



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA  
Escuela de Ingenierías Industriales y Civiles



INSTITUTO UNIVERSITARIO  
**SIANI**  
INGENIERIA COMPUTACIONAL

INGENIERÍA INDUSTRIAL

PROYECTO FINAL DE CARRERA

**FORMULACIÓN Y CALIBRACIÓN DE UN  
MODELO PARAMÉTRICO DE INTERACCIÓN  
SUELO-ESTRUCTURA SIMPLIFICADO PARA  
EL ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA  
DE ESTRUCTURAS ENTERRADAS**

AUTOR: MARÍA CASTRO FERNÁNDEZ

TUTOR: JUAN JOSÉ AZNÁREZ GONZÁLEZ

TUTOR: JACOB DAVID RODRÍGUEZ BORDÓN

DIVISIÓN DE MECÁNICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS Y ESTRUCTURAS

LAS PALMAS DE GRAN CANARIA, 21 ABRIL 2017



# AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación obtenida del Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO) y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) a través del Proyecto de Investigación BIA2014-57640-R.

Así, quiero agradecer a los miembros del SIANI en general y a los miembros de la División de Mecánica de los Medios Continuos y Estructuras en particular, por permitirme compartir con ellos ésta experiencia, haciendome sentir *una más del grupo*.

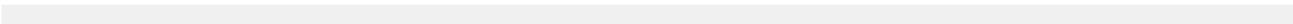
A mis tutores, Juan José Aznárez González y Jacob David Rodríguez Bordón, por ser tan buenos profesionales como personas. Por inspirarme.

A Guillermo Álamo Meneses y Francisco González Pérez, también, por sus consejos y buen humor. Por su ayuda.

A mi familia por su apoyo imprescindible, tanto en lo personal como en lo económico. Especialmente a mi abuela, con el "bendito 5", y a mi abuelo, que tanto me entendía.

A mis amigos y pareja, por serlo siempre, en mis buenas y en mis malas. Por apoyarme cuando más lo he necesitado.

A todos les digo: **mil gracias**, porque me hacen entender lo que es *ir a hombros de gigantes*.



# ÍNDICE DE CONTENIDOS

<b>Presentación del documento</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Sumario . . . . .	1
1.2. Antecedentes y justificación . . . . .	1
1.3. Objetivos . . . . .	2
<b>2. Formulación del modelo</b>	<b>3</b>
2.1. Definición del problema . . . . .	3
2.1.1. Ecuación de comportamiento del pilote . . . . .	4
2.1.2. Condiciones de contorno . . . . .	8
2.1.3. Excitación . . . . .	9
2.1.4. Interacción suelo-estructura . . . . .	10
2.2. Formulación de la ecuación general de gobierno . . . . .	18
2.3. Resolución analítica . . . . .	20
2.4. Variables de salida del modelo . . . . .	25
<b>3. Verificación del modelo</b>	<b>27</b>
3.1. Modelo de referencia: BEM-BEM . . . . .	27
3.2. Estimación del error . . . . .	30
<b>4. Implementación</b>	<b>33</b>
4.1. Modelo de referencia BEM-BEM . . . . .	33
4.2. Modelo analítico, error y optimización . . . . .	34
4.2.1. Minimización por barrido . . . . .	35
4.2.2. Minimización usando <i>fmincon</i> . . . . .	36
<b>5. Resultados</b>	<b>37</b>
5.1. Casos estudiados: configuraciones físicas . . . . .	37
5.2. Respuesta de los modelos Winkler y Pasternak . . . . .	38
5.2.1. Dependiendo de la frecuencia . . . . .	38
5.2.2. Dependiendo de la configuración física . . . . .	38
5.2.3. Dependiendo de la variable a optimizar . . . . .	41
5.3. Medida del error . . . . .	41
5.3.1. Relación con $S_P$ . . . . .	41
5.3.2. Dependiendo de la frecuencia . . . . .	45
5.3.3. Dependiendo de la configuración física . . . . .	45
5.3.4. Dependiendo de la variable a optimizar . . . . .	46
5.4. Evolución de $S_P$ . . . . .	50
5.4.1. Dependiendo de la frecuencia . . . . .	50

## ÍNDICE DE CONTENIDOS

---

5.4.2. Dependiendo de la variable a optimizar . . . . .	51
5.4.3. Dependiendo de la configuración física . . . . .	51
<b>6. Conclusiones</b>	<b>55</b>
6.1. Sobre el modelo analítico propuesto . . . . .	55
6.2. Líneas futuras . . . . .	56
<b>Referencias</b>	<b>58</b>
<b>A. Código MatLab generado</b>	<b>59</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Deformación de viga Euler-Bernoulli . . . . .	4
2.2. Equilibrio en el elemento diferencial de viga Euler-Bernoulli . . . . .	5
2.3. Deformación de viga Timoshenko . . . . .	6
2.4. Equilibrio en el elemento diferencial de viga Timoshenko . . . . .	7
2.5. Esquema de problema completo de interacción . . . . .	8
2.6. Interacción suelo-estructura tipo Winkler . . . . .	11
2.7. Discontinuidad debida a modelo tipo Winkler . . . . .	12
2.8. Interacción suelo-estructura tipo Pasternak . . . . .	12
2.9. Interacción suelo-estructura tipo Veletsos . . . . .	12
2.10. Elemento diferencial de la capa de cortante . . . . .	13
2.11. Modos de vibración del elemento de viga considerados . . . . .	14
2.12. Tensiones rasantes sobre el fuste del pilote . . . . .	15
2.13. Esquema general del problema propuesto . . . . .	18
2.14. Elemento de viga Timoshenko, considerando las inercias . . . . .	19
3.1. Mallas MEC multiregión: (Izquierda) Perspectiva de la malla usada, describiendo un cuarto del dominio (Derecha) Detalle sección transversal del pilote, con secciones intermedias. . . . .	30
4.1. Proceso de optimización del modelo, identificando el $S_P$ que minimiza el error. . . . .	34
5.1. Respuesta del modelo optimizado. Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.4$ , $a_0^* = 0.01$ , optimizando M . . . . .	39
5.2. Respuesta del modelo optimizado. Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.4$ , $a_0^* = 0.29$ , optimizando M . . . . .	39
5.3. Respuesta del modelo optimizado. Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.4$ , $a_0^* = 0.65$ , optimizando M . . . . .	40
5.4. Respuesta del modelo optimizado. Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.4$ , $a_0^* = 1.00$ , optimizando M . . . . .	40
5.5. Comparativa de respuesta variando $L/D$ . Datos de entrada: $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.4$ , $a_0^* = 1.00$ , optimizando u . . . . .	42
5.6. Comparativa de respuesta variando $E_p/E_s$ . Datos de entrada: $L/D = 20$ , $\nu = 0.4$ , $a_0^* = 1.00$ , optimizando u . . . . .	42
5.7. Comparativa de respuesta variando $\nu$ . Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $a_0^* = 1.00$ , optimizando u . . . . .	43
5.8. Resultados optimizando el desplazamiento (u). Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.4$ , $a_0^* = 1.00$ . . . . .	43
5.9. Resultados optimizando el giro ( $\theta$ ). Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.4$ , $a_0^* = 1.00$ . . . . .	44

5.10. Resultados optimizando el cortante (V). Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.4$ , $a_0^* = 1.00$ . . . . .	44
5.11. Error respecto al $S_P$ usado para su obtención. Datos obtencion. . . . .	45
5.12. Errores obtenidos de comparar el modelo Winkler y Pasternak con el BEM- BEM. Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.4$ , optimizando M. . . . .	46
5.13. Comparativa de errores variando $L/D$ . Datos de entrada: $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.40$ , optimizando u . . . . .	47
5.14. Comparativa de errores variando $E_p/E_s$ . Datos de entrada: $L/D = 20$ , $\nu = 0.40$ , optimizando u . . . . .	47
5.15. Comparativa de errores variando $\nu$ . Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s =$ $100$ , optimizando u . . . . .	48
5.16. Comparativa optimizando el cortante (V) cuando se prescinde de cabeceo y tensiones rasantes. Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $\nu_s = 0.4$ . . . . .	49
5.17. Comparativa optimizando el flector (M) cuando se prescinde de cabeceo y tensiones rasantes. Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.4$ . . . . .	49
5.18. $S_P$ frente a la frecuencia. Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.4$ , optimizando u. . . . .	50
5.19. Comparativa $S_P$ óptimo calculado en función de la variable a optimizar. Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , $\nu = 0.4$ . . . . .	51
5.20. Comparativa de $S_P$ variando $L/D$ . Datos de entrada: $E_p/E_s = 100$ , $\nu =$ $0.40$ , optimizando u . . . . .	52
5.21. Comparativa de $S_P$ variando $E_p/E_s$ . Datos de entrada: $L/D = 20$ , $\nu =$ $0.40$ , optimizando u . . . . .	53
5.22. Comparativa de $S_P$ variando $\nu$ . Datos de entrada: $L/D = 20$ , $E_p/E_s = 100$ , optimizando u . . . . .	53

# ÍNDICE DE TABLAS

5.1. Datos constantes en todas las configuraciones físicas ensayadas. . . . .	37
5.2. Datos que varían según la configuración físicas que se ensaye. . . . .	38
5.3. Comparativa de la mejora en el error medio obtenido para cada variable de salida, según la variable respecto a la que se optimice. Datos de entrada: $L/D = 20, E_p/E_s = 100, \nu = 0.4$ . . . . .	48



# PRESENTACIÓN DEL DOCUMENTO

El presente proyecto se divide en 6 capítulos:

- **Capítulo 1.** Se introduce el tema y se exponen las razones que llevan a la realización de éste proyecto.
- **Capítulo 2.** Se explica, formula y resuelve analíticamente el modelo propuesto.
- **Capítulo 3.** Se valida el modelo propuesto: se presenta el modelo de referencia y se explica la medida de error.
- **Capítulo 4.** Se explica cómo se implementan el modelo propuesto y de referencia, así como la medida del error y la optimización.
- **Capítulo 5.** Se muestran los resultados más relevantes y comentan.
- **Capítulo 6.** Se detallan las conclusiones y futuras líneas de investigación.



# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Sumario

En el presente Proyecto Final de Carrera (PFC), se formula un modelo que representa el comportamiento dinámico de un pilote aislado cuando se le aplica una onda incidente vertical SH. El pilote se formula como una viga Timoshenko con masa y la interacción suelo-estructura comprende un planteamiento tipo Pasternak, que tiene en consideración cabeceo y tensiones rasantes sobre el pilote.

Se busca un modelo puramente analítico cuyos resultados sean aceptablemente parecidos a los obtenidos con métodos de resolución numéricos más rigurosos. Para ello, se usan impedancias de Novak, salvo en el segundo coeficiente de Pasternak, que se identifica.

El resultado es un modelo que mejora sensiblemente los resultados de uno Winkler, siempre que la frecuencia de estudio no sea baja, sin llegar a igualar la calidad de los datos a los obtenidos con la referencia.

### 1.2 Antecedentes y justificación

El PFC que se propone se integra en la línea de trabajo que llevan a cabo los miembros de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del SIANI en el campo de la dinámica de estructuras y, en particular, en el estudio de la influencia de los fenómenos de interacción suelo-estructura en la respuesta dinámica de estructuras enterradas.

Se busca desarrollar un modelo simple alternativo a un modelo general de medio continuo, pero suficientemente preciso para estimar la respuesta sísmica de una estructura enterrada. Ello reduce la necesidad de acudir a métodos numéricos complejos y computacionalmente más costosos, y permite analizar e incorporar de forma intuitiva las propiedades dinámicas más importantes del sistema. Se considera el estudio de la respuesta sísmica de tipologías estructurales muy habituales como son pozos, silos enterrados, estaciones de bombeo, etc., cuyo colapso representaría un importante riesgo para la población.

En concreto, se propone la formulación, implementación y calibración de un modelo paramétrico (tipo Pasternak) para la determinación de la respuesta sísmica de una estructura enterrada en un semiespacio homogéneo. Por su facilidad de implementación, un modelo de estas características resultaría de gran interés para la comunidad técnica en ingeniería sísmica y estructural. Por calibración se entiende la identificación de los parámetros del modelo que permitan ajustar la respuesta del mismo a la obtenida con otros modelos más rigurosos de medio continuo ya desarrollados previamente por el Grupo. Esta identificación se realizará en un ámbito de propiedades y dimensiones del problema con interés en la práctica.

Este PFC es continuación de otro PFC previo desarrollado por Ariel Santana Naranjo y titulado 'Modelo simple para el cálculo de la respuesta dinámica de estructuras enterradas', presentado en la EIIC el 16 de septiembre de 2009. Avanza en el desarrollo matemático del modelo y propone una estrategia para la identificación de los parámetros del mismo utilizando como referencia resultados obtenidos con modelos más rigurosos.

### 1.3 Objetivos

En este PFC se proponen una serie de objetivos en una secuencia tal que:

1. Repasar las bases teóricas de la dinámica de estructuras de barras. Esta materia forma parte de la asignatura 'Teoría de Estructuras y Construcciones Industriales' que se ha cursado en la titulación, si bien se requiere un nivel de comprensión más profundo de estos contenidos para abordar el proyecto que se propone.
2. Por las mismas razones, presentar los modelos de Elementos de Contorno desarrollados por el Grupo, con la idea de utilizar sus resultados como referencia en el proceso de identificación paramétrica.
3. Formulación del modelo paramétrico en el dominio de la frecuencia para el análisis del problema de interacción suelo-estructura correspondiente a una estructura enterrada sometida a carga sísmica. Las estructuras analizadas, por sus dimensiones, pueden simularse mediante un modelo tipo viga. Dicha viga se formulará en sentido amplio considerando deformación por cortante (modelo Timoshenko). El terreno y la interacción con la estructura se formula a través de un modelo discreto multi-paramétrico: la rigidez de un perfil de suelo con deformación transversal + resortes y amortiguadores en serie y excitados por el campo incidente consistente en una onda de corte armónica que se propaga verticalmente en el suelo.
4. Implementación de las ecuaciones resultantes y solución analítica de las mismas. Verificar el modelo a partir de problemas con solución de referencia.
5. Implementación del estudio de sensibilidad del modelo con los parámetros del modelo. Determinación de los valores de dichos parámetros que minimicen las diferencias con los resultados obtenidos del modelo de continuo de elementos de contorno (riguroso) utilizado como referencia en un rango de propiedades y dimensiones de interés práctico.

## FORMULACIÓN DEL MODELO

En éste capítulo se introducen los elementos de los que se compone el modelo; se detalla el desarrollo matemático que lleva a la definición y resolución del problema.

### 2.1 Definición del problema

Se tiene un pilote de fricción aislado, macizo y cilíndrico completamente enterrado, perpendicularmente respecto a nivel de rasante. Se encuentra inmerso en el terreno, sin encontrar cambios de estrato a lo largo del fuste y en contacto completo con éste (unión soldada). Tanto pilote como suelo se consideran linealmente elásticos, isotrópicos y homogéneos.

Se plantea pues un modelo para estudiar su respuesta dinámica frente a la incidencia vertical de una onda SH armónica, en toda la longitud del pilote.

Este planteamiento inicial podría bien ser el usado por Ariel Santana [10]. En dicho PFC se estudia el comportamiento de un pilote con baja relación longitud-diámetro ( $L/D$ ), que cumple las premisas de la teoría de vigas clásica.

Sin embargo, la principal diferencia con el presente PFC es que se pretende buscar una resolución puramente analítica, de forma que se haga una representación de la realidad que sea por lo menos tan fiable como la de partida. Para ello, se tiene presente lo expuesto en trabajos de Hetenyi, Veletsos, Mylonakis, Vlasov-Leontiev, Kerr, entre otros (Véase la bibliografía).

El método a seguir es plantear el contacto entre suelo y estructura (modelando cada uno por separado y luego poniéndolos en común), de lo cual surge la ecuación diferencial a la que se aplican condiciones de contorno (CC) para solucionarla [12].

Por tratarse de un problema de interacción suelo-estructura y aplicándose una excitación de tipo armónico, éste se resuelve en el dominio de la frecuencia. Es práctica habitual, pues los fenómenos físicos que se quiere representar se ven fuertemente influenciados por la frecuencia.

## 2 Formulación del modelo

Así pues, antes de entrar a formular el modelo, se considera adecuado detallar más detenidamente cómo y porqué se decide incluir algunos de los componentes del mismo. Véase a continuación:

### 2.1.1 Ecuación de comportamiento del pilote

El pilote se modela como una viga, que en nuestro caso se encuentra enterrada.

#### 2.1.1.1 Euler-Bernoulli

A menudo se considera la viga a flexión, conocida como Euler-Bernoulli (E-B) en la teoría clásica de vigas [9]. Se basa en 3 hipótesis:

- Los desplazamientos en la dirección del eje y de todos los puntos de una sección transversal son iguales a los del punto de corte entre el eje longitudinal  $x$  de la viga y dicha sección.
- El desplazamiento lateral en la dirección  $z$  de cualquier punto es nulo.
- Las secciones transversales planas y normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación.

Cuya representación gráfica se muestra en la figura 2.1.

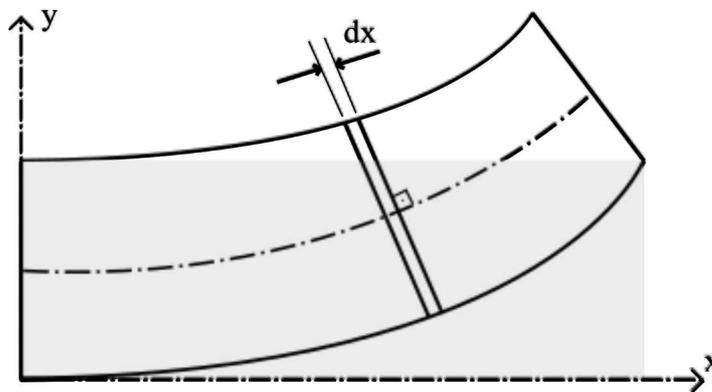


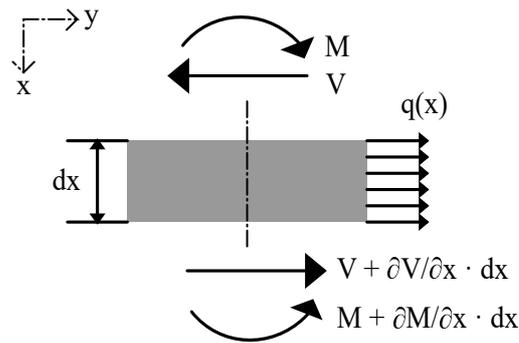
Figura 2.1: Deformación de viga Euler-Bernoulli

Nótese que en éste tipo de viga se desprecia la deformación debida a los esfuerzos cortantes, por lo que el giro de la sección depende meramente de la flexión, de forma que éste se define directamente como se muestra en la ecuación 2.1:

$$u_x = -y \cdot \theta \quad (2.1)$$

Por ello, la ecuación diferencial que se obtiene es relativamente sencilla y funciona bastante bien para vigas esbeltas o muy esbeltas.

Véase, pues, la representación analítica del comportamiento de éste tipo de viga. Se plantea el equilibrio transversal de la sección representada en la figura 2.2:



**Figura 2.2:** Equilibrio en el elemento diferencial de viga Euler-Bernoulli

$$(V + dV) - V + q(x)dx = 0 \rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} + q(x) = 0 \quad (2.2)$$

Para hallar la expresión del esfuerzo cortante, en cambio, se tiene de plantear equilibrio de momentos:

$$V = -EI \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} \quad (2.3)$$

Y sustituyendo 2.3 en 2.2, se tiene la ecuación de gobierno para una viga E-B, con una excitación  $q(x)$  y sin inercias, ni momento repartido:

$$EI \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} = q(x) \quad (2.4)$$

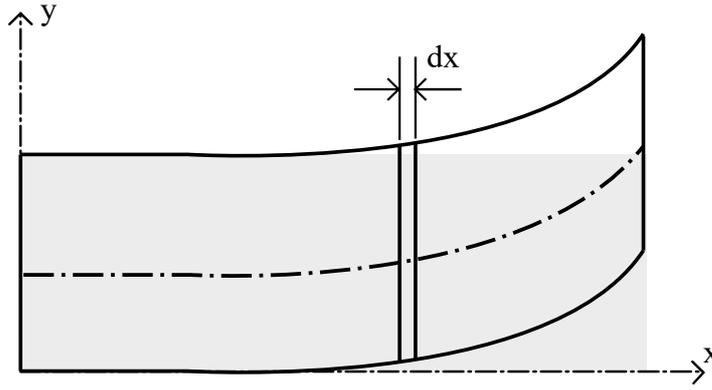
donde  $u_y$  es el desplazamiento transversal,  $E$  es el módulo de elasticidad del material e  $I$ , la inercia de la sección.

### 2.1.1.2 Timoshenko

Existe otro modelo de viga, el Timoshenko [14] [15], que considera el efecto en las deformaciones de esfuerzos flectores y cortantes, y cuya representación gráfica se muestra en la figura 2.3.

Además, las hipótesis de partida de Timoshenko difieren de las de E-B sólo en la posición que toma la sección tras la deformación. Véase:

- Los desplazamientos en la dirección del eje y de todos los puntos de una sección transversal son iguales a los del punto de corte entre el eje longitudinal  $x$  de la viga y dicha sección.
- El desplazamiento lateral en la dirección  $z$  de cualquier punto es nulo.
- Las secciones transversales planas y normales al eje de la viga antes de la deformación, siguen permaneciendo planas, pero *no necesariamente normales* al eje después de la deformación.



**Figura 2.3:** Deformación de viga Timoshenko

En éste caso debe tenerse cuidado. La consecuencia de no despreciar la deformación debida a los esfuerzos cortantes es que la ecuación de gobierno se complica un poco. Se puede observar formulando a partir de la definición de deformación longitudinal ( $\varepsilon_{xx}$ ) y distorsión angular ( $\gamma_{xy}$ ), siendo éstas:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -y \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\theta + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.6)$$

Según la ley de comportamiento elástico, la tensión normal ( $\sigma_{xx}$ ) y la tensión tangencial ( $\tau_{xy}$ ) que aparecen en la sección transversal son:

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} = -E \cdot y \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.7)$$

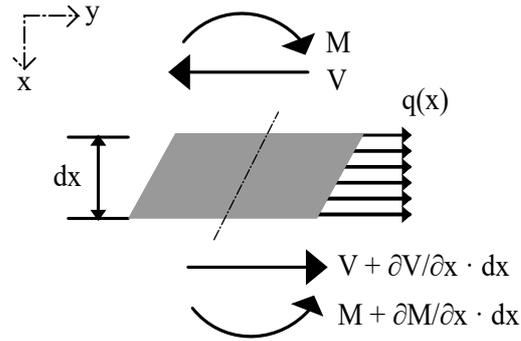
$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \theta \right) \quad (2.8)$$

Así pues, teniendo las expresiones 2.7 y 2.8, se puede hallar la expresión de los esfuerzos integrando para el área de la sección:

$$V = - \iint_A \tau_{xy} dA \rightarrow V = \kappa AG \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \theta \right) \quad (2.9)$$

$$M = \iint_A y \cdot \sigma_{xx} dA \rightarrow M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.10)$$

A partir de aquí, teniendo lo necesario ya preparado, podemos plantear las ecuaciones de equilibrio del elemento diferencial, tal como se ilustra en la figura 2.4:



**Figura 2.4:** Equilibrio en el elemento diferencial de viga Timoshenko

$$(V + dV) - V + q(x)dx = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} + q(x) = 0 \quad (2.11)$$

$$(M + dM) - M + Vdx = 0 \rightarrow \frac{dM}{dx} + V = 0 \quad (2.12)$$

Ahora, sustituyendo 2.9 en 2.11 y 2.9 en 2.10 y 2.12,

$$\kappa AG \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + q(x) = 0 \quad (2.13)$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \kappa AG \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \theta \right) = 0 \quad (2.14)$$

derivando dos veces la ecuación 2.13 y una, la ecuación 2.14,

$$\kappa AG \left( \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.15)$$

$$EI \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3} + \kappa AG \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.16)$$

y sustituyendo las expresiones de  $\partial^3 \theta / \partial x^3$  y  $\partial \theta / \partial x$  halladas en 2.15 y 2.16 respectivamente y ordenando los términos, se tiene:

$$EI \cdot \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} = -\frac{1}{\kappa AG} \cdot \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} + q(x) \quad (2.17)$$

que viene a ser la ecuación de gobierno para una viga Timoshenko, para una excitación  $q(x)$  y sin tener en cuenta inercias, ni momentos repartidos.

Nótese la diferencia entre la ecuación de gobierno E-B y la Timoshenko. Mientras en la E-B el esfuerzo aplicado a una derivada cuarta del desplazamiento equivale al esfuerzo repartido aplicado, en Timoshenko la relación no es tan directa.

Utilizar una viga E-B suele ser en términos generales suficientemente preciso pero, cuando se trabaja con estructuras poco esbeltas, despreciar los esfuerzos cortantes en la viga no es aconsejable, pues conduce a resultados alejados de la realidad.

Éste en el caso que desarrolla Santana en su Trabajo Fin de Master (TFM) [11], que trata el caso concreto de estructuras con gran canto, en cuyas conclusiones además propone tener más presentes los esfuerzos cortantes. Por ello y porque así se consigue un modelo que cubre más posibles circunstancias, se decide considerar en adelante el pilote como una viga Timoshenko.

2.1.2 Condiciones de contorno

Como se comenta anteriormente, las CC son necesarias para la resolución de la ecuación diferencial surgida de plantear contacto entre suelo y pilote. Los esfuerzos que soporta el mismo, considerándolo viga corta, vienen marcados por las condiciones consideradas en los extremos de la misma [12], por lo que la elección de unas CC u otras afecta sensiblemente al modelo y a los resultados que se obtienen.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que el problema de interacción completa con el terreno se compone de la interacción inercial y de la interacción cinemática [13], como se representa en la figura 2.5. Así, como explica Soriano:

*”Las ecuaciones de la interacción cinemática permiten calcular el movimiento con el que habría de resolverse las ecuaciones de la interacción inercial para tener una respuesta completa del sistema. La interacción cinemática tiene un efecto que equivale a modificar el movimiento de cálculo en el estudio de la interacción inercial.”*

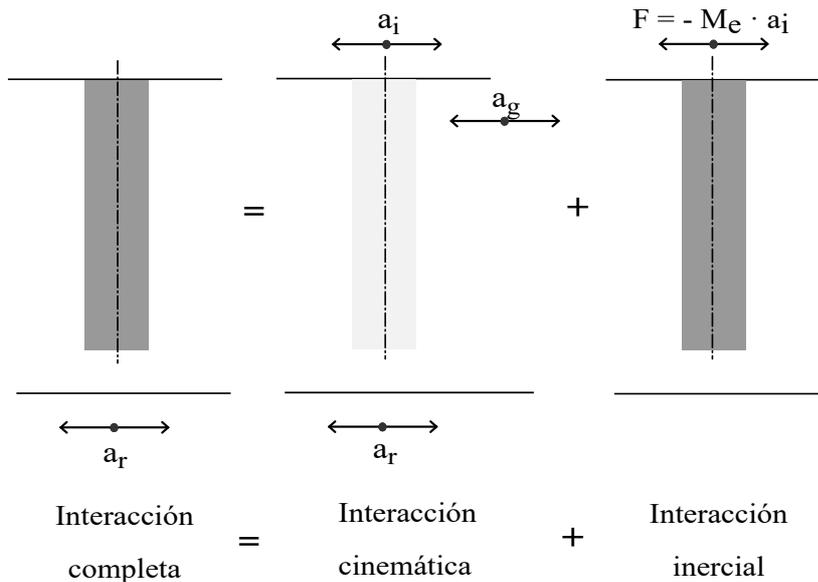


Figura 2.5: Esquema de problema completo de interacción

Dicha división normalmente se hace para poder estudiar detenidamente el efecto de la interacción inercial, pero no porque simplifique los cálculos necesariamente, pues se considera la resolución de la interacción cinemática de dificultad equivalente a resolver la interacción completa. Como los resultados pueden variar apreciablemente, se suele realizar estudio de sensibilidad para discernir si se puede prescindir o limitar el efecto de la interacción cinemática o no y si los datos obtenidos son fiables. Dicha interacción tiene el efecto de reducir las amplitudes, por lo que salvo que se trate de un caso en el que no sea posible por definición como, por ejemplo, cuando se trata de un análisis sísmico, el efecto se considera favorable.

Por todo ello, se decide buscar una situación intermedia y que por tanto, aún siendo una simplificación, contemple una interacción completa del terreno y estructura sin perder rigor. Así, se escogen unas CC que, estando a medio camino entre las aplicadas en un problema de interacción cinética y uno de interacción inercial, representen el problema de interacción completa. De esta manera, el extremo superior del pilote debería asegurar la estabilidad de la superestructura; mientras que el extremo inferior se encuentra sin roca madre bajo el mismo, ni ningún impedimento aparte del propio terreno para desplazarse. Las CC se reducen a:

- $u_{(\xi=0)} = 1$
- $\theta_{(\xi=0)} = 0$
- $V_{(\xi=1)} = 0$
- $M_{(\xi=1)} = 0$

### 2.1.3 Excitación

Se supone como excitación una onda de incidencia vertical SH. Analíticamente, se expresa tal que:

$$u_y^I = A \cdot e^{j \frac{\omega}{c_s} x} + B \cdot e^{-j \frac{\omega}{c_s} x} \quad (2.18)$$

donde  $c_s$  es la velocidad de propagación transversal de la onda,  $\omega$  es la frecuencia de la onda y  $A$  y  $B$  son constantes a determinar que definen las amplitudes de las ondas que conforman la onda incidente. Que la onda incidente tenga ésta forma, se debe a que se supone la onda y la reflexión de la misma cuando llega a un cambio de estrato, por lo que el efecto realmente es el de la suma de ambas, que viajan en direcciones opuestas.

Así pues, retomando 2.18, se obtiene la derivada:

$$\frac{\partial u_y^I}{\partial x} = j \frac{\omega}{c_s} \left( A \cdot e^{j \frac{\omega}{c_s} x} + B \cdot e^{-j \frac{\omega}{c_s} x} \right) \quad (2.19)$$

Atendiendo a las CC que se decide aplicar, se tiene  $\tau_{xz} = 0$  y  $u^I = 1$  para  $x = 0$ :

$$\frac{\partial u_y^I}{\partial x} = 0 \rightarrow A = B \rightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

De modo que:

$$u_y^I = \frac{1}{2} \cdot \left( e^{j \frac{\omega}{c_s} x} + e^{-j \frac{\omega}{c_s} x} \right)$$

Ahora bien, adimensionalizando, haciendo un cambio de variable tal que  $x = \xi \cdot L$ , y definiendo  $a_0^* = \frac{\omega D}{c_s}$  como la frecuencia adimensional de la onda:

$$\bar{u}_y^I = \frac{1}{2} \cdot \left( e^{j a_0^* \frac{L}{D} \xi} + e^{-j a_0^* \frac{L}{D} \xi} \right) \quad (2.20)$$

Nótese que si no se supusiese que la excitación tiene la forma descrita, con expresión analítica conocida (y sencilla), probablemente no se podría llegar a la ecuación diferencial de gobierno permitiese su resolución sin métodos numéricos de por medio.

### 2.1.4 Interacción suelo-estructura

Dícese *interacción suelo-estructura* a "El mecanismo por el cual la presencia de la estructura influye en el movimiento del terreno" [13]. Como se viene diciendo, trata de caracterizar un fenómeno complicado; existe infinidad de páginas escritas tratando de modelizar adecuadamente el mismo. En éste PFC se busca ahondar en el conocimiento de los factores que afectan en mayor medida en la interacción suelo-estructura de forma simplificada, por lo que la manera misma de representar la interacción suelo-estructura es crítica para el problema.

Así pues, se trata el concepto de reacción del terreno suponiéndolo como una caja negra, es decir, "no importando que sucede dentro del material, sino solo su respuesta" [7]. Para ello se asume dicha reacción de forma simplificada, aplicando el concepto de coeficiente de balasto, por el cual se sintetiza en un coeficiente la respuesta del terreno.

Típicamente, dicho coeficiente es un valor complejo que representa la impedancia del terreno, en un símil claro al triángulo de potencias de la rama eléctrica, donde la parte real representa la resistencia y la imaginaria, la amortiguación del terreno. Analíticamente se expresa tal que:

$$\bar{K} = k + i \omega c \quad (2.21)$$

lo cual proviene de cambiar al dominio de la frecuencia la ecuación de gobierno genérica  $m\ddot{u}(x) + c\dot{u}(x) + ku(x) = q(t, x)$  (suponiéndola una excitación armónica) y reunir en un solo término los coeficientes no dependientes de la masa.

Se suele representar el amortiguamiento así ( $f_D = c \dot{u}$ ) porque resulta muy conveniente a la hora de formular la ecuación de gobierno, pero con ello se tiene una impedancia dependiente de la frecuencia. Haciendo los cambios adecuados, se puede llegar a un coeficiente de amortiguación que no dependa de la frecuencia de excitación.

Como hace ver Clough [2], *se puede definir el amortiguamiento histerético como la fuerza de amortiguamiento proporcional a la amplitud del desplazamiento, pero en fase con la velocidad. Para el caso de un movimiento armónico, se expresa tal que:*

$$f_D(t) = i \zeta k \dot{u} \quad (2.22)$$

Siguiendo con éste planteamiento, si se vuelve a escribir la ecuación de gobierno, en el dominio de la frecuencia, con éste amortiguamiento, se extrae una impedancia compleja cuya expresión sería:

$$\bar{K} = k (1 + i \zeta) \quad (2.23)$$

Con todo lo dicho y volviendo al concepto de coeficiente de balasto en sí, se tiene que la interacción suelo-estructura a estudiar tiene un coeficiente de balasto complejo. Así, el modelo a usar es uno tipo Winkler.

#### 2.1.4.1 Winkler

Se empieza con Winkler por ser la forma más sencilla de representar la interacción suelo-estructura. El terreno se plantea como un conjunto de resortes complejos independientes entre sí, de forma que responde de forma análoga a como expresa la ley de Hooke, como se aprecia en la figura 2.6 :

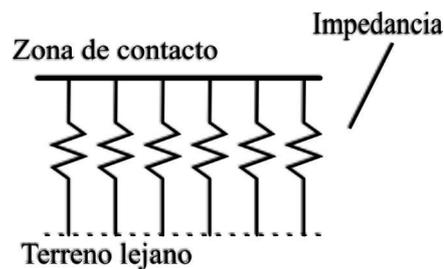


Figura 2.6: Interacción suelo-estructura tipo Winkler

Analíticamente, se representa tal que:

$$q_H^W = -K_W \cdot (u_y - u_y^I) \quad (2.24)$$

donde  $K_W$  es el coeficiente de balasto (impedancia Winkler),  $u_y$  es el desplazamiento del pilote,  $u_y^I$  es el desplazamiento del terreno debido a la excitación que pueda afectar al mismo, y  $q_H^W$  es la carga que percibe el pilote (según Winkler).

Sin embargo, a pesar de ser tan convenientemente sencillo, el planteamiento de Winkler raramente representa la realidad del terreno, pues el efecto que se consigue con tal representación es que la respuesta sea discontinua.

Como se puede ver en la figura 2.7, con éste planteamiento es lo mismo considerar una carga distribuida en un cuerpo elástico que una puntual en un cuerpo rígido; puesto que, al ser independientes los resortes entre sí cualquier resorte fuera del área cargada no percibe la carga. Por eso aparece la discontinuidad en el contorno de dicho área.

Así, para conseguir que la respuesta tenga un carácter más continuo, hace falta crear una cierta dependencia entre los resortes, lo cual no es nada descabellado. Según el trabajo de Vlasov-Leontiev [17], las reacciones del terreno aparecen *incluso* fuera de la zona donde se aplica la carga, de forma que la carga se expande por cohesión. Suponer por tanto una mayor continuidad en el material introduciría la deflexión del terreno en el modelo [5], haciendo más realista la respuesta obtenida con el mismo.

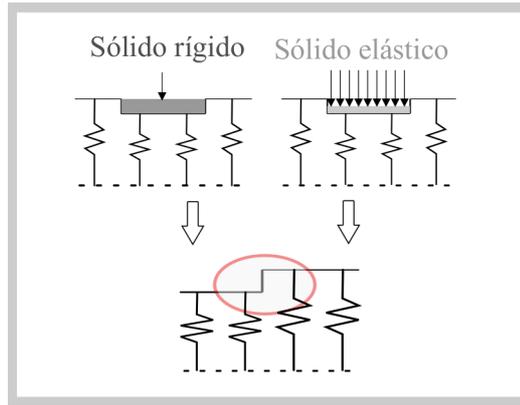


Figura 2.7: Discontinuidad debida a modelo tipo Winkler

2.1.4.2 Pasternak

Una vez se llega a la conclusión de que hace falta conectar los resortes de Winkler, se tienen varias maneras de hacerlo. Pasternak propone lo siguiente: *suponer una estrato viscoelástico compuesto por elementos incompresibles que se deforman solo por cortante y transversalmente respecto a los mismos* [7], entre el terreno y la estructura. Véase en la figura 2.8.

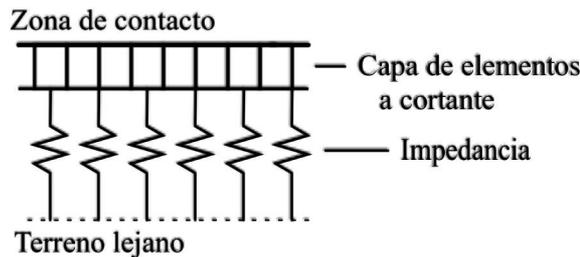


Figura 2.8: Interacción suelo-estructura tipo Pasternak

Dicha suposición se parece a la propuesta por Veletsos [16], que consiste en conectar la serie de capas de terreno (resortes) con una base común, eso sí, no entre terreno y estructura. Véase en la figura 2.9.

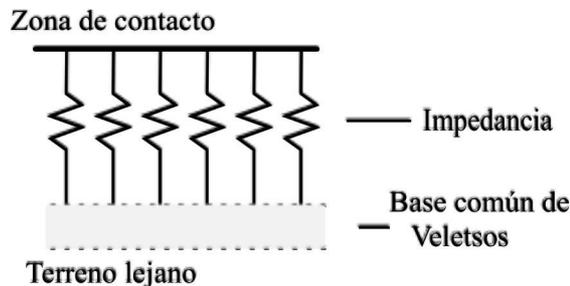


Figura 2.9: Interacción suelo-estructura tipo Veletsos

Otros modelos parecidos son los de Kerr y Vlasov-Leontiev, que Jones-Xenophontos demuestra suficientemente parecidos [6]. Entiéndase, con la función de forma adecuada para el modelo de Vlasov-Leontiev se llega a la ecuación de gobierno de Kerr.

Nótese ahora que se puede asumir el modelo Kerr como una extensión del Pasternak (o éste un caso particular del Kerr). Así pues, volviendo a intentar tomar el modelo más simple, pero realista, se busca un modelo tipo Pasternak.

De ésta manera, representando analíticamente el caso, se parte con la carga que siente la estructura proveniente del terreno:

$$q_y^P = -K_{P1} (u_y - u_y^I) - q_y^{Shear} \quad (2.25)$$

Por otra parte, sabiendo que la capa de cortante responde con un cortante de carácter viscoelástico, se tiene:

$$V^{Shear} = K_{P2} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.26)$$

Planteando equilibrio en un único elemento de la capa de cortante, como se representa en la figura 2.10, se tiene lo siguiente:

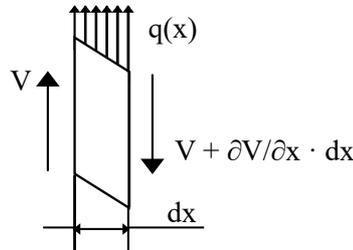


Figura 2.10: Elemento diferencial de la capa de cortante

$$\frac{\partial V^{Shear}}{\partial x} + q_y^{Shear} = 0 \rightarrow q_y^{Shear} = K_{P2} \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (2.27)$$

por lo que, sustituyendo la expresión de la carga debida a la capa de cortante del terreno (ecuación 2.26) en la ecuación de equilibrio (2.27), se tiene:

$$q_y^P = -K_{P1} \cdot (u_y - u_y^I) + K_{P2} \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (2.28)$$

El primer término es conceptualmente idéntico al mostrado con la interacción tipo Winkler. Nótese además que si  $K_{P2}$  se anula, la carga tiene la misma forma que la de Winkler, por lo que se puede asumir  $K_{P1} = K_W$ . Renombrando las impedancias se tiene, pues la expresión escogida para representar el terreno, que sintetiza su reacción en dos coeficientes de balasto:

$$q_H^P = -K_W \cdot (u_y - u_y^I) + K_P \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (2.29)$$

donde  $q_H^P$  es la carga horizontal que soporta el pilote siguiendo el planteamiento de Pasternak,  $K_W$  es la impedancia Winkler, y  $K_P$  es la impedancia nueva introducida por el

modelo Pasternak. O segundo coeficiente de balasto, para nuestro caso. Como el modelo Pasternak generaliza el modelo Winkler, basta con anular la impedancia Pasternak para obtener el modelo Winkler.

De esta manera, asumiendo una interacción suelo-estructura de tipo Pasternak, se espera dar la continuidad suficiente al modelo. Además, contar con un parámetro más, desde el punto de vista puramente matemático, debería suponer una ventaja respecto a usar un modelo Winkler.

### 2.1.4.3 Inercias, cabeceo y distorsión

Para seguir dando el carácter general al modelo, se tienen en cuenta también los siguientes factores en el comportamiento del pilote, con los que se espera mejorar la calidad del modelo en cuanto a representar la realidad física del pilote y su comportamiento:

#### INERCIAS

Si bien la inercia del pilote es una característica debida puramente a la masa del mismo, afecta sensiblemente en la interacción suelo-estructura y, por tanto, en la respuesta global del modelo. Aparte, tal como se nombró anteriormente, se han supuesto condiciones de contorno tales que representen de forma sencilla la interacción completa con el terreno, por lo que se tenía ya en cuenta implícitamente que se pretendía incluir el efecto de la inercia en el conjunto.

Así pues, tanto a traslación como a rotación, sus expresiones analíticas son:

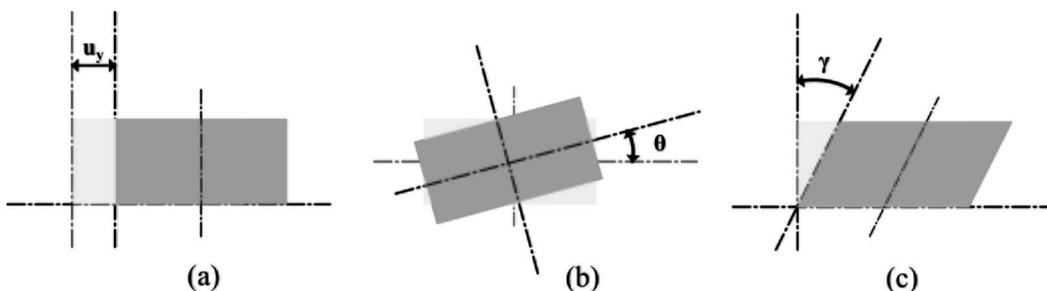
$$q_H^{inercia} = \rho A \ddot{u}_y \quad (2.30)$$

$$q_\theta^{inercia} = \rho I \ddot{\theta} \quad (2.31)$$

siendo la inercia a la rotación una innovación respecto al modelo planteado por Ariel Santana en su PFC [10].

#### CABECEO

Un modelo Winkler básico tiene en cuenta principalmente el desplazamiento, dando expresión a la reacción del terreno al mismo, como se ve en la figura 2.11, (a) :



**Figura 2.11:** Modos de vibración del elemento de viga considerados

Sin embargo, se puede complementar con la reacción al giro. En nuestro caso se decide introducir la expresión del momento distribuido, asociado con la impedancia al giro (Figura 2.11, (b)). Ésto también supone una innovación respecto al PFC de Ariel Santana [10].

Así, el momento repartido tiene una expresión tal que:

$$q_{\theta} = -K_R \cdot \theta \quad (2.32)$$

donde  $K_R$  es la impedancia al giro.

Nótese que aquí no se incluye difractado ( $\theta - \theta^I$ ), porque el giro debido exclusivamente a la onda incidente ( $\theta^I$ ) es de otra naturaleza: cortante, no flector.

### DISTORSIÓN

Miembros de la división, también dedicados a testeo y desarrollo de modelos de interacción suelo-estructura, proponen en un artículo (aún en revisión, para *Bulletin of Earthquake Engineering*) incluir el efecto de las tensiones rasantes al fuste del pilote, para mejorar la respuesta del modelo en lo que al esfuerzo cortante se refiere. Si bien puede parecer que el impacto de dichos esfuerzos no es de gran calado, en los resultados se puede observar que sí afecta apreciablemente a la respuesta del modelo.

Se propone pues introducir una carga como la representada en la figura 2.12:

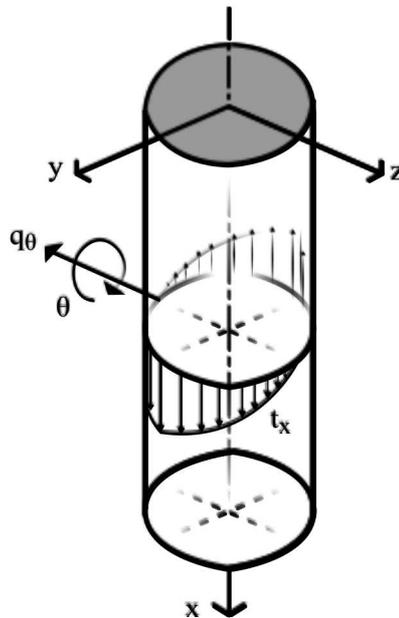


Figura 2.12: Tensiones rasantes sobre el fuste del pilote

Su expresión analítica se obtiene entonces de integrar las tensiones rasantes en el perímetro de la sección:

$$q_{\theta}^I = - \oint r \tau_x^I dl \quad (2.33)$$

Sustituyendo, sacando las constantes,

$$q_{\theta}^I = - \int_0^{2\pi} \frac{D}{2} \sin \varphi G_s \frac{\partial u_y^I}{\partial x} \frac{D}{2} \sin \varphi G_s d\varphi = -G_s \frac{D^2}{4} \frac{\partial u_y^I}{\partial x} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \quad (2.34)$$

## 2 Formulación del modelo

y resolviendo la integral:

$$q_{\theta}^I = -K_D \cdot \frac{\partial u_y^I}{\partial x} \quad / \quad K_D = G_s D^2 \frac{\pi}{4} \quad (2.35)$$

donde  $K_D$  se expresa como si fuese una impedancia a la distorsión, no dependiente de la frecuencia, como se representa en 2.11, (c).

### 2.1.4.4 Cálculo de impedancias

Ya se tiene definida la interacción suelo-estructura. Ahora bien, ¿qué valor se le debería dar a la impedancia? Sobre eso también hay mucho escrito. Inicialmente se piensa en usar el cálculo de Gazetas [4], pero cuando se considera incluir el cabeceo, se hace necesario utilizar un cálculo que incluya dicho tipo de movimiento. Así, se piensa en Novak [8], cuyos cálculos consideran 4 modos de vibración: desplazamiento horizontal, desplazamiento vertical, giro y torsión. En nuestro caso éste último no se usa.

Las hipótesis iniciales de Novak son:

- suelo: infinito, homogéneo, isotrópico, amortiguamiento histerético
- pilote: rígido, circular, sin masa, longitud infinita
- pequeños movimientos
- vibración armónica

y sus impedancias:

$$K_H = G_s \cdot D \cdot S_H, \quad K_R = G_s \cdot D^2 \cdot S_R \quad (2.36)$$

donde  $G_s$  es el módulo de rigidez del suelo,  $D$  es el diámetro del pilote y  $S_H$  y  $S_R$  son las siguientes impedancias adimensionales:

$$S_H = \pi \cdot \frac{a_0^*}{2} \cdot T \quad (2.37)$$

$$S_R = \frac{\pi}{4} \cdot (1 + j2\xi) \left[ 1 + a_0 \frac{K_0(a_0)}{K_1(a_0)} \right] \quad (2.38)$$

cuyas constantes son:

$$T = -\frac{4K_1(b_0)K_1(a_0) + a_0K_1(b_0)K_0(a_0) + b_0K_0(b_0)K_1(a_0)}{b_0K_0(b_0)K_1(a_0) + a_0K_1(b_0)K_0(a_0) + b_0a_0K_0(b_0)K_0(a_0)} \quad (2.39)$$

$$a_0 = \frac{j2a_0^*}{\sqrt{1 + j2\xi_s}} \quad (2.40)$$

$$b_0 = \frac{j2a_0^*}{\eta\sqrt{1 + j2\xi_s}} \quad (2.41)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{2(1 - \nu_s)}{1 - 2\nu_s}} \quad (2.42)$$

donde las  $(K_n(z))$  son funciones modificadas de Bessel de segundo tipo, orden  $n$  y argumento  $z$ .

A pesar de las diferencias entre estas hipótesis y las asumidas en nuestro modelo, se considera que el resultado es suficientemente bueno. Nótese que aunque Novak no tenga en cuenta la masa, nosotros hemos introducido la inercia, para no perder de vista su efecto.

Por otro lado, es importante prestar atención a la dependencia que tiene la impedancia dinámica de la frecuencia. Según Soriano [13], *la equivalencia entre el comportamiento de un medio continuo (el semiespacio donde se apoya el cimiento) y un modelo discreto sólo es posible cuando las llamadas constantes de resorte son función de la frecuencia de excitación*. En la implementación del problema se nota especialmente.

En cuanto a Novak, de nuevo, en general da buenos resultados, salvo que se quieran representar bajas frecuencias o, directamente, un problema estático. Además, falla para estructuras poco esbeltas, lo cual no extraña si se recuerda que se formula pensando en un pilote de longitud infinita. Dicho error se debe a que no expresa bien la capacidad del medio, entre la zona de contacto y el medio lejano, para transmitir con esfuerzos verticales los esfuerzos cortantes horizontales, según apunta Veletsos [16].

Por ello, Santana estudia en su TFM otras formas de calcular la impedancia del terreno [11], encontrado que Mylonakis mejora los resultados de Novak. También discute el modelo tipo Vlasov-Leontiev, haciendo énfasis en la importancia de seleccionar la función de forma adecuada.

Como se nombra anteriormente, la diferencia entre un modelo tipo Kerr y uno tipo Vlasov-Leontiev reside precisamente en esas funciones de forma. También que el modelo Pasternak podría considerarse un caso particular del Kerr. Con todo esto, lo que se pretende en éste PFC es alcanzar una representación íntegra todas las observaciones hechas hasta ahora para dar una respuesta sencilla, pero fiable, a cómo se comporta el pilote frente a una excitación armónica del terreno.

Así, si uno asume conocidos la impedancia para cada modo de vibración del pilote, calculándolas con el procedimiento de Novak, sólo queda pendiente el coeficiente Pasternak ( $K_P$ ). De ésta manera, el modelo pasa a ser paramétrico, dependiente del valor que tome  $K_P$ .

Sin embargo, para poder identificar el valor óptimo de  $K_P$  y comparar resultados entre distintas configuraciones físicas, hace falta adimensionar dicho parámetro. Por ello, tomando los términos dependientes del mismo de la ecuación 2.68 y se tiene:

$$\frac{L^2 K_P}{EI}, \quad \frac{K_P}{GA\kappa} \quad (2.43)$$

haciendo análisis dimensional sobre los mismo, para asegurar que dichos términos sean adimensionales, se llega a:

$$K_P = G \cdot D^2 \cdot S_P \quad (2.44)$$

donde  $G$  es un módulo de rigidez y  $S_P$  es el parámetro adimensional de Pasternak.

## 2 Formulación del modelo

En adelante, se trabaja principalmente con  $S_P$ , pues es el parámetro que se optimiza, buscando el valor del mismo que ayude a ajustar mejor las curvas de Pasternak (usando datos de otro modelo como referencia). Para los cálculos, se asume que el  $G$  presente en la ecuación 2.44 coincide con  $G_s$ , pues así recuerda mucho a las fórmulas 2.36.

### 2.1.4.5 Esquema general

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos representar el problema con el esquema mostrado en la figura 2.13:

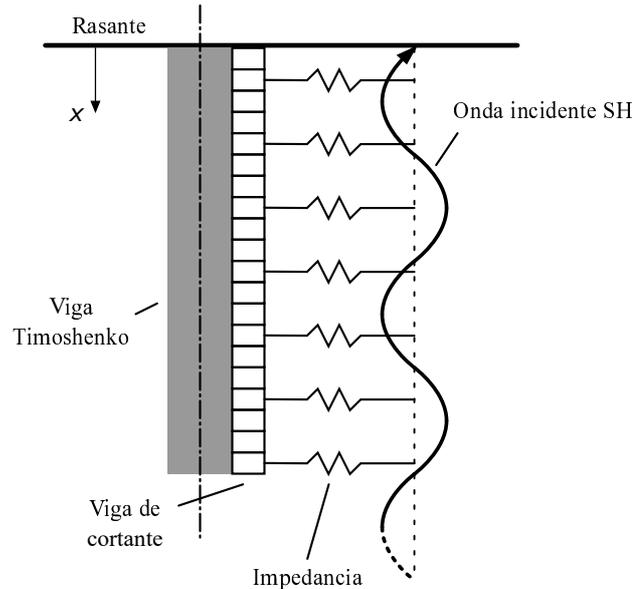


Figura 2.13: Esquema general del problema propuesto

## 2.2 Formulación de la ecuación general de gobierno

Habiendo explicado las partes de las que se compone el conjunto del modelo, se puede entrar a la formularlo; de forma que se representa analíticamente lo que se ve en la figura 2.13.

Como se quiere integrar el efecto de las inercias, el cabeceo y de la distorsión, se hace necesario replantear la ecuación general de gobierno para una viga Timoshenko, pero ésta vez con los elementos nombrados. Partimos pues planteando equilibrio en el elemento de viga, según se muestra en la figura 2.14, teniendo en cuenta las inercias:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \rho A \ddot{u}_y + q_y = 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} + V - \rho I \ddot{\theta} + q_\theta = 0 \quad (2.46)$$

Tomando la ecuación 2.9, que define el esfuerzo cortante, se sustituye en 2.45. Lo obtenido, se deriva una y dos veces respecto a  $x$ , como se muestra:

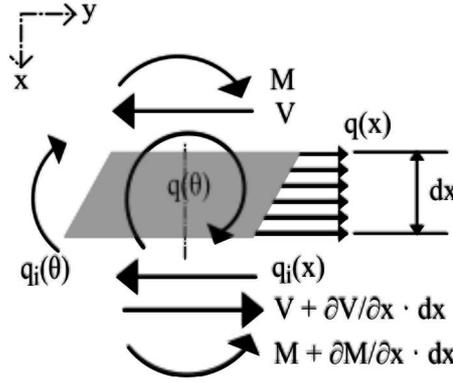


Figura 2.14: Elemento de viga Timoshenko, considerando las inercias

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G\kappa} \cdot \ddot{u}_y + \frac{1}{GA\kappa} \cdot q_y \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} - \frac{\rho}{G\kappa} \cdot \frac{\partial \ddot{u}_y}{\partial x} + \frac{1}{GA\kappa} \cdot \frac{\partial q_y}{\partial x} \quad (2.48)$$

Con la ecuación 2.9 y 2.10 en 2.48, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{GA\kappa}{EI} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \theta \right) - \frac{\rho}{E} \cdot \ddot{\theta} + \frac{1}{EI} \cdot q_\theta = 0 \quad (2.49)$$

Sustituyendo en 2.49 la ecuación 2.48, que corresponde al valor de la segunda derivada parcial de  $\theta$  respecto a  $x$ , tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} - \frac{\rho}{G\kappa} \cdot \frac{\partial \ddot{u}_y}{\partial x} + \frac{1}{GA\kappa} \cdot \frac{\partial q_y}{\partial x} + \\ & + \frac{GA\kappa}{EI} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \theta \right) - \frac{\rho}{E} \cdot \ddot{\theta} + \frac{1}{EI} \cdot q_\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Derivando la ecuación 2.50:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} - \frac{\rho}{G\kappa} \cdot \frac{\partial^2 \ddot{u}_y}{\partial x^2} + \frac{1}{GA\kappa} \cdot \frac{\partial^2 q_y}{\partial x^2} + \\ & + \frac{GA\kappa}{EI} \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{\partial q_\theta}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Tomando las expresiones 2.47 y 2.51, se hace un cambio para sacar los términos dependientes de  $\theta$  de la ecuación. Se tiene pues:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} - \frac{\rho}{G\kappa} \cdot \frac{\partial^2 \ddot{u}_y}{\partial x^2} + \frac{\rho A}{EI} \cdot \ddot{u}_y + \frac{1}{GA\kappa} \cdot \frac{\partial^2 q_y}{\partial x^2} - \frac{1}{EI} \cdot q_y - \\ & - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 \ddot{u}_y}{\partial x^2} + \frac{\rho^2}{EG\kappa} \cdot \ddot{u}_y - \frac{\rho^2}{EG\kappa} \cdot \ddot{q}_y + \frac{1}{EI} \cdot \frac{\partial q_\theta}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

## 2 Formulación del modelo

Se cambia la ecuación 2.52 al dominio de la frecuencia y se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{u}_y}{\partial x^4} + \frac{\rho\omega^2}{G\kappa} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} - \frac{\rho A\omega^2}{EI} \cdot \bar{u}_y + \frac{1}{GA\kappa} \cdot \frac{\partial^2 \bar{q}_y}{\partial x^2} - \frac{1}{EI} \cdot \bar{q}_y + \\ + \frac{\rho\omega^2}{E} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} + \frac{\rho^2\omega^4}{EG\kappa} \cdot \bar{u}_y + \frac{\rho^2\omega^2}{EG\kappa} \cdot \bar{q}_y + \frac{1}{EI} \cdot \frac{\partial \bar{q}_\theta}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Haciendo el cambio de variable, para hacer que la ecuación 2.53 no dependa de la longitud del pilote, y agrupando términos se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{u}_y}{\partial \xi^4} + \left( \frac{\rho\omega^2 L^2}{G\kappa} + \frac{\rho\omega^2 L^2}{E} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \xi^2} + \left( \frac{\rho^2\omega^4 L^4}{EG\kappa} - \frac{\rho A\omega^2 L^4}{EI} \right) \bar{u}_y + \\ + \frac{L^2}{GA\kappa} \cdot \frac{\partial^2 \bar{q}_y}{\partial \xi^2} + \left( -\frac{L^4}{EI} + \frac{\rho^2\omega^2 L^4}{EG\kappa} \right) \cdot \bar{q}_y + \frac{L^3}{EI} \cdot \frac{\partial \bar{q}_\theta}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Si además, damos nombre a algunas de las constantes observadas, tenemos:

$$\frac{\partial^4 \bar{u}_y}{\partial \xi^4} + \kappa_a^2 \alpha \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \xi^2} - \kappa_l^4 \beta \cdot \bar{u}_y + \frac{L^2}{GA\kappa} \cdot \frac{\partial^2 \bar{q}_y}{\partial \xi^2} + \frac{L^4}{EI} \beta \cdot \bar{q}_y + \frac{L^3}{EI} \cdot \frac{\partial \bar{q}_\theta}{\partial \xi} = 0 \quad (2.55)$$

Donde,

$$\kappa_a^2 = \left( \frac{\omega \cdot L}{c_a} \right)^2 \quad (2.56)$$

$$\alpha = \left( 1 + \frac{E}{G \cdot \kappa} \right) \quad (2.57)$$

$$\kappa_l^4 = \left( \frac{\omega \cdot L^2}{r_g \cdot c_a} \right)^2 \quad (2.58)$$

$$\beta = \left( 1 - \omega^2 \frac{\rho I}{GA\kappa} \right) \quad (2.59)$$

### 2.3 Resolución analítica

Teniendo en cuenta la expresión analítica de las cargas (2.29, 2.32 y 2.35), haciendo el consabido cambio al dominio de la frecuencia y el cambio de variable ( $x = L \cdot \xi$ ) en ellas y sustituyendolas en la ecuación de gobierno (2.55), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{u}_y}{\partial \xi^4} + \kappa_a^2 \alpha \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \xi^2} - \kappa_l^4 \beta \cdot \bar{u}_y = -\frac{L^2}{GA\kappa} \left( -K_H \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \xi^2} + K_H \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y^I}{\partial \xi^2} + K_P \cdot \frac{\partial^4 \bar{u}_y}{\partial \xi^4} \right) + \\ + \frac{L^4}{EI} \beta \left( -K_H \cdot \bar{u}_y + K_H \cdot \bar{u}_y^I + K_P \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \xi^2} \right) - \frac{L^3}{EI} \left( \frac{K_D}{L} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y^I}{\partial \xi^2} + K_R \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Como la derivada del giro ( $\partial\bar{\theta}/\partial\xi$ ) es desconocida, se hace necesario hallar la expresión de  $\theta(u)$ . Partiendo de la ecuación 2.50 e introduciendo 2.29, 2.32 y 2.35, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \bar{u}_y}{\partial x^3} - \frac{\rho\omega^2}{G\kappa} \cdot \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + \frac{1}{GA\kappa} \left[ -K_H \left( \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_y^I}{\partial x} \right) + K_P \cdot \frac{\partial^3 \bar{u}_y}{\partial x^3} \right] + \\ + \frac{GA\kappa}{EI} \left( \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} - \bar{\theta} \right) + \frac{\rho\omega^2}{E} \cdot \bar{\theta} - \frac{1}{EI} \left[ K_D \cdot \frac{\partial \bar{u}_y^I}{\partial x} + K_R \cdot \bar{\theta} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

Quitando los corchetes y haciendo el cambio de  $x$  a  $\xi$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \bar{u}_y}{\partial \xi^3} + \frac{\rho\omega^2}{G\kappa} \cdot \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial \xi} - \frac{L^2 K_H}{GA\kappa} \left( \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}_y^I}{\partial \xi} \right) + \frac{K_P}{GA\kappa} \cdot \frac{\partial^3 \bar{u}_y}{\partial \xi^3} + \\ + \frac{GA\kappa L^2}{EI} \cdot \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial \xi} - \frac{GA\kappa L^2}{EI} \cdot L\bar{\theta} + \frac{L^2 K_R}{EI} \cdot L\bar{\theta} - \frac{L^2 K_D}{EI} \cdot \frac{\partial \bar{u}_y^I}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

De donde, tras reordenar los términos, se puede extraer que la expresión del giro, en función de derivadas de  $\bar{u}_y$ , es:

$$\bar{\theta} = g3 \cdot \frac{\partial^3 \bar{u}_y}{\partial \xi^3} + g1 \cdot \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial \xi} + gI \cdot \frac{\partial \bar{u}_y^I}{\partial \xi} \quad (2.63)$$

Cuyas constantes se definen tal que:

$$g3 = \frac{1 + \frac{K_P}{GA\kappa}}{\left( \frac{GA\kappa L^2}{EI} + \frac{L^2 K_R}{EI} \right)} \quad (2.64)$$

$$g1 = \frac{\frac{GA\kappa L^2}{EI} - \frac{L^2 K_H}{GA\kappa}}{\left( \frac{GA\kappa L^2}{EI} + \frac{L^2 K_R}{EI} \right)} \quad (2.65)$$

$$gI = \frac{\frac{L^2 K_H}{GA\kappa} - \frac{L^2 K_D}{EI}}{\left( \frac{GA\kappa L^2}{EI} + \frac{L^2 K_R}{EI} \right)} \quad (2.66)$$

Una vez hallada la expresión de  $\bar{\theta}$ ,  $g3$ ,  $g1$  y  $gI$  y retomando con la ecuación 2.60, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{u}_y}{\partial \xi^4} + \kappa_a^2 \alpha \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \xi^2} - \kappa_l^4 \beta \cdot \bar{u}_y = \frac{L^2 K_H}{GA\kappa} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \xi^2} - \frac{L^2 K_H}{GA\kappa} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y^I}{\partial \xi^2} + \\ + \frac{K_P}{GA\kappa} \cdot \frac{\partial^4 \bar{u}_y}{\partial \xi^4} - \frac{\beta L^4 K_H}{EI} \cdot \bar{u}_y + \frac{\beta L^4 K_H}{EI} \cdot \bar{u}_y^I + \frac{\beta L^2 K_P}{EI} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \xi^2} - \\ - \frac{L^2 K_D}{EI} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y^I}{\partial \xi^2} - \frac{L^2 K_R}{EI} \cdot \left[ g3 \cdot \frac{\partial^4 \bar{u}_y}{\partial \xi^4} + g1 \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \xi^2} + gI \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y^I}{\partial \xi^2} \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

## 2 Formulación del modelo

Reordenando los términos y agrupando:

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{L^2 K_R}{EI} \cdot g_3 - \frac{K_P}{GA\kappa} \right] \cdot \frac{\partial^4 \bar{u}_y}{\partial \xi^4} + \left[ \kappa_a^2 \alpha - \frac{L^2 K_R}{EI} \cdot g_1 - \frac{L^2 K_H}{GA\kappa} - \frac{\beta L^2 K_P}{EI} \right] \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \xi^2} + \\ & + \left[ -\kappa_l^4 \beta + \frac{\beta L^4 K_H}{EI} \right] \cdot \bar{u}_y = \left[ \frac{L^2 K_R}{EI} \cdot g_I - \frac{L^2 K_H}{GA\kappa} - \frac{L^2 K_D}{EI} \right] \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y^I}{\partial \xi^2} + \left[ \frac{\beta L^4 K_H}{EI} \right] \cdot \bar{u}_y^I \end{aligned} \quad (2.68)$$

De lo cual se obtiene que:

$$\frac{\partial^4 \bar{u}_y}{\partial \xi^4} + C_2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \xi^2} + C_0 \cdot \bar{u}_y = C_{I2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y^I}{\partial \xi^2} + C_{I0} \cdot \bar{u}_y^I \quad (2.69)$$

Donde,

$$C_2 = \frac{1}{1 + \frac{L^2 K_R}{EI} \cdot g_3 - \frac{K_P}{GA\kappa}} \cdot \left[ \kappa_a^2 \alpha - \frac{L^2 K_H}{GA\kappa} - \frac{L^2 K_R}{EI} \cdot g_1 - \frac{\beta L^2 K_P}{EI} \right] \quad (2.70)$$

$$C_0 = \frac{1}{1 + \frac{L^2 K_R}{EI} \cdot g_3 - \frac{K_P}{GA\kappa}} \cdot \left[ -\kappa_l^4 \beta + \frac{L^4 K_H}{EI} \beta \right] \quad (2.71)$$

$$C_{I2} = \frac{1}{1 + \frac{L^2 K_R}{EI} \cdot g_3 - \frac{K_P}{GA\kappa}} \cdot \left[ \frac{L^2 K_R}{EI} \cdot g_I - \frac{L^2 K_H}{GA\kappa} - \frac{L^2 K_D}{EI} \right] \quad (2.72)$$

$$C_{I0} = \frac{1}{1 + \frac{L^2 K_R}{EI} \cdot g_3 - \frac{K_P}{GA\kappa}} \cdot \left[ \frac{L^4 K_H}{EI} \beta \right] \quad (2.73)$$

Habiendo obtenido la ecuación general de gobierno con las cargas, se procede a su resolución, hallando la solución particular y la homogénea.

Sustituyendo en la ecuación 2.69 la expresión de la excitación 2.18 y de la solución particular genérica y simplificando, se tiene:

$$\begin{aligned} & B \cdot \left[ \left( \frac{L}{D} \right)^4 \cdot (a_0^*)^4 \right] + C_2 \cdot B \cdot \left[ - \left( \frac{L}{D} \right)^2 \cdot (a_0^*)^2 \right] + C_0 \cdot B = \\ & C_{I2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[ - \left( \frac{L}{D} \right)^2 \cdot (a_0^*)^2 \right] + C_{I0} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.74)$$

de lo cual se extrae:

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{-C_{I2} \cdot \left( \frac{L}{D} \right)^2 \cdot (a_0^*)^2 + C_{I0}}{\left( \frac{L}{D} \right)^4 \cdot (a_0^*)^4 - C_2 \cdot \left( \frac{L}{D} \right)^2 \cdot (a_0^*)^2 + C_0} \quad (2.75)$$

Por tanto, la solución particular queda:

$$(\bar{u}_y)_P = B \cdot \left( e^{j \cdot a_0^* \cdot \frac{L}{D} \cdot \xi} + e^{-j \cdot a_0^* \cdot \frac{L}{D} \cdot \xi} \right) \quad (2.76)$$

Resolviendo ésta vez la ecuación 2.69 para  $\bar{u}_y^I = 0$ , se obtiene la ecuación característica, de la cual se extrae la expresión de la solución homogénea:

$$\frac{\partial^4 \bar{u}_y}{\partial \xi^4} + C_2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial \xi^2} + C_0 \cdot \bar{u}_y = 0 \quad (2.77)$$

$$\lambda_i^4 + C_2 \cdot \lambda_i^2 + C_0 = 0 \quad (2.78)$$

$$\chi_{1,2} = -C_2 \pm \sqrt{(C_2)^2 - 4 \cdot C_0} \quad (2.79)$$

$$(\bar{u}_y)_H = \sum_{i=0}^{i=4} A_i \cdot e^{\lambda_i \cdot \xi} \quad (2.80)$$

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\chi_{1,2}} \quad (2.81)$$

donde las  $A_i$  son constantes asociadas con cada una de las raíces de la ecuación característica. Para hallar el valor de dichas constantes, se aplican CC. Así, se obtiene un sistema de ecuaciones, que al ser resuelto, nos da los valores de las constantes  $A_i$ .

Según se consideren unas CC u otras, el sistema de ecuaciones variará. Se formulan todas las variantes. Véase a continuación:

### Ecuación 1

Se refiere al desplazamiento o esfuerzo cortante soportado en la posición  $\xi = 0$ . En caso de que se conozca el valor de desplazamiento, se tiene la ecuación 2.82

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot e^{\lambda_i \cdot 0} = U_0 - B \cdot \left( e^{j \cdot (a)_0^* \cdot 0} + e^{-j \cdot (a)_0^* \cdot 0} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i = U_0 - 2 \cdot B \quad (2.82)$$

Si se conoce el valor del esfuerzo cortante, se tiene la ecuación 2.83

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot \lambda_i^3 \cdot e^{\lambda_i \cdot 0} = -\frac{L^3}{EI} \cdot V_0 - B \cdot (j \cdot k_s^3 L^3) \cdot \left( e^{j \cdot (a)_0^* \cdot 0} - e^{-j \cdot (a)_0^* \cdot 0} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot \lambda_i^3 = -\frac{L^3}{EI} \cdot V_0 \quad (2.83)$$

### Ecuación 2

Se refiere al giro o momento flector soportado en la posición  $\xi = 0$ . En caso de que se conozca el valor de giro, se tiene la ecuación 2.84:

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot (g_3 \cdot \lambda_i^3 + g_1 \cdot \lambda_i) \cdot e^{\lambda_i \cdot 0} = \theta_0 \cdot L - \left[ B \cdot g_3 (j \cdot k_s L)^3 + (B \cdot g_1 + \frac{gI}{2})(j \cdot k_s L) \right] \left( e^{j \cdot (a)_0^* \cdot 0} - e^{-j \cdot (a)_0^* \cdot 0} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot (g_3 \cdot \lambda_i^3 + g_1 \cdot \lambda_i) = \theta_0 \cdot L \quad (2.84)$$

Si se conoce el valor del momento flector, se tiene la ecuación 2.85:

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot (g_3 \cdot \lambda_i^4 + g_1 \cdot \lambda_i^2) \cdot e^{\lambda_i \cdot 0} = \frac{L^2}{EI} \cdot M_0 - B \cdot (j \cdot k_s^2 L^2) \cdot \left( e^{j \cdot (a)_0^* \cdot 0} + e^{-j \cdot (a)_0^* \cdot 0} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot (g_3 \cdot \lambda_i^4 + g_1 \cdot \lambda_i^2) = \frac{L^2}{EI} \cdot M_0 - 2 \cdot (j \cdot k_s^2 L^2) \cdot B \quad (2.85)$$

### Ecuación 3

Se refiere al desplazamiento o esfuerzo cortante soportado en la posición  $\xi = 1$ . En caso de que se conozca el valor de desplazamiento, se tiene la ecuación 2.86:

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot e^{\lambda_i \cdot 1} = U_1 - B \cdot \left( e^{j \cdot (a)_0^* \cdot 1} + e^{-j \cdot (a)_0^* \cdot 1} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot e^{\lambda_i} = U_1 - B \cdot \left( e^{j \cdot (a)_0^*} + e^{-j \cdot (a)_0^*} \right) \quad (2.86)$$

Si se conoce el valor del esfuerzo cortante, se tiene la ecuación 2.87 :

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot \lambda_i^3 \cdot e^{\lambda_i \cdot 1} = -\frac{L^3}{EI} \cdot V_1 - B \cdot (j \cdot k_s^3 L^3) \cdot \left( e^{j \cdot (a)_0^* \cdot 1} - e^{-j \cdot (a)_0^* \cdot 1} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot \lambda_i^3 \cdot e^{\lambda_i} = -\frac{L^3}{EI} \cdot V_1 - B \cdot (j \cdot k_s^3 L^3) \cdot \left( e^{j \cdot (a)_0^*} - e^{-j \cdot (a)_0^*} \right) \quad (2.87)$$

#### Ecuación 4

Se refiere al desplazamiento o esfuerzo cortante soportado en la posición  $\xi = 1$ . En caso de que se conozca el valor de giro, se tiene la ecuación 2.88:

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot (g_3 \cdot \lambda_i^3 + g_1 \cdot \lambda_i) \cdot e^{\lambda_i \mathbf{1}} = \theta_1 \cdot L - \left[ B \cdot g_3 (j \cdot k_s L)^3 + (B \cdot g_1 + \frac{gI}{2})(j \cdot k_s L) \right] \left( e^{j \cdot (a)_0^* \cdot \mathbf{1}} - e^{-j \cdot (a)_0^* \cdot \mathbf{1}} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot (g_3 \cdot \lambda_i^3 + g_1 \cdot \lambda_i) \cdot e^{\lambda_i} = \theta_1 \cdot L - \left[ B \cdot g_3 (j \cdot k_s L)^3 + (B \cdot g_1 + \frac{gI}{2})(j \cdot k_s L) \right] \left( e^{j \cdot (a)_0^*} - e^{-j \cdot (a)_0^*} \right) \quad (2.88)$$

Si se conoce el valor del momento flector, se tiene la ecuación 2.89

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot (g_3 \cdot \lambda_i^4 + g_1 \cdot \lambda_i^2) \cdot e^{\lambda_i \mathbf{1}} \cdot m = \frac{L^2}{EI} \cdot M_1 - B \cdot (j \cdot k_s^2 L^2) \cdot \left( e^{j \cdot (a)_0^* \cdot \mathbf{1}} + e^{-j \cdot (a)_0^* \cdot \mathbf{1}} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} A_i \cdot (g_3 \cdot \lambda_i^4 + g_1 \cdot \lambda_i^2) \cdot e^{\lambda_i} = \frac{L^2}{EI} \cdot M_1 - B \cdot (j \cdot k_s^2 L^2) \cdot \left( e^{j \cdot (a)_0^*} + e^{-j \cdot (a)_0^*} \right) \quad (2.89)$$

En nuestro caso concreto, tal como se explica en el apartado dedicado a explicar las CC, se ha decidido impedir el giro y aplicar un desplazamiento igual a la unidad en  $\xi = 0$ , mientras que se anula el cortante y el flector en  $\xi = 1$ . Por ello, para formar nuestro sistema de ecuaciones, tomamos las ecuaciones 2.82, 2.84, 2.87 y 2.89.

Ahora sí, teniendo el sistema y, por tanto, siendo conocidas las constantes, tenemos la solución fundamental. De ésta manera, sumando la solución homogénea (ecuación 2.80) y la particular (ecuación 2.76), la solución general queda completamente definida.

## 2.4 Variables de salida del modelo

Una vez calculadas la solución homogénea y particular de  $\bar{u}_y$ , podemos definir las variables de salida del modelo.

De manera que el desplazamiento sería la solución general de la ecuación de gobierno. El giro, lo obtenido de sustituir el desplazamiento en la ecuación 2.63. Al cortante y al flector, sin embargo, hay que darles expresión.

Partiendo de las ecuaciones 2.9 y 2.10, aplicando  $\xi = x/L$  y cambiando al dominio de la frecuencia

$$\bar{V}_{dim} = \frac{\kappa AG}{L} \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial \xi} - \bar{\theta} \right) \quad (2.90)$$

$$\bar{M}_{dim} = \frac{EI}{L} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} \quad (2.91)$$

## 2 Formulación del modelo

Ahora, haciendo algunos cambios en los términos de 2.90 y 2.91, se puede observar:

$$\bar{V}_{dim} = ED \cdot f \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial \xi} - \bar{\theta} \right) \quad (2.92)$$

$$\bar{M}_{dim} = ED^2 \cdot f \cdot \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \xi} \quad (2.93)$$

Donde  $f = \left(\frac{r_g}{D}\right)^2 \left(\frac{A}{D^2}\right) \left(\frac{D}{L}\right)^2$ . Así pues, reuniendo las soluciones para todas las variables, se tiene:

$$\bar{u}_y = \sum_{i=0}^{i=4} A_i \cdot e^{\lambda_i \cdot \xi} + B \cdot (e^{j \cdot k_s \cdot \xi} + e^{-j \cdot k_s \cdot \xi}) \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta} = & \sum_{i=0}^{i=4} A_i \cdot (g_3 \lambda_i^3 + g_1 \lambda_i) \cdot e^{\lambda_i \cdot \xi} + \\ & + B \cdot [g_3 \cdot (jk_s)^3 + jk_s(g_1 + \frac{1}{2})] \cdot (e^{j \cdot k_s \cdot \xi} - e^{-j \cdot k_s \cdot \xi}) \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \bar{V} = & \sum_{i=0}^{i=4} A_i \cdot f \cdot (g_3 \lambda_i^3 + g_1 \lambda_i) \cdot e^{\lambda_i \cdot \xi} + \\ & + B \cdot f \cdot [g_3 \cdot (jk_s)^3 + jk_s(g_1 + \frac{3}{2})] \cdot (e^{j \cdot k_s \cdot \xi} - e^{-j \cdot k_s \cdot \xi}) \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \sum_{i=0}^{i=4} A_i \cdot f \cdot (g_3 \lambda_i^4 + g_1 \lambda_i^2) \cdot e^{\lambda_i \cdot \xi} - \\ & - B \cdot f \cdot [g_3 \cdot (jk_s)^4 + (jk_s)^2(g_1 + \frac{1}{2})] \cdot (e^{j \cdot k_s \cdot \xi} + e^{-j \cdot k_s \cdot \xi}) \end{aligned} \quad (2.97)$$

de manera que se formulan para que den valores adimensionales. Ésto se hace para poder comparar lo resultados obtenidos con distintas configuraciones.

Si, por el contrario, se busca el valor de la variable con su dimensión, hace falta entonces aplicar el factor adecuado, según el caso:

$$\bar{u}_{y,dim} = \bar{u}_y \quad (2.98)$$

$$\bar{\theta}_{dim} = \bar{\theta} \cdot \frac{1}{L} \quad (2.99)$$

$$\bar{V}_{dim} = \bar{V} \cdot E D \quad (2.100)$$

$$\bar{M}_{dim} = \bar{M} \cdot E D^2 \quad (2.101)$$

Nótese que en el desplazamiento, concretamente y tal y como se plantea el problema, coincide con la solución general a la ecuación de gobierno debido a las CC escogidas.

## VERIFICACIÓN DEL MODELO

Para validar el modelo que se presenta es necesario una estimación de la calidad de los datos de salida del mismo. Para ello, se realiza una comparación entre éstos y los obtenidos con un modelo de referencia adecuado para el caso, que se expone a continuación.

### 3.1 Modelo de referencia: BEM-BEM

El modelo de referencia necesita ser preciso, fiable y estar disponible para su uso. Dentro del propio Grupo, la División de Mecánica de los Medios Continuos y Estructuras del SIANI, se ha desarrollado un modelo basado en el MEC. Dicho modelo (nótese que nos referiremos al modelo como BEM-BEM y al método, como MEC), se usa para obtener la solución de referencia, por su capacidad para dar una solución del problema rigurosa en cuanto a la mecánica del medio continuo.

Además, el modelo cuenta con el respaldo de la investigación previa realizada por el Grupo, que cuenta con publicaciones tales como [1], [3], que se usan de referencia (Véase la bibliografía). Se considera, por tanto, demostrada su fiabilidad y se propone, para el caso en el que se desee más material al respecto, consultar la página web del Grupo: <http://www.mmc.siani.es/publications/>.

En el caso del BEM-BEM que se usa en el presente PFC, se plantea un MEC multiregión de resolución directa. Se detalla a continuación:

#### Planteamiento teórico inicial

Se representan los desplazamientos y tensiones en el contorno  $\Gamma$  en el dominio  $\Omega$  con la ecuación integral siguiente, aplicada en el punto  $i$  (de coordenadas  $x^i$ ) y en la que se consideran nulas las fuerzas de volumen:

$$c_{lk}^i u_k^i + \int_{\Gamma} t_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* t_k d\Gamma \quad (3.1)$$

donde las integrales sobre  $\Gamma$  se deben entender en el sentido del Valor Principal de Cauchy (VPC);  $c_{lk}^i$  es un término independiente que toma un valor u otro en función de

si el punto  $i$  está o no en el contorno,  $u_k^i$  y  $t_k^i$  representan las componentes en dirección  $k$  de los desplazamientos y tracciones en puntos de  $\Gamma$ , siendo  $u_{lk}^*$  y  $t_{lk}^*$  la solución fundamental en desplazamientos y tensiones respectivamente, para los mismos puntos, en la dirección  $k$  cuando una carga puntual actúa en la dirección  $l$  en el punto  $i$ . La ecuación 3.1 es válida tanto para problemas estáticos como dinámicos, si bien en cada caso difiere la expresión de la solución fundamental. Dicha ecuación integral, se resuelve de manera numérica (estrategia de resolución directa) [3].

A partir de la ecuación integral, discretizando el problema, se construye un sistema de ecuaciones lineales, con el que se puede obtener los desplazamientos y tensiones en el contorno, a priori desconocidos. El campo incidente se incluye planteando las ecuaciones integrales en términos de campo difractado [3]. Se tiene entonces:

$$H(u - u^I) = G(t - t^I) \quad (3.2)$$

donde  $H$  y  $G$  son las matrices de influencia,  $u$  y  $t$  son los desplazamientos y tensiones del campo total, y  $u^I$  y  $t^I$  son desplazamientos y tensiones del campo incidente, con expresión analítica 2.20. De ésta manera, los desplazamientos y tensiones a través de  $\partial\Omega_\alpha$  se relacionan también con las matrices de influencia del MEC.

#### Condiciones de contacto

Sean  $\Omega_\alpha$  y  $\Omega_\beta$  dos regiones en contacto a través de la interfase  $\Gamma_j$ . Dicha interfase  $\Gamma_j$  tiene dos caras:  $\Gamma_{j+}$  y  $\Gamma_{j-}$ , cuyas orientaciones son compatibles respectivamente con las regiones  $\Omega_\alpha$  y  $\Omega_\beta$ . Los contornos de ambas regiones son entonces  $\partial\Omega_\alpha = \Gamma_{j+} \cup \Gamma_i$  y  $\partial\Omega_\beta = \Gamma_{j-} \cup \Gamma_k$ . Los desplazamientos y tensiones a través de  $\partial\Omega_\alpha$  se relacionan con las matrices de influencia del MEC, por lo que:

$$\begin{bmatrix} H_{i,i} & H_{i,j+} \\ H_{j+,i} & H_{j+,j+} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{j+} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{i,i} & G_{i,j+} \\ G_{j+,i} & G_{j+,j+} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_i \\ t_{j+} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

El sistema para  $\partial\Omega_\beta$  se construiría de forma análoga.

Por otro lado, el contacto puede considerarse suave o soldado. En nuestro caso, se considera soldado, por lo que las condiciones de compatibilidad y equilibrio son  $u_{j+} = u_{j-}$  y  $t_{j+} + t_{j-} = 0$ . con ellos, se llega a un sistema de ecuaciones lineales, tal que:

$$\begin{bmatrix} H_{i,i} & H_{i,j+} & -G_{i,j+} & \emptyset \\ H_{j+,i} & H_{j+,j+} & -G_{j+,j+} & \emptyset \\ \emptyset & H_{j-,j-} & G_{j-,j-} & H_{j-,k} \\ \emptyset & H_{k,j-} & G_{k,j-} & H_{k,k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{j+} \\ t_{j+} \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{i,i} & \emptyset \\ G_{j+,i} & \emptyset \\ \emptyset & G_{j-,k} \\ \emptyset & G_{k,k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_i \\ t_k \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

el cual debe ser entendido como una parte del sistema completo si existiesen más regiones o contornos.

### Tensión resultante de la sección transversal

La solución en un punto  $i$  de coordenadas  $x^i$  dentro del dominio  $\Omega$  se obtiene de la ecuación integral singular interior (Es decir, sustituyendo  $c_{lk}^i = \delta_{lk}$  en 3.1, siendo  $\delta_{lk}$  una delta de Dirac) y sus derivadas, en una fase de post-procesado.

Con la integral hipersingular (interior Hypersingular Boundary Integral Equation, HBIE), en cambio, habiendo obtenido los tensores de tensión  $\sigma_{lk}^i$  y deformación  $\epsilon_{lk}^i$  con una combinación adecuada de las derivadas de la respuesta, se calcula la tracción  $t_l^i = \sigma_{lk}^i n_k^i$  en el punto de coordenada  $x^i$ . Su expresión es:

$$t_l^i = \int_{\partial\Omega} d_{lk}^* t_k \, d\Gamma - \int_{\partial\Omega} s_{lk}^* u_k \, d\Gamma, \quad l, k = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

donde  $u_k$  y  $t_k$  son ya conocidos, y  $d_{lk}^*$  y  $s_{lk}^*$  son soluciones fundamentales hipersingulares, que pueden encontrarse en cualquier parte (Véase [3]).

Cada sección transversal del pilote  $\mathcal{X}$  es una superficie orientada discretizada en  $N_{\mathcal{X}}$  elementos. Cada elemento interno  $\mathcal{E}$  de orden  $R$  sirve de soporte para un conjunto de puntos internos localizados en los puntos de integración de una cuadratura gaussiana de mismo orden.

Sean, pues,  $N_{\mathcal{R}}$  el número de puntos de integración de la cuadratura gaussiana,  $\boldsymbol{\eta}_j$  y  $w_j$  el  $j$ -ésimo punto de cuadratura y peso. Entonces las fuerzas y momentos cartesianos con respecto a  $\mathbf{x}_c$  son:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathcal{E}} &= \int_{\mathcal{E}} \mathbf{t} \, dS \cong \sum_{j=1}^{j=N_{\mathcal{R}}} \mathbf{t}^i(\boldsymbol{\eta}_j) J(\boldsymbol{\eta}_j) w_j \\ \mathbf{M}_{\mathcal{E}} &= \int_{\mathcal{E}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \mathbf{t} \, dS \cong \sum_{j=1}^{j=N_{\mathcal{R}}} [\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}_j) - \mathbf{x}_c] \times \mathbf{t}^i(\boldsymbol{\eta}_j) J(\boldsymbol{\eta}_j) w_j \end{aligned} \quad (3.6)$$

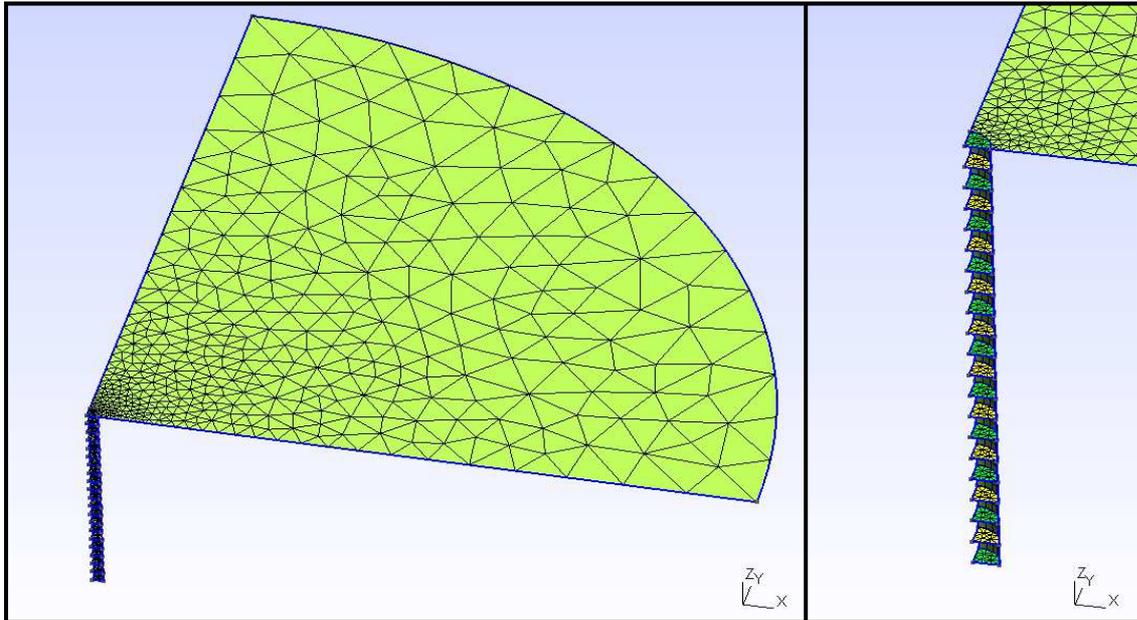
donde  $J$  es el Jacobiano de la superficie. Finalmente, las tensiones resultantes de la sección transversal son:

$$\mathbf{F}_{\mathcal{X}} = \sum_{\mathcal{X}} \mathbf{F}_{\mathcal{E}}, \quad \mathbf{M}_{\mathcal{X}} = \sum_{\mathcal{X}} \mathbf{M}_{\mathcal{E}} \quad (3.7)$$

### Discretización del problema

Cómo discretizar el dominio  $\Omega$  puede cambiar el tiempo y recursos necesarios para implementar el modelo, así como la precisión y veracidad de los datos de salida. Por ello, lo más inteligente es explotar todo posible factor que aumente la efectividad de la implementación.

Así, se aprovechan las propiedades de simetría geométrica y funcional presentes en éste problema. Suponiendo la excitación como una onda incidente en la dirección  $x_1$ , se aplican condiciones de simetría en el plano  $x_3 - x_1$  y condiciones de antisimetría en el plano  $x_2 - x_3$ . De ésta manera, se puede reducir el problema, en lo que se refiere a la resolución, a un cuarto del original. Véase, para una mejor comprensión, la figura 3.1.



**Figura 3.1:** Mallas MEC multiregión: (Izquierda) Perspectiva de la malla usada, describiendo un cuarto del dominio (Derecha) Detalle sección transversal del pilote, con secciones intermedias.

## 3.2 Estimación del error

El modelo necesita de un respaldo para poder darle el visto bueno, lo cual se consigue comparando los datos de salida con los del modelo de referencia y viendo que son aceptablemente parecidos unos y otros. Así, se hace una estimación de la calidad de los datos obtenidos de manera objetiva; que además ayuda a entender mejor el comportamiento del modelo mismo, al responder a qué pasaría si se introducen otros datos de entrada, o en qué variables de salida se nota más, entre otras posibles cuestiones.

Por ello, la forma en que se decide estudiar dicha estimación es un factor crítico, tanto para justificar la validez del modelo, como entender el comportamiento del modelo o para la identificación del valor óptimo de  $S_P$ , siendo éste el parámetro de Pasternak adimensional.

Para empezar, poder comparar resultados para distintas frecuencias y configuraciones físicas hace necesario normalizar los valores de error, es decir, que éste deberá ser relativo. La cuestión pasa a ser entonces qué valor escoger para normalizar. A priori, se piensan las siguientes opciones:

- **Tipo de error 1**

Se toma el valor absoluto del valor que toma la variable según el modelo BEM-BEM para un determinado punto del pilote y frecuencia.

$$m^{NOR}(\omega, \xi) = |m^{BEM}(\omega, \xi)| \quad (3.8)$$

Donde  $m^{NOR}(\omega, \xi)$  es el valor normalizador de una variable para un punto del pilote y frecuencia dados,  $m^{BEM}(\omega, \xi)$  es el valor de la variable según el modelo BEM-BEM para dicho punto del pilote y frecuencia,  $\xi$  es la posición en el pilote y  $\omega$  es la frecuencia estudiada.

■ **Tipo de error 2**

Ahora, el valor normalizador es el máximo valor que toma la variable dada según el modelo BEM-BEM a lo largo del pilote para una determinada frecuencia.

$$m^{NOR}(\omega) = ( | m^{BEM}(\omega, \xi) | )_{max} \quad (3.9)$$

■ **Tipo de error 3**

En éste caso, el valor toma la diferencia entre el máximo y el mínimo valor, según el modelo BEM-BEM, que toma una variable dada a lo largo del pilote y para una frecuencia determinada.

$$m^{NOR}(\omega) = | (m^{BEM}(\omega, \xi))_{max} - (m^{BEM}(\omega, \xi))_{min} | \quad (3.10)$$

Así, escoger un tipo de error u otro, según el valor con el que se normalice, lo que consigue es resaltar más las diferencias entre los datos de referencia y los propios de diferentes maneras. Se hace necesario pues plantear unas prioridades que supongan a posteriori una ventaja para evaluar el modelo e identificar el  $S_P$  adecuado.

Escoger un error relativo es necesario por lo ya dicho, pero existe la posibilidad de que por medirlo comparativamente, parezcan igual de lejanos dos pares de valores proporcionalmente igual de distantes entre sí, aun si hay varios órdenes de magnitud de diferencia entre una y otra pareja. Sirva de ejemplo decir que un 2% puede ser tanto 2 de cada 100 como 2000 de entre 100000. La proporción es la misma; el error absoluto, no.

De ésta manera, optar por un valor normalizador que represente un intervalo de valores posibles, no conflictivos, es la solución. Por esa descripción ya se descartan los errores *tipo 1* y *2*, quedando el *tipo 3*.

Por lo expuesto, se considera adecuado optar por el tipo de error número 3, es decir, el que toma como referencia la diferencia en términos absolutos entre el mayor y el menor valor de la variable de salida a lo largo del pilote, para una determinada frecuencia.

Una vez decidido el valor que se usa para normalizar la medida de error, se hace necesario resaltar que, si bien se podrían calcular valores de error para cada punto de la longitud del pilote; a posteriori, identificando el parámetro  $S_P$ , no resulta práctico, pues se pretende encontrar un valor para  $S_P$  que sintetice la respuesta en toda la longitud estudiada. Ésto se debe a que así la formulación final del modelo es más sencilla y porque no existe evidencia de que pueda depender de la longitud del pilote.

No hay que perder de vista que, aunque en nuestro caso se opte por sintetizar los errores a lo largo del pilote en un valor, puede ser interesante estudiar en otro momento los valores de error más detenidamente. Por ejemplo, para estudiar qué tanto puede afectar la profundidad a la que se encuentre un punto de estudio en los resultados a obtener, y su error respecto al modelo de referenecia.

De ésta manera, se decide calcular un error normalizado, que se representa analíticamente (suponiendo un  $m^{NOR}(\omega, \xi)$  genérico) en la ecuación 3.11:

$$E(\omega, \xi) = \frac{1}{N_\xi} \sum_{\xi} \frac{|m^{AN}(\omega, \xi) - m^{BEM}(\omega, \xi)|}{m^{NOR}(\omega)} \quad (3.11)$$

donde  $m^{AN}(\omega, \xi)$  es el valor que toma la variable en estudio según el modelo analítico (ya sea el Winkler o Pasternak) para un punto del pilote y frecuencia dados y  $N_p$  es el número de puntos a lo largo del pilote.

### 3 Verificación del modelo

Sustituyendo en la ecuación 3.11 la expresión del  $m^{NOR}(\omega)$  escogido (ecuación 3.10), se tiene, finalmente:

$$E(\omega, \xi) = \frac{1}{N_\xi} \sum_{\xi} \frac{|m^{AN}(\omega, \xi) - m^{BEM}(\omega, \xi)|}{|m_{max}^{BEM}(\omega, \xi) - m_{min}^{BEM}(\omega, \xi)|} \quad (3.12)$$

# CAPÍTULO 4

## IMPLEMENTACIÓN

Para poder probar el modelo, hace falta implementarlo. En éste capítulo se explica la lógica seguida a la hora de implementar cada una de las partes del proyecto.

Hay dos bloques a éste respecto: el modelo numérico BEM-BEM, por un lado, y lo demás. A continuación, se detalla el procedimiento seguido para implementar cada uno.

### 4.1 Modelo de referencia BEM-BEM

Como se menciona anteriormente, el modelo BEM-BEM utilizado fue desarrollado por el Grupo.

El programa, escrito en lenguaje FORTRAN, necesita un fichero con los datos de la configuración del problema (*.dat*) y dos ficheros con las mallas que define la geometría a ensayar (*.msh*). La salida la conforman otros dos ficheros de datos, (*.dat.nso* y *.dat.tot*).

El fichero de entrada *.dat* contiene datos tales como las propiedades físicas de interés de suelo y pilote, frecuencias a estudiar, CC... lo necesario para caracterizar el problema.

La malla, en cambio, se genera en el programa GMSH. Se selecciona el tamaño de malla según la frecuencia que se desea testear, así como otros parámetros relacionados directamente con la geometría a estudiar. En nuestro caso, como se menciona anteriormente, se aprovecha la simetría radial, construyendo una maya equivalente a un cuarto del problema.

Los ficheros de datos de salida contienen mucha información, acerca de las frecuencias, índice y valor; las características geométricas del pilote, región, clase y tipo, así como el contorno, clase y cara de las superficies limítrofes, y los desplazamientos, giros y esfuerzos, proyectados en los ejes directores de cada superficie. Éstos últimos, en notación polar, dependen de la región, clase y tipo.

Por ello, necesitan un post-procesado para facilitar su posterior uso, extrayendo de éstos los valores de cada variable de salida por separado. Posteriormente, se almacenan los datos en estructuras dentro de MatLab, cumpliendo entonces una función parecida a la de una base de datos, de cara a la elaboración de errores para evaluar el modelo analítico.

Para todo ello, y teniendo los datos de salida, se escriben unos filtros BASH y se ejecutan en un simulador de Unix para Windows, llamado Cygwin. Ésto último se hace necesario desde el momento en el que, siendo lo habitual en el Grupo, no se trabaja en Linux, sino en Windows.

Se ha considerado adecuado utilizar estos programas por su disponibilidad, pues ambos se usan frecuentemente en la división (salvo Cygwin), y por su facilidad de uso.

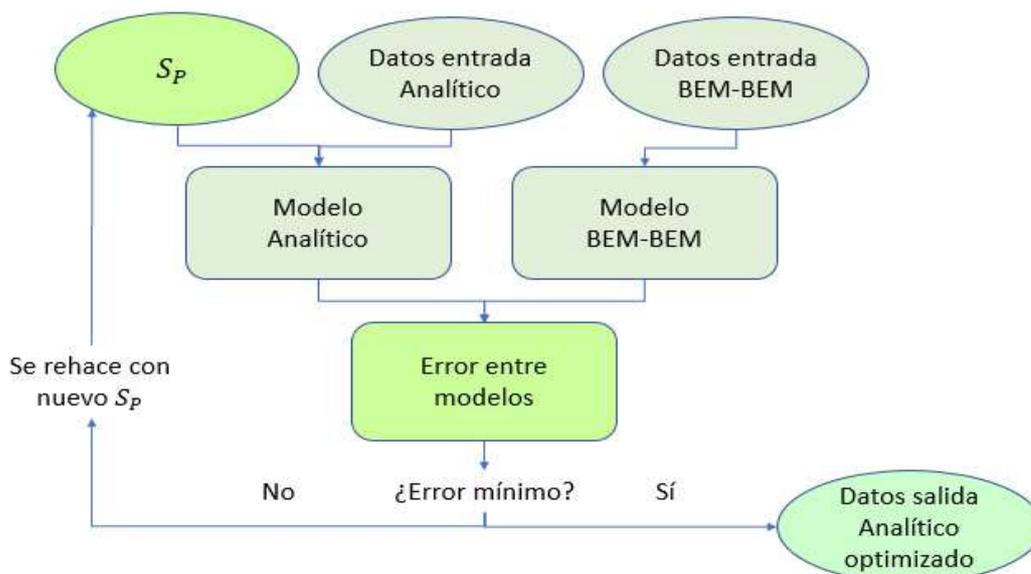
### 4.2 Modelo analítico, error y optimización

El Grupo cuenta con código ya escrito para calcular la respuesta del modelo analítico, tanto Winkler como Pasternak. Sin embargo, se implementa un código aparte, al que se añade el cálculo del error y la optimización de  $S_P$ .

Todo ello se lleva a cabo en MatLab, por ser un software ampliamente conocido, que permite una rápida adaptación al entorno para quien no conoce en profundidad el lenguaje. Resulta sencillo también el manejo de datos, permitiendo la entrada y salida en ficheros de datos (.dat o .txt), o la salida en gráficas (.eps).

Así, los datos de entrada en general se escriben directamente en los parámetros de entrada del programa (sería posible implementarlo de forma que se hiciera desde un fichero si se quisiera); salvo los datos obtenidos del modelo BEM-BEM, que se obtienen en un programa aparte y se cargan desde ficheros de datos ya tratados, como se explica en el apartado anterior. Para los datos de salida, en cambio, se deja abierta la posibilidad desde los parámetros de entrada de guardarlos en ficheros o gráficas, según interese.

Por otro lado, en la figura 4.1 se muestra esquemáticamente el proceso llevado a cabo para determinar el valor óptimo de  $S_P$ , que implica el cálculo de los demás datos de interés. Véase:



**Figura 4.1:** Proceso de optimización del modelo, identificando el  $S_P$  que minimiza el error.

Como se puede apreciar, el proceso completo consta de 5 fases, que se tratan con más detalle a continuación:

■ **Fase 1.**

Se parte de unos datos de entrada, que caracterizan la configuración y fenómenos físicos a tener en cuenta (si incluir cabeceo y/o tensiones rasantes, o no, por ejemplo) del problema; así como otros parámetros para definir el comportamiento del algoritmo, como el número de frecuencias a estudiar o el tipo de proceso de cálculo a seguir en la optimización.

■ **Fase 2.**

Siendo los datos de entrada conocidos (Si se trata de la primera iteración, se supone  $S_P = 0$ ), se llama de forma paralela a dos funciones, que devuelven la respuesta en desplazamiento, giro, tensión y flector del pilote según el modelo analítico, en una rama, y el modelo BEM-BEM, en la otra. Los datos obtenidos se almacenan en ambos casos.

■ **Fase 3.**

Teniendo los datos de salida para ambos modelos, se comparan calculando el error, tal como se plantea en el apartado correspondiente. Se almacenan los datos obtenidos de error y se comprueba si son mínimos. En caso contrario, se vuelve a iniciar desde la *Fase 2*, con distinto  $S_P$ . Una vez se encuentra el error mínimo, se considera encontrado el valor óptimo de  $S_P$ .

Nótese que, como se dice en el apartado previamente, en lo que se refiere al modelo analítico, la diferencia entre un modelo Winkler y Pasternak radica en si  $S_P = 0$  o no, lo cual es muy conveniente a la hora de implementar ambos modelos. Basta con anular el parámetro de entrada, sin crear ninguna función aparte, garantizando que se sigue paso a paso el mismo código y que la diferencia que existiese entre usar  $S_P = 0$  o no vendrá puramente de lo que se haga con dicho parámetro en la entrada.

■ **Fase 4.**

Teniendo en cuenta que la optimización se realiza minimizando para una variable, se recalcula el resto de variables de salida con el ya  $S_P$  óptimo, en caso de ser necesario (si se identifica el valor por *barrido*).

■ **Fase 5.**

Se acumulan los datos definitivos. Se les realiza post-procesado y/o representación, de nuevo, en caso de ser necesario. Se finaliza el proceso.

De ésta manera, se utiliza un fichero central que supone la columna vertebral, donde se recoge en esencia el proceso explicado y desde el cual se llama a funciones que resuelven lo requerido en cada fase.

En la minimización del error (o directamente, optimización), en concreto, se contrasta lo obtenido pudiendo utilizar distintos procedimientos para el cálculo. Así, es posible identificar el error mínimo por barrido o usando la función *fmincon*. A continuación se detallan los dos procesos utilizados:

#### 4.2.1 Minimización por barrido

Consiste en acumular los datos de salida del modelo analítico, del modelo BEM-BEM y de error para un vector de valores para  $S_P$ , predeterminados desde el inicio del programa

en la *Fase 1*. En dicho vector consta como valor inicial  $S_P = 0$  siempre, para asegurar que se comparan los modelos Winkler y Pasternak.

Es un método muy sencillo, lejos de ser el óptimo, pero adecuado para confirmar que la función *fmincon* funciona, pues existía el riesgo de que ésta confundiese un mínimo local con el mínimo global de la función. Siendo tan radicalmente distinto el procedimiento y confirmando los resultados, dicho peligro desaparece.

### 4.2.2 Minimización usando *fmincon*

La función *fmincon*, en cambio, se escoge por su idoneidad para el trabajo a realizar. Viene incluida en el paquete de optimización de MatLab, es versátil y permite tener cierto control sobre su comportamiento: escogiendo el algoritmo de cálculo, especificando la escala del problema, escogiendo cómo hallar la sensibilidad del parámetro a minimizar, los límites de operación, etc. Las escogidas fueron las siguientes:

- **Límite inferior:**  $-1 \cdot 10^{-15}$   
Se escoge un valor muy pequeño y negativo, con el objetivo de que la función estudie valores naturales pasando por 0. El detalle es importante, pues el intervalo de estudio es cerrado; por lo que de seleccionar como límite inferior el valor 0, la función no ensayaría el modelo Winkler.
- **Límite superior:** *Inf*  
Si bien no se introducen otras restricciones, los límites en los que opera la función deben ser especificados. En nuestro caso, desconociendo un valor máximo que pudiese alcanzar  $S_P$ , se aconseja desde la propia Ayuda de Matlab indicar directamente el límite como *Inf*.
- **Sensibilidad:** Diferencias finitas centradas  
El cálculo, cuando no se aporta directamente unos valores obtenidos de forma analítica o se especifica otro método, se hace por defecto con diferencias finitas hacia delante. En nuestro caso se usa las diferencias finitas centradas por su capacidad para dar resultados más precisos, pues el programa es suficientemente rápido como para no notar diferencia en la carga computacional extra que supone.

Existen más opciones disponibles, pero con esas es suficiente para que la función encuentre el mínimo absoluto del error y registre el  $S_P$  usado para obtener el mismo.

# CAPÍTULO 5

## RESULTADOS

Una vez formulado el modelo e implementado, se prueba hallando la solución para problemas con un rango de propiedades y dimensiones de interés práctico. Se presentan los resultados que se consideran más relevantes.

### 5.1 Casos estudiados: configuraciones físicas

Una vez explicado el modelo y la medida del error que se considera adecuado realizar; el último requisito necesario antes de poder obtener números y cuantificar si se ha llegado a buen puerto es decidir qué tantas configuraciones físicas probar, así como qué factores variar entre un caso y otro.

De ésta manera, se considera adecuado estudiar el problema haciendo combinaciones con distintos valores de la relación de esbeltez ( $L/D$ ), la relación entre los modulos de Young de suelo y estructura ( $E_p/E_s$ ) y el coeficiente de Poisson del terreno ( $\nu$ ). Si se da 3 valores diferentes para cada parámetro, se tienen 27 casos diferentes de estudio, donde todos tienen en común lo presentado en la tabla 5.1.

Diámetro del pilote	$D_P = 0.6$ (m)
Módulo de Young del pilote	$E_P = 30$ (GPa)
Relación de densidades	$\rho_{suelo}/\rho_{pilote} = 0.7$
Coeficiente de Poisson del pilote	$\nu_P = 0.25$
Coef. de amortiguamiento del suelo	$\xi_s = 0.05$
Factor de cortante	$f_c = 0.882352941$
Número de frecuencias	$n_w = 15$
Número de puntos en el pilote	$n_p = 42$

**Tabla 5.1:** Datos constantes en todas las configuraciones físicas ensayadas.

Por otro lado, a la relación de esbeltez ( $L/D$ ), la relación entre los modulos de Young de suelo y estructura ( $E_p/E_s$ ) y el coeficiente de Poisson del terreno se le asignan los valores que se ven en la tabla 5.2.

$L/D$	$E_p/E_s$	$\nu$
10	50	0.30
15	100	0.40
20	200	0.49

**Tabla 5.2:** Datos que varían según la configuración físicas que se ensaye.

## 5.2 Respuesta de los modelos Winkler y Pasternak

El punto inicial del presente PFC es proveer de prueba empírica para demostrar que con un modelo Pasternak, convenientemente identificado el parámetro  $S_P$ , mejora sustancialmente los resultados respecto a uno Winkler.

Una vez obtenidos los datos de salida, se comparan. Se observa lo siguiente:

### 5.2.1 Dependiendo de la frecuencia

Según sea la frecuencia de excitación, la respuesta varía. Se han testeado 15 frecuencias, de las cuales se escoge las más representativas, como se muestra en las figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4.

Así, se fijan los ejes atendiendo a cuáles son los valores máximos obtenidos. Por ello, los valores de las frecuencias bajas se ven prácticamente constantes. En comparación lo son, aunque con una mirada más próxima se aprecia que no son curvas puramente constantes.

Si nos fijamos en las figuras 5.3 y 5.4 se observa, en cambio, cómo la respuesta aumenta su frecuencia de oscilación, así como el ajuste del modelo Pasternak a lo obtenido con el BEM-BEM. Sin embargo, se ve que en  $\xi = -1$  el desplazamiento y el giro obtenidos con los modelos analíticos se alejan más de los del BEM-BEM, lo cual podría deberse a las CC escogidas.

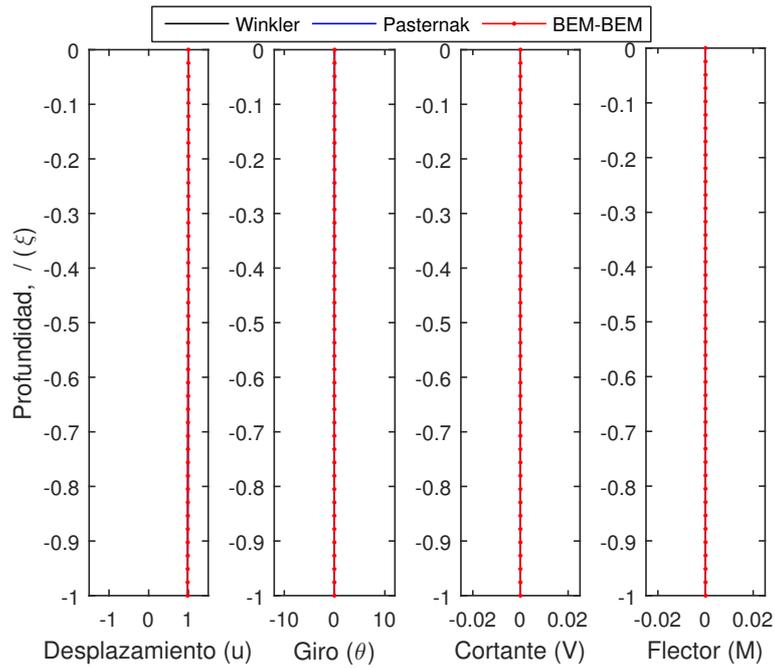
### 5.2.2 Dependiendo de la configuración física

Además de la frecuencia, los resultados cambian según se analice el problema para una determinada configuración física u otra.

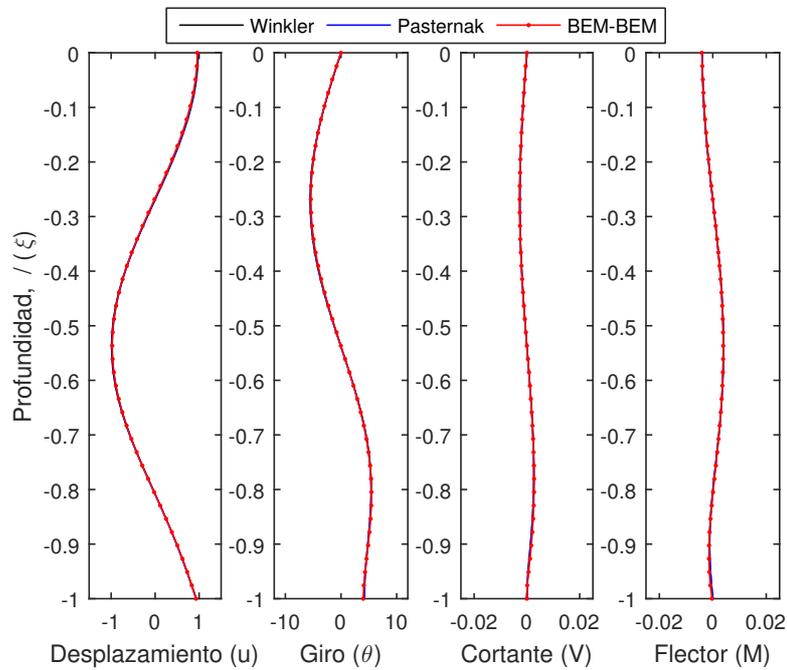
De ésta manera, se puede ver que las curvas se desplazan, dependiendo de los valores asignados a  $L/D$ ,  $E_p/E_s$  y  $\nu$ . Se muestran algunos ejemplos en las figuras 5.5, 5.6 y 5.7. Se ha decidido mostrar los datos dimensionales por la 5.5, para evitar que a la hora de ajustar las curvas a los ejes, no pareciese (erróneamente) que la frecuencia de la respuesta difiere de un caso a otro. Nótese que además de las curvas del modelo Pasternak se incluyen las del modelo BEM-BEM, para poder comparar qué tanto se debe el desplazamiento de las curvas a la variación de la configuración física o a  $S_P$ .

Así, entrando a discutir propiamente lo mostrado en las gráficas, se observa lo siguiente:

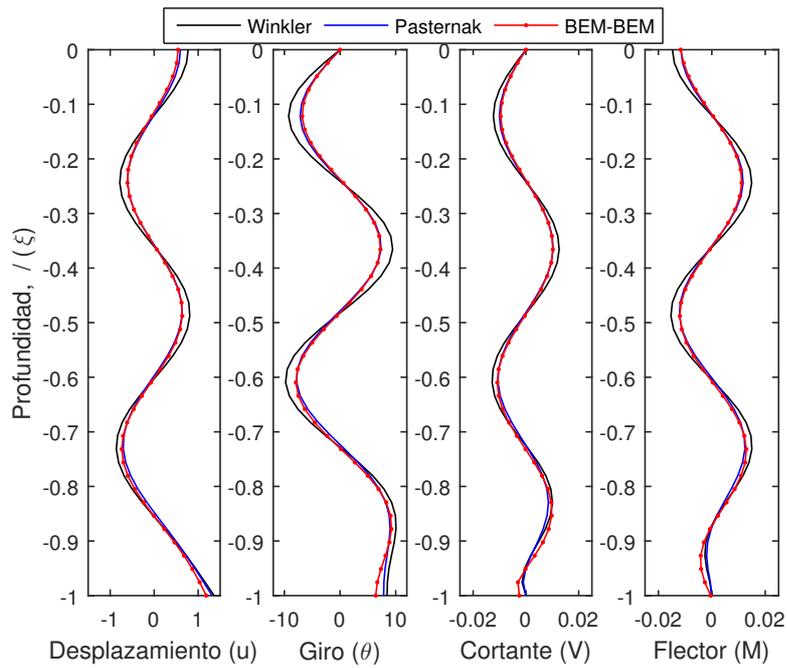
- **Comparativa  $L/D$ .** El modelo Pasternak ajusta bien los valores de las curvas independientemente del  $L/D$  escogido, pero se aprecia una mayor diferencia entre el modelo Winkler y Pasternak conforme aumenta la esbeltez del pilote.



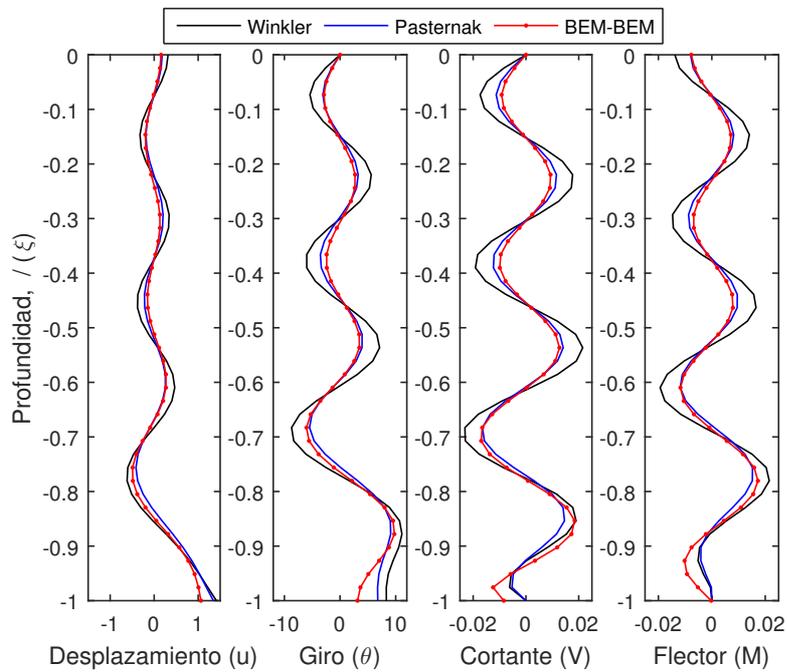
**Figura 5.1:** Respuesta del modelo optimizado. Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $a_0^* = 0.01$ , optimizando M



**Figura 5.2:** Respuesta del modelo optimizado. Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $a_0^* = 0.29$ , optimizando M



**Figura 5.3:** Respuesta del modelo optimizado. Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $a_0^* = 0.65$ , optimizando M



**Figura 5.4:** Respuesta del modelo optimizado. Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $a_0^* = 1.00$ , optimizando M

Por otro lado, al contrario de lo que pueda parecer a simple vista, las curvas están en fase. La apariencia dispar de las curvas en la gráfica se debe a que se presentan datos adimensionales.

- **Comparativa  $E_P/E_S$ .** En lo que a las curvas variando  $E_P/E_S$ , se observa una dispersión más acusada de las mismas. El efecto de usar un modelo Pasternak en lugar de uno Winkler mejora comparativamente más en éste caso que variando  $L/D$ .
- **Comparativa  $\nu$ .** Sin embargo, dicho fenómeno apenas se aprecia al variar  $\nu$ , pues las curvas apenas se dispersan usando un valor de  $\nu$  u otro.

### 5.2.3 Dependiendo de la variable a optimizar

La optimización se realiza para disminuir el error de una variable; pero escoger optimizar una variable u otra cambia el  $S_P$  considerado óptimo y, por tanto, el resultado a obtener.

Así, se muestran la respuesta para las variables de salida optimizando para el desplazamiento, el giro, el cortante y el flector, que se muestra en las figuras 5.8, 5.9, 5.10 y 5.4, respectivamente. Se escoge representar en todas las gráficas la mayor frecuencia de estudio, porque se aprecian mayores amplitudes en los resultados. Se espera así hacer notar mejor cómo cambian las gráficas según se optimice para una variable u otra.

## 5.3 Medida del error

Como ya se dice anteriormente, cuantificar la diferencia entre los datos de referencia y los obtenidos con el modelo que se presenta es necesario para validar el modelo.

De entrada, es importante aclarar que, aunque los valores calculados de error que se obtienen son complejos, en adelante sólo se usa la parte real. Es de interés comentar que, si bien también se usa sólo la parte real del error para identificar  $S_P$ , dicha elección no es arbitraria. Si se optimiza usando el valor imaginario, lo que se obtiene es que en ese caso el valor óptimo de  $S_P$  es 0, para todas las frecuencias estudiadas. Por ello se considera adecuado adoptar dicha política, simplificando los cálculos a realizar.

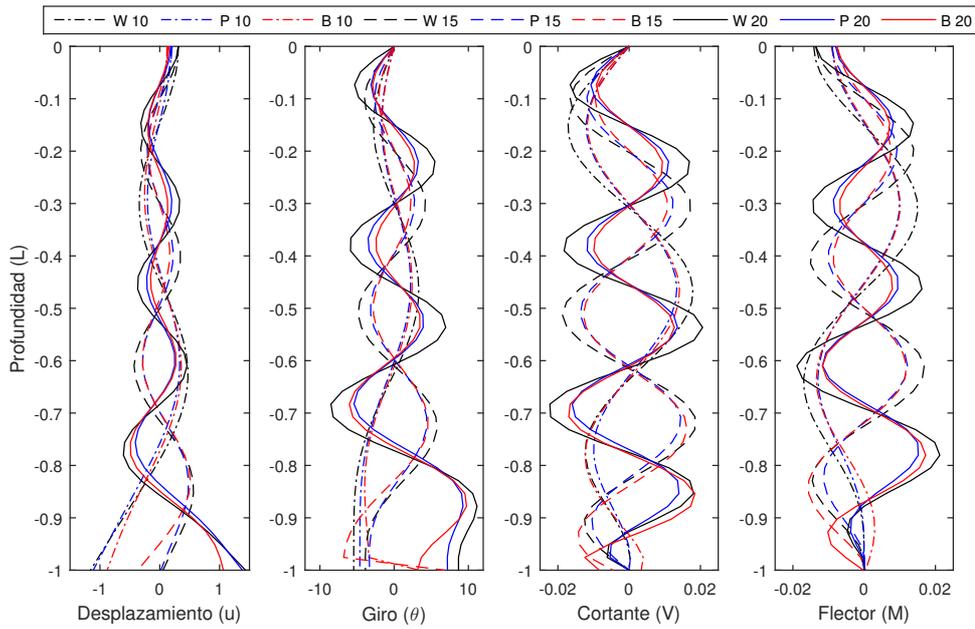
Por otro lado, por bien calculados que estén los datos, observar directamente las variables de salida en las gráficas, sin un estudio más profundo de los datos, puede llevar a equívocos. Así pues, con el error se tratan las mismas cuestiones que a la hora de estudiar los resultados de las variables de salida, además de la relación entre el error y  $S_P$ .

Empezando por la relación entre el error y  $S_P$ , se observa lo siguiente:

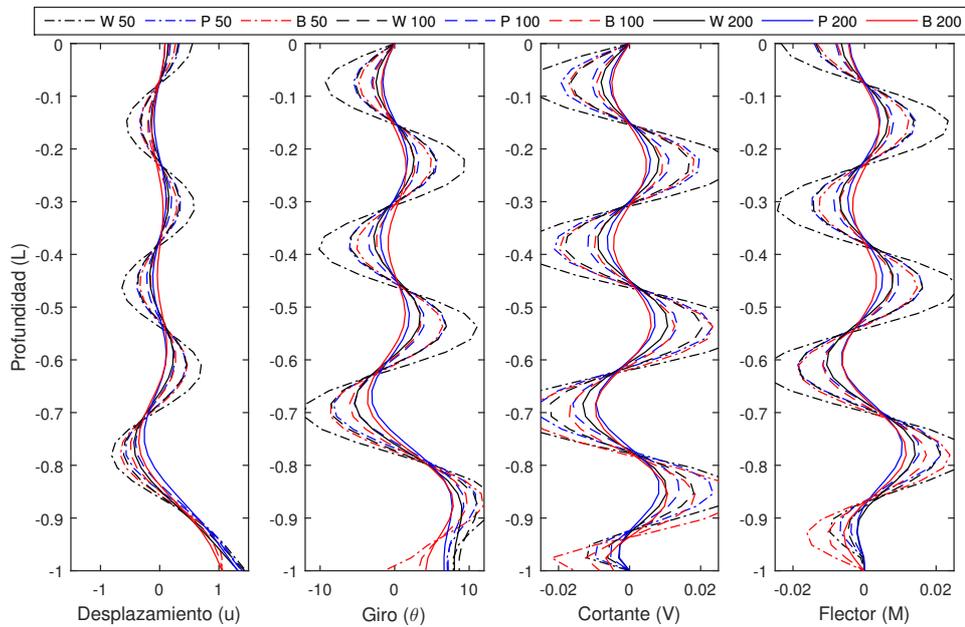
### 5.3.1 Relación con $S_P$

El valor obtenido de la optimización de  $S_P$  está directamente ligado al error por el hecho de usarlo como función objetivo a minimizar. Por ello, entender la relación entre ambos puede ilustrar y aportar detalles que mejoren el proceso de minimización.

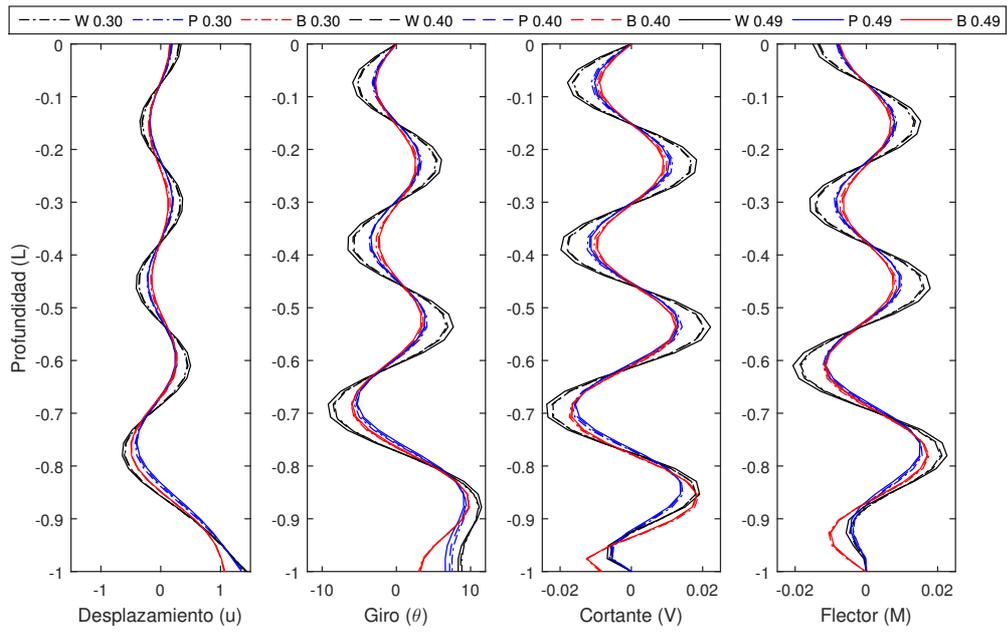
## 5 Resultados



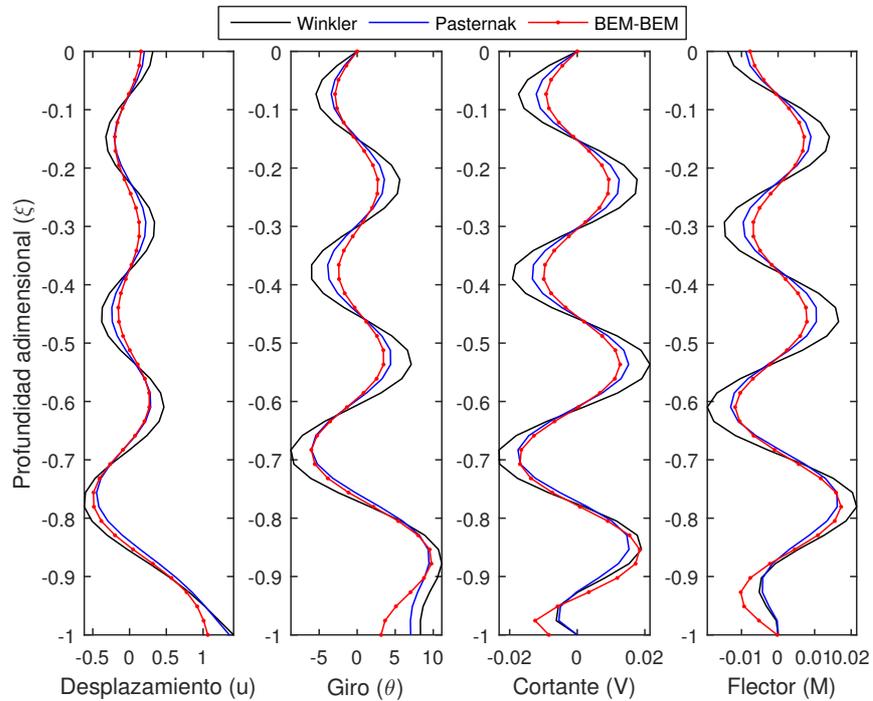
**Figura 5.5:** Comparativa de respuesta variando  $L/D$ . Datos de entrada:  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $a_0^* = 1.00$ , optimizando  $u$



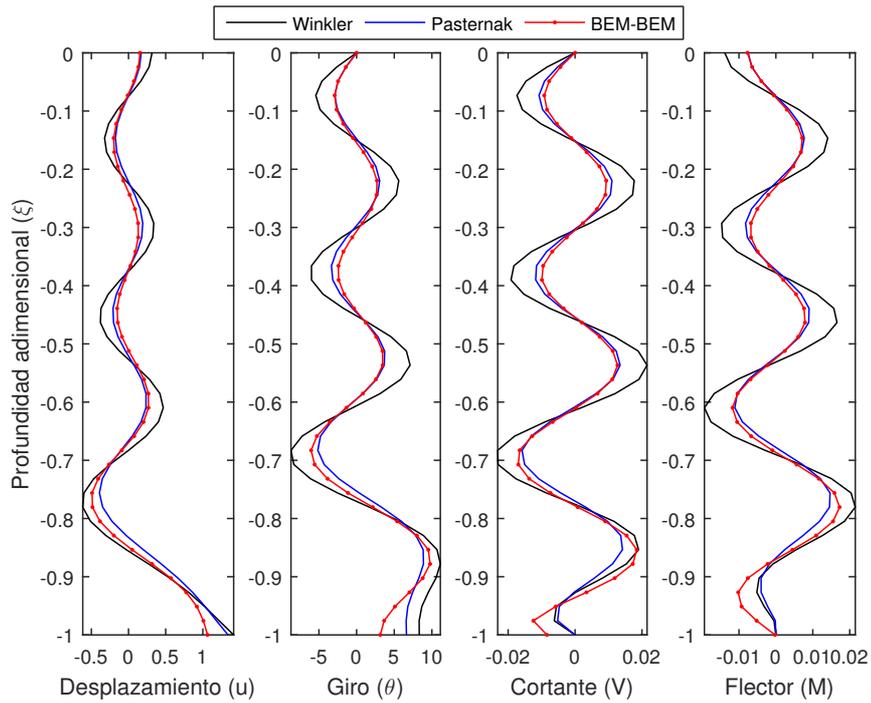
**Figura 5.6:** Comparativa de respuesta variando  $E_p/E_s$ . Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $a_0^* = 1.00$ , optimizando  $u$



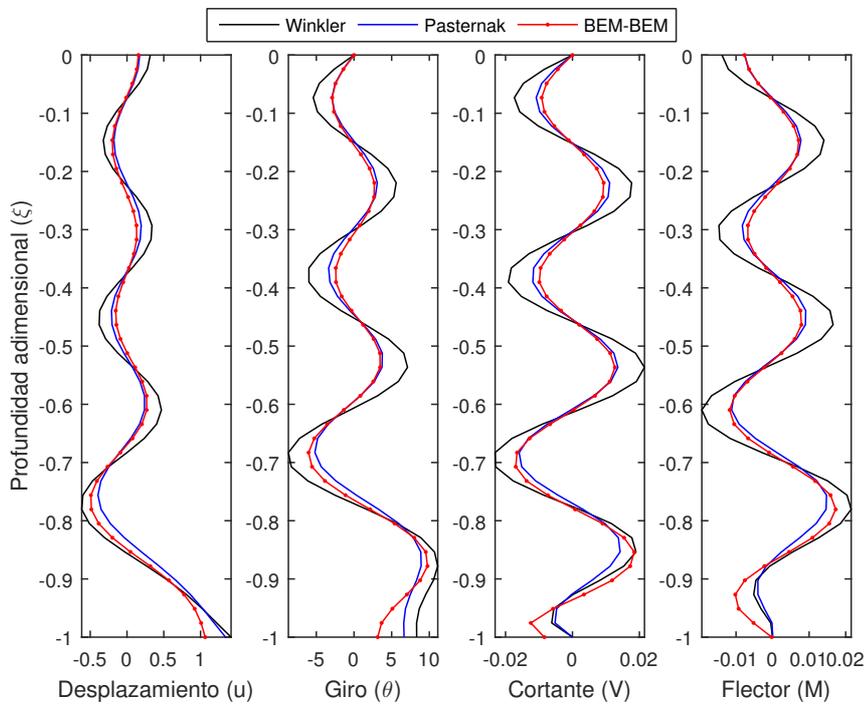
**Figura 5.7:** Comparativa de respuesta variando  $\nu$ . Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $a_0^* = 1.00$ , optimizando u



**Figura 5.8:** Resultados optimizando el desplazamiento (u). Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $a_0^* = 1.00$ .

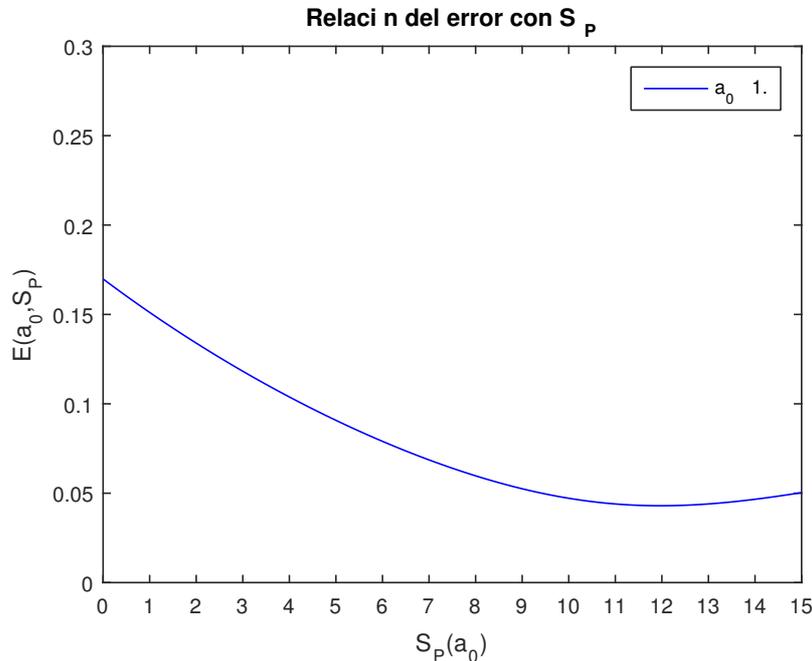


**Figura 5.9:** Resultados optimizando el giro ( $\theta$ ). Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $a_0^* = 1.00$ .



**Figura 5.10:** Resultados optimizando el cortante (V). Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $a_0^* = 1.00$ .

Así, atendiendo al hecho de que calculando el error del modelo analítico, Winkler o Pasternak, se supone ya un  $S_P$  (independientemente de que sea el óptimo), se tiene que la optimización debe ser un proceso recursivo, comparando constantemente los errores obtenidos hasta encontrar el mínimo. Sirva de ejemplo la figura 5.11, para la cual el error mínimo se obtendría con valores de  $S_P$  entre 11 y 13.



**Figura 5.11:** Error respecto al  $S_P$  usado para su obtención. Datos obtencion.

Nótese que la curva, continua, descrita al representar el error frente al  $S_P$  depende de la frecuencia, por lo que  $S_P$  dependerá de la frecuencia también.

Además, al minimizar el error para identificar  $S_P$ , se da prioridad al mínimo valor de  $S_P$  en el caso de que al menos dos errores coincidan. Ésto se introduce para los casos en los que la relación  $S_P$ —error tenga un comportamiento asintótico.

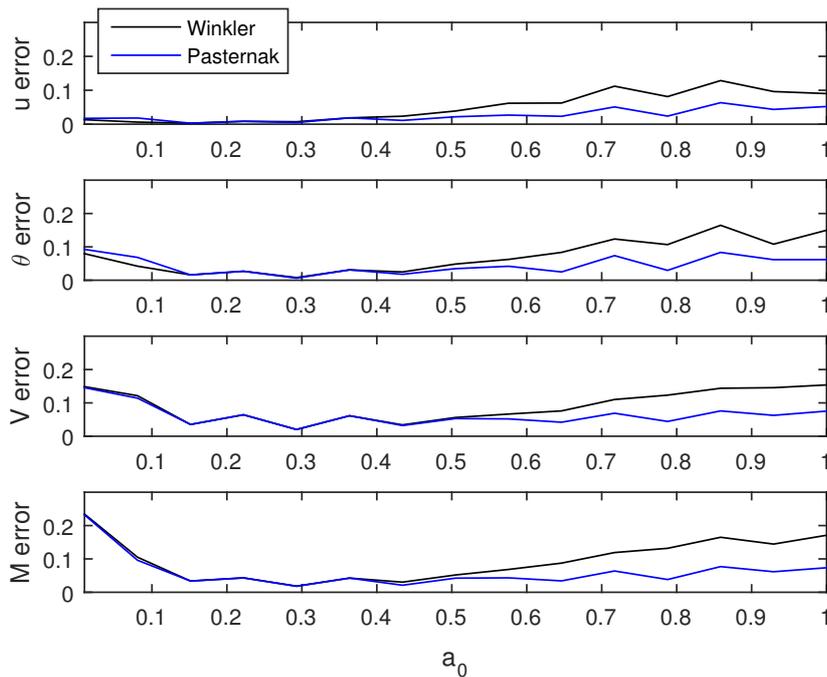
### 5.3.2 Dependiendo de la frecuencia

En el apartado anterior ya se dice: el error, como las variables de salida, depende de la frecuencia. Lo que se observa al analizar las gráficas, como la que se presenta en la figura 5.12, es que los valores de error para las frecuencias más bajas son destacablemente más altos. Sobre todo para los esfuerzos cortante y flector.

Se observa que para las frecuencias más altas el error baja del 10%. Ésto ocurre en todas las configuraciones físicas estudiadas.

### 5.3.3 Dependiendo de la configuración física

Como se nombraba con las variables de salida, estudiar la respuesta para una configuración física u otra resalta que, si bien las curvas mantienen el mismo patrón, se desplazan según el caso.



**Figura 5.12:** Errores obtenidos de comparar el modelo Winkler y Pasternak con el BEM-BEM. Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_P/E_S = 100$ ,  $\nu = 0.4$ , optimizando  $M$ .

De ésta manera, se tiene las figuras 5.13, 5.14 y 5.15, que presentan las gráficas del error variando  $L/D$ ,  $E_P/E_S$  y  $\nu$ , respectivamente.

En ésta ocasión se presentan las curvas del modelo Winkler junto a las del Pasternak, para mostrar la diferencia entre ambos (no apreciable en las figuras 5.5, 5.6 y 5.7).

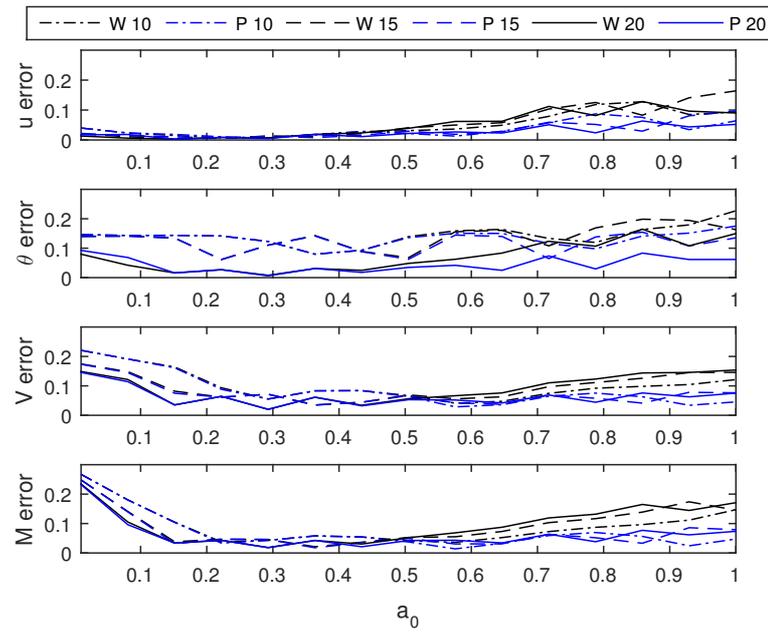
Se observa lo siguiente:

- **Comparativa  $L/D$ .** Como se puede apreciar en la figura 5.5, el modelo ajusta bien las curvas, especialmente para las mayores frecuencias estudiadas. También se puede apreciar que, para el cortante y el flector, conforme disminuye  $L/D$ , lo hace la pendiente.
- **Comparativa  $E_P/E_S$ .** Para el cortante y el flector, al aumentar  $E_P/E_S$ , aumenta la pendiente de las curvas de error del modelo Winkler. Sin embargo, las curvas de error del Pasternak apenas se dispersan.
- **Comparativa  $\nu$ .** Igual que para  $E_P/E_S$ , el error del modelo Pasternak no depende de  $\nu$ .

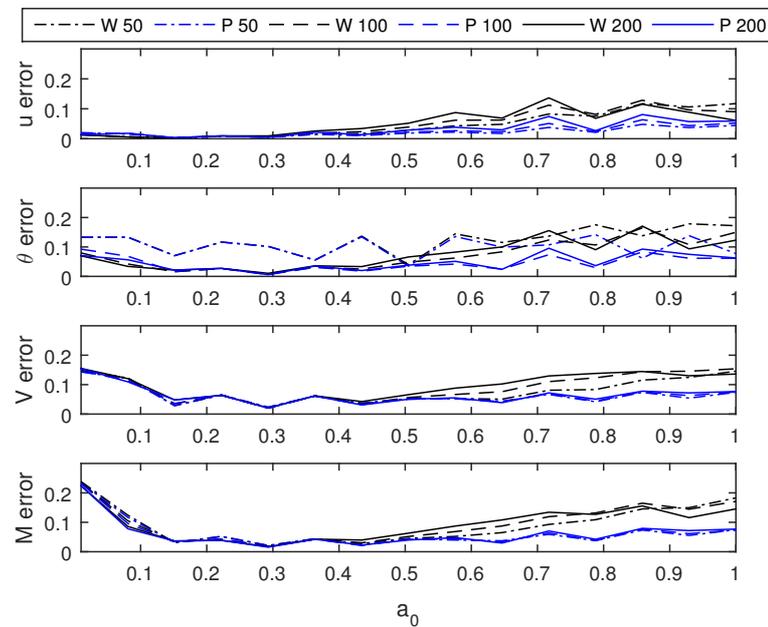
### 5.3.4 Dependiendo de la variable a optimizar

Íntimamente relacionado con lo comentado anteriormente, el error supone ahora aportar cantidades a lo observado cualitativamente.

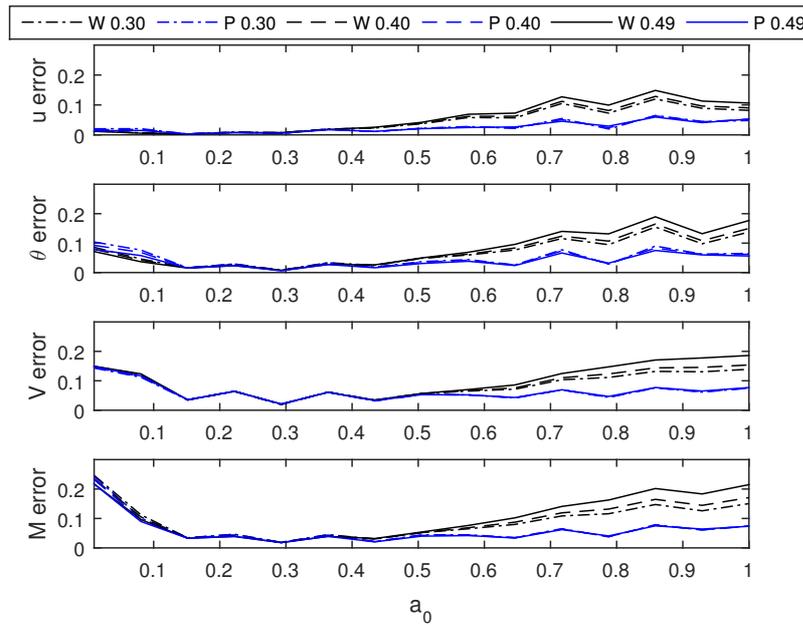
Se construye la tabla 5.3 para unificar los datos de error y, por tanto, cuantificar si una variable reduce sensiblemente más o no los errores en la respuesta.



**Figura 5.13:** Comparativa de errores variando  $L/D$ . Datos de entrada:  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.40$ , optimizando  $u$



**Figura 5.14:** Comparativa de errores variando  $E_p/E_s$ . Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $\nu = 0.40$ , optimizando  $u$



**Figura 5.15:** Comparativa de errores variando  $\nu$ . Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ , optimizando  $u$

Teniendo en cuenta que el error para unos datos de entrada dados es diferente para cada frecuencia estudiada, lo que se hace es presentar el valor medio de los valores obtenidos para cada frecuencia, para así presentar un valor único por variable. Además, para medir la mejora en sí, no se muestra el error Winkler o Pasternak, sino la diferencia entre ambos, de manera que lo mostrado cuantifica la mejora de Pasternak respecto a Winkler.

	Optimizando $u$	Optimizando $\theta$	Optimizando $V$	Optimizando $M$
$u$	2.43 %	2.32 %	2.06 %	2.22 %
$\theta$	2.74 %	2.85 %	2.31 %	2.51 %
$V$	2.00 %	2.01 %	2.18 %	2.13 %
$M$	3.18 %	3.20 %	3.24 %	3.33 %

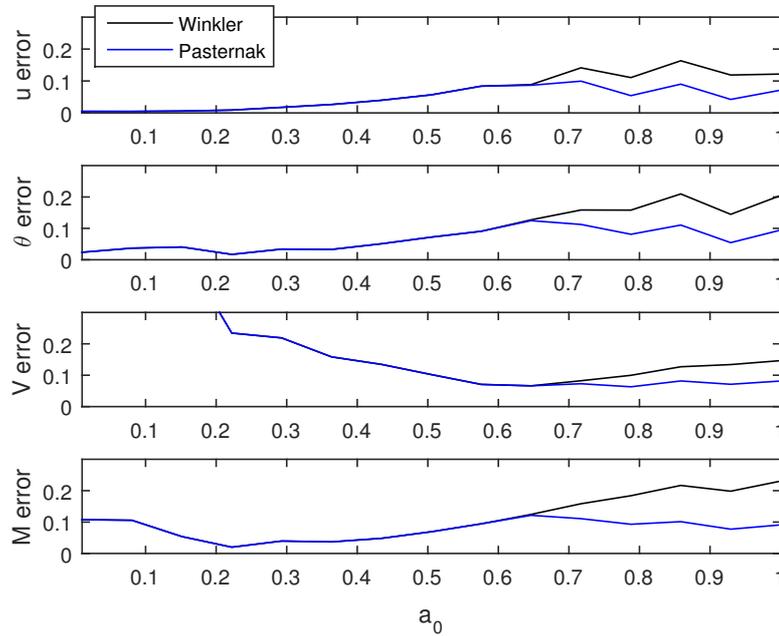
**Tabla 5.3:** Comparativa de la mejora en el error medio obtenido para cada variable de salida, según la variable respecto a la que se optimice. Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.4$ .

Lo que se observa analizando dicha tabla es que ninguna variable mejora muchísimo más que las demás la respuesta del modelo, pero sí es posible apreciar que el modelo Pasternak mejora siempre el Winkler, con valores entre 0.12-4.95 % según la variable de salida, la variable optimizada y la configuración física que se estudie.

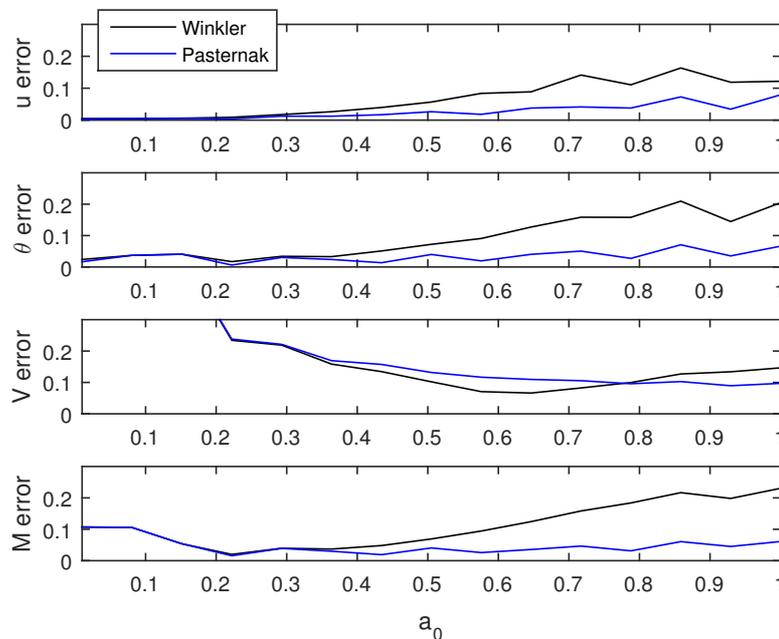
Así, se observa también lo siguiente:

- Para  $L/D = 20$ , el flector siempre mejora más que las demás variables.
- Para  $L/D = 10$ , todos los valores son sensiblemente más bajos que con otros valores de  $L/D$ .
- Para la combinación  $E_p/E_s = 200$  y  $\nu = 0.49$ , los valores de mejora son especialmente altos.

Se puede decir por tanto, que, teniendo en cuenta lo observado en los datos de error, en todos los casos estudiados optimizar respecto al flector supone al menos la misma mejoría, si no más, que optimizando respecto al resto de variables.



**Figura 5.16:** Comparativa optimizando el cortante ( $V$ ) cuando se prescinde de cabeceo y tensiones rasantes. Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu_s = 0.4$ .



**Figura 5.17:** Comparativa optimizando el flector ( $M$ ) cuando se prescinde de cabeceo y tensiones rasantes. Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.4$ .

Por otro lado, también es notable la diferencia entre incluir o no el efecto de cabeceo y las tensiones rasantes en el modelo, como puede observarse en la figuras 5.16 y 5.17.

A pesar de que a simple vista no parecía haber mucha diferencia (observando directamente las variables de salida), se observa cómo al tener en cuenta dichos fenómenos físicos, el cortante pasa de tener errores descontrolados (de más del 30 %) a seguir una curva relativamente próxima a la de referencia (valores de error inferiores a 15 %).

El flector, en cambio, se ajusta mejor cuando se prescinde del cabeceo y de las tensiones rasantes en todas las configuraciones físicas probadas. Pasa de tener valores de error de cerca del 20 % para las frecuencias más bajas a bajar, en prácticamente todos los casos, del 10 %.

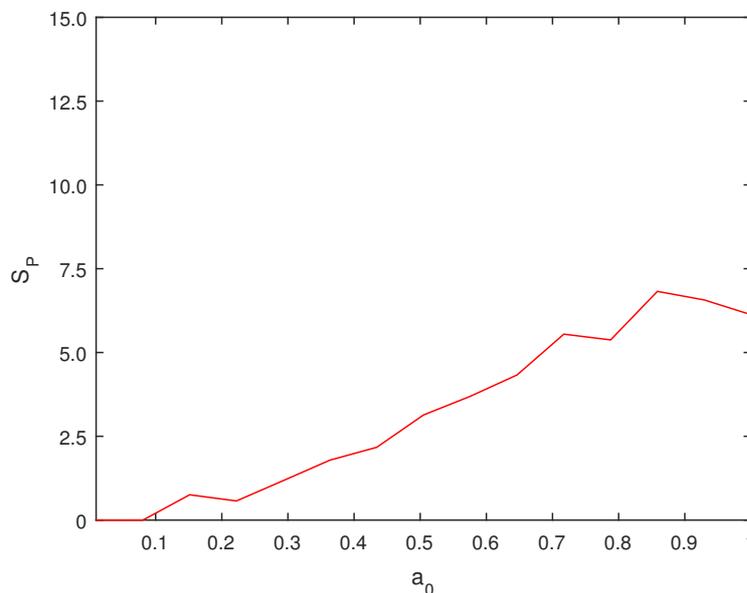
### 5.4 Evolución de $S_P$

Como se ve previamente en el planteamiento del modelo, se calcula la impedancia de Winkler con el procedimiento de Novak; considerando el segundo coeficiente de balasto, la impedancia de Pasternak, como como una variable de diseño cuyo valor hay que identificar.

En los resultados de la optimización se observa lo siguiente:

#### 5.4.1 Dependiendo de la frecuencia

Exactamente como venía pasando tanto con las variables de respuesta, como con el error, el  $S_P$  se supone y demuestra dependiente de la frecuencia. Se puede apreciar en la figura 5.18.

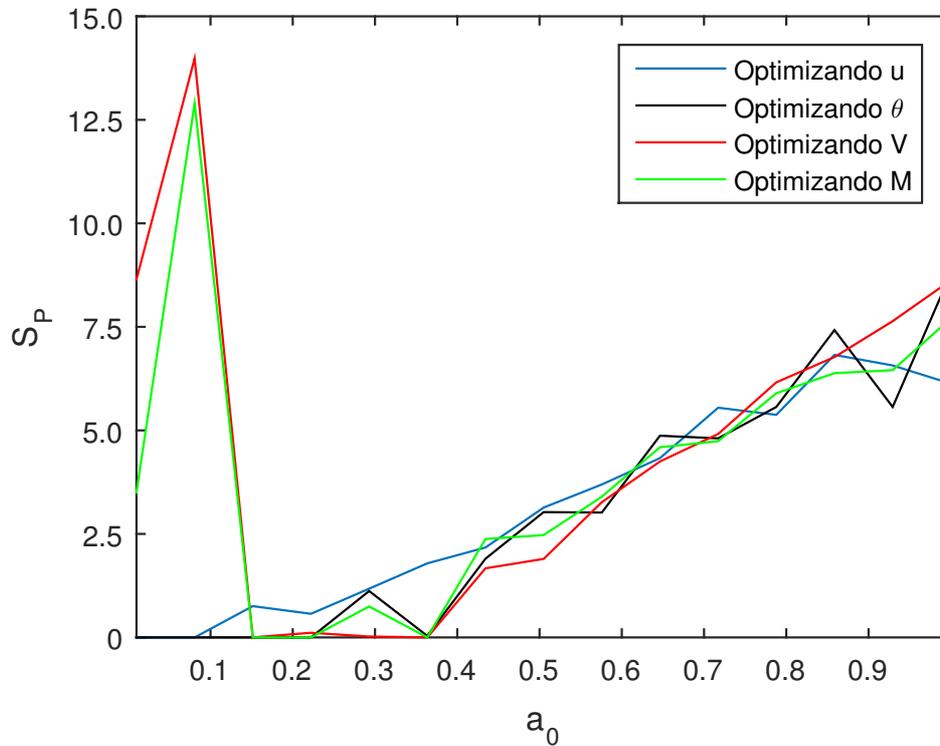


**Figura 5.18:**  $S_P$  frente a la frecuencia. Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.4$ , optimizando  $u$ .

Se observa que, curiosamente, la impedancia adimensional de Pasternak depende de forma prácticamente lineal de la frecuencia. No se incurriría en mucho error si se representa como una recta con corte en el origen de coordenadas.

### 5.4.2 Dependiendo de la variable a optimizar

El parámetro  $S_P$  depende de la frecuencia. Así se ha considerado al hablar tanto de las variables de salida del modelo, como del error. Sin embargo, no parece que dependa en gran medida de la variable que se optimiza, tal como se observa en la figura 5.19.



**Figura 5.19:** Comparativa  $S_P$  óptimo calculado en función de la variable a optimizar. Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_p/E_s = 100$ ,  $\nu = 0.4$ .

Nótese además que la presencia de valores tan altos de  $S_P$  en las frecuencias bajas del cortante y del flector es despreciable. Observando los valores de error para esas mismas frecuencias y optimizando dichas variables, es palpable que no existe una gran mejoría entre usar un modelo Pasternak (con dicho  $S_P$ ) y un modelo Winkler.

Ésto puede deberse a lo pequeños que son ya los valores de las variables de salida en dichas frecuencias, en cuyo caso no resulta tan crítico a posteriori un cálculo menos certero, es decir, suponer un  $S_P$  bajo, más coherente con el carácter "lineal" que se aproxima para  $S_P$ .

### 5.4.3 Dependiendo de la configuración física

Si bien la curva de  $S_P$  dependiente de la frecuencia tiende siempre a crecer linealmente, la pendiente de la misma varía según la configuración física que se estudie. De ésta manera, se tiene las figuras 5.20, 5.21 y 5.22, donde se observa que:

## 5 Resultados

- **Comparativa  $L/D$ .**

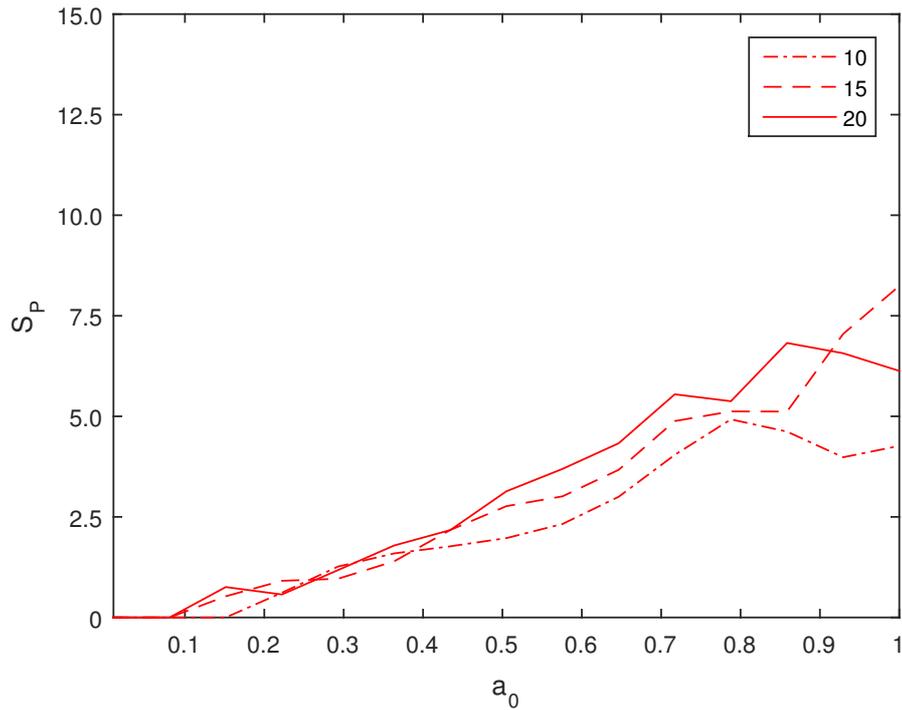
Al igual que con los errores, al aumentar  $L/D$ , aumenta la pendiente de  $S_P$ . Por ello se puede decir que  $S_P$  depende directamente de  $L/D$ .

- **Comparativa  $E_P/E_S$ .**

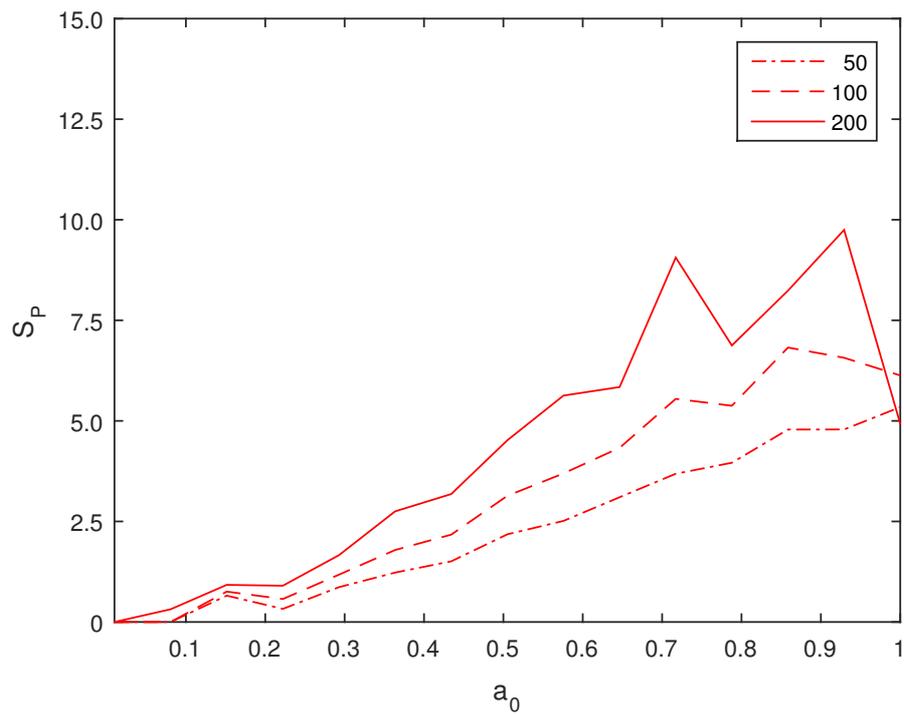
Ahora, aumenta la pendiente al aumentar el valor de  $E_P/E_S$ .

- **Comparativa  $\nu$ .**

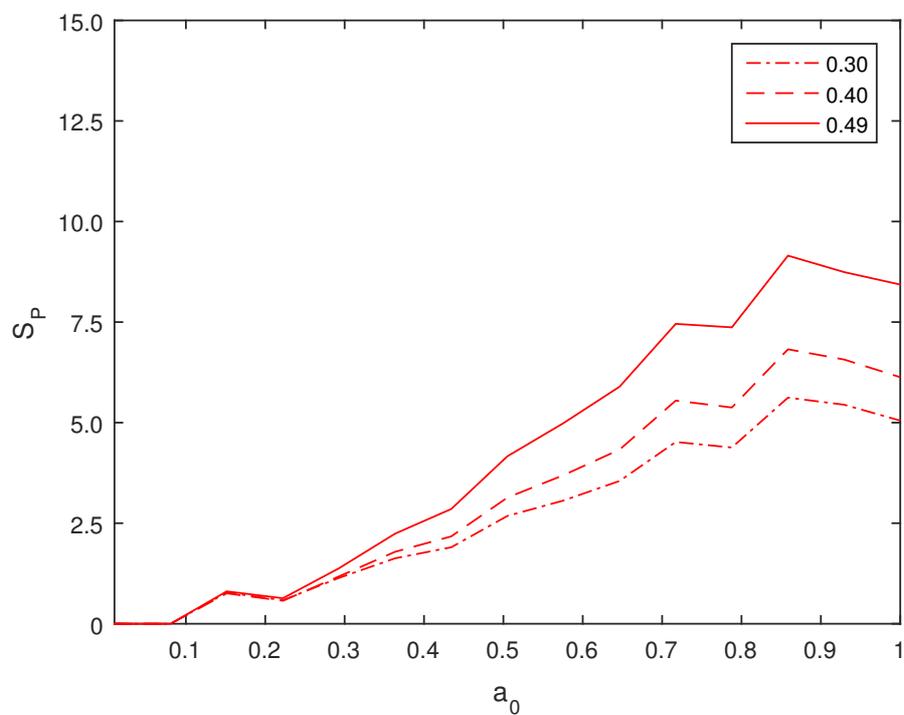
En la misma tónica, al aumentar  $\nu$ , aumenta la pendiente.



**Figura 5.20:** Comparativa de  $S_P$  variando  $L/D$ . Datos de entrada:  $E_P/E_S = 100$ ,  $\nu = 0.40$ , optimizando  $u$



**Figura 5.21:** Comparativa de  $S_P$  variando  $E_P/E_S$ . Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $\nu = 0.40$ , optimizando  $u$



**Figura 5.22:** Comparativa de  $S_P$  variando  $\nu$ . Datos de entrada:  $L/D = 20$ ,  $E_P/E_S = 100$ , optimizando  $u$



# CAPÍTULO 6

## CONCLUSIONES

Se decide formular un modelo Pasternak para el estudio de la respuesta dinámica de un pilote, identificando el valor de  $S_P$  (parámetro que lo diferencia de un clásico modelo Winkler), y se incluye en el modelo cabeceo y tensiones rasantes. Se pretende con esto obtener un modelo analítico sencillo y suficientemente riguroso, comparando su salida con la de modelos de resolución numérica más precisos y costosos computacionalmente.

Se ensayan 27 configuraciones físicas, cambiando  $L/D$ ,  $E_p/E_s$ , y  $\nu$ , y se estudia la dependencia de la respuesta a la frecuencia, a los parámetros recién nombrados y a  $S_P$ . Tras mostrar y analizar los resultados obtenidos, se concluye lo siguiente:

### 6.1 Sobre el modelo analítico propuesto

Se buscaba un modelo que, siendo sencillo, recogiera lo más fielmente la respuesta dinámica del pilote a una excitación armónica (tipo onda SH). Por lo obtenido, tanto en las gráficas de la respuesta como en las de los errores, se puede afirmar que se consigue, aunque con valores de error todavía altos, según el caso (de en torno al 10-20 % respecto al modelo de referencia).

Se estudia si minimizar el valor del error respecto a una variable en concreto, identificando el valor de  $S_P$  óptimo, mejora la respuesta. Se comprueba que no afecta sustancialmente al resultado, pero se ven indicios de que, salvo que se tenga un especial interés en el cortante, la variable a optimizar por defecto es el flector. Si se tiene especial interés en el cortante no se debe prescindir de cabeceo y tensiones rasantes, pero si la variable de interés es el flector, mejor no incluir dichos efectos. Así, los factores que más colaboran a dicha mejora son precisamente el parámetro de Pasternak ( $S_P$ ), incluir las inercias del pilote e incluir, o no, cabeceo y tensiones rasantes.

Por otro lado, las variables  $L/D$ ,  $E_p/E_s$ , y  $\nu$  varían la respuesta, especialmente  $L/D$  y  $E_p/E_s$ ; pero no se les encuentra relación con la disminución del error (y por tanto, mejora del modelo), como sí pasa con  $S_P$ .

Se han observado además fuertes indicios de que  $S_P$  depende de  $L/D$ ,  $E_p/E_s$ , y  $\nu$ , pero no se propone aquí ninguna expresión analítica para el parámetro  $S_P$  porque se considera necesario un estudio más exhaustivo de las variables que afecten al mismo.

Así, se considera que, si bien todavía no es lo suficientemente certero, se consigue formular un modelo analítico más completo y tener un mejor conocimiento del comportamiento de modelos simplificados tipo Winkler.

### 6.2 Líneas futuras

Del trabajo realizado en el presente PFC se extrae que tal vez sea posible encontrar un modelo simplificado de interacción suelo-estructura que devuelva una respuesta satisfactoriamente certera, siempre que se sepa introducir adecuadamente en los modelos la realidad física del pilote al ser excitado.

Por ello, se insta a seguir investigando los modelos simplificados, pudiendo seguir las siguientes líneas de investigación:

- Identificación y caracterización de los factores que definen el comportamiento del parámetro  $S_P$ .
- En la misma línea, formular e implementar expresiones para la sensibilidad del modelo a  $S_P$ , para entender mejor el modelo y su respuesta, ahora incluyendo una expresión analítica para  $S_P$ .
- Estudio exhaustivo de la calidad de la respuesta con distintos suelos y estructuras para un modelo Pasternak. Si bien estudios así existen, son para modelos Winkler asecas.
- Estudio de la respuesta de un modelo Pasternak excitaciones no armónicas.
- Desarrollo de modelos multipilote, estudiando la posible influencia de  $S_P$  en las impedancias y/o en el efecto grupo.

Y así, podría continuarse con una larga lista de opciones posibles, más o menos viables. Dichas propuestas son algunos ejemplos que se sugieren por su interés de cara a trabajos futuros, vista la influencia en el modelo propuesto del parámetro de Pasternak.

## REFERENCIAS

- [1] Francisco Chirino, Orlando Maeso, and J.J. Aznárez. Una técnica simple para el cálculo de las integrales en el sentido del valor principal en el mec 3d. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 16(1):77–95, 1998.
- [2] Ray W. Clough and Joseph Penzien. *Dynamic of structures*. Computers & Structures, Inc., 3rd edition, 1995.
- [3] José Dominguez. *Boundary elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, 1993.
- [4] George Gazetas. Foundation vibrations. *Foundation Engineering Handbook*, 1991.
- [5] M Hetényi. A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity. *Journal of Applied Physics* 21, (55), 1950.
- [6] R. Jones and J. Xenophontos. On the vlasov and kerr foundation models. *Acta Mechanica*, Volume 25:45–49, 1976.
- [7] Arlond D. Kerr. Elastic and viscoelastic foundation models. *Journal of Applied Mechanics*, 31, 1964.
- [8] Milos Novak, Toyooki Nogami, and Fakhry Aboul-Ella. Dynamic soil reactions for plane strain case. *Journal of the Engineering Mechanics*, 104(4):953–959, 1978.
- [9] Mario Paz. *Dinámica estructural. Teoría y Cálculo*. Reverté, S.A., 1992.
- [10] Ariel Santana. *Modelo Simple para el Cálculo de la Respuesta Sísmica de una Estructura Enterrada*. PFC. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 2009.
- [11] Ariel Santana. Modelo winkler para el análisis de la respuesta dinámica de estructuras enterradas. Master's thesis, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 2010.
- [12] Jaime Santos. Interacción estática suelo-estructura. modelos de suelos empleados. *Revista de Obras Públicas*, pages 181–191, February 1980.
- [13] Almudena Soriano. Interacción suelo-estructura. modificación del movimiento. *Física de la Tierra*, (1), 1989.
- [14] S. P. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic beams. *Philosophical Magazine* 41, pages 744–746, 1921.

## REFERENCIAS

---

- [15] S. P. Timoshenko. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine* 43, pages 125–131, 1922.
- [16] A.S. Veletsos, A.H. Younan, and K. Bandyopadhyay. Dynamic modeling and response of rigid embedded cylinders. *Journal of engineering mechanics*, 121(9):1026–1035, 1995.
- [17] V.Z. Vlasov and N.N. Leont'ev. *Beams, plates and shells on elastic foundations*. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1966. Translated from Russian.

## CÓDIGO MATLAB GENERADO

En este anexo se escribe el programa de ordenador desarrollado y basado en el modelo y procedimiento expuestos en los capítulos de esta memoria. Dicho programa está escrito en código MatLab y ha sido el utilizado para obtener los resultados que se presentan.

En lo que sigue, no se analizan en detalle las características del código y sus componentes. Sin embargo, sí se incluyen en el fichero fuente suficientes comentarios descriptivos, que permiten realizar un seguimiento de sus operaciones y las variables principales implicadas en dichas operaciones.



```

74
75 clear all; clc
76
77 %__% INPUT %
78 % Calculation Options
79 C=struct('cases', [1],...
80         'w', [1:15],...
81         'up_down',[1 42],...
82         'Sp_v', 4,...
83         'opt_mode','fmincon',...
84         'Gradient', false,...
85         'Sp', [0.:0.1:15.],...
86         'Sp0', [0.],...
87         'err_kind',4,...
88         'err_component',1,...
89         'dim_criterion','adim');
90
91 % Model refered Input Data
92 MODEL=struct('rocking', true,...
93             'distortion', true,...
94             'shwave', true,...
95             'impedance','Novak',...
96             'BC', [1 0 1 1],...
97             'BCvalue',[0 0 0 0]);
98
99 % General Input Data
100 DATA=struct('Dp',0.6,...
101             'Ep',3e10,...
102             'rhos_rhop',0.7,...
103             'nup',0.25,...
104             'xis',0.05,...
105             'shear_factor',0.882352941,...
106             'nw',15,...
107             'np',42.);
108
109 % Output Options
110 P=struct('up_down', [1 42],...
111         'variable',[0 0 0 0 0],...
112         'Err_a0', [0 0 0 0 0],...
113         'Sp_a0', false,...
114         'SpErr_a0', true);
115
116 P3D=struct('Sp_nus_3', false,...
117           'Sp_EsEp_3', false,...
118           'Sp_LD_3', false);
119
120 W=struct('Winkler', false,...
121         'Pasternak', false,...
122         'E_w', false,...
123         'E_p', false,...
124         'Sp_opt', false);
125
126
127 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
128 %__% Pre-processing %
129 C.cases=sort(C.cases); C.w=sort(C.w); P.w=C.w;
130 a0=(0.01:(1-0.01)/(DATA.nw-1):1);
131
132 % Initialazing matrixes
133 num= C.up_down(2)+1-C.up_down(1);
134 depth= zeros(length(C.cases),DATA.np);
135 BEM= zeros(length(C.cases),4,num,length(C.w),2);
136 Sp_opt= zeros(length(C.cases),length(C.w));
137 w_total=zeros(length(C.cases),length(C.w));
138
139 %__% MAIN PROCESS %
140 switch C.opt_mode
141     case 'sweeper'
142         if isempty(find(C.Sp==0.,1))
143             len=length(C.Sp)+1;
144             Sp_calc=zeros(len,1);
145             Sp_calc(1)=0.;
146             for ii=1:length(C.Sp); Sp_calc(ii+1)=C.Sp(ii); end

```

```

147     else
148         Sp_calc=C.Sp;
149     end
150     AN= zeros(length(C.cases),length(Sp_calc),4,num,length(C.w),2);
151     err=zeros(length(C.cases),length(Sp_calc),4,length(C.w),2);
152
153     for i_case=1:length(C.cases)
154         % DATA cases parameters
155         [DATA.L_D,DATA.Es_Ep,DATA.nus]=DATA_cases(C.cases(i_case));
156         depth(i_case,:)=linspace(0,-DATA.L_D*DATA.Dp,DATA.np);
157
158         % BEM model data
159         [BEM_]=BEM_data(C.cases(i_case),C.w,C.dim_criterion,DATA.Ep,DATA.Dp);
160         BEM(i_case,:,:,:,:)=BEM_;
161
162         % Sp Optimization
163         [Sp_opt(i_case,:),AN_,err_]=Sp_sweeper(DATA,MODEL,C);
164         AN(i_case,:,:,:,:)= AN_ (:,:,:,:,:);
165         err(i_case,:,:,:,:)= err_ (:,:,:,:,:);
166     end
167     case 'fmincon'
168         AN= zeros(length(C.cases),4,num,length(C.w),2);
169         ANw= zeros(length(C.cases),4,num,length(C.w),2);
170         err_p= zeros(length(C.cases),4,length(C.w),2);
171         err_w= zeros(length(C.cases),4,length(C.w),2);
172         sens= zeros(size(Sp_opt,1),size(Sp_opt,2));
173
174         for i_case=1:length(C.cases)
175             % DATA cases parameters
176             [DATA.L_D,DATA.Es_Ep,DATA.nus]= DATA_cases(C.cases(i_case));
177             depth(i_case,:)= linspace(0,-DATA.L_D*DATA.Dp,DATA.np);
178
179             % BEM model data
180             [BEM_]= BEM_data(C.cases(i_case),C.w,C.dim_criterion,DATA.Ep,DATA.Dp);
181             BEM(i_case,:,:,:,:)= BEM_;
182
183             % Sp Optimization
184             for jj=1:length(C.w)
185                 [Sp_opt(i_case,jj),
186                 AN(i_case,:,:jj,:),differ,
187                 err_p(i_case,:jj,:),
188                 ANw(i_case,:,:jj,:),err_w(i_case,:jj,:),
189                 G,sens_,outopt
190                 Sp_fmincon(DATA,MODEL,C,C.w(jj),C.Sp0);
191                 sens(i_case,jj)=sens_;
192             end
193         end
194     end
195
196     % _____ %
197     % Assingning output variables (Winkler and Pasternak values)
198     switch C.opt_mode
199     case 'sweeper'
200         % Winkler
201         AN_w(:,:,:,:,:)= AN(:,1,:,:,:,:);   err_w(:,:,:,:,:)= err(:,1,:,:,:,:);
202
203         % Pasternak
204         AN_p=zeros(length(C.cases),4,num,length(C.w),2);
205         err_p=zeros(length(C.cases),4,length(C.w),2);
206
207         for jj=1:length(C.w)
208             index=min(find(C.Sp==Sp_opt(jj),1)); % It might be interesting later
209             AN_p(:,:,:,:,:)=AN(:,index,:,:,:,:);
210             err_p(:,:jj,:)=err(:,index,:jj,:);
211         end
212     case 'fmincon'
213         AN_w=ANw;
214         AN_p=AN;
215         Grad_opt=zeros(length(C.cases),4,num,length(C.w),2);
216         for i_case=1:length(C.cases)
217             for i_w=1:length(C.w)
218                 [algo,algo2] = ANALITIC(DATA,MODEL,Sp_opt(i_case,i_w),...
219                 i_w,C.dim_criterion,C.Gradient);

```

```

220             Grad_opt(i_case, :, :, i_w, :) = algo2(:, :, :);
221         end
222     end
223 end
224
225 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
226 % _____ %
227
228 % Writing the results down into a file
229 if (W.Winkler || W.Pasternak || W.E_w || W.E_p || W.Sp_opt)
230     OUT_write(DATA.np, DATA.nw, C.cases, C.opt_mode, C.Sp_v, C.w, C.up_down, W, AN_w, AN_p, ...
231             err_w, err_p, Sp_opt);
232 end
233
234 % Plotting the results
235 OUT_variables(P, C.cases, BEM, AN_w, AN_p, depth, DATA.np, C.err_component);
236 OUT_error(P, C.cases, err_w, err_p, depth, DATA.np, a0, C.w, C.err_component, Sp_opt, C.Sp_v);
237 OUT_Sp(P, C.cases, Sp_opt, err_w, err_p, depth, DATA.np, a0, C.w, C.err_component);
238 OUT_3(P3D, C.w, C.cases, Sp_opt, err_p);
239
240 % _____ %
241

```

```

1  function [AN,G]=ANALITIC(DATA,MODEL,SP,freq,dim_criterion,Gradient)
2  %
3  % -----%
4  % -----%
5
6  %-----%Auxiliar variables%-----%
7  % W
8  rhos=1750.;
9  Es=DATA.Es_Ep*3e10;
10 mu=Es/2/(1+DATA.nus);
11 cs=sqrt(mu/rhos);
12 wmin=0.01*cs/Dp;
13 wmax=cs/Dp;
14
15 w_total= (wmin:(wmax-wmin)/(DATA.nw-1):wmax);
16 w= zeros(length(freq),1);
17 a0_total=(0.01:(1-0.01)/(DATA.nw-1):1);
18 a0=zeros(length(freq),1);
19 for ii=1:length(freq)
20     w(ii)=w_total(freq(ii));           a0(ii)=a0_total(freq(ii));
21 end
22
23 % Auxiliar constants
24 img=0+1i;
25 if DATA.np<2; error('np should be >=2'); end
26 xi=0:(1/(DATA.np-1)):1;
27 depth=DATA.L_D*DATA.Dp*-xi;
28 a0a=a0/sqrt(1+2*DATA.xis*img);
29
30 u=      zeros(DATA.np,length(freq));
31 dudxi= zeros(DATA.np,length(freq));
32 d2ud2xi= zeros(DATA.np,length(freq));
33 d3ud3xi= zeros(DATA.np,length(freq));
34 d4ud4xi= zeros(DATA.np,length(freq));
35 theta=  zeros(DATA.np,length(freq));
36 V=      zeros(DATA.np,length(freq));
37 M=      zeros(DATA.np,length(freq));
38
39 switch MODEL.impedance
40     case 'Novak'
41         [SH,SV,SR,ST]=S_Novak_diameter(DATA.nus,DATA.xis,0.001);
42         SD=SR;
43     case 'Gazetas'
44     otherwise
45         error('Invalid impedance %s', MODEL.impedance);
46 end
47
48 for ii=1:length(freq)
49     alpha=1+2*(1+DATA.nup)/DATA.shear_factor;
50     beta=1-1/16*(a0(ii)^2)/DATA.rhos_rhop*DATA.Es_Ep*(1+DATA.nup)/(1+DATA.nus)/...
51         DATA.shear_factor;
52
53     % Dimensionless impedances
54     switch MODEL.impedance
55         case 'Novak'
56             [SH,SV,SR,ST]=S_Novak_diameter(DATA.nus,DATA.xis,a0(ii));
57             SD=SR;
58         case 'Gazetas'
59             [SH,SV,SR,ST]=S_Gazetas(DATA.nus,DATA.xis,a0(ii));
60             SD=SR;
61         otherwise
62             error('Invalid impedance %s', MODEL.impedance);
63     end
64
65     % Kappa_a^2
66     k1=0.5*(DATA.L_D^2)*DATA.Es_Ep*(a0(ii)^2)/(1+DATA.nus)/DATA.rhos_rhop;
67
68     % Kappa_l^4
69     k2=8*(DATA.L_D^4)*DATA.Es_Ep*(a0(ii)^2)/(1+DATA.nus)/DATA.rhos_rhop;
70
71     % K_P / G A \kappa
72     k3=4/pi*DATA.Es_Ep*(1+DATA.nup)/(1+DATA.nus)/DATA.shear_factor*SP;
73

```

```

74 % K_P L^2 / E I
75 k4=32/pi*(1/(1+DATA.nus))*((DATA.L_D)*(DATA.L_D))*(DATA.Es_Ep)*SP;
76
77 if MODEL.distortion
78 % K_D L^2 / E I
79 k5=32/pi*(DATA.L_D^2)*DATA.Es_Ep*(1/(1+DATA.nus))*SD;
80 else
81 k5=0;
82 end
83
84 if MODEL.rocking
85 % K_R L^2 / E I
86 k6=32/pi*(DATA.L_D^2)*DATA.Es_Ep/(1+DATA.nus)*SR;
87 else
88 k6=0;
89 end
90
91 % K_H / G A \kappa
92 k7=4/pi*(DATA.L_D^2)*DATA.Es_Ep*(1+DATA.nup)/(1+DATA.nus)/DATA.shear_factor*SH;
93
94 % K_H L^4 / E I
95 k8=32/pi*(DATA.L_D^4)*DATA.Es_Ep/(1+DATA.nus)*SH;
96
97 % G A \kappa L^2 / E I
98 k9=8*DATA.shear_factor*(DATA.L_D^2)/(1+DATA.nup);
99
100 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
101 %-----%Components%-----%
102
103 % Dimensionless Rotation components
104 g3=(1+k3)/(k9-k1+k5+k6);
105 g1=(k1*(alpha-1)-k7+k9+k5)/(k9-k1+k5+k6);
106 gI=(k7-k5)/(k9-k1+k5+k6);
107
108 % Dimensionless Shear Force components
109 v=pi/8*DATA.shear_factor/(1+DATA.nup)/DATA.L_D;
110
111 % Dimensionless Bending Moment components
112 m=pi/64/DATA.L_D^2;
113
114 % Displacement components
115 % Homogeneous solution
116 c2=(k1*alpha-k7-beta*k4+k5-(k6+k5)*(k1*(alpha-1)-k7+k9+k5)/(k9-k1+k5+k6))...
117 / (1+k3)/(1-(k5+k6)/(k9-k1+k5+k6));
118 c0=(-k2*beta+k8*beta)/((1+k3)*(1-(k5+k6)/(k9-k1+k5+k6)));
119
120 l=roots([1 0 c2 0 c0]);
121
122 % Particular solution (Incident SH wave)
123 if MODEL.shwave
124 cI2=(k6*gI-k7-k5)/(1+k6*g3-k3);
125 cI0=(k8*beta)/(1+k6*g3-k3);
126
127 B=0.5*(cI0-cI2*DATA.L_D^2*a0a(ii)^2)/(DATA.L_D^4*a0a(ii)^4-DATA.L_D^2*a0a(ii)^2*c2
128 +c0);
129 else
130 B=0;
131 end
132
133 % System of Linear Equations (L*A=F) (Here BC are introduced into the problem)
134 L=zeros(4,4);
135 F=zeros(4,1);
136
137 %-----%
138 % Equation 1: transversal degree of freedom at xi=0
139 e1=exp(0);
140 switch MODEL.BC(1)
141 % Displacement U0 at xi=0
142 case 0
143 U0=MODEL.BCvalue(1);
144 L(1,:)=ones(1,4);
145 F(1)=U0-B*(exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*0)+exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*0));
146 % Dimensionless shear force V0 at xi=0

```

```

145     case 1
146         V0=MODEL.BCvalue(1);
147         L(1,:)=v*((1-g1)*l.*el-g3*l.^3.*el);
148
149         F(1)=V0-v*((B*(1-g1)-gI*0.5)*img*a0a(ii)*DATA.L_D-B*g3*(img*a0a(ii)*DATA.L_D)^3
150             *...
151             (exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*0)-exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*0)));
152     otherwise
153         error('Invalid MODEL.BC(1) %d',MODEL.BC(1));
154 end
155 %-----%
156 % Equation 2: rotational degree of freedom at xi=0
157 el=exp(0);
158 switch MODEL.BC(2)
159     % Dimensionless rotation G0 at xi=0
160     case 0
161         G0=MODEL.BCvalue(2);
162         L(2,:)=g3*l.^3.*el+g1*l.*el;
163         F(2)=G0-(B*g3*(img*a0a(ii)*DATA.L_D).^3+(B*g1+gI*0.5)*img*a0a(ii)*DATA.L_D)*...
164             (exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*0)-exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*0));
165     % Dimensionless bending moment M0 at xi=0
166     case 1
167         M0=MODEL.BCvalue(2);
168         L(2,:)=m*(g3*l.^4.*el+g1*l.^2.*el);
169
170         F(2)=M0-m*(B*g3*(img*a0a(ii)*DATA.L_D)^4+(B*g1+gI*0.5)*(img*a0a(ii)*DATA.L_D)^2
171             *...
172             (exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*0)+exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*0)));
173     otherwise
174         error('Invalid MODEL.BC(2) %d',MODEL.BC(2));
175 end
176 %-----%
177 % Equation 3: transversal degree of freedom at xi=1
178 el=exp(1);
179 switch MODEL.BC(3)
180     % Displacement U1 at xi=1
181     case 0
182         U1=MODEL.BCvalue(3);
183         L(3,:)=ones(1,4);
184         F(3)=U1-B*(exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*1)+exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*1));
185     % Dimensionless shear force V1 at xi=1
186     case 1
187         V1=MODEL.BCvalue(3);
188         L(3,:)=v*((1-g1)*l.*el-g3*l.^3.*el);
189
190         F(3)=V1-v*((B*(1-g1)-gI*0.5)*img*a0a(ii)*DATA.L_D-B*g3*(img*a0a(ii)*DATA.L_D)^3
191             *...
192             (exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*1)-exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*1)));
193     otherwise
194         error('Invalid MODEL.BC(3) %d',MODEL.BC(3));
195 end
196 %-----%
197 % Equation 4: rotational degree of freedom at xi=1
198 el=exp(1);
199 switch MODEL.BC(4)
200     % Dimensionless rotation G1 at xi=1
201     case 0
202         G1=MODEL.BCvalue(4);
203         L(4,:)=g3*l.^3.*el+g1*l.*el;
204         F(4)=G1-(B*g3*(img*a0a(ii)*DATA.L_D).^3+(B*g1+gI*0.5)*img*a0a(ii)*DATA.L_D)*...
205             (exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*1)-exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*1));
206     % Dimensionless bending moment M1 at xi=1
207     case 1
208         M1=MODEL.BCvalue(4);
209         L(4,:)=m*(g3*l.^4.*el+g1*l.^2.*el);
210
211         F(4)=M1-m*(B*g3*(img*a0a(ii)*DATA.L_D)^4+(B*g1+gI*0.5)*(img*a0a(ii)*DATA.L_D)^2
212             *...
213             (exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*1)+exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*1)));
214     otherwise

```

```

210         error('Invalid MODEL.BC(4) %d',MODEL.BC(4));
211     end
212
213     %-----%
214     % Solve and save
215     A=inv(L)*F;
216
217 %-----%Results%-----%
218 % Displacement results
219 u(:,ii)=A(1)*exp(l(1)*xi)+A(2)*exp(l(2)*xi)+...
220         A(3)*exp(l(3)*xi)+A(4)*exp(l(4)*xi)+...
221         B*(exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi)+exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi));
222
223 % Displacement derivatives
224 % du/dxi
225 dudxi(:,ii)= A(1)*l(1)*exp(l(1)*xi)+A(2)*l(2)*exp(l(2)*xi)+...
226              A(3)*l(3)*exp(l(3)*xi)+A(4)*l(4)*exp(l(4)*xi)+...
227              B*(img*a0a(ii)*DATA.L_D)*(exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi)...
228              -exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi));
229 % d^2u/dxi^2
230 d2ud2xi(:,ii)=A(1)*l(1)^2*exp(l(1)*xi)+A(2)*l(2)^2*exp(l(2)*xi)+...
231              A(3)*l(3)^2*exp(l(3)*xi)+A(4)*l(4)^2*exp(l(4)*xi)+...
232              B*(img*a0a(ii)*DATA.L_D)^2*(exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi)...
233              +exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi));
234 % d^3u/dxi^3
235 d3ud3xi(:,ii)=A(1)*l(1)^3*exp(l(1)*xi)+A(2)*l(2)^3*exp(l(2)*xi)+...
236              A(3)*l(3)^3*exp(l(3)*xi)+A(4)*l(4)^3*exp(l(4)*xi)+...
237              B*(img*a0a(ii)*DATA.L_D)^3*(exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi)...
238              -exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi));
239 % d^4u/dxi^4
240 d4ud4xi(:,ii)=A(1)*l(1)^4*exp(l(1)*xi)+A(2)*l(2)^4*exp(l(2)*xi)+...
241              A(3)*l(3)^4*exp(l(3)*xi)+A(4)*l(4)^4*exp(l(4)*xi)+...
242              B*(img*a0a(ii)*DATA.L_D)^4*(exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi)...
243              +exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi));
244
245 %-----%
246 % Dimentionless Rotation result
247 theta(:,ii)=g3*d3ud3xi(:,ii)+g1*dudxi(:,ii)+gI*0.5*(img*a0a(ii)*DATA.L_D)*...
248             (exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi)-exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi));
249
250 %-----%
251 % Dimentionless Shear Force result
252 V(:,ii)=v*(dudxi(:,ii)-theta(:,ii));
253
254 %-----%
255 % Dimentionless Bending Moment result
256 M(:,ii)=m*(g3*d4ud4xi(:,ii)+g1*d2ud2xi(:,ii)+gI*0.5*(img*a0a(ii)*DATA.L_D)^2*...
257             (exp(img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi)+exp(-img*a0a(ii)*DATA.L_D*xi)));
258
259 %-----%
260 end
261
262 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
263 %-----%Output%-----%
264 % Results with dimention
265 switch dim_criterion
266     case 'adim'
267     case 'dim'
268         theta= theta./(DATA.L_D*DATA.Dp);
269         V= DATA.Ep*DATA.Dp.*V;
270         M= DATA.Ep*DATA.Dp*DATA.Dp.*M;
271     otherwise
272         error('Invalid dim_criterion %s',dim_criterion);
273 end
274
275 % Output results
276 AN(1,::,1)=real(u);          AN(1,::,2)=imag(u);
277 AN(2,::,1)=real(theta);     AN(2,::,2)=imag(theta);
278 AN(3,::,1)=real(V);         AN(3,::,2)=imag(V);
279 AN(4,::,1)=real(M);         AN(4,::,2)=imag(M);
280
281 % In case one only frequencie is used, output's re-dimensioned
282 if length(freq)==1

```

```

283 AN_=zeros(4,DATA.np,2);
284 for kk=1:4 % kk: variable (u, theta, V or M)
285     for ll=1:2 % ll: real or imaginary part
286         for ii=1:DATA.np % ii: depth in pile
287             AN_(kk,ii,ll)=+AN(kk,ii,1,ll);
288         end
289     end
290 end
291 eval('clear AN'); AN(:,:,,)=+AN_(:,:,,);
292
293 if Gradient
294     G_=zeros(4,DATA.np,2);
295     for kk=1:4 % kk: variable (u, theta, V or M)
296         for ll=1:2 % ll: real or imaginary part
297             for ii=1:DATA.np % ii: depth in pile
298                 G_(kk,ii,ll)=G(kk,ii,1,ll);
299             end
300         end
301     end
302     eval('clear G'); G(:,:,,)=+G_(:,:,,);
303 end
304 end
305
306 % _____ %
307 % _____ %
308 end
309
310

```

```

1  function [SH,SV,SR,ST]=S_Novak_diameter(nu,xi,a0)
2  % S_Novak_diameter Calculate soil dimensionless impedances for a infinite rigid
3  % cylinder according to Novak, Nogami, Aboul-Ella, Dynamic soil reactions for
4  % plane strain case, 1978. Dimensionless input and output using the cylinder
5  % diameter and the shear modulus of the soil.
6  %
7  % INPUT:
8  % nu: Poisson's ratio of the soil
9  % xi: Hysteretic damping ratio of the soil
10 % a0: dimensionless frequency (a0=omega*D/cs, D cyl. diameter, cs s. S-wave v.)
11 %
12 % OUTPUT:
13 % SH: horizontal dimensionless impedance (KH=mu*SH)
14 % SV: vertical dimensionless impedance (KV=mu*SV)
15 % SR: rocking dimensionless impedance (KR=mu*D^2*SR)
16 % ST: torsion dimensionless impedance (KT=mu*D^2*ST)
17 %
18     img=0+1i;
19     eta=sqrt(2*(1-nu)/(1-2*nu));
20     a0a=a0/2*img/sqrt(1+2*xi*img);
21     b0a=a0/2*img/eta/sqrt(1+2*xi*img);
22 %
23     Kao=besselk([0 1], a0a);
24     K0a=Kao(1);
25     K1a=Kao(2);
26     Kbo=besselk([0 1], b0a);
27     K0b=Kbo(1);
28     K1b=Kbo(2);
29     T=- (4*K1b*K1a+a0a*K1b*K0a+b0a*K0b*K1a)/...
30         (b0a*K0b*K1a+a0a*K1b*K0a+b0a*a0a*K0b*K0a);
31 %
32     SH=pi*(a0/2).^2*T;
33     SV=2*pi*(1+2*xi*img)*a0a*K1a/K0a;
34     SR=pi/4*(1+2*xi*img)*(1+a0a*K0a/K1a);
35     ST=pi/2*(1+2*xi*img)*(2+a0a*K0a/K1a);
36 end
37

```

```

1  function [BEM,pcase]=BEM_data(ii,w,dim_criterion,Ep,Dp)
2  % _____ %
3  % - BEM model results data -
4  % Returns u,theta,V,M from BEM model.
5  % _____ %
6
7  % Load the specific BEM case data
8  pcase=num2str(ii,'%3d');
9  fname=strcat('CASES_42/C',pcase);
10 load(fname)
11
12 % Write its results
13 depth=eval(['C',pcase,'.depth']);
14 freq=eval(['C',pcase,'.freq']);
15 u=eval(['C',pcase,'.U']);
16 th=eval(['C',pcase,'.th']);
17 V=eval(['C',pcase,'.V']);
18 M=eval(['C',pcase,'.M']);
19
20 % Dimention(less) BEM data
21 switch dim_criterion
22     case 'adim'
23         [L_D,Es_Ep,nus]=DATA_cases(ii);
24         th= (L_D*Dp).*th;           % th* = L . th
25         V= V./(Ep*Dp);             % V* = v / V
26         M= M./(Ep*Dp*Dp);         % M* = m / M
27     case 'dim'
28     otherwise
29         error('Invalid dim_criterion %s',dim_criterion);
30 end
31
32
33 BEM_total(1,:,:,1)=real(u);           BEM_total(1,:,:,2)=imag(u);
34 BEM_total(2,:,:,1)=real(th);         BEM_total(2,:,:,2)=imag(th);
35 BEM_total(3,:,:,1)=real(V);         BEM_total(3,:,:,2)=imag(V);
36 BEM_total(4,:,:,1)=real(M);         BEM_total(4,:,:,2)=imag(M);
37
38 BEM=zeros(4,length(depth),length(w),2);
39 for ii=1:length(w)
40     BEM(:,:,ii,:)=BEM_total(:,:,w(ii),:);
41 end
42
43 % _____ %
44 % _____ %
45 end

```

```

1  function [BEM]=BEM_results(L_D,Es_Ep,nus,w,dim_criterion,Ep,Dp)
2  % _____ %
3  % Returns u,theta,V,M from BEM model.
4  % _____ %
5
6  % Find out which case is this one
7  load('CASES_42/BEMcases.mat')
8  for ii=1:27
9      if BEMcases(ii,1)==L_D && BEMcases(ii,2)==Es_Ep && BEMcases(ii,3)==nus
10         pcase=num2str(ii,'%3d');
11         break
12     end
13 end
14
15 % Shows error message and stops the program
16 if isempty(pcase)
17     error('Error reading BEMcases.mat')
18 end
19
20 % Load the specific BEM case data
21 fname=strcat('CASES_42/C',pcase);
22 load(fname)
23
24 % Introducing data into variables
25 depth=eval(['C',pcase,'.depth']);   freq=eval(['C',pcase,'.freq']);
26 u=eval(['C',pcase,'.U']);           th=eval(['C',pcase,'.th']);
27 V=eval(['C',pcase,'.V']);           M=eval(['C',pcase,'.M']);
28
29 % Dimention(less) BEM data
30 switch dim_criterion
31     case 'adim'
32         th= (L_D*Dp).*th;   % th* = L · th
33         V= V./(Ep*Dp);     % V* = v / v
34         M= M./(Ep*Dp*Dp); % M* = m / M
35     case 'dim'
36     otherwise
37         error('Invalid dim_criterion %s',dim_criterion);
38 end
39
40
41 % Write its results
42 BEM_total(1,::,1)=real(u);       BEM_total(1,::,2)=imag(u);
43 BEM_total(2,::,1)=real(th);     BEM_total(2,::,2)=imag(th);
44 BEM_total(3,::,1)=real(V);     BEM_total(3,::,2)=imag(V);
45 BEM_total(4,::,1)=real(M);     BEM_total(4,::,2)=imag(M);
46
47
48 % Selecting the specified frequencies data
49 BEM=zeros(4,length(depth),length(w),2);
50 for ii=1:length(w)
51     BEM(:,:,ii,:)=BEM_total(:,:,w(ii),:);
52 end
53
54 % *In case one only frequencie is used, output's re-dimensioned
55 if size(w)==1
56     BEM_(:,:,:)=BEM(:,:,1,:);   eval('clear BEM');
57     BEM=zeros(4,size(BEM_,2),2); BEM_(:,:,:)=BEM_(:,:,:);
58 end
59 % _____ %
60 % _____ %
61 end

```

```

1  function [RMS,matrix]=E(input,err_up_down,BEM,differ)
2  % Relative E %
3  % E calculates the relative error of the analitic model, using the BEM
4  % model as reference, by an RMS. There are 4 kinds of normalization:
5  % 1) Pure BEM value (for each depth and frequencie)
6  % 2) Maximun difference between AN and BEM (for each depth and frequencie)
7  % 3) Maximun value of BEM along the pile length (for each frequencie)
8  % 4) Absolute value of the difference between the maximun and the minimum
9  % BEM value along the pile length (for each frequencie)
10 %
11
12 % Initializing variables
13 num=err_up_down(2)+1-err_up_down(1); freq=size(BEM,3);
14
15 % MAIN PROCESS
16 if size(freq)==1
17     epsilon=1e-12; den=zeros(4,num,2);
18     matrix=zeros(4,num,2); vector=zeros(num,1);
19     RMS=zeros(4,2);
20
21     switch input
22     % Relative E %
23     % Error kind 1 % Pure BEM value
24     case 1
25         for kk=1:4 % kk: variable (u, theta, V or M)
26             for ll=1:2 % ll: real or imaginary part
27                 for ii=1:num % ii: depth in pile
28                     den(kk,ii,ll)=abs(BEM(kk,ii,ll));
29                     if den(kk,ii,ll)<epsilon
30                         den(kk,ii,ll)=1;
31                     end
32                     matrix(kk,ii,ll)=differ(kk,ii,ll)/den(kk,ii,ll);
33                 end
34                 vector(:)=matrix(kk,:,ll);
35                 RMS(kk,ll)=rms(vector);
36             end
37         end
38     % Relative E %
39     % Error kind 2 % Maximun difference between AN and BEM
40     case 2
41         for kk=1:4 % kk: variable (u, theta, V or M)
42             for ll=1:2 % ll: real or imaginary part
43                 for ii=1:num % ii: depth in pile
44                     den(kk,ii,ll)=max(abs(differ(kk,:,ll)));
45                     if den(kk,ii,ll)<epsilon
46                         den(kk,ii,ll)=1;
47                     end
48                     matrix(kk,ii,ll)=differ(kk,ii,ll)/den(kk,ii,ll);
49                 end
50                 vector(:)=matrix(kk,:,ll);
51                 RMS(kk,ll)=rms(vector);
52             end
53         end
54     % Relative E %
55     % Error kind 3 % Maximun value of BEM along the pile length
56     case 3
57         for kk=1:4 % kk: variable (u, theta, V or M)
58             for ll=1:2 % ll: real or imaginary part
59                 for ii=1:num % ii: depth in pile
60                     den(kk,ii,ll)=max(abs(BEM(kk,:,ll)));
61                     if den(kk,ii,ll)<epsilon
62                         den(kk,ii,ll)=1;
63                     end
64                     matrix(kk,ii,ll)=differ(kk,ii,ll)/den(kk,ii,ll);
65                 end
66                 vector(:)=matrix(kk,:,ll);
67                 RMS(kk,ll)=rms(vector);
68             end
69         end
70     % Relative E %
71     % Error kind 4 % Absolute value of the difference between the maximun
72     % and the minimum BEM value along the pile length
73     case 4

```

```

74         for kk=1:4           % kk: variable (u, theta, V or M)
75         for ll=1:2           % ll: real or imaginary part
76             for ii=1:num     % ii: depth in pile
77                 den(kk,ii,ll)=abs(max(BEM(kk,:,ll))-min(BEM(kk,:,ll)));
78                 if den(kk,ii,ll)<=epsilon
79                     den(kk,ii,ll)=1;
80                 end
81                 matrix(kk,ii,ll)=differ(kk,ii,ll)/den(kk,ii,ll);
82             end
83             vector(:)=matrix(kk,:,ll);
84             RMS(kk,ll)=rms(vector);
85         end
86     end
87     % _____ %
88     otherwise
89         error('invalid E input value')
90     end
91 else
92     epsilon=1e-12;           den=zeros(4,num,freq,2);
93     matrix=zeros(4,num,freq,2);   vector=zeros(num,1);
94     RMS=zeros(4,freq,2);
95
96     switch input
97         % _____ %
98         % Error kind 1 % Pure BEM value
99         case 1
100            for kk=1:4           % kk: variable (u, theta, V or M)
101            for jj=1:freq         % jj: frequencie
102                for ll=1:2       % ll: real or imaginary part
103                    for ii=1:num  % ii: depth in pile
104                        den(kk,ii,jj,ll)=abs(BEM(kk,ii,jj,ll));
105                        if den(kk,ii,jj,ll)<epsilon
106                            den(kk,ii,jj,ll)=1;
107                        end
108                        matrix(kk,ii,jj,ll)=differ(kk,ii,jj,ll)/den(kk,ii,jj,ll);
109                    end
110                    vector(:)=matrix(kk,:,jj,ll);
111                    RMS(kk,jj,ll)=rms(vector);
112                end
113            end
114        end
115        % _____ %
116        % Error kind 2 % Maximun difference between AN and BEM
117        case 2
118            for kk=1:4           % kk: variable (u, theta, V or M)
119            for jj=1:freq         % jj: frequencie
120                for ll=1:2       % ll: real or imaginary part
121                    for ii=1:num  % ii: depth in pile
122                        den(kk,ii,jj,ll)=max(abs(differ(kk,:,jj,ll)));
123                        if den(kk,ii,jj,ll)<epsilon
124                            den(kk,ii,jj,ll)=1;
125                        end
126                        matrix(kk,ii,jj,ll)=differ(kk,ii,jj,ll)/den(kk,ii,jj,ll);
127                    end
128                    vector(:)=matrix(kk,:,jj,ll);
129                    RMS(kk,jj,ll)=rms(vector);
130                end
131            end
132        end
133        % _____ %
134        % Error kind 3 % Maximun value of BEM along the pile length
135        case 3
136            for kk=1:4           % kk: variable (u, theta, V or M)
137            for jj=1:freq         % jj: frequencie
138                for ll=1:2       % ll: real or imaginary part
139                    for ii=1:num  % ii: depth in pile
140                        den(kk,ii,jj,ll)=max(abs(BEM(kk,:,jj,ll)));
141                        if den(kk,ii,jj,ll)<epsilon
142                            den(kk,ii,jj,ll)=1;
143                        end
144                        matrix(kk,ii,jj,ll)=differ(kk,ii,jj,ll)/den(kk,ii,jj,ll);
145                    end
146                    vector(:)=matrix(kk,:,jj,ll);

```

```

147             RMS(kk,jj,ll)=rms(vector);
148         end
149     end
150 end
151 %-----%
152 % Error kind 4 % Absolute value of the difference between the maximum
153 %             % and the minimum BEM value along the pile length
154 case 4
155     for kk=1:4           % kk: variable (u, theta, V or M)
156         for jj=1:freq   % jj: frequencie
157             for ll=1:2  % ll: real or imaginary part
158                 for ii=1:num % ii: depth in pile
159
160                     den(kk,ii,jj,ll)=abs(max(BEM(kk,:,jj,ll))-min(BEM(kk,:,jj,
161                             ll)));
162                     if den(kk,ii,jj,ll)<=epsilon
163                         den(kk,ii,jj,ll)=1;
164                     end
165                     matrix(kk,ii,jj,ll)=differ(kk,ii,jj,ll)/den(kk,ii,jj,ll);
166                     vector(:)=matrix(kk,:,jj,ll);
167                     RMS(kk,jj,ll)=rms(vector);
168                 end
169             end
170         end
171     otherwise
172         error('invalid E input value')
173 end
174 end
175 %-----%
176 %-----%
177 end
178

```

```

1  function differ=E_absolute(AN,BEM,err_up_down)
2  % _____ %
3  %   E absolute
4  %   Calculates the absolute error, or difference, between AN and BEM.
5  % _____ %
6
7  % Initializing variables
8  num=err_up_down(2)+1-err_up_down(1);
9
10 % MAIN PROCESS
11 if ndims(BEM)==3;
12     differ=zeros(4,num,2);
13
14     % Calculate the difference between AN and BEM
15     for kk=1:4 % kk: variable (u, theta, V or M)
16         for ll=1:2 % ll: real or imaginary part
17             for ii=1:num % ii: depth in pile
18                 differ(kk,ii,ll)= abs(AN(kk,err_up_down(1)+ii-1,ll)...
19                                     - BEM(kk,err_up_down(1)+ii-1,ll));
20             end
21         end
22     end
23 else
24     freq=size(BEM,3);
25     differ=zeros(4,num,freq,2);
26
27     % Calculate the difference between AN and BEM
28     for kk=1:4 % kk: variable (u, theta, V or M)
29         for jj=1:freq % jj: frequencie
30             for ll=1:2 % ll: real or imaginary part
31                 for ii=1:num % ii: depth in pile
32                     differ(kk,ii,jj,ll)=abs(AN(kk,err_up_down(1)+ii-1,jj,ll)...
33                                             -BEM(kk,err_up_down(1)+ii-1,jj,ll));
34                 end
35             end
36         end
37     end
38
39 % _____ %
40 % _____ %
41 end
42
43
44
45 function [L_D,Es_Ep,nus]=DATA_cases(ii)
46 % _____ %
47
48 % Find out which case is this one
49 load('CASES_42/BEMcases.mat')
50
51 L_D= BEMcases(ii,1);
52 Es_Ep=BEMcases(ii,2);
53 nus= BEMcases(ii,3);
54
55 clear('CASES/BEMcases.mat')
56 % _____ %
57 % _____ %
58 end

```

```

1  function [Sp_opt,AN,err,differ]=Sp_sweeper(DATA,MODEL,C)
2  % _____ %
3
4  %% Initializing variables %%
5  comp=C.err_component;
6
7  % Preparing Kp to be used in optimization
8  if isempty(find(C.Sp==0.,1))
9      len=length(C.Sp)+1;
10     Sp_calc=zeros(len,1);
11     Sp_calc(1)=0.;
12     for ii=1:length(C.Sp); Sp_calc(ii+1)=C.Sp(ii); end
13 else
14     Sp_calc=C.Sp;
15 end
16
17 % Initializing matrixes that need it
18 BEM=      zeros(4,DATA.np,length(C.w),2);
19 % AN_=      zeros(4,DATA.np,length(C.w),2);
20 AN=      zeros(length(Sp_calc),4,DATA.np,length(C.w),2);
21 differ=   zeros(length(Sp_calc),4,DATA.np,length(C.w),2);
22 err_=     zeros(length(Sp_calc),4,2);
23 err=      zeros(length(Sp_calc),4,length(C.w),2);
24 % err_min=  zeros(length(Kp_calc),length(C.w));
25 err_min=  zeros(length(Sp_calc),4,2);
26 Sp_opt=   zeros(length(C.w),1);
27
28 % MAIN PROCESS %
29 for jj=1:length(C.w)
30     %% BEM data %%
31     BEM_=BEM_results(DATA.L_D,DATA.Es_Ep,DATA.nus,C.w(jj),...
32                    C.dim_criterion,DATA.Ep,DATA.Dp);
33     BEM(:,:,jj,:)=BEM_(:,:,:) ;
34
35     C.w(jj)
36     for ii=1:length(Sp_calc)
37         AN_=      ANALITIC(DATA,MODEL,Sp_calc(ii),C.w(jj),C.dim_criterion);
38         AN(ii,:,:,jj,:)=AN_(:,:,:) ;
39
40         %% Error estimation %%
41         differ_=  E_absolute(AN_,BEM_,C.up_down);
42         differ(ii,:,:,jj,:)= differ_(:,:,:) ;
43         err_(ii,:,:) =  E(C.err_kind,C.up_down,BEM,differ_);
44         err(:,:,jj,:)=  err_(:,:,:) ;
45     end
46
47     %% Kp optimization: sweeping %%
48     %%_Finding e_min among all Kp calculated%_____ %
49     for kk=1:4;
50         e_min=min(err_(:,kk,comp));  i_Sp=find(err_(:,kk,comp)==e_min,1)
51         err_min(i_Sp,kk,comp)=e_min;
52     end
53
54     %%_Finding optimal Kp for specific variable%__%
55     Sp_opt(jj)=Sp_calc(find(err_(:,C.Sp_v,comp)==err_min(C.Sp_v,jj),1));
56
57     indexes=err_==err_min;
58     Sp_opt(jj)=Sp_calc(i_Sp);
59 end
60
61 % _____ %
62 % _____ %
63 end
64
65

```

```

1  function [Sp,AN,differ,err_,ANw,errW,Gr,sens,output2]=...
2      Sp_fmincon(DATA,MODEL,C,frequenceie,Sp0)
3  % _____ %
4  % _____
5  % _____
6  % _____ %
7
8  % _____%Auxiliar Variables% _____ %
9  % Optimizer variables
10 lb=-1e-15;   ub=Inf;   % Lower and upper bounds
11
12 % 'interior-point', 'sqp', 'trust-region-reflective'
13 opts=optimoptions('fmincon',...
14     'Display','iter'); % 'iter-detailed'
15 %     'TolFun', 1e-10,...
16 %     'TolX',   1e-10,...
17 %     'TolCon', 1e-15,...
18
19     opts=optimoptions(opts,'FinDiffType','central');
20
21 %     opts=optimoptions(opts,'FinDiffType','central',...
22 %                         'Algorithm','sqp',...
23 %                         'ScaleProblem','obj-and-constr');
24
25
26 % _____%Main function% _____ %
27 [Sp,fval,exitflag,output,lambda,gr]=...
28     fmincon(@RelativeData,Sp0,[],[],[],[],lb,ub,[],opts);
29
30 % _____%Nested function% _____ %
31 function [f,df]=RelativeData(Sp)
32     if Sp<-1e-30
33         % Just to be sure it does NOT keep any value with Sp<0
34         f=+Inf; df=+Inf;
35     else
36         % _____%Analitic model% _____ %
37         [AN,Gr]= ANALITIC(DATA,MODEL,Sp,frequenceie,C.dim_criterion,...
38             C.Gradient);
39         if Sp==0. % Winkler data. If not, Pasternak data
40             ANw=AN;
41         end
42
43         % _____%BEM model data% _____ %
44         [BEM]= BEM_results(DATA.L_D,DATA.Es_Ep,DATA.nus,...
45             frequenceie,C.dim_criterion,DATA.Ep,DATA.Dp);
46
47         % _____%Objetive function% _____ %
48         differ= E_absolute(AN,BEM,C.up_down);
49         [err_,matrix]= E(C.err_kind,C.up_down,BEM,differ);
50         if Sp==0. % Winkler data error. If not, Pasternak data
51             errW=err_;
52         end
53         f=err_(C.Sp_v,C.err_component); % OUTPUT VALUE
54     end
55 end
56 % _____ %
57
58 % Rerun might give better results, more accurate
59 Sp0=Sp;
60
61 [Sp,fval2,exitflag2,output2,lambda2,gr2]=...
62     fmincon(@RelativeData,Sp0,[],[],[],[],lb,ub,[],opts);
63
64 % _____ %
65 % _____ %
66 end

```

```

1  function OUT_variables(P,ccases,BEM,AN_w,AN_p,depth,np,comp)
2  % _____ %
3
4  depth=zeros(length(ccases),np);
5
6  % Plotting VARIABLE
7  for i_case=ccases
8      for ii=1:4
9          for jj=1:length(P.w)
10             for kk=1:4
11                 if P.variable(kk)==1
12                     figure
13
14                         plot(BEM(kk,:,jj,1),depth(i_case,:),'.-r'); hold on
15                         plot(AN_w(kk,:,P.w(jj),1),depth(i_case,:),'b');
16                         plot(AN_p(kk,:,P.w(jj),1),depth(i_case,:),'g'); hold off
17                         axis tight
18                         legend('BEM-BEM','Winkler','Pasternak')
19                         box on
20
21                     end
22                 end
23             end
24         end
25     % _____ %
26     % Plot VARIABLE MIX
27     if P.variable(5)==1
28
29         % figure
30
31         for i_case=ccases
32             depth(i_case,:)=linspace(0,-1,np);
33
34             vector=zeros(4,np);
35             vector_0=zeros(4,np);
36             vector_BEM=zeros(4,np);
37
38             for jj=1:length(P.w)
39                 size(AN_p);
40                 size(AN_w);
41
42                 vector(:,:)=AN_p(i_case,:,:,jj,comp);
43                 vector_0(:,:)=AN_w(i_case,:,:,jj,comp);
44                 vector_BEM(:,:)=BEM(i_case,:,:,jj,comp);
45
46                 figure
47
48                 h1=subplot(1,4,1);
49                 plot(h1,vector_0(1,:),depth(i_case,:),'b'); hold on
50                 plot(h1,vector(1,:),depth(i_case,:),'g');
51                 plot(h1,vector_BEM(1,:),depth(i_case,:),'.-r'); hold off
52                 ylabel(h1,'Profundidad, °/ (\xi)'); title(h1,'Desplazamiento (u)');
53                 box on; xlim([-1.5,1.5]);
54                 ylim([min(depth(i_case,:)),max(depth(i_case,:))]);
55
56                 h2=subplot(1,4,2);
57                 plot(h2,vector_0(2,:),depth(i_case,:),'b'); hold on
58                 plot(h2,vector(2,:),depth(i_case,:),'g');
59                 plot(h2,vector_BEM(2,:),depth(i_case,:),'.-r'); hold off
60                 title(h2,'Giro (\theta)'); box on;
61                 xlim([-12,12]);
62                 ylim([min(depth(i_case,:)),max(depth(i_case,:))]);
63
64                 h3=subplot(1,4,3);
65                 plot(h3,vector_0(3,:),depth(ccases==i_case,:),'b'); hold on
66                 plot(h3,vector(3,:),depth(i_case,:),'g');
67                 plot(h3,vector_BEM(3,:),depth(i_case,:),'.-r'); hold off
68                 title(h3,'Cortante (V)'); box on;
69                 xlim([-0.025,0.025]);
70                 ylim([min(depth(i_case,:)),max(depth(i_case,:))]);
71
72                 h4=subplot(1,4,4);

```

```
74     plot(h4, vector_0(4,:), depth(ccases==i_case,:), 'b'); hold on
75     plot(h4, vector(4,:), depth(i_case,:), 'g');
76     plot(h4, vector_BEM(4,:), depth(i_case,:), '-r'); hold off
77     title(h4, 'Flector (M)'); box on;
78     xlim([-0.025, 0.025]);
79     ylim([min(depth(i_case,:)), max(depth(i_case,:))]);
80     legend('Winkler', 'Pasternak', 'BEM-BEM', 'Location', 'northeast')
81     end
82   end
83 end
84
85 % _____ %
86 % _____ %
87 end
```

```

1  function OUT_error(P,ccases,err_w,err_p,depth,np,a0_total,w,err_component,...
2                      Sp_opt,Sp_v)
3  % _____ %
4
5  nw=15.;
6  a0=(0.01:(1-0.01)/(nw-1):1);
7
8  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9  % Plot variable error (u theta, V, M alone)
10 for i_var=1:4
11     if P.Err_a0(i_var)==1
12         vector_errW=zeros(length(ccases),length(w));
13         vector_errP=zeros(length(ccases),length(w));
14
15         figure;
16         for ii=1:length(ccases)
17             % _____ %
18             vector_errW(ii,:)=err_w(ii,i_var,:,err_component);
19             vector_errP(ii,:)=err_p(ii,i_var,:,err_component);
20
21             switch i_var % only adimensional values
22                 case 1; ymax=0; ylabel(gca,'u error');
23                 case 2; ymax=0; ylabel(gca,'\theta error');
24                 case 3; ymax=0; ylabel(gca,'V error');
25                 case 4; ymax=0; ylabel(gca,'M error');
26             end
27
28             plot(gca,a0,vector_errW(ii,:), '*-b');          hold on
29             plot(gca,a0,vector_errP(ii,:), '*-g');          hold off
30             xlim([min(a0),max(a0)]); ylim([0.,ymax]); box on;
31             xlabel(gca,'a_{0}^{*}');
32         end
33     end
34 end
35 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
36 % SubPlot variable errors MIX
37 if P.Err_a0(5)==1
38     vector_errW1=zeros(length(ccases),length(w));
39     vector_errW2=zeros(length(ccases),length(w));
40     vector_errW3=zeros(length(ccases),length(w));
41     vector_errW4=zeros(length(ccases),length(w));
42     vector_errP1=zeros(length(ccases),length(w));
43     vector_errP2=zeros(length(ccases),length(w));
44     vector_errP3=zeros(length(ccases),length(w));
45     vector_errP4=zeros(length(ccases),length(w));
46
47     figure;
48
49     for ii=1:length(ccases)
50
51         switch ii
52             case 1; Linestyle='-'; % Color=''
53             case 2; Linestyle='--'; % Color=''
54             case 3; Linestyle='-.'; % Color=''
55             otherwise
56                 message('Are you sure? Have you cheked the amount of cases asked to
57                 plot?')
58         end
59
60         % _____ %
61         vector_errW1(ii,:)=err_w(ii,1,:,1);  vector_errP1(ii,:)=err_p(ii,1,:,1);
62
63         h2=subplot(4,1,1); hold on
64         plot(h2,a0,vector_errW1(ii,:), 'LineStyle',Linestyle,'Color','b');
65         plot(h2,a0,vector_errP1(ii,:), 'LineStyle',Linestyle,'Color','g');
66         xlim([min(a0),max(a0)]); ylim([0.,0.3]); ylabel(h2,'u error');
67         box on; hold off
68         % _____ %
69         vector_errW2(ii,:)=err_w(ii,2,:,1);  vector_errP2(ii,:)=err_p(ii,2,:,1);
70
71         h3=subplot(4,1,2); hold on
72         plot(h3,a0,vector_errW2(ii,:), 'LineStyle',Linestyle,'Color','b');
73         plot(h3,a0,vector_errP2(ii,:), 'LineStyle',Linestyle,'Color','g');

```



```

1  function OUT_Sp(P,ccases,Sp_opt,err_w,err_p,depth,np,a0_total,w,err_component)
2  % _____ %
3
4  nw=15.;
5  a0=(0.01:(1-0.01)/(nw-1):1);
6
7  % vector_w=zeros(15,1); vector_p=zeros(15,1);
8  % vector_w(:)=err_w(1,4,:,1); vector_p(:)=err_p(1,4,:,1);
9  % figure; hold on; plot(a0,vector_w,'*-r'); plot(a0,vector_p,'*-');
10 % hold off; grid on; ylim([0.,0.25])
11
12 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
13
14 % Plot Sp_opt
15 if P.Sp_a0
16     figure;
17     hold on;
18     if algo
19         for i_case=1:length(ccases)
20             [L_D,Es_Ep,nus]=DATA_cases(i_case);
21
22             switch L_D
23                 case 20;     Spec_LD='*';
24                 case 15;     Spec_LD='s';
25                 case 10;     Spec_LD='o';
26             end
27             switch Es_Ep
28                 case 0.020; Spec_EsEp='--';
29                 case 0.010; Spec_EsEp='-';
30                 case 0.005; Spec_EsEp=':';
31             end
32             switch nus
33                 case 0.30;   Spec_nus='m';
34                 case 0.40;   Spec_nus='k';
35                 case 0.49;   Spec_nus='b';
36             end
37
38             Specifier=[Spec_LD Spec_EsEp Spec_nus];
39
40             plot(a0,Sp_opt(i_case,:),Specifier);
41         end
42     else
43         for i_case=1:length(ccases)
44             switch i_case
45                 case 1;   Linestyle='-'; % Color=''
46                 case 2;   Linestyle='--'; % Color=''
47                 case 3;   Linestyle='-.'; % Color=''
48             otherwise
49                 message('Have you cheked the amount of cases asked to plot?')
50             end
51
52             plot(a0,Sp_opt(i_case,),'LineStyle',Linestyle,'Color','r');
53         end
54     end
55     xlabel(gca,'a_{0}^{*}'); ylabel(gca,'S_{P}')
56     xlim([min(a0),max(a0)]); ylim([0.,15.]);
57     set(gca,'XLim',[0.01 1],'YLim',[0. 15.],...
58         'YTick',[0. 2.50 5. 7.5 10 12.5 15 17.5 20. 22.5 25.],...
59         'YTickLabel',{'0','2.5','5.0','7.5','10.0','12.5','15.0'});
60
61     hold off; box on;
62 end
63
64 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
65 % Plot Sp_opt + variable errors
66 if P.SpErr_a0
67     vector_errW1=zeros(length(ccases),length(w));
68     vector_errW2=zeros(length(ccases),length(w));
69     vector_errW3=zeros(length(ccases),length(w));
70     vector_errW4=zeros(length(ccases),length(w));
71     vector_errP1=zeros(length(ccases),length(w));
72     vector_errP2=zeros(length(ccases),length(w));
73     vector_errP3=zeros(length(ccases),length(w));

```





```

74     for row=1:nrows
75         if row==nrows
76             formatW='%+.2i %+E %+E';
77         end
78         fprintf(fileW,formatW,docW(row,:));
79     end
80     fclose(fileW);
81     eval('cd ..'); eval('cd ..');
82 end
83
84 if W.Pasternak
85     % Selecting output Pasternak data to write
86     docP=zeros(length(frec)*num,12);
87     for jj=1:length(frec)
88         docP((1+(jj-1)*num):(num+(jj-1)*num),1)=jj*ones(num,1);
89         docP((1+(jj-1)*num):(num+(jj-1)*num),2)=a0(jj)*ones(num,1);
90         docP((1+(jj-1)*num):(num+(jj-1)*num),3)=w(jj)*ones(num,1);
91         docP((1+(jj-1)*num):(num+(jj-1)*num),4)=depth';
92
93         for kk=1:4
94             for ll=1:2
95                 docP((1+(jj-1)*num):(num+(jj-1)*num),5+(kk-1)*2+(ll-1))=...
96                     AN_p(i_cases,kk,:,jj,ll);
97             end
98         end
99     end
100
101     % Saving Pasternak data in .txt file
102     eval(['cd ' method '/' VarRef]);
103     fileP=fopen(['AN' pcase '_Pasternak.txt'],'w');
104     formatP='%+.2i %+E %+E\n';
105     nrows=size(docP,1);
106     for row=1:nrows
107         if row==nrows
108             formatP='%+.2i %+E %+E';
109         end
110         fprintf(fileP,formatP,docP(row,:));
111     end
112     fclose(fileP);
113     eval('cd ..'); eval('cd ..');
114 end
115
116 if W.E_w
117     % Selecting output Winkler Error data to write
118     docEw=zeros(length(frec),11);
119     for jj=1:length(frec)
120         docEw(jj,1)=jj; docEw(jj,2)=a0(jj); docEw(jj,3)=w(jj);
121         for kk=1:4
122             for ll=1:2
123                 docEw(jj,4+(kk-1)*2+(ll-1))=err_w(i_cases,kk,jj,ll);
124             end
125         end
126     end
127
128     % Saving Winkler Error data in .txt file
129     eval(['cd ' method '/' VarRef]);
130     fileEw=fopen(['AN' pcase '_ErrorW.txt'],'w');
131     formatEw='%+.2i %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E\n';
132     nrows=size(docEw,1);
133     for row=1:nrows
134         if row==nrows
135             formatEw='%+.2i %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E';
136         end
137         fprintf(fileEw,formatEw,docEw(row,:));
138     end
139     fclose(fileEw);
140     eval('cd ..'); eval('cd ..');
141 end
142
143 if W.E_p
144     % Selecting output Pasternak Error data to write
145     docEp=zeros(length(frec),11);
146     for jj=1:length(frec)

```

```

147     docEp(jj,1)=jj;   docEp(jj,2)=a0(jj);   docEp(jj,3)=w(jj);
148     for kk=1:4
149         for ll=1:2
150             docEp(jj,4+(kk-1)*2+(ll-1))=err_p(i_cases, kk, jj, ll);
151         end
152     end
153 end
154
155 % Saving Pasternak Error data in .txt file
156 eval(['cd ' method '/' VarRef]);
157 fileEp=fopen(['AN' pcase '_ErrorP.txt'],'w');
158 formatEp='%+.2i %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E\n';
159 nrows=size(docEp,1);
160 for row=1:nrows
161     if row==nrows
162         formatEp='%+.2i %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E %+E';
163     end
164     fprintf(fileEp,formatEp,docEp(row,:));
165 end
166 fclose(fileEp);
167 eval('cd ..'); eval('cd ..');
168 end
169
170 if W.Sp_opt
171     % Selecting output Optim Sp data to write
172     docSp=zeros(length(frec),4);
173     for jj=1:length(frec)
174         docSp(jj,1)=jj;       docSp(jj,2)=a0(jj);
175         docSp(jj,3)=w(jj);   docSp(jj,4)=Sp_opt(i_cases,jj);
176     end
177
178     % Saving Optim Sp data in .txt file
179     eval(['cd ' method '/' VarRef]);
180     fileSp=fopen(['AN' pcase '_Sp.txt'],'w');
181     formatSp='%+.2i %+E %+E %+E\n';
182     nrows=size(docSp,1);
183     for row=1:nrows
184         if row==nrows; formatSp='%+.2i %+E %+E %+E'; end
185         fprintf(fileSp,formatSp,docSp(row,:));
186     end
187     fclose(fileSp);
188     eval('cd ..'); eval('cd ..');
189 end
190
191 end
192 % _____
193 % _____
194 end
195

```