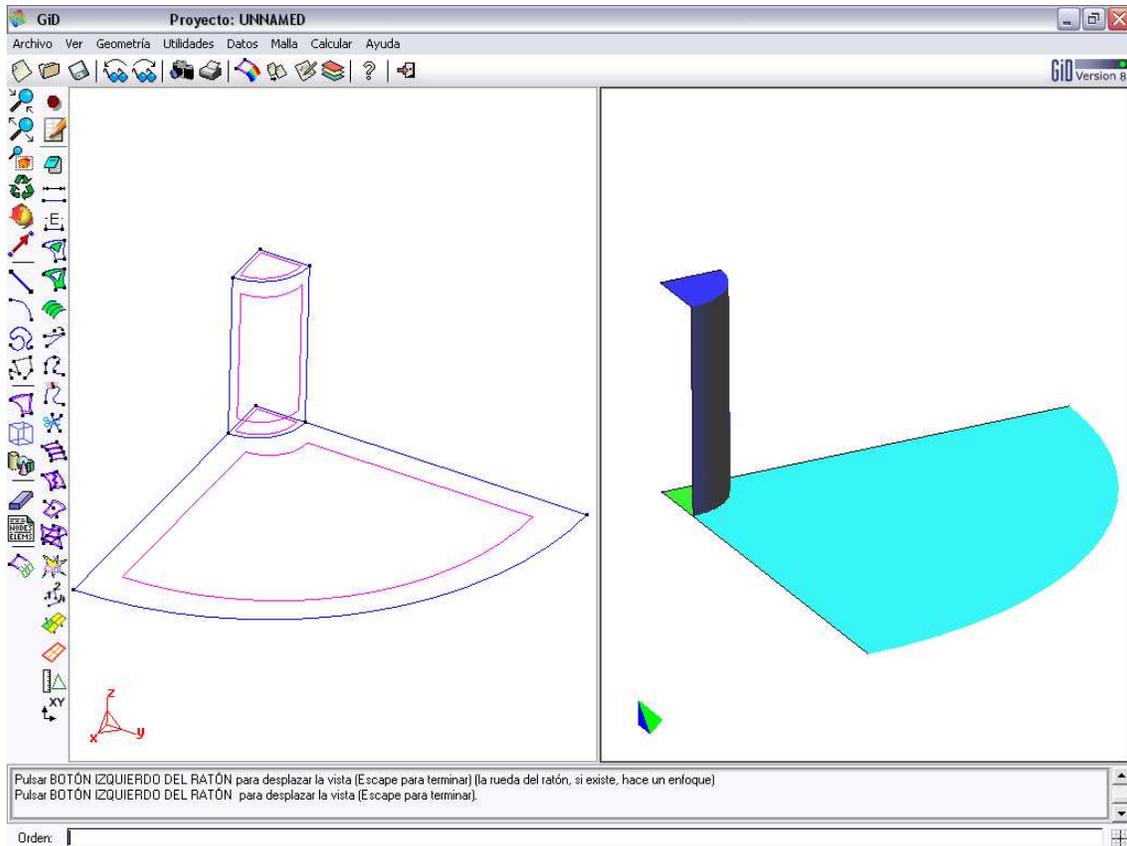


Figura C.6: Figura Terminada

Se puede apreciar el contorno **A** en color azul, el contorno **B** en color verde y el contorno **C** en color cyan.

## C.2. MALLADO DE LA GEOMETRÍA

Una vez se tiene definida por completo la geometría del modelo, el siguiente y más importante paso es realizar la malla. Para ello, el programa cuenta con un especializado menú. Se puede en un primer momento generar una malla automática, la cuál por defecto estará compuesta de elementos triangulares de tres nodos, para esto, simplemente se escoge la opción **Generar malla** dentro del menú **Malla**. En

el diálogo que aparece, sólo se tiene como opción el tamaño medio de elemento. Si se opta por un tamaño de elemento igual a 5 se obtiene una malla bastante densa como se muestra en la figura C.7

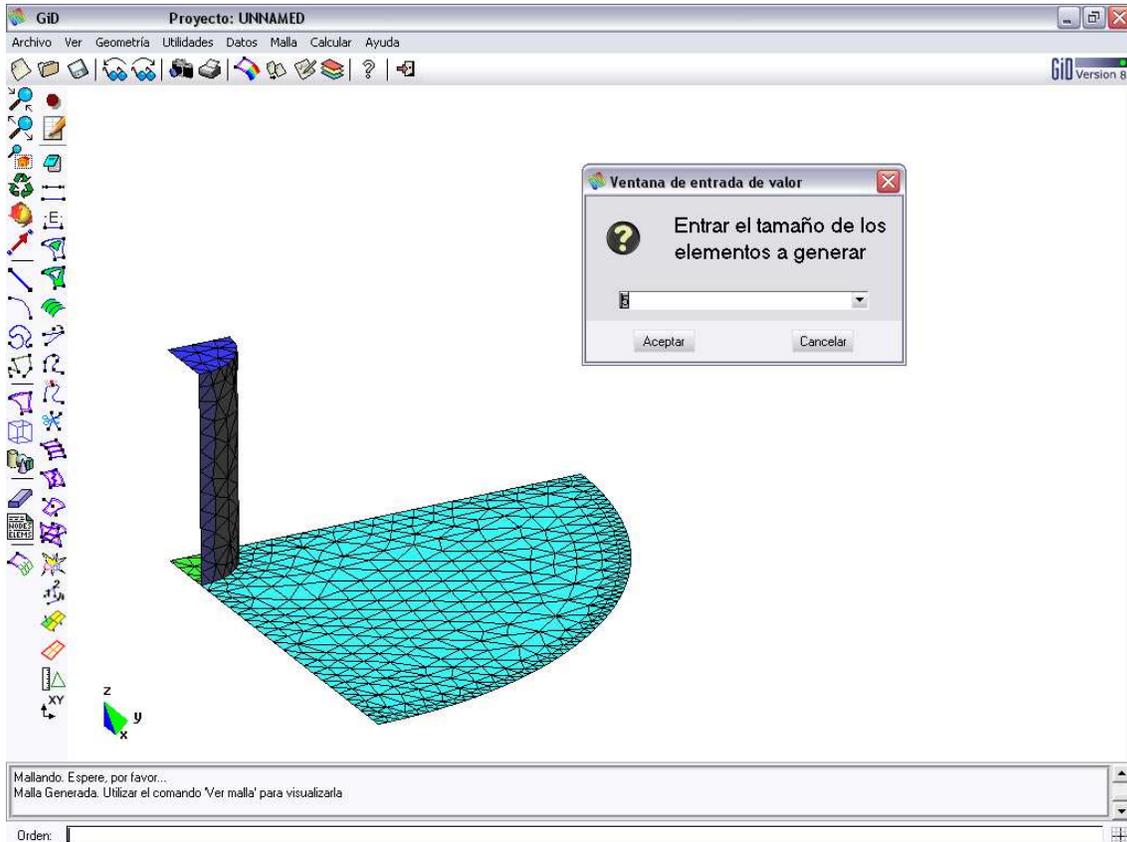


Figura C.7: Mallado por defecto

Un requisito del programa utilizado es que la malla sea definida con elementos cuadráticos de 6 o 9 nodos, para ello, se debe activar en el menú **Malla** → **Elementos cuadráticos** la opción **Cuadrático 9**. A partir de este momento, cualquier malla que se genere estará compuesta por este tipo de elementos. La filosofía del programa durante este proceso es que toda variación que se le aplique al modelo, permanecerá hasta que se aplique una posterior que la modifique o se restablezcan los valores por defecto a través del comando **Malla** → **Eliminar datos mallado**. Así pueden ir aplicándose cambios en la malla y ver los resultados al generarla sin necesidad de repetir todos los pasos en cada proceso.

Empezando con el lateral del cilindro, se elige en el menú **Malla** → **Estructurada** → **Superficies** → **Asignar**, y se elige la o las superficies deseadas. Al presionar

‘Esc’ para confirmar la selección, se activa un menú que pregunta por el número de divisiones a aplicar; se introduce un 6, que serán las divisiones en los laterales. Una vez hecho se hace click en asignar y se selecciona uno de los laterales (al ser una superficie de 4 lados la opuesta se selecciona automáticamente), con la tecla ‘Esc’ se indica el final de la elección. Se ofrece la posibilidad de repetir la asignación de divisiones volviendo al menú anterior, ante lo cual bien se elige continuar repitiendo el proceso anterior, o bien se elige cerrar. En este caso se repite el proceso asignando 4 divisiones a la parte superior e inferior de la pared del cilindro. Tras generar de nuevo la malla se obtiene la figura C.8

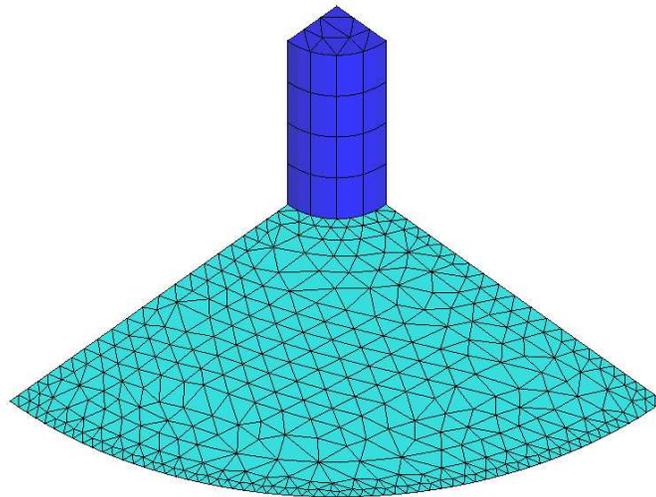


Figura C.8: Mallado Estructurado en la cara del cilindro

La función de ‘Superficie estructurada’ posee la particularidad de que sólo se puede aplicar a superficies de 3 o 4 lados, en el primer caso se mallará la región con triángulos y en cada lado, el número de elementos será el mismo. En el segundo caso se mallará con cuadriláteros y se debe introducir las divisiones para dos lados que formen ángulo, los otros dos serán asignados automáticamente. Para mallar otro tipo de superficies se puede recurrir a ‘Líneas estructuradas’ en las que se aplica el número de divisiones que debe aparecer en cada línea del modelo, o bien utilizar la opción de ‘Malla no estructurada’ en la que se define el tamaño de los elementos ya sea en zonas cercanas a un punto, en una línea o en una superficie. Opciones muy adecuadas cuando se quiere modificar una malla estructurada realizada con anterioridad. Dentro de estas opciones de malla no estructurada esta contenida la de malla por error cordal, por la cual se genera la malla intentando aproximarse con

la mayor exactitud a la geometría definida. Acortando el tamaño de los elementos cuando el modelo posea esquinas o curvas complicadas.

Las tapas y la superficie libre se pueden mallar mediante superficies estructuradas. Como ya se ha explicado, las tapas resultarán en dos superficies con 16 elementos triangulares cada una (4 divisiones en cada lado) y el terreno tendrá 32 elementos cuadrangulares (4 en el lado más próximo al cilindro y su opuesto, y 8 en los lados libres). Pero para mejorar la distribución se recurre a la opción **Malla** → **Estructurada** → **Líneas** → **Concentrar Elementos**, con esto se pretende concentrar el número de elementos en un extremo de las líneas seleccionadas. Con ello se puede aumentar la concentración de elementos en una zona concreta o bien mejorar el aspecto de los cuadriláteros evitando deformaciones excesivas. En la figura C.9 se expone el aspecto final de la malla que ha servido de ejemplo. A la izquierda se muestra antes de concentrar los elementos en la zona más cercana al cilindro, y en la derecha una vez efectuado el cambio. La forma de los elementos se asemeja más a un cuadrado y existe mayor concentración de elementos en las zonas más cercanas a la estructura.

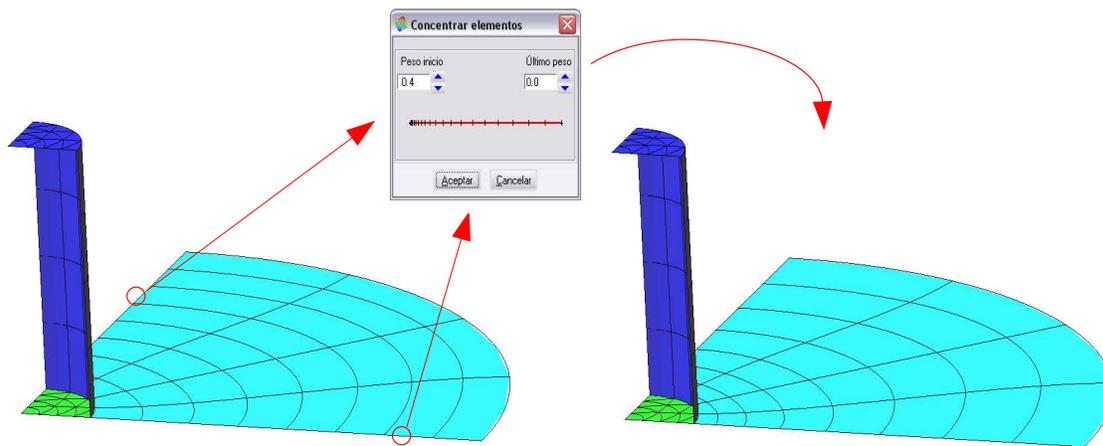


Figura C.9: Concentración de elementos

Hay que tener presente que una misma superficie no se puede mallar con diferentes tipos de elementos, es decir, no se puede tener una superficie en la que parte de los elementos sean triangulares y la otra parte cuadrangulares. Si se quiere que en un contorno se de esta situación, se debe prever con antelación y a la hora de diseñar la geometría definir varias superficies para un mismo contorno, (aunque formen

parte del mismo plano), que separen las zonas que serán malladas con elementos de 3 lados de las que lo serán con elementos de 4 lados. Siguiendo este procedimiento se mallaron los modelos de los problemas descritos en este proyecto. En ellos existe en las tapas de los cilindros una parte de elementos triangulares (la central) y otra parte de cuadrangulares (la más externa).

Por último, es muy útil y en ocasiones totalmente necesario, conocer la numeración de nodos y elementos, para ello se dispone de la herramienta en el menu contextual **Etiquetas**, que muestra el número de elementos y nodos ya sean todos los que aparecen en pantalla o bien seleccionados según el criterio del usuario (Figura C.10). Por otra parte si se ejecuta un comando de **Lista** sobre un elemento, se mostrarán los nodos que lo componen en su orden correspondiente.

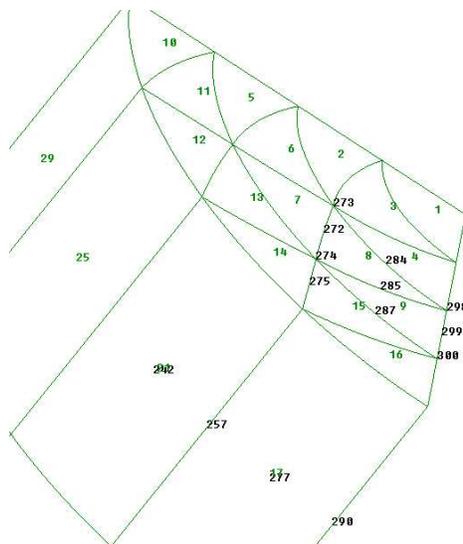


Figura C.10: Etiquetas de Nodos (en negro) y Elementos (en verde)







# Bibliografía

---

R. Abascal, “*Estudio de problemas dinámicos en interacción suelo-estructura mediante el método de los elementos de contorno*”, Tesis Doctoral, Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Sevilla, Spain, 1984.

M. Abramowitz y I. Stegun, “*Handbook of mathematical functions*”, Dover, New York, 1972.

J.D. Achenbach, “*Wave propagation in elastic soils*”, North-Holland, Amsterdam, 1973.

E. Alarcón, A. Martín y F. París, “*Boundary elements in potencial and elasticity theory*”, Computers and Structures, Vol.10, pp.351-362, 1979.

J.J. Aznárez, “*Efecto de los fenómenos de interacción incluyendo factores espaciales y sedimentos de fondo en la respuesta sísmica de presas bóveda*”, Tesis Doctoral, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 2002.

C.A. Brebbia & J. Domínguez, “*Boundary Elements. An introductory course*”, Second edition, Comput. Mech. Publ. and McGraw-Hill Book Comp., Southhampton and New York, 1992.

M. Cerrolaza y E. Alarcón, “*A bicubic transformation for the numerical evaluation of the Cauchy Principal Value Integrals in Boundary Elements*”, Int. J. Numer. Meth. Eng., 28:987-999, 1989.

F. Chirino, O. Maeso y J.J. Aznárez, “*Una técnica simple para el cálculo*

*de las integrales en el sentido del Valor Principal en el MEC 3D*", Revista Internacional Met. Num. para Cálculo y Diseño en Ingeniería, 16(1):77-95, 2000.

A.K. Chopra y P. Chakrabarti, "*Earthquake analysis of concrete gravity dams including dam-water-foundation rock interaction*", Earthquake Eng. and Struct. Dyn., 9(4):363-383, 1981.

T.A. Cruse y F.J. Rizzo, "*A direct formulation and numerical solution of the General Transient Elastodynamic Problem I*", J. Math. Anal. Appl., 22:244-259, 1968.

T.A. Cruse, "*Numerical solutions in Three Dimensional Elastostatics*", Int. J. Numer. Meth. Eng., 5:1259-1274, 1969.

P.J. Davis y P. Rabinowitz, "*Methods of numerical integration*", Academic Press, Orlando, Florida, 1984.

J. Domínguez, "*Twenty Five Years of BEM for Dynamic Soil-Structure Mechanics. Boundary Element Methods for Soil-Structure Interaction*", Dordrecht. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers. pp. 1-51, 2003.

J. Domínguez, "*Boundary elements in dynamics*", Southampton, New York, Computational Mechanics Publications & Elsevier Applied Science; 1993.

J.M. Doyle, "*Integration of Laplace Transformed Equations of classical Elastokenetics*", J. Math. Anal. Appl., 13:118-131, 1966.

J.M. Emperador, "*El Método de los Elementos de Contorno en problemas elastodinámicos con simetría de revolución*", Tesis Doctoral, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 1988.

A.C. Eringen & E.S. Suhubi, "*Elastodynamics*", Vol.2, Linear theory, Academic press, New York, 1975.

J.C. Lachat y J.O. Watson, “*Effective numerical treatment of boundary integral equations*”, Int. J. Numer. Eng., 10:991-1005, 1976.

H.B. Li, G.M. Han y H.A. Mang, “*A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the Direct Boundary Element Method*”, Int. J. Numer. Meth. Eng., 21:2071-2098, 1985.

O. Maeso, “*Modelo para el análisis sísmico de presas bóveda incluyendo los efectos de interacción suelo-agua-estructura*”, Tesis Doctoral, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 1992.

O. Maeso, J.J. Aznárez & J. Domínguez, “*Effects of space distribution of excitation on seismic responses of arch dams*”, J Eng Mech, 128:759-768, 2002.

O. Maeso, J.J. Aznárez & J. Domínguez, “*Three-dimensional models of reservoir sediment and effects on the seismic response of arch dams*”, Earthquake Eng Struct Dyn, 33:1103-1123, 2004.

L.A. Padrón, “*Cálculo de estructuras de barras incluyendo efectos dinámicos de interacción suelo-estructura. Modelo mixto de Elementos Finitos y Elementos de Contornos*”, Proyecto Fin de Carrera, E.T.S.I.I. de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España, 2004.

F. París, “*El Método de los Elementos de Contorno en la Teoría del Potencial y la Elasticidad*”, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1978.

F. París, “*Teoría de la Elasticidad*”, E.T.S.I.I. de Sevilla, España, 1998.

G.G. Stokes, “*On the dynamical theory of diffraction*”, Trans. Cambridge Philos. Soc., Vol.9, pp.1-62, 1849.

A.H. Stroud y D. Secrest, “*Gaussian quadrature formulas*”, Prentice-Hall, New York, 1966.

J.C. Telles, “*A self-adaptative coordinate transformation for efficient evaluation of general Boundary Element integrals*”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*,24:937-959, 1987.

L.T. Wheeler y E. Sternberg, “*Some theorems in classical Elastodynamics*”, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 31:51-90, 1968.

“*User Manual of GID*”, CIMNE, Barcelona, 2006.

“*Reference Manual of GID*”, CIMNE, Barcelona, 2006.