



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Escuela de Ingenierías Industriales y Civiles

Ingeniería Industrial

PFC

Aplicación de un modelo acoplado de elementos finitos - elementos de contorno al estudio de los efectos de interacción entre estructuras pilotadas cercanas sometidas a sollicitación sísmica

Autor: Guillermo Manuel Álamo Meneses

**Tutores: Luis A. Padrón Hernández
Juan J. Aznárez González**

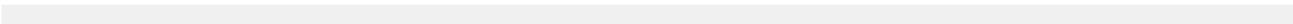
Agradecimientos

Como no puede ser de otra forma, debo empezar agradeciendo el enorme trabajo realizado por mis dos tutores. A los Drs. D. Luis A. Padrón Hernández y D. Juan J. Aznárez González, quienes han hecho posible el presente documento mediante su experiencia y sus grandes explicaciones. A Juan José Aznárez por haberme descubierto el interesante mundo de la dinámica estructural en la asignatura de Estructuras y Construcciones Industriales; a Luis Padrón por ayudarme en mis constantes enfrentamientos con el modelo empleado y siempre tener un momento para resolver mis dudas. A ambos, el haberme iniciado en el mundo de la investigación y haber puesto todos los recursos a mi alcance para que pudiera realizar con éxito el presente trabajo; sin ninguna duda, han afianzado mi interés por la docencia y la investigación y espero poder seguir trabajando junto a ellos los próximos años de mi formación.

A toda mi familia, ya que son los que me han hecho ser lo que hoy soy, por haberme inculcado desde niño los valores del esfuerzo y la constancia y hacerme ver que aprender no tiene por qué ser algo aburrido. Especial mención a mi madre, que con su característica insistencia fue la primera en leer este trabajo, y a quien siempre le deberé la vida. Sinceramente, no hay palabras para agradecer todo el apoyo y cariño recibidos por todos ellos, además de disculparme por el tiempo que esta tarea les ha robado.

Finalmente, agradecer a mis compañeros esas innumerables charlas donde se alivian los pesos del estudio; a Ele, Dani, Jorge, Misa y Enac, por estos últimos meses donde, sabiéndolo o no, han hecho más llevadera esta tarea. Me encantaría nombraros a todos, pero me veo limitado por estas líneas. Solo me queda decir de nuevo: muchas gracias a todos.

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación obtenida del Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), la Agencia Canaria de Investigación, Innovación y Sociedad de la Información (ACIISI) del Gobierno de Canarias y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) a través de los Proyectos de Investigación BIA2010-21399-C02-01 y ProID20100224.



Índice de contenidos

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Revisión bibliográfica	3
1.4. Estructura del documento	3
2. Modelo BEM-FEM para el análisis dinámico de cimentaciones y estructuras pilotadas	5
2.1. Introducción	5
2.2. Ecuaciones de elementos de contorno para el suelo	6
2.3. Ecuaciones de elementos finitos para la cimentación pilotada	8
2.3.1. Ecuación de movimiento	8
2.3.2. Definición del elemento viga	8
2.3.3. Fuerzas sobre el pilote	10
2.3.4. Sistema de ecuaciones para el pilote simple	11
2.4. Acoplamiento BEM-FEM	12
2.5. Formulación del encepado rígido	13
2.5.1. Restricciones cinemáticas	14
2.5.2. Ecuaciones de equilibrio	15
2.6. Modelo para las estructuras pilotadas	16
2.6.1. Introducción	16
2.6.2. Relaciones cinemáticas	17
2.6.3. Matriz de rigidez de entreplanta	18
2.7. Ensamblaje de la matriz global del sistema	20
2.8. Evaluación numérica de las integrales definidas sobre las líneas de carga	21
3. Campo incidente producido por ondas SH y SV con un ángulo de incidencia genérico	25
3.1. Introducción	25
3.2. Fundamentos	25
3.3. Onda SH incidente	28
3.3.1. Campo incidente	28
3.3.2. Tensores de deformación y tensión	29
3.3.3. Aplicación de las condiciones de contorno	30
3.4. Onda SV incidente	30
3.4.1. Campo incidente	30
3.4.2. Ángulo crítico	32
3.4.3. Tensores de deformación y tensión	33
3.4.4. Aplicación de las condiciones de contorno	35
3.4.5. Cambios de modo	37

3.5. Implementación del campo incidente en la formulación	39
3.6. Implementación del modelo en el código. Tratamiento de la simetría	40
4. Resultados	43
4.1. Definición del problema	43
4.2. Tratamiento de la simetría	45
4.2.1. Onda SH	45
4.2.2. Onda SV	46
4.3. Parámetros del problema	47
4.4. Definición de variables a estudiar	48
4.5. Pilotes verticales	49
4.5.1. Variación del cortante	58
4.5.2. Variación de la frecuencia del cortante máximo	73
4.5.3. Interpretación de los resultados	77
4.6. Pilotes inclinados	89
4.6.1. Variación del cortante	93
4.6.2. Variación de la frecuencia del cortante máximo	100
4.6.3. Interpretación de los resultados	107
5. Conclusiones y desarrollo futuro	109
5.1. Resumen y conclusiones	109
5.2. Líneas futuras	111
Referencias	114
I Apéndices	115
A. Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las plantas de las estructuras	117
B. Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras	135
C. Funciones de Respuesta en Frecuencia de los giros de las bases de las estructuras	153
D. Funciones de Respuesta en Frecuencia para los casos de pilotes inclinados	171

Índice de figuras

2.1.	Representación de las líneas de carga	6
2.2.	Definición del elementos finito	9
2.3.	Fuerzas puntuales externas (izquierda) y tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo, definidas sobre un elemento genérico	11
2.4.	Pilote de referencia (r) y pilote periférico (p)	14
2.5.	Esquema bidimensional del modelo de estructuras pilotadas	16
2.6.	Grados de libertad para el acoplamiento entre pilares y encepado	17
2.7.	Estructura de la matriz de coeficientes \mathcal{A} del sistema	21
2.8.	Superficie cilíndrica de integración sobre la interfase pilote-suelo cuando el punto de colocación pertenece al pilote	22
2.9.	Estrategia de colocación no nodal	24
2.10.	Integración sobre la superficie de la punta del pilote	24
3.1.	Representación de los ejes en el semiespacio	26
3.2.	Parámetros para definir el problema de incidencia inclinada	26
3.3.	Definición de la dirección de propagación y desplazamientos de los tipos de onda	27
3.4.	Ángulos y amplitudes para el caso de onda SH incidente	29
3.5.	Ángulos y amplitudes para el caso de onda SV incidente	31
3.6.	Parte real e imaginaria de la amplitud de la onda SV reflejada en función del ángulo de incidencia	38
3.7.	Fenómenos de reflexión de ondas para pilotes embebidos en el terreno	39
4.1.	Grupo de edificios	43
4.2.	Parámetros y grados de libertad del problema	44
4.3.	Inclinación de los pilotes	44
4.4.	Discretización del problema. En sombreado la parte que se discretiza, en discontinuo el resultado de aplicar las simetrías	45
4.5.	Casos de simetría para la onda SH	46
4.6.	Casos de simetría para la onda SV	47
4.7.	Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$	50
4.8.	Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$	51
4.9.	Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$	52
4.10.	Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$	53
4.11.	Deflexión para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$	54

4.12. Deflexión para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$	55
4.13. Deflexión para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$	56
4.14. Deflexión para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$	57
4.15. Variación del cortante máximo para edificios $h/b=2$ separados a diferentes distancias en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo sometido a la misma onda incidente)	59
4.16. Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados a diferentes distancias en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo sometido a la misma onda incidente)	60
4.17. Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 5$ separados a diferentes distancias en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo sometido a la misma onda incidente)	63
4.18. Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 5$ separados a diferentes distancias en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo sometido a la misma onda incidente)	64
4.19. Variación del cortante máximo para el edificio solo sometido a diferentes ángulos de incidencia (comparado con incidencia vertical para el mismo tipo de edificio)	66
4.20. Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados a diferentes distancias en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo sometido a incidencia vertical)	67
4.21. Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados a diferentes distancias en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo sometido a incidencia vertical)	68
4.22. Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 5$ separados a diferentes distancias en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo sometido a incidencia vertical)	71
4.23. Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 5$ separados a diferentes distancias en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo sometido a incidencia vertical)	72
4.24. Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 2$ separados a diferentes distancias en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo)	74
4.25. Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 2$ separados a diferentes distancias en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo)	75
4.26. Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 5$ separados a diferentes distancias en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo)	76
4.27. Fenómenos de reflexión y refracción que intervienen en el problema estudiado	78
4.28. Modos de vibración para las diferentes simetrías para ondas SV (desplazamiento paralelo a la alineación de edificios)	79
4.29. Modos de vibración para las diferentes simetrías para ondas SH (desplazamiento perpendicular a la alineación de edificios)	79
4.30. Deflexión para los diferentes edificios de altura $h/b = 2$ sometidos a ondas SV/SH con un ángulo incidente de 60° para el caso de distancia $D = \lambda/4$	81
4.31. Deflexión para los diferentes edificios de altura $h/b = 2$ sometidos a ondas SV/SH con un ángulo incidente de 65° para el caso de distancia $D = \lambda/4$	82
4.32. Deflexión para los diferentes edificios de altura $h/b = 2$ sometidos a ondas SV con un ángulo incidente de 67° para el caso de distancia $D = \lambda/4$	83
4.33. Deflexión para los diferentes edificios de altura $h/b = 2$ sometidos a ondas SV/SH con un ángulo incidente de 70° para el caso de distancia $D = \lambda/4$	84

4.34. Deflexión para los diferentes edificios de altura $h/b = 2$ sometidos a ondas SV/SH con un ángulo incidente de 75° para el caso de distancia $D = \lambda/4$. . .	85
4.35. Deflexión para los diferentes edificios de altura $h/b = 2$ sometidos a ondas SV/SH con un ángulo incidente de 90° para el caso de distancia $D = \lambda/4$. . .	86
4.36. Deflexión para el caso 1 del edificio exterior de altura $h/b = 2$ sometido a ondas SV/SH con un ángulo incidente variable para el caso de distancia $D = \lambda/4$. . .	87
4.37. Deflexión para el caso 2 del edificio exterior de altura $h/b = 2$ sometido a ondas SV/SH con un ángulo incidente variable para el caso de distancia $D = \lambda/4$. . .	88
4.38. Diferentes modos simétricos de vibración para desplazamientos en dirección x .	89
4.39. Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes verticales	90
4.40. Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 10°	91
4.41. Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20°	92
4.42. Variación del cortante máximo para el edificio solo con diferentes inclinaciones de pilotes (comparado con pilotes verticales sometidos al mismo ángulo de incidencia)	93
4.43. Variación del cortante máximo para el edificio solo sometido a diferentes ángulos de incidencia (comparado con incidencia vertical para el mismo tipo de edificio)	94
4.44. Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo con la misma inclinación de pilotes y sometido a la misma onda incidente)	95
4.45. Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo con la misma inclinación de pilotes y sometido a la misma onda incidente)	96
4.46. Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo con pilotes verticales y sometido a incidencia vertical)	98
4.47. Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo con pilotes verticales y sometido a incidencia vertical)	99
4.48. Variación de la frecuencia de pico para el edificio solo con diferentes inclinaciones de pilotes (comparado con el edificio solo de pilotes verticales)	101
4.49. Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo con la misma inclinación de pilotes) .	102
4.50. Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo con la misma inclinación de pilotes) . .	103
4.51. Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo con pilotes verticales)	105
4.52. Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo con pilotes verticales)	106

B.10. Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$	145
B.11. Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$	146
B.12. Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$	147
B.13. Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$	148
B.14. Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$	149
B.15. Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$	150
B.16. Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$	151
C.1. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$	154
C.2. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$	155
C.3. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$	156
C.4. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$	157
C.5. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$	158
C.6. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$	159
C.7. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$	160
C.8. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$	161
C.9. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$	162
C.10. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$	163
C.11. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$	164
C.12. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$	165
C.13. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$	166
C.14. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$	167
C.15. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$	168
C.16. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$	169
D.1. Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D=L/3$ con pilotes inclinados 10°	172

D.2. Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20° 173

D.3. Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 10° 174

D.4. Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20° 175

D.5. Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 10° 176

D.6. Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20° 177

D.7. Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 10° 178

D.8. Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20° 179

D.9. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 10° 180

D.10. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20° 181

D.11. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 10° 182

D.12. Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20° 183

Índice de tablas

3.1. Ángulos críticos para una onda incidente SV en función del valor del coeficiente de Poisson del terreno	32
3.2. Ángulos de cambio de modo para una onda incidente SV en función del valor del coeficiente de Poisson del terreno	38
4.1. Ángulos de incidencia estudiados según el tipo de onda	48
4.2. Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo el mismo ángulo de incidencia para una altura $h/b = 2$ y onda incidente tipo SV .	58
4.3. Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo el mismo ángulo de incidencia para una altura $h/b = 2$ y onda incidente tipo SH .	61
4.4. Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo el mismo ángulo de incidencia para una altura $h/b = 5$ y onda incidente tipo SV .	62
4.5. Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo el mismo ángulo de incidencia para una altura $h/b = 5$ y onda incidente tipo SH .	65
4.6. Variación del cortante (%) en función del ángulo de incidencia para el caso del sistema suelo-estructura	65
4.7. Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo incidencia vertical para edificios de esbeltez $h/b = 2$ y onda incidente tipo SV .	69
4.8. Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo incidencia vertical para edificios de esbeltez $h/b = 2$ y onda incidente tipo SH .	69
4.9. Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo incidencia vertical para edificios de esbeltez $h/b = 5$ y onda incidente tipo SV .	70
4.10. Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo incidencia vertical para edificios de esbeltez $h/b = 5$ y onda incidente tipo SH .	70
4.11. Variación de la frecuencia pico (%) en función del ángulo de incidencia y las diferentes configuraciones para edificios de esbeltez $h/b = 2$	77
4.12. Variación del cortante (%) en función de la inclinación de los pilotes para los diferentes ángulos de incidencia respecto a estructura sobre cimentación de pilotes verticales bajo la misma sollicitación	93
4.13. Variación del cortante (%) con el ángulo de incidencia respecto a incidencia vertical en función de la inclinación de pilotes	94
4.14. Variación del cortante (%) en función de la inclinación de los pilotes para el caso de esbeltez $h/b = 2$ y separación $D = \lambda/3$ respecto al edificio solo con la misma inclinación de pilotes y bajo el mismo tipo de onda	97
4.15. Variación del cortante (%) en función de la inclinación de los pilotes para el caso de esbeltez $h/b = 2$ y separación $D = \lambda/3$ respecto al edificio solo de pilotes verticales sometido a incidencia vertical para ondas SV	97

4.16. Variación del cortante (%) en función de la inclinación de los pilotes para el caso de esbeltez $h/b = 2$ y separación $D = \lambda/3$ respecto al edificio solo de pilotes verticales sometido a incidencia vertical para ondas SH	100
4.17. Variación de la frecuencia de pico (%) respecto al edificio solo con la misma inclinación de pilotes	101
4.18. Variación de la frecuencia de pico (%) respecto al edificio solo de pilotes verticales	104

Introducción

1.1 Antecedentes

El presente Proyecto Fin de Carrera está integrado en la línea de trabajo que llevan a cabo los miembros de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en la Ingeniería (SIANI) de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria en el campo de la Dinámica de Estructuras y, en particular, en el estudio de la influencia de los fenómenos de interacción suelo-estructura en la respuesta de las construcciones frente a solicitaciones sísmicas. En concreto, ha sido de interés en los últimos años el análisis de la respuesta dinámica de estructuras de edificación cimentadas con pilotes. Así, se ha desarrollado e implementado un modelo acoplado de Elementos de Contorno y Elementos Finitos (MEC-MEF) tridimensional armónico, que aprovecha las ventajas de cada metodología, para el análisis dinámico directo de este tipo de estructuras. Este modelo cuenta con las ventajas del MEC para representar el terreno donde se cimenta la edificación (su carácter de medio semi-infinito, así como la presencia de ondas sísmicas excitadoras) y la simplificación que supone modelar vigas, pilares y pilotes de la estructura (barras clásicas) con el MEF. Este programa, ya muy desarrollado en la actualidad, ha permitido realizar hasta el momento:

1. Para cimentaciones constituidas por pilotes hincados verticalmente en el terreno:
 - El análisis de la respuesta de cimentaciones pilotadas individuales (impedancias e interacción cinemática)
 - El estudio de la respuesta de la superestructura y de otras estructuras cercanas, sometido el conjunto a trenes de ondas sísmicas con incidencia vertical
 - El análisis de los esfuerzos inducidos por sismos constituidos por trenes de ondas P, SV, SH y Rayleigh con ángulo de incidencia variable (no vertical)
2. Para cimentaciones constituidas por pilotes inclinados, se han obtenido y publicado resultados correspondientes a impedancias para cimentaciones pilotadas individuales.

Con este Proyecto Fin de Carrera se persigue ampliar el tipo y número de casos analizados con este modelo analizando los efectos de interacción mutua entre edificaciones cercanas, pilotadas con elementos verticales o inclinados, y sometidas a trenes de ondas con incidencia variable, y cuantificando la influencia en la respuesta (en cimentación, suelo y superestructura) de los parámetros del problema (inclinación de los pilotes, tipo de onda sísmica, ángulo de incidencia de la misma, frecuencia natural del edificio y distancia entre edificios próximos).

1.2 Objetivos

Como se ha comentado, el objetivo principal de este documento es profundizar en el conocimiento de los efectos de interacción estructura-suelo-estructura que se presentan en agrupaciones de edificaciones y que modifican la respuesta dinámica de las mismas en comparación a la que presentarían en el caso de encontrarse de forma individual sobre el terreno, mediante el análisis de la influencia del ángulo de incidencia del tren de ondas sobre esta respuesta. De una forma más detallada, los objetivos planteados para este Proyecto Fin de Carrera son:

- Analizar la respuesta en forma de cortante que presentan las diferentes edificaciones dentro de una configuración estructural compuesta por tres edificios en línea, cimentadas sobre pilotes verticales o inclinados, ante trenes de ondas con ángulos de incidencia variable.
- Analizar la influencia del ángulo de incidencia y del tipo de onda en la respuesta del sistema en relación con la presencia de edificaciones cercanas.
- Analizar dicha influencia en función de la distancia de separación entre las estructuras y de la frecuencia natural de las mismas.
- Analizar la influencia de la inclinación de los pilotes de la cimentación en los efectos de interacción estructura-suelo-estructura; así como la variación de dicha influencia en función del tipo de onda y ángulo de inclinación de la excitación sísmica.

Sin olvidar el carácter académico de este trabajo, se plantean también una serie de objetivos que permitan al autor del presente Proyecto ampliar su formación en el campo de la dinámica de estructuras y los métodos numéricos; así como estar en disposición de utilizar y modificar adecuadamente el software ya disponible para la obtención de resultados. Más detalladamente estos objetivos son:

- Repasar y ampliar los conocimientos teóricos relacionados con la dinámica de estructuras. Esta materia es estudiada de forma introductoria en la asignatura 'Teoría de Estructuras y Construcciones Industriales' de la titulación.
- Estudiar las bases de la Elastodinámica Lineal del Método de los Elementos de Contorno y el Método de los Elementos Finitos, que han servido para el desarrollo del software aplicable al análisis dinámico de estructuras pilotadas. Estas materias no forman parte de los contenidos de ninguna de las asignaturas cursadas.
- Familiarizarse con el lenguaje de programación FORTRAN90, que es el lenguaje empleado en la implementación de los modelos matemáticos que utilizará y modificará. Deberá ser capaz de escribir, compilar y ejecutar sus propios programas en este lenguaje.
- Estudiar con un alto nivel de detalle el programa informático vinculado al modelo acoplado MEC-MEF. Como se ha comentado anteriormente, en el momento actual este código permite el estudio dinámico de estructuras de edificación pilotadas ante trenes de ondas sísmicas con incidencia general.
- Formular e implementar los códigos necesarios para la gestión y tratamiento de los resultados que pretenden obtenerse, tareas necesarias debido al volumen de casos posibles y a las características del análisis paramétrico que desea realizarse.

1.3 Revisión bibliográfica

El problema de la interacción entre estructuras cercanas a través del terreno comenzó a estudiarse por Lee y Wesley en un trabajo pionero [9] en el que investigaron la influencia de la interacción estructura-suelo-estructura en la respuesta dinámica de varios reactores nucleares adyacentes, empleando para ello un modelo tridimensional y una solución aproximada para la interacción dinámica a través de bases circulares rígidas. Poco después, Luco y Contesse [11], seguidos por Wong y Trifunac [24], abordaron el problema bidimensional de la interacción entre paredes infinitas bajo ondas SH empleando una solución para la interacción a través de cimentaciones semicirculares semiinfinitas. Posteriormente, Wang y Schmid [23] y Lehmann y Antes [10] emplearon dos modelos acoplados de elementos finitos-elementos de contorno diferentes para investigar la interacción dinámica entre estructuras tridimensionales cimentadas sobre losas cuadradas, siendo el primer estudio para cargas puntuales sobre los nodos estructurales y el segundo para cargas verticales en el terreno entre las dos estructuras. Recientemente, se han publicado artículos sobre la influencia de grandes grupos de edificios, además de la configuración del subsuelo, sobre la respuesta sísmica del sistema total a través de modelos tanto numéricos como experimentales [4, 8, 21].

En lo referente a la incidencia no vertical, los primeros estudios sobre la respuesta de pilotes embebidos en el terreno frente a ondas inclinadas fueron realizados por Mamoon y Ahmad [13] mediante los factores de interacción cinemática de la cimentación. Este artículo fue la base para el siguiente trabajo de Mamoon y Banerjee [14], donde se investigó la respuesta de pilotes individuales y grupos de pilotes a ondas SH. Makris y Badoni [12] también estudiaron el problema de ondas Rayleigh y ondas SH inclinadas mediante el empleo de una aproximación tipo Winkler. Sin embargo, un estudio más exhaustivo fue el realizado por Kaynia y Novak [7], donde se obtuvieron los factores de interacción cinemática de diferentes configuraciones de cimentaciones de pilotes tanto para ondas volumétricas inclinadas como para ondas Rayleigh.

1.4 Estructura del documento

A continuación, se expondrá un resumen de los diferentes capítulos del presente documento resaltando los aspectos más destacados de los mismos, así como el contenido general de cada uno de ellos. De este modo, en el capítulo 2 se introducirá el modelo acoplado de elementos de contorno - elementos finitos que se empleará para obtener los resultados. Se describirán las ecuaciones de elementos de contorno empleadas para modelar el terreno, así como el tratamiento mediante elementos finitos de los pilotes; realizando posteriormente el acoplamiento de ambas formulaciones. Finalmente, se incluirán las cimentaciones y las superestructuras dentro del sistema global.

En el capítulo 3, se analizarán las diferentes expresiones del campo incidente en función del tipo de onda y de la inclinación de la misma. Estas expresiones analíticas serán las empleadas para incluir la excitación sísmica dentro de la formulación anterior. Finalmente, se comentará el tratamiento de la simetría empleado en el código.

Una vez introducidas las herramientas empleadas para el análisis, el capítulo 4 muestra los resultados obtenidos para los diferentes casos. En primer lugar se definirá el problema a estudiar, para luego mostrar los resultados en cortante obtenidos. Este capítulo se estructura en dos partes, la primera centrada en cimentaciones de pilotes verticales, donde se estudia la influencia de todos los parámetros variables del problema; y una segunda dedicada al análisis de los efectos de la inclinación de pilotes en uno de los casos analizados para pilotes rectos.

1 Introducción

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan una serie de conclusiones y análisis de los resultados obtenidos en el capítulo anterior, así como las líneas de investigación futuras que nacen a partir de dichos resultados.

Modelo BEM-FEM para el análisis dinámico de cimentaciones y estructuras pilotadas

2.1 Introducción

A lo largo de este capítulo, se presentará el modelo empleado para el cálculo del comportamiento dinámico de las distintas estructuras y cimentaciones de pilotes empleados en este trabajo. Dicho modelo consiste en un acoplamiento entre los métodos de elementos de contorno y elementos finitos, siendo el primero el empleado para modelar el terreno y el segundo para los pilotes.

A la hora de plantear el método directo de los elementos de contorno aplicado al problema elastodinámico en el dominio de la frecuencia, la ecuación integral en el contorno es generalmente obtenida a partir del teorema de reciprocidad de la elastodinámica, teniendo en cuenta la fuerzas por unidad de volumen. Sin embargo, antes del proceso de discretización que permite plantear el sistema lineal de ecuaciones del método de los elementos de contorno, se asume, en la mayor parte de las aplicaciones, que dichas fuerzas por unidad de volumen son nulas en todo el dominio, lo que permite cancelar el último término de la ecuación integral.

Por contra, el enfoque utilizado en este trabajo, similar al presentado por Matos Filho et al [15] en un modelo estático previo, incluye este término al considerar que las tensiones que aparecen en la interfase pilote-suelo pueden entenderse como fuerzas de volumen que actúan en el interior del dominio. Por otro lado, la rigidez aportada por los pilotes es tenida en cuenta a través de elementos finitos longitudinales que relacionan los desplazamientos de distintos puntos internos del suelo alineados a lo largo del eje del pilote. De este modo, no hay necesidad de discretizar la interfase pilote-suelo utilizando elementos de contorno, con el consiguiente ahorro en grados de libertad. Así, no se considera un vaciado en el suelo, que se modela como un medio continuo.

La sección 2.2 presenta la ecuación integral de contorno para el suelo, donde las fuerzas y las tensiones que aparecen en la interfase pilote-suelo son consideradas como líneas de carga y fuerzas internas que aparecen en el interior del dominio. A continuación, la sección 2.3 expone la formulación de elementos finitos utilizada para modelar los pilotes, con lo que ya es posible realizar el acoplamiento entre los elementos finitos y los elementos de contorno, tal y como se hace en la sección 2.4. Posteriormente, la agrupación de pilotes por medio de encepados rígidos es presentada la sección 2.5, y a partir de ahí, la sección 2.6 aborda el modo en que se introducen en el modelo estructuras cimentadas sobre los grupos de pilotes formulados en los apartados anteriores. La exposición del modelo numérico de elementos de contorno y elementos finitos termina en la sección 2.7, donde se aborda el proceso de ensamblaje del sistema de ecuaciones final. Algunos aspectos numéricos sobre la evaluación de las integrales relacionadas con las líneas de carga son explicados en la sección 2.8. Parte del material presentado en este capítulo ha sido previamente publicado en algunos trabajos elaborados por los tutores del proyecto [16–18].

2.2 Ecuaciones de elementos de contorno para el suelo

El terreno es modelado a través del método de los elementos de contorno como una región lineal, homogénea, isótropa, viscoelástica y no acotada, con un módulo de elasticidad transversal complejo μ del tipo $\mu = Re[\mu](1 + 2i\beta)$, donde β es el coeficiente de amortiguamiento. La ecuación integral en el contorno para un estado elastodinámico definido en un dominio Ω con un contorno Γ puede ser escrito de forma general y condensada como

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{X} d\Omega \quad (2.1)$$

donde \mathbf{c}^l es el tensor del término libre en el punto de colocación \mathbf{x}^l , \mathbf{X} son las fuerzas de volumen en el dominio Ω , \mathbf{u} y \mathbf{p} son los vectores de desplazamientos y tensiones, y \mathbf{u}^* y \mathbf{p}^* son los tensores de la solución fundamental elastodinámica, que representan la respuesta de una región no acotada a una carga armónica unitaria concentrada en un punto \mathbf{x}^l y con una variación temporal del tipo $e^{i\omega t}$.

En gran número de aplicaciones se considera que la fuerzas de volumen \mathbf{X} son nulas. De aquí en adelante, por contra, se considerará que la interacción pilote-suelo se produce, desde el punto de vista de la ecuación integral, a través de fuerzas internas puntuales situadas en la punta de los pilotes y de líneas de carga repartidas a lo largo del eje de los pilotes. Se considera, por tanto, que la continuidad del suelo no se ve alterada por la presencia de los pilotes. Las líneas de carga dentro del suelo, las tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo, actuando sobre el pilote y en el interior del suelo ($\mathbf{q}^{p_j} = -\mathbf{q}^{s_j}$), y las fuerzas internas puntuales F_{p_j} en la punta de los pilotes, están representadas en la fig. 2.1, donde se muestra un esquema del modelo.

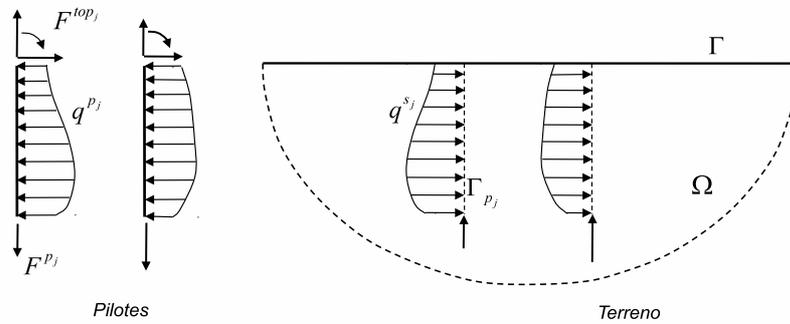


Figura 2.1: Representación de las líneas de carga

De acuerdo a las hipótesis enumeradas anteriormente, la ec. (2.1) puede ser escrita como:

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_p} \left[\int_{\Gamma_{p_j}} \mathbf{u}^* \mathbf{q}^{s_j} d\Gamma_{p_j} - \delta_j \Upsilon_k^j F_{p_j} \right] \quad (2.2)$$

donde Γ_{p_j} es la interfase pilote-suelo a lo largo de la línea de carga j en el interior del dominio Ω ; n_p es el número total de líneas de carga en el dominio Ω ; δ_j toma valor unitario si la línea de carga j contiene a la punta de un pilote flotante, o toma el valor cero en caso contrario; y Υ_k^j es un vector de tres componentes que representa la contribución de la fuerza axial F_{p_j} en la punta de la línea de carga j -ésima.

Los contornos Γ son discretizados por medio de elementos cuadráticos triangulares o cuadriláteros con seis o nueve nodos, respectivamente. Cuando los contorno han sido discretizados, la

ec. (2.2) puede ser escrita para la región Ω , en todos los nodos sobre Γ con el fin de obtener una ecuación matricial del tipo:

$$\mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{sp_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{sj} F_{p_j} = 0 \quad (2.3)$$

donde \mathbf{u}^s y \mathbf{p}^s son los vectores de desplazamientos y tensiones nodales de los elementos de contorno; \mathbf{H}^{ss} y \mathbf{G}^{ss} son las matrices de coeficientes obtenidas de la integración numérica sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental por las funciones de forma correspondientes; y \mathbf{G}^{sp_j} es la matriz de coeficientes obtenida de la integración numérica sobre la línea de carga j del producto de la solución fundamental por las funciones de interpolación (2.12), cuando la carga unitaria está aplicada sobre Γ .

Por otro lado, la ec. (2.2) será también aplicada sobre los puntos internos que pertenecen a la línea de carga Γ_{p_i} , lo que lleva a la siguiente expresión:

$$\mathbf{c} \mathbf{u}^{p_i} + \mathbf{H}^{p_i s} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{p_i s} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{p_i p_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{p_i j} F_{p_j} = 0 \quad (2.4)$$

donde $\mathbf{H}^{p_i s}$ y $\mathbf{G}^{p_i s}$ son matrices de coeficientes obtenidas a través de la integración numérica sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental por las funciones de forma correspondientes; y $\mathbf{G}^{p_i p_j}$ es la matriz de coeficientes obtenida a través de la integración numérica sobre la línea de carga j del producto de la solución fundamental por las funciones de interpolación (2.12), cuando la carga unitaria está aplicada sobre la línea de carga Γ_{p_i} . Aquí, \mathbf{u}^{p_i} es el vector de desplazamientos nodales de la línea de carga i , el cual es multiplicado por el vector \mathbf{c} , que toma el valor $1/2$ en posiciones correspondientes a nodos del pilote localizados sobre un contorno suave (como en el caso de las cabezas de los pilotes) o toma un valor unitario en los puntos internos. Hay que tener en cuenta que la posición del nodo que define la cabeza del pilote puede coincidir con la posición de algún nodo de la superficie. En este caso existirán dos nodos con idénticas coordenadas espaciales. Entonces, dos de las ecuaciones del sistema, la escrita para el nodo de la superficie y la escrita para el nodo de la línea de carga, serán equivalentes, pero el término libre ocupará diferentes posiciones en la matriz de coeficientes, lo que evitará que se tenga un sistema de ecuaciones singular.

Por otro lado, dado que para pilotes flotantes se considera la existencia de una fuerza axial actuando en la punta, es necesario escribir una ecuación extra. Para ello, la carga puntual debe ser aplicada en la dirección x_3 en algún punto no nodal. Dado su cercanía a la punta del pilote, el punto más idóneo es el de coordenada elemental adimensional $\xi = -1/2$ del elemento inferior (véase la sección 2.3.2). De este modo, la ecuación extra es

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left(3u_3^{b_k} + 6u_3^{b_l} - u_3^{b_m} \right) + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{p}}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{p} \, d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_p} \left[\int_{\Gamma_{p_j}} \hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{q}^{s_j} \, d\Gamma_{p_j} - \delta_j \left(\Upsilon_b^j \right)_3 F_{p_j} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $u_3^{b_k}, u_3^{b_l}$ y $u_3^{b_m}$ son los desplazamientos verticales de los nodos k, l y m del elemento inferior, $\hat{\mathbf{p}}^* = \{p_{31}^*, p_{32}^*, p_{33}^*\}$ y $\hat{\mathbf{u}}^* = \{u_{31}^*, u_{32}^*, u_{33}^*\}$. De forma matricial, la ec. (2.5) puede ser escrita como

$$\mathbf{D}^T \mathbf{u}_b^{p_i} + \mathbf{H}_e^{p_i s} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}_e^{p_i s} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}_e^{p_i p_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon_{b_3}^{p_i j} F_{p_j} = 0 \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{u}_b^{p_i}$ es el vector de desplazamientos nodales en los nodos del elemento inferior de la línea de carga i (que corresponde al extremo inferior de un pilote flotante) donde la carga unitaria está aplicada; $\mathbf{H}_e^{p_i s}$ y $\mathbf{G}_e^{p_i s}$ son vectores obtenidos por integración numérica sobre Γ del producto de la solución fundamental elastodinámica por las funciones de forma de los elementos de contorno; y $\mathbf{G}_e^{p_i p_j}$ es el vector obtenido de la integración sobre Γ_{p_j} del producto de la solución fundamental elastodinámica por las funciones de forma definidas en (2.12), cuando la carga unitaria está aplicada en el punto extra de la línea de carga i . Finalmente, $\mathbf{D}^T = 1/8\{0, 0, 3, 0, 0, 6, 0, 0, -1\}$.

2.3 Ecuaciones de elementos finitos para la cimentación pilotada

2.3.1 Ecuación de movimiento

El comportamiento de un pilote sometido a cargas dinámicas puede ser descrito a través de la siguiente ecuación diferencial:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.7)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del pilote, $\mathbf{u}(t)$ es el vector de desplazamientos nodales y $\mathbf{f}(t)$ es el vector de fuerzas nodales sobre el pilote.

Considerando ahora que el pilote está sujeto a cargas armónicas, los vectores de desplazamientos y fuerzas nodales pueden ser expresados como:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^p e^{i\omega t} \quad \text{y} \quad \mathbf{f}(t) = \mathbf{F} e^{i\omega t} \quad (2.8)$$

donde \mathbf{u}^p es el vector que contiene las amplitudes de las traslaciones y rotaciones nodales, \mathbf{F} es el vector que contiene las amplitudes de las fuerzas y momentos nodales, ω es la frecuencia angular de la excitación, e $i = \sqrt{-1}$. De este modo, y considerando un pilote con amortiguamiento interno nulo, la ec. (2.7) puede expresarse ahora como

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}^p = \mathbf{F} \quad (2.9)$$

2.3.2 Definición del elemento viga

Los pilotes son modelados, haciendo uso del método de los elementos finitos, como elementos verticales de acuerdo a la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, y son discretizados utilizando elementos de tres nodos (como se muestra en la fig. 2.2) que han sido definidos de manera que sea posible aproximar la deformada del pilote con un número bajo de elementos. Se definen 13 grados de libertad sobre dicho elemento: un desplazamiento vertical y dos desplazamientos horizontales en cada nodo, y además, dos rotaciones θ en cada uno de los nodos extremos, uno alrededor del eje x_1 y otro alrededor del eje x_2 .

Los desplazamientos laterales u_1 y u_2 a lo largo del elemento son aproximados a través de un conjunto de funciones de forma de cuarto grado, mientras que los desplazamientos verticales u_3 son aproximados por funciones de segundo grado. De este modo, sus expresiones quedan:

$$u_i = \varphi_1 u_{k_i} + \varphi_2 \theta_{k_i} + \varphi_3 u_{l_i} + \varphi_4 u_{m_i} + \varphi_5 \theta_{m_i} \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (2.10a)$$

$$u_3 = \phi_1 u_{k_3} + \phi_2 u_{l_3} + \phi_3 u_{m_3} \quad (2.10b)$$

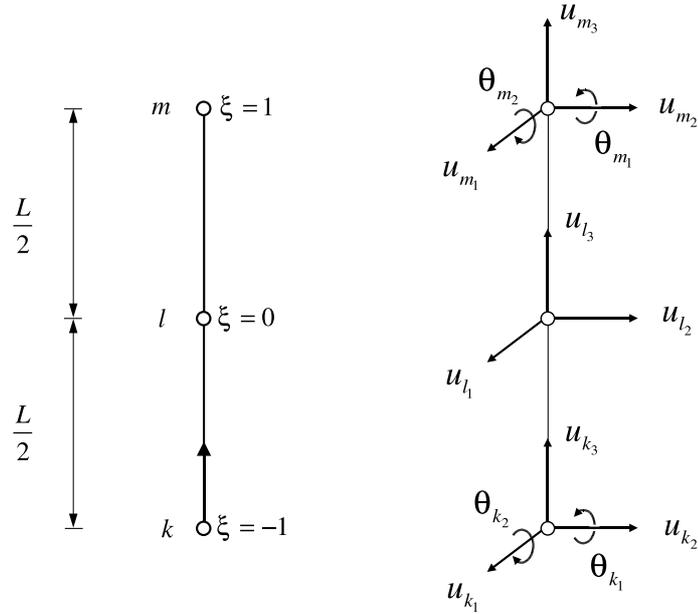


Figura 2.2: Definición del elemento finito

donde

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \xi \left(-\frac{3}{4} + \xi + \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3 \right) \\
 \varphi_2 &= \frac{1}{4}\xi(-1 + \xi + \xi^2 - \xi^3) \\
 \varphi_3 &= 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \\
 \varphi_4 &= \xi \left(\frac{3}{4} + \xi - \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3 \right) \\
 \varphi_5 &= \frac{1}{4}\xi(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

y

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\
 \phi_2 &= 1 - \xi^2 \\
 \phi_3 &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

siendo ξ la coordenada adimensional elemental que varía desde $\xi = -1$ hasta $\xi = +1$.

Las submatrices de rigidez que definen el comportamiento lateral y axial del elemento (indicadas por los superíndices l y a respectivamente), pueden ser obtenidas haciendo uso de las funciones de forma arriba indicadas y del principio de los desplazamientos virtuales como:

$$k_{ij}^l = \int_L \varphi_i'' EI \varphi_j'' dx_3 \quad ; \quad i, j = 1, \dots, 5 \tag{2.13}$$

y

$$k_{ij}^a = \int_L \phi_i' EA \phi_j' dx_3 \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{2.14}$$

2 Modelo para el análisis dinámico de cimentaciones y estructuras pilotadas

donde las primas indican derivada respecto de la coordenada x_3 . De este modo, las submatrices de rigidez son:

$$\mathbf{K}^l = \frac{EI}{5L} \begin{bmatrix} \frac{316}{L^2} & \frac{94}{L} & \frac{-512}{L^2} & \frac{196}{L^2} & \frac{-34}{L} \\ \frac{94}{L} & 36 & \frac{-128}{L} & \frac{34}{L} & -6 \\ \frac{512}{L^2} & \frac{-128}{L} & \frac{1024}{L^2} & \frac{-512}{L^2} & \frac{128}{L} \\ \frac{196}{L^2} & \frac{34}{L} & \frac{-512}{L^2} & \frac{316}{L^2} & \frac{-94}{L} \\ \frac{-34}{L} & -6 & \frac{-128}{L} & \frac{-94}{L} & 36 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^a = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

donde E es el módulo de Young del pilote, A e I son el área y el momento de inercia de la sección del pilote, y L es la longitud del elemento. Se considera que los momentos de inercial respecto a ambos ejes principales de inercia son iguales.

De manera similar, los coeficientes de influencia que constituyen la matriz de masa de un elemento, y que representan las fuerzas de inercia que se oponen a la aceleración experimentada por un cierto grado de libertad, pueden ser evaluadas de manera similar como:

$$m_{ij}^l = \int_L \varphi_i \bar{m} \varphi_j dx_3 \quad ; \quad m_{ij}^a = \int_L \phi_i \bar{m} \phi_j dx_3 \quad (2.16)$$

De este modo, y considerando un viga con una masa \bar{m} uniformemente distribuida, las matrices de masa consistente que rigen los comportamientos lateral y axial son, respectivamente:

$$\mathbf{M}^l = L \bar{m} \begin{bmatrix} \frac{13}{63} & \frac{L}{63} & \frac{4}{63} & \frac{-23}{630} & \frac{L}{180} \\ \frac{L}{63} & \frac{L^2}{630} & \frac{2L}{315} & \frac{-L}{180} & \frac{L^2}{1260} \\ \frac{4}{63} & \frac{2L}{315} & \frac{128}{315} & \frac{4}{63} & \frac{-2L}{315} \\ \frac{-23}{630} & \frac{-L}{180} & \frac{4}{63} & \frac{13}{63} & \frac{-L}{63} \\ \frac{L}{180} & \frac{L^2}{1260} & \frac{-2L}{315} & \frac{-L}{63} & \frac{L^2}{630} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}^a = \frac{L \bar{m}}{15} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

2.3.3 Fuerzas sobre el pilote

Dentro de las fuerzas externas actuando sobre el pilote, se considera la existencia de fuerzas y momentos puntuales en la cabeza del pilote, fuerzas distribuidas a lo largo del fuste debidas a la interacción pilote-suelo, y una fuerza axial sobre la punta del pilote. De este modo, el vector de fuerzas nodales \mathbf{F} puede ser descompuesto como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{F}^{eq} = \mathbf{F}_{top} + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}^{eq} \quad (2.18)$$

donde \mathbf{F}^{ext} incluye las fuerzas en la cabeza \mathbf{F}_{top} y la fuerza axial en la punta del pilote \mathbf{F}_p ; y \mathbf{F}^{eq} es el vector de fuerzas nodales equivalente debido a la interacción pilote-suelo, que puede ser calculado como $\mathbf{F}^{eq} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}^p$, donde \mathbf{Q} es la matriz que transforma las tensiones en fuerzas nodales equivalentes.

Las fuerzas externas que se definen sobre un elementos genérico están esquematizadas en la fig. 2.3. Las tensiones \mathbf{q}^p a lo largo de la interfase pilote-suelo son aproximadas como:

$$q_i = \phi_1 q_{k_i} + \phi_2 q_{l_i} + \phi_3 q_{m_i} \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.19)$$

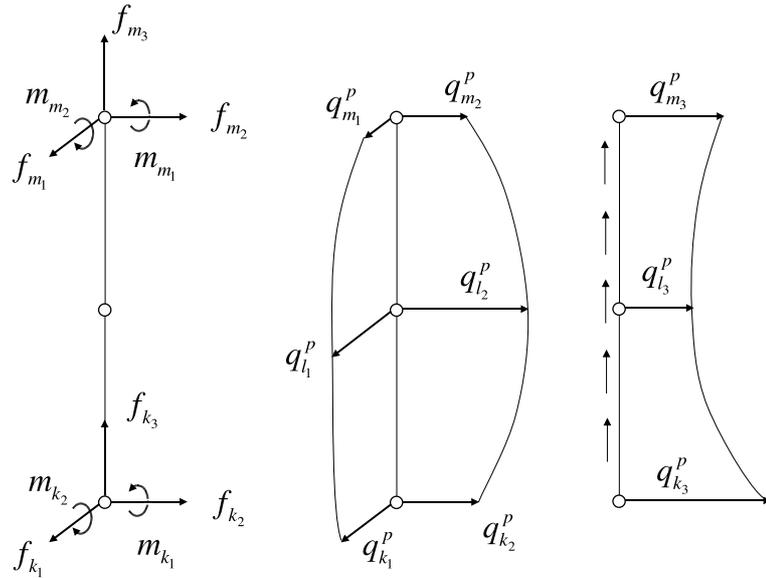


Figura 2.3: Fuerzas puntuales externas (izquierda) y tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo, definidas sobre un elemento genérico

utilizando el conjunto de funciones de forma definidos por la ec. (2.12). La distribución de tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo es continua entre elementos.

De nuevo, los coeficientes de la matriz \mathbf{Q} para la computación de las fuerzas laterales pueden ser obtenidos utilizando el principio de los desplazamiento virtuales:

$$q_{ij}^l = \int_L \varphi_i \phi_j dx \quad ; \quad i = 1, \dots, 5 ; j = 1, 2, 3 \quad (2.20)$$

mientras que los coeficientes de la matriz correspondiente a las fuerzas axiales se obtienen haciendo:

$$q_{ij}^a = \int_L \phi_i \phi_j dx \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.21)$$

resultando en las siguientes matrices:

$$\mathbf{Q}^l = \begin{bmatrix} \frac{23L}{140} & \frac{11L}{105} & \frac{-L}{28} \\ \frac{L^2}{84} & \frac{L^2}{105} & \frac{-L^2}{210} \\ \frac{4L}{105} & \frac{16L}{35} & \frac{4L}{105} \\ \frac{-L}{28} & \frac{11L}{105} & \frac{23L}{140} \\ \frac{L^2}{210} & \frac{-L^2}{105} & \frac{-L^2}{84} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^a = \frac{L}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

2.3.4 Sistema de ecuaciones para el pilote simple

Una vez que todas las matrices elementales han sido obtenidas para el pilote completo, es posible escribir, para cada pilote, la siguiente expresión:

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}^p = \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{Q} \mathbf{q}^p \quad (2.23)$$

donde $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$. Dado que cada pilote es discretizado utilizando tantos elementos como sea necesario para poder seguir de forma precisa su deformada, las matrices $\bar{\mathbf{K}}$ y \mathbf{Q} deben ser

entendidas como matrices globales, obtenidas a partir de las matrices elementales siguiendo los procedimientos usuales del método de los elementos finitos.

Nótese que, dado que se asume que la continuidad del suelo no se ve alterada por la presencia de los pilotes, el valor de la masa distribuida asignado a cada pilote debe ser modificado según la expresión $\bar{m} = A(\rho_p - \rho_s)$, con el objetivo de no sobrestimar la masa total del sistema, siendo ρ_p y ρ_s las densidades del pilote y del suelo. Consideraciones de similar naturaleza fueron adoptadas en [6, 19, 20].

2.4 Acoplamiento BEM-FEM

El siguiente paso es la construcción de un sistema de ecuaciones global a partir de las expresiones deducidas en las secciones anteriores. El acoplamiento será realizado a través de las tensiones $\mathbf{q}^{sj} = -\mathbf{q}^{pj}$ a lo largo de la interfase pilote-suelo y de los desplazamientos \mathbf{u}^{pj} a lo largo del pilote j .

La ec. (2.23), escrita para el pilote j , puede ser expresada ahora como:

$$\bar{\mathbf{K}}^{pj} \mathbf{u}^{pj} - \mathbf{F}_{pj} + \mathbf{Q} \mathbf{q}^{sj} = \mathbf{F}_{top}^j \quad (2.24)$$

Imponiendo condiciones de compatibilidad y equilibrio soldados a lo largo de las interfases pilote-suelo, y tomando como criterio de signos que las tensiones \mathbf{q}^s son positivas, las ecuaciones (2.3), (2.4), (2.6) y (2.24) puede ser reordenadas en un único sistema de ecuaciones que representará al sistema suelo – cimentación pilotada. Este sistema acoplado será de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{ss} & -\mathbf{G}^{sp} & \Upsilon^s & \emptyset \\ \mathbf{H}^{ps} & -\mathbf{G}^{pp} & \Upsilon^p & \mathbf{C}' \\ \mathbf{H}_e^{ps} & -\mathbf{G}_e^{pp} & \Upsilon_{b3}^p & \mathbf{D}' \\ \emptyset & \mathbf{Q} & -\mathbf{I}' & \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{q}^s \\ \mathbf{F}_p \\ \mathbf{u}^p \end{bmatrix} = \mathcal{B} \quad (2.25)$$

donde \mathbf{H}^{ss} es la matriz de dimensiones $3N \times 3N$ obtenida mediante la integración, sobre los elementos de contorno, del producto de la solución fundamental armónica en tensiones por las funciones de forma correspondientes, cuando la carga es aplicada sobre los contornos; N es el número de nodos en el contorno; \mathbf{D}' es una matriz constituida por los distintos vectores \mathbf{D} ; \mathbf{C}' es una matriz que contiene los términos libres correspondientes a la colocación sobre los nodos del pilote; e \mathbf{I}' es una matriz llena de elementos nulos excepto en los términos correspondientes a las incógnitas F_{pj} , donde se coloca un término de valor unidad. El resto de las submatrices son:

$$\mathbf{G}^{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{p1p1} & \mathbf{G}^{p1p2} & \dots & \mathbf{G}^{p1pn} \\ \mathbf{G}^{p2p1} & \mathbf{G}^{p2p2} & \dots & \mathbf{G}^{p2pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}^{pnp1} & \mathbf{G}^{pnp2} & \dots & \mathbf{G}^{pnpn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_e^{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_e^{p1p1} & \mathbf{G}_e^{p1p2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p1pn} \\ \mathbf{G}_e^{p2p1} & \mathbf{G}_e^{p2p2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p2pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_e^{pnp1} & \mathbf{G}_e^{pnp2} & \dots & \mathbf{G}_e^{pnpn} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon^p = \begin{bmatrix} \Upsilon^{p_1 1} & \Upsilon^{p_1 2} & \dots & \Upsilon^{p_1 n} \\ \Upsilon^{p_2 1} & \Upsilon^{p_2 2} & \dots & \Upsilon^{p_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Upsilon^{p_n 1} & \Upsilon^{p_n 2} & \dots & \Upsilon^{p_n n} \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_{b_3}^p = \begin{bmatrix} \Upsilon_{b_3}^{p_1 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_1 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_1 n} \\ \Upsilon_{b_3}^{p_2 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_2 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Upsilon_{b_3}^{p_n 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_n 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_n n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^{sp} = [\mathbf{G}^{sp_1} \quad \mathbf{G}^{sp_2} \quad \dots \quad \mathbf{G}^{sp_n}]$$

$$\Upsilon^s = [\Upsilon^{s1} \quad \Upsilon^{s2} \quad \dots \quad \Upsilon^{sn}]$$

$$\mathbf{H}^{ps} = [\mathbf{H}^{p_1 s} \quad \mathbf{H}^{p_2 s} \quad \dots \quad \mathbf{H}^{p_n s}]^T$$

$$\mathbf{H}_e^{ps} = [\mathbf{H}_e^{p_1 s} \quad \mathbf{H}_e^{p_2 s} \quad \dots \quad \mathbf{H}_e^{p_n s}]^T$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{p_1} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \mathbf{Q}^{p_2} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & \mathbf{Q}^{p_n} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^{p_1} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \bar{\mathbf{K}}^{p_2} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & \bar{\mathbf{K}}^{p_n} \end{bmatrix}$$

\mathcal{B} es el vector del lado derecho, obtenido de aplicar las condiciones de contorno, mientras que el vector de incógnitas es:

$$\mathbf{x} = \{ \mathbf{u}^s, \mathbf{q}^{s_1}, \mathbf{q}^{s_2}, \dots, \mathbf{q}^{s_n}, F_{p_1}, F_{p_2}, \dots, F_{p_n}, \mathbf{u}^{p_1}, \mathbf{u}^{p_2}, \dots, \mathbf{u}^{p_n} \}^T \quad (2.26)$$

2.5 Formulación del encepado rígido

En este trabajo en concreto, se considerará que los pilotes están fijamente conectados a un encepado rígido. Las restricciones cinemáticas entre los distintos pilotes, junto a las ecuaciones de equilibrio del conjunto, son presentadas en las siguientes secciones.

2.5.1 Restricciones cinemáticas

La vinculación de los desplazamientos de las cabezas de los pilotes de un grupo es ejecutada definiendo las ecuaciones de movimiento de sólido rígido y, posteriormente, condensando los grados de libertad deseados. Con el objetivo de simplificar la implementación, los grados de libertad definidos sobre las cabezas de algunos pilotes serán los utilizados como referencia para condensar el resto de grados de libertad. Sólo existen cinco grados de libertad en la cabeza de un pilote, mientras que se necesitan seis grados de libertad (tres desplazamientos y tres rotaciones) para representar el comportamiento del encepado rígido, por lo que se utilizarán dos pilotes. Éstos serán denominados como *pilote de referencia* y *pilote periférico*, siendo este último necesario tan solo para la definición de la rotación del encepado alrededor de un eje vertical.

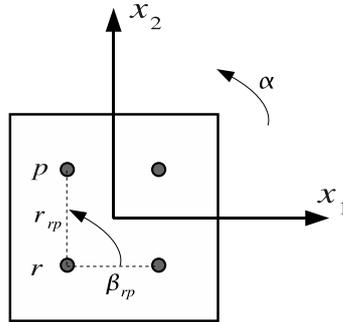


Figura 2.4: Pilote de referencia (r) y pilote periférico (p)

Sean β_{rp} y r_{rp} el ángulo y la distancia existentes entre las cabezas de los pilotes de referencia y periférico (véase la fig. 2.4). Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, pueden escribirse las siguientes relaciones:

$$u_{p1} = u_{r1} - r_{rp}\alpha \sin(\beta_{rp}) \tag{2.27a}$$

$$u_{p2} = u_{r2} + r_{rp}\alpha \cos(\beta_{rp}) \tag{2.27b}$$

donde los subíndices 1 y 2 indican desplazamientos a lo largo de los ejes x_1 y x_2 , respectivamente. De este modo, el ángulo α de rotación del encepado puede ser definido entre ambos pilotes como:

$$\text{si } \begin{cases} 45^\circ \leq \beta_{rp} \leq 135^\circ \\ 225^\circ \leq \beta_{rp} \leq 315^\circ \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \alpha = \frac{u_{r1} - u_{p1}}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} \quad (\text{caso a})$$

$$\text{si } \begin{cases} 315^\circ \leq \beta_{rp} \leq 45^\circ \\ 135^\circ \leq \beta_{rp} \leq 225^\circ \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \alpha = \frac{u_{p2} - u_{r2}}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} \quad (\text{caso b})$$

(2.28)

de tal modo que en el caso a, el grado de libertad auxiliar del pilote periférico es u_{p1} , mientras que en el caso b, el grado de libertad utilizado es u_{p2} . Ahora, teniendo en cuenta el conjunto de grados de libertad elegidos para representar el comportamiento del encepado rígido, el acoplamiento entre los pilotes de referencia y periférico puede expresarse, para los casos a y b

respectivamente, a través de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} u_{p_2} \\ u_{p_3} \\ \theta_{p_1} \\ \theta_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan(\beta_{rp})^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\tan(\beta_{rp})^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp_1} & -d_{rp_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_1} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

y

$$\begin{bmatrix} u_{p_1} \\ u_{p_3} \\ \theta_{p_1} \\ \theta_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan(\beta_{rp}) & 0 & 0 & 0 & -\tan(\beta_{rp}) \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp_1} & -d_{rp_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_2} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

donde $d_{rp_i} = x_{p_i} - x_{r_i}$, siendo \mathbf{x} el vector de posición del punto de interés. Sean ahora β_{rj} y r_{rj} el ángulo y la distancia existentes entre la cabeza del pilote de referencia y la de cualquier otro pilote j . Las matrices de acoplamiento, para los casos a y b, son, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} u_{j_1} \\ u_{j_2} \\ u_{j_3} \\ \theta_{j_1} \\ \theta_{j_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} \\ \frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rj_1} & -d_{rj_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_1} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

y

$$\begin{bmatrix} u_{j_1} \\ u_{j_2} \\ u_{j_3} \\ \theta_{j_1} \\ \theta_{j_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} \\ 0 & 1 - \frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rj_1} & -d_{rj_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_2} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

donde $d_{rj_i} = x_{j_i} - x_{r_i}$. Tal y como ya se ha dicho, estas matrices son utilizadas para condensar los grados de libertad definidos en las cabezas de los pilotes de un grupo en sólo seis grados de libertad de referencia.

2.5.2 Ecuaciones de equilibrio

Se deben imponer condiciones de equilibrio dinámico sobre el encepado entre las fuerzas externas, las fuerzas de inercia y las reacciones en la cabeza de los pilotes. Sean F_i^e las fuerzas externas aplicadas sobre el centro de gravedad del encepado \mathbf{x}_{cg}^e en dirección i , y M_1^e , M_2^e y M_3^e los momentos externos aplicados alrededor de los ejes x_2 , x_1 y x_3 , respectivamente. Las propiedades inerciales del encepado son su masa m^e , y sus momentos de inercia I_1 , I_2 e I_3

definidos alrededor de los ejes x_2 , x_1 y x_3 , respectivamente. Finalmente, las reacciones en la cabeza del pilote j -ésimo son las fuerzas F_{j_i} y los momentos M_{j_1} y M_{j_2} definidos alrededor de los ejes x_2 y x_1 , respectivamente. Con esta nomenclatura, las ecuaciones de equilibrio dinámico del encepado c pueden escribirse como:

$$F_i^e + \sum_{j=1}^{n_p^c} F_{j_i} = -\omega^2 m^c u_{cg_i} \quad i = 1, 2, 3$$

$$M_i^e + \sum_{j=1}^{n_p^c} (M_{j_i} - (x_{j_i} - x_{cg_i})F_{j_3} + (x_{j_3} - x_{cg_3})F_{j_i}) = -\omega^2 I_i \theta_i \quad i = 1, 2$$

$$M_3^e + \sum_{j=1}^{n_p^c} ((x_{j_1} - x_{cg_1})F_{j_2} - (x_{j_2} - x_{cg_2})F_{j_1}) = -\omega^2 I_3 \alpha \quad (2.33)$$

donde n_p^c es el número de pilotes agrupados bajo el encepado c .

2.6 Modelo para las estructuras pilotadas

2.6.1 Introducción

En esta sección se describe la formulación que ha sido adoptada para el análisis dinámico de estructuras pilotadas compuestas por uno a más pilares verticales extensibles y uno o más forjados horizontales infinitamente rígidos, tal y como se muestra en la fig. 2.5. Los pilotes son modelados como vigas de Euler-Bernoulli sin masa, con deformación axial y lateral, y con amortiguamiento de tipo viscoelástico, introducido a través de un módulo de rigidez complejo del tipo $k = Re[k](1 + 2i\zeta)$. La rigidez torsional de los pilares es despreciada. Se considera que los ejes principales de inercia de los forjados rígidos son paralelos a los ejes de coordenadas, aunque la posición de sus centros de gravedad en el plano horizontal puede variar entre distintas plantas.

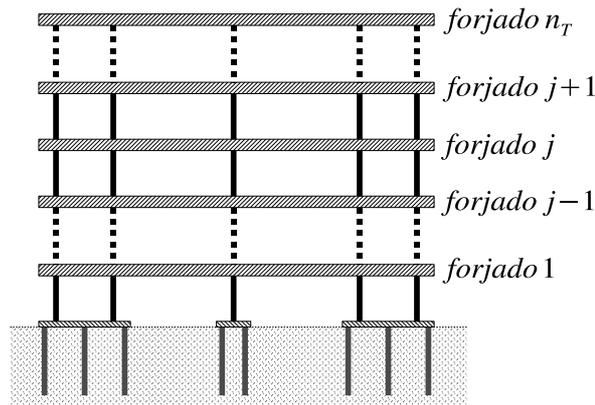


Figura 2.5: Esquema bidimensional del modelo de estructuras pilotadas

Con el objetivo de escribir las ecuaciones de movimiento directamente en función de los desplazamientos y rotaciones de los forjados (parámetros de mayor interés en este trabajo), todos los grados de libertad correspondientes a los extremos de los pilares son condensados al centro de gravedad del forjado o del encepado situado a su mismo nivel. Dado que las matrices elementales de rigidez de los pilares serán expresadas inicialmente respecto a los extremos de los

pilares, es necesario escribir primero las relaciones cinemáticas existentes entre tales extremos y los centros de gravedad de los forjados o los encepados. Posteriormente, una matriz de rigidez elemental para la entreplanta es definida entre dos niveles consecutivos.

2.6.2 Relaciones cinemáticas

Sea $\mathbf{X}^j = \{u_{cg1^j}, u_{cg2^j}, u_{cg3^j}, \alpha_{cg^j}, \Theta_{cg1^j}, \Theta_{cg2^j}\}^T$ el vector que define los desplazamientos y rotaciones en el centro de gravedad del forjado o encepado j , donde α_{cg^j} , Θ_{cg1^j} y Θ_{cg2^j} son las rotaciones en sentido antihorario alrededor de los ejes x_3 , x_2 y x_1 , respectivamente. Sea $\mathbf{Y}_i^j = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, \theta_{i1}, \theta_{i2}\}_j^T$ el vector que define los desplazamientos y las rotaciones en un extremo del pilar i vinculado al forjado o encepado j . La compatibilidad entre \mathbf{X}^j y \mathbf{Y}_i^j puede ser expresada, de forma matricial, como:

$$\begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \\ \theta_{i1} \\ \theta_{i2} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (x_{cg2^j} - x_{i2}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (x_{i1} - x_{cg1^j}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (x_{i1} - x_{cg1^j}) & (x_{i2} - x_{cg2^j}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{cg1^j} \\ u_{cg2^j} \\ u_{cg3^j} \\ \alpha_{cg^j} \\ \Theta_{cg1^j} \\ \Theta_{cg2^j} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Acerca del acoplamiento entre pilares y encepado

Sin embargo, tal y como se vio en la sección 2.5, los grados de libertad correspondientes al centro de gravedad del encepado no están presentes de modo explícito en el sistema de ecuaciones final. En cambio, éstos están definidos en función de los correspondientes a dos de los pilotes del grupo. Por esta razón, las columnas de la matriz de rigidez elemental de la entreplanta, correspondientes a la vinculación de los pilares con el encepado, deberán ser escritas en función de dichos grados de libertad auxiliares.

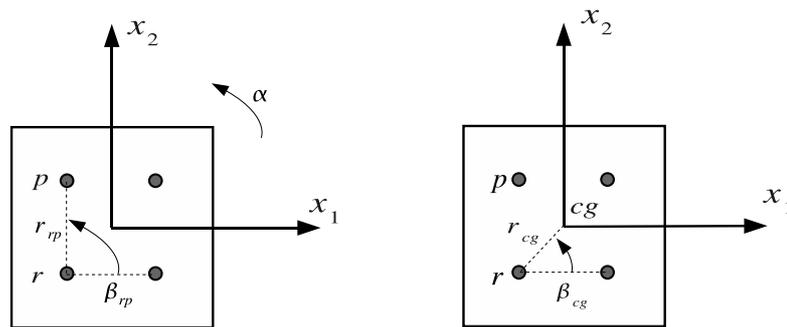


Figura 2.6: Grados de libertad para el acoplamiento entre pilares y encepado

Para ello, sean β_{rp} y r_{rp} el ángulo y la distancia entre las cabezas de los pilotes de referencia y periférico, y β_{cg} y r_{cg} el ángulo y la distancia entre el pilote de referencia y el centro de gravedad del encepado (véase fig. 2.6). En concordancia con el conjunto de seis grados de libertad elegido para definir los desplazamientos y rotaciones del encepado, se definen las matrices de acoplamiento entre la cabeza del pilote de referencia y el centro de gravedad del encepado, que para los casos a y b (véase la sección 2.5), son respectivamente:

$$\begin{bmatrix} u_{cg1} \\ u_{cg2} \\ u_{cg3} \\ \alpha_{cg} \\ \Theta_{cg1} \\ \Theta_{cg2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_{cg} \sin \beta_{cg}}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{cg} \sin \beta_{cg}}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} \\ \frac{r_{cg} \cos \beta_{cg}}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{cg} \cos \beta_{cg}}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp1} & -d_{rp2} & 0 \\ \frac{1}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ u_{r3} \\ \theta_{r1} \\ \theta_{r2} \\ u_{p1} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

y

$$\begin{bmatrix} u_{cg1} \\ u_{cg2} \\ u_{cg3} \\ \alpha_{cg} \\ \Theta_{cg1} \\ \Theta_{cg2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_{cg} \sin \beta_{cg}}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{cg} \sin \beta_{cg}}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} \\ 0 & 1 - \frac{r_{cg} \cos \beta_{cg}}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{cg} \cos \beta_{cg}}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp1} & -d_{rp2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ u_{r3} \\ \theta_{r1} \\ \theta_{r2} \\ u_{p2} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

donde $d_{rpi} = x_{pi} - x_{ri}$.

2.6.3 Matriz de rigidez de entreplanta

La submatriz elemental de rigidez de un pilar i , modelado como una viga de Euler-Bernoulli, de dimensión 10×10 , puede ser definida como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^{j-1} \\ \mathbf{f}_i^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{x1} & 0 & 0 & -b_{x1} & 0 & -a_{x1} & 0 & 0 & -b_{x1} & 0 \\ & a_{x2} & 0 & 0 & -b_{x2} & 0 & -a_{x2} & 0 & 0 & -b_{x2} \\ & & c & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\ & & & d_{x1} & 0 & b_{x1} & 0 & 0 & \frac{d_{x1}}{2} & 0 \\ & & & & d_{x2} & 0 & b_{x2} & 0 & 0 & \frac{d_{x1}}{2} \\ & & & & & a_{x1} & 0 & 0 & b_{x1} & 0 \\ & & & & & & a_{x2} & 0 & 0 & b_{x2} \\ & & & & & & & c & 0 & 0 \\ & & & & & & & & d_{x1} & 0 \\ & & & & & & & & & d_{x2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_i^{j-1} \\ \mathbf{Y}_i^j \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

sim

donde

$$a_{xi} = 12 \frac{EI_{xi}}{L^3} \quad ; \quad b_{xi} = 6 \frac{EI_{xi}}{L^2} \quad ; \quad c = \frac{EA}{L} \quad ; \quad d_{xi} = 4 \frac{EI}{L}$$

siendo $\mathbf{f}_i^j = \{f_{x1^i}, f_{x2^i}, f_{x3^i}, m_{x1^i}, m_{x2^i}\}^{jT}$ las reacciones en la conexión entre el pilar y el forjado.

Con el objetivo de construir una matriz elemental equivalente \mathcal{K}^i para la entreplanta que relacione directamente los grados de libertad de los forjados superior e inferior, la submatriz de rigidez correspondiente a cada extremo del pilote i es post-multiplicada por la ec. (2.34), obteniéndose las submatrices de rigidez expresadas en términos de los grados de libertad asociados a los centros de gravedad de forjados y encepados. Del mismo modo, se opera también con

las filas para definir las fuerzas resultantes respecto a los centros de gravedad de los forjados. Este proceso lleva a la obtención de la siguiente matriz de rigidez elemental del pilar i para la entreplanta situada entre los niveles $j - 1$ y j :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{j-1}^i \\ \mathcal{F}_j^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11}^i(6 \times 6) & \mathcal{K}_{12}^i(6 \times 6) \\ \mathcal{K}_{21}^i(6 \times 6) & \mathcal{K}_{22}^i(6 \times 6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{j-1} \\ \mathbf{X}^j \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

donde

$$\mathcal{K}_{11} = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI_{x1}}{L^3} & 0 & 0 & -12 \frac{EI_{x1}}{L^3} x_2^b & -6 \frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 \\ 0 & 12 \frac{EI_{x2}}{L^3} & 0 & 12 \frac{EI_{x2}}{L^3} x_1^b & 0 & -6 \frac{EI_{x2}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} x_1^b & \frac{EA}{L} x_2^b \\ -12 \frac{EI_{x1}}{L^3} x_2^b & 12 \frac{EI_{x2}}{L^3} x_1^b & 0 & 12 \frac{E}{L^3} IX^b & 6 \frac{EI_{x1}}{L^2} x_2^b & -6 \frac{EI_{x2}}{L^2} x_1^b \\ -6 \frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L} x_1^b & 6 \frac{EI_{x1}}{L^2} x_2^b & 4 \frac{EI_{x1}}{L} + \frac{EA}{L} x_1^b & \frac{EA}{L} x_2^b x_1^b \\ 0 & -6 \frac{EI_{x2}}{L^2} & \frac{EA}{L} x_2^b & -6 \frac{EI_{x2}}{L^2} x_1^b & \frac{EA}{L} x_2^b x_1^b & 4 \frac{EI_{x2}}{L} + \frac{EA}{L} x_2^b & \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{12} = \begin{bmatrix} -12 \frac{EI_{x1}}{L^3} & 0 & 0 & 12 \frac{EI_{x1}}{L^3} x_2^a & -6 \frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 \\ 0 & -12 \frac{EI_{x2}}{L^3} & 0 & -12 \frac{EI_{x2}}{L^3} x_1^a & 0 & -6 \frac{EI_{x2}}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} x_1^a & -\frac{EA}{L} x_2^a \\ 12 \frac{EI_{x1}}{L^3} x_2^b & -12 \frac{EI_{x2}}{L^3} x_1^b & 0 & -12 \frac{E}{L^3} IX^{ab} & 6 \frac{EI_{x1}}{L^2} x_2^b & -6 \frac{EI_{x2}}{L^2} x_1^b \\ 6 \frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 & -\frac{EA}{L} x_1^b & -6 \frac{EI_{x1}}{L^2} x_2^a & 2 \frac{EI_{x1}}{L} + \frac{EA}{L} x_1^a x_1^b & -\frac{EA}{L} x_2^a x_1^b \\ 0 & 6 \frac{EI_{x2}}{L^2} & -\frac{EA}{L} x_2^b & 6 \frac{EI_{x2}}{L^2} x_1^a & -\frac{EA}{L} x_1^a x_2^b & 2 \frac{EI_{x2}}{L} - \frac{EA}{L} x_2^a x_2^b \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{21} = \begin{bmatrix} -12 \frac{EI_{x1}}{L^3} & 0 & 0 & 12 \frac{EI_{x1}}{L^3} x_2^b & 6 \frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 \\ 0 & -12 \frac{EI_{x2}}{L^3} & 0 & -12 \frac{EI_{x2}}{L^3} x_1^b & 0 & 6 \frac{EI_{x2}}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} x_1^b & -\frac{EA}{L} x_2^b \\ 12 \frac{EI_{x1}}{L^3} x_2^a & -12 \frac{EI_{x2}}{L^3} x_1^a & 0 & -12 \frac{E}{L^3} IX^{ab} & -6 \frac{EI_{x1}}{L^2} x_2^a & 6 \frac{EI_{x2}}{L^2} x_1^a \\ -6 \frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 & -\frac{EA}{L} x_1^a & 6 \frac{EI_{x1}}{L^2} x_2^b & 2 \frac{EI_{x1}}{L} - \frac{EA}{L} x_1^a x_1^b & -\frac{EA}{L} x_2^b x_1^a \\ 0 & -6 \frac{EI_{x2}}{L^2} & -\frac{EA}{L} x_2^a & -6 \frac{EI_{x2}}{L^2} x_1^b & -\frac{EA}{L} x_1^b x_2^a & 2 \frac{EI_{x2}}{L} - \frac{EA}{L} x_2^b x_2^a \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{22} = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI_{x1}}{L^3} & 0 & 0 & -12 \frac{EI_{x1}}{L^3} x_2^a & 6 \frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 \\ 0 & 12 \frac{EI_{x2}}{L^3} & 0 & 12 \frac{EI_{x2}}{L^3} x_1^a & 0 & 6 \frac{EI_{x2}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} x_1^a & \frac{EA}{L} x_2^a \\ -12 \frac{EI_{x1}}{L^3} x_2^b & 12 \frac{EI_{x2}}{L^3} x_1^b & 0 & 12 \frac{E}{L^3} IX^a & -6 \frac{EI_{x1}}{L^2} x_2^a & 6 \frac{EI_{x2}}{L^2} x_1^a \\ 6 \frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L} x_1^a & -6 \frac{EI_{x1}}{L^2} x_2^b & 4 \frac{EI_{x1}}{L} + \frac{EA}{L} x_1^a & \frac{EA}{L} x_2^a x_1^a \\ 0 & 6 \frac{EI_{x2}}{L^2} & \frac{EA}{L} x_2^a & 6 \frac{EI_{x2}}{L^2} x_1^b & \frac{EA}{L} x_2^a x_1^a & 4 \frac{EI_{x2}}{L} + \frac{EA}{L} x_2^a \end{bmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} IX^a &= I_{x_1}x_2^{a2} + I_{x_2}x_1^{a2} \\ IX^{ab} &= I_{x_1}x_2^ax_2^b + I_{x_2}x_1^ax_1^b \\ IX^b &= I_{x_1}x_2^{b2} + I_{x_2}x_1^{b2} \end{aligned}$$

En estas expresiones, $x_k^a = x_{i_k} - x_{cg_k^a}$ y $x_k^b = x_{i_k} - x_{cg_k^b}$ son las coordenadas horizontales relativas del eje del pilar respecto al centro de gravedad del forjado superior o inferior, respectivamente, y $\mathcal{F}_j^T = \{F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}, M_\alpha, M_{x_1}, M_{x_2}\}^j$ corresponde a las reacciones que aparecen en la conexión entre el pilar y el forjado, expresadas también respecto al centro de gravedad correspondiente.

Habiendo definido una matriz de rigidez de la entreplanta con carácter genérico, puede seguirse el procedimiento de ensamblaje usual del método de los elementos finitos para obtener la ecuación de movimiento de la estructura una vez discretizada, quedando de la forma

$$(\mathcal{K} - \omega^2\mathcal{M})\mathcal{X} = \mathcal{F} \quad (2.39)$$

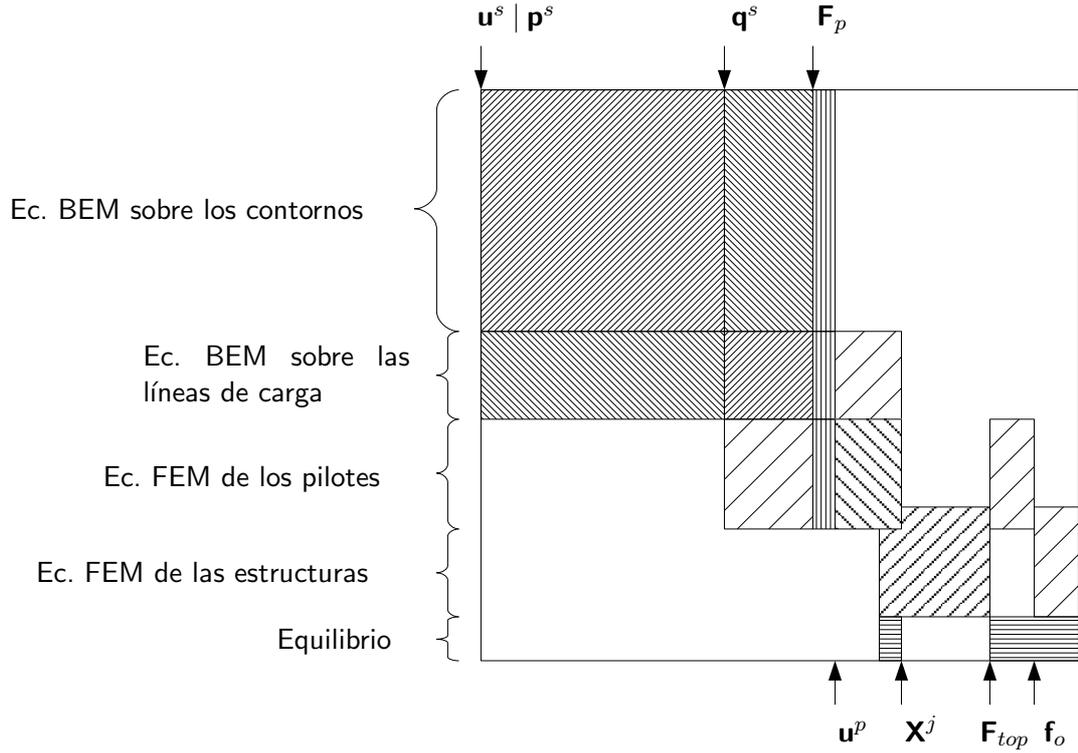
donde \mathcal{K} es la matriz de rigidez global de la estructura, \mathcal{X} es el vector de desplazamientos y rotaciones en los forjados, \mathcal{F} es el vector de fuerzas externas sobre la estructura y \mathcal{M} es la matriz de propiedades inerciales de la estructura, definida para cada forjado.

2.7 Ensamblaje de la matriz global del sistema

La manera en que las ecuaciones (2.23), (2.3), (2.4), (2.6) y (2.39) son reorganizadas en un único sistema de ecuaciones depende de la configuración de estructuras, cimentaciones y suelos, y de las condiciones de contorno. Sin embargo, siempre deben aplicarse las condiciones de equilibrio y de compatibilidad, considerando contacto soldado entre las diferentes interfases del sistema. En la situación más general, existen múltiples estructuras cimentadas sobre diferentes grupos de pilotes que están embebidos en el terreno, y el sistema está siendo sometido a fuerzas externas o a ondas sísmica. En tal caso, el sistema de ecuaciones es:

$$\mathcal{A} \{ \mathbf{u}^s, \mathbf{p}^s, \mathbf{q}^s, \mathbf{F}_p, \mathbf{u}^p, \mathbf{X}^j, \mathbf{F}_{top}, \mathbf{f}_o \}^T = \mathcal{B} \quad (2.40)$$

donde \mathcal{A} , cuya estructura está esquematizada en la fig. 2.7, es la matriz de coeficientes, y \mathcal{B} es el vector del lado derecho, ambos obtenidos después de aplicar las condiciones de contorno y de reordenar las ecuaciones. El vector de incógnitas incluye los desplazamientos \mathbf{u}^s y/o las tensiones \mathbf{p}^s en los nodos correspondientes a los elementos de contorno, las tensiones en la interfase pilote-suelo \mathbf{q}^s , las fuerzas en la punta de los pilotes \mathbf{F}_p , las traslaciones y rotaciones nodales a lo largo del pilote \mathbf{u}^p , los grados de libertad definidos en las superestructuras \mathbf{X}^j , las reacciones en las uniones pilote-encepado \mathbf{F}_{top} , y las fuerzas en la base de la estructura \mathbf{f}_o .


 Figura 2.7: Estructura de la matriz de coeficientes \mathcal{A} del sistema

2.8 Evaluación numérica de las integrales definidas sobre las líneas de carga

Siempre que la fuente esté situada fuera de la línea de carga j , las integrales de $\mathbf{u}^* \mathbf{q}^{sj}$ y $\hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{q}^{sj}$, definidas sobre la línea de carga Γ_{pj} , y que aparecen en las ecs. (2.2) y (2.5) respectivamente, son calculadas como integrales monodimensionales extendidas sobre una línea definida por el eje del pilote correspondiente. Por contra, estas mismas integrales poseen una singularidad cuando la fuente está situada sobre la línea que está siendo integrada. En este caso, y para evitar esta singularidad, las integrales se evalúan sobre un cilindro cuyo radio R_p tiene valor $\sqrt{A/\pi}$. Consideremos entonces que la interfase Γ_p entre el pilote (cualquiera que sea su sección) y el suelo es un cilindro de radio R_p , sobre el que existen unas tensiones σ_{ps} . En este caso, el último sumando de la ec. (2.1) incluye integrales del tipo

$$\int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \sigma_{ps} d\Gamma_p = \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \frac{\mathbf{q}^s}{2\pi R_p} d\Gamma_p = \frac{1}{2\pi R_p} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=k,l,m} \left[\int_{\Gamma_{pe}} \mathbf{u}^* \phi_i d\Gamma_p \right] \mathbf{q}_i^s \quad (2.41)$$

donde N_e es el número de elementos en que se ha discretizado la línea de carga, y donde la ec. (2.19) ha sido utilizada para expresar \mathbf{q}^s a lo largo del elemento. La solución fundamental elastodinámica utilizada en este trabajo, que da el desplazamiento en el punto \mathbf{x} y en la dirección k cuando la fuente es aplicada en el punto \mathbf{x}^l y en la dirección l , tiene la siguiente

expresión:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{4\pi\mu} [\psi\delta_{lk} - \chi r_{,k}r_{,l}]$$

$$\psi = -\left(\frac{c_s}{c_p}\right)^2 \left(\frac{1}{z_p^2 r^2} - \frac{1}{z_p r}\right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left(\frac{1}{z_s^2 r^2} - \frac{1}{z_s r} + 1\right) \frac{e^{z_s r}}{r} \quad (2.42)$$

$$\chi = -\left(\frac{c_s}{c_p}\right)^2 \left(\frac{3}{z_p^2 r^2} - \frac{3}{z_p r} + 1\right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left(\frac{3}{z_s^2 r^2} - \frac{3}{z_s r} + 1\right) \frac{e^{z_s r}}{r}$$

donde μ es el módulo de elasticidad transversal, δ_{lk} es la función delta de Kronecker, y $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^l|$. Para este caso específico (véase la fig. 2.8), las derivadas del vector posición $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^l$ son:

$$r_{,1} = \frac{x_1^r}{r} = \frac{R_p \cos(\gamma)}{r} \quad (2.43a)$$

$$r_{,2} = \frac{x_2^r}{r} = \frac{R_p \sin(\gamma)}{r} \quad (2.43b)$$

$$r_{,3} = \frac{x_3^r}{r} \quad (2.43c)$$

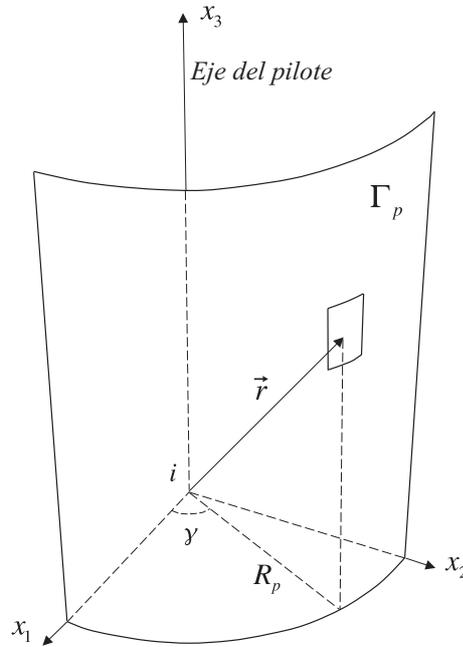


Figura 2.8: Superficie cilíndrica de integración sobre la interfase pilote-suelo cuando el punto de colocación pertenece al pilote

Entonces, las integrales del último término de la ec. (2.41) pueden ser evaluadas, en coordenadas cilíndricas (véase fig. 2.8), como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{pe}} \mathbf{u}^* \phi_i d\Gamma_p &= \int_{x_3^r} \int_{\theta} \frac{1}{4\pi\mu} [\psi\delta_{lk} - \chi r_{,k}r_{,l}] \phi_i R_p d\theta dx_3 \\ &= \frac{R_p}{4\pi\mu} \int_{x_3^r} \left[2\pi\psi\delta_{lk} - \chi \int_0^{2\pi} r_{,k}r_{,l} d\theta \right] \phi_i dx_3 \\ &= \frac{R_p}{4\mu} \int_{x_3^r} \left[2\psi\delta_{lk} - \frac{1}{r^2} \chi \mathbf{R}_{lk} \right] \phi_i dx_3 \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde $x_3^r = x_3 - x_3^k$ y

$$\mathbf{R}_{lk} = \begin{pmatrix} R_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & R_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_3^r)^2 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Ahora, la integral de la ec. (2.41) puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \boldsymbol{\sigma}_{ps} d\Gamma_p = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{L_e}{16\pi\mu} \sum_{i=k,l,m} \left[\int_{-1}^1 \left(2\psi\delta_{lk} - \frac{\chi}{r^2} \mathbf{R}_{lk} \right) \phi_i d\xi \right] \mathbf{q}_i^s \quad (2.46)$$

En cambio, para computar las integrales sobre Γ_{p_j} desde el mismo pilote, también podría adoptarse una estrategia de colocación no nodal. Esto llevará a un procedimiento que permite la reinterpretación de la ecuación anterior. En tal caso, deben elegirse al menos cuatro puntos no nodales, colocados simétricamente alrededor del pilote (tal y como se muestra en la fig. 2.9), para evitar romper la simetría del problema. Se obtiene así, por superposición de las cuatro ecuaciones procedentes de esta estrategia de colocación no nodal, una sola ecuación, que es dividida entre cuatro para mantener el orden de los coeficientes resultantes. En tal caso, e integrando sobre la línea de carga, el último término de la ec. (2.1) se convierte en

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \mathbf{q}^s d\Gamma_p &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=k,l,m} \frac{1}{4\pi\mu} \left[\int_{x_3^r} (\psi\delta_{lk} - \chi r_{,k} r_{,l}) \phi_i dx_3 \right] \mathbf{q}_i^s \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=k,l,m} \frac{1}{4\pi\mu} \left[\int_{x_3^r} \phi_i \left(\psi\delta_{lk} - \frac{\chi}{r^2} \mathbf{R}_{lk}^n \right) dx_3 \right] \mathbf{q}_i^s \end{aligned} \quad (2.47)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{lk}^n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_p^2 & (-1)^n R_p x_3^r \\ 0 & (-1)^n R_p x_3^r & (x_3^r)^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_{lk}^n &= \begin{pmatrix} R_p^2 & 0 & (-1)^n R_p x_3^r \\ 0 & 0 & 0 \\ (-1)^n R_p x_3^r & 0 & (x_3^r)^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Tal y como puede apreciarse, este procedimiento lleva a una ecuación completamente equivalente a la ec. (2.46), con lo que se demuestra que ambas aproximaciones son análogas.

Por otro lado, cuando el punto de colocación 'k' está situado fuera de la línea de carga j , puede afirmarse que:

$$\boldsymbol{\Upsilon}_k^j = \{u_{13}^* \ u_{23}^* \ u_{33}^*\}_k \quad (2.49)$$

Sin embargo, cuando el punto de colocación está situado en el nodo inferior de la línea de carga j , y éste coincide con el extremo inferior del pilote, $\boldsymbol{\Upsilon}_k^j F_{p_j}$ pasa a contener una singularidad. En tal caso, y para evitar tal singularidad, la fuerza axial en la punta del pilote puede modelarse como una presión uniforme σ_b aplicada sobre una superficie circular con radio $R_p = \sqrt{A/\pi}$. En

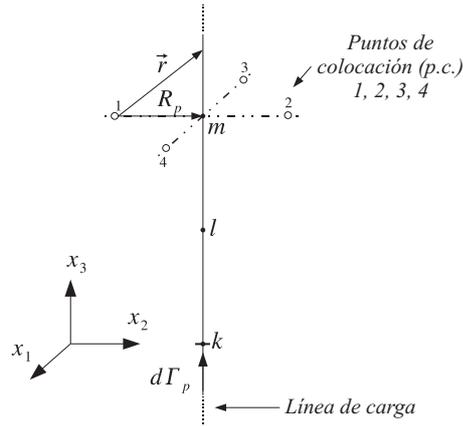


Figura 2.9: Estrategia de colocación no nodal

este trabajo, esta estrategia ha sido utilizada siempre que el punto de colocación está situado a lo largo de la línea de carga j . De este modo, puede escribirse

$$\Upsilon_k^j F_{pj} = \int_{\Gamma_b} u_{i3}^* \sigma_b d\Gamma_b \quad (2.50)$$

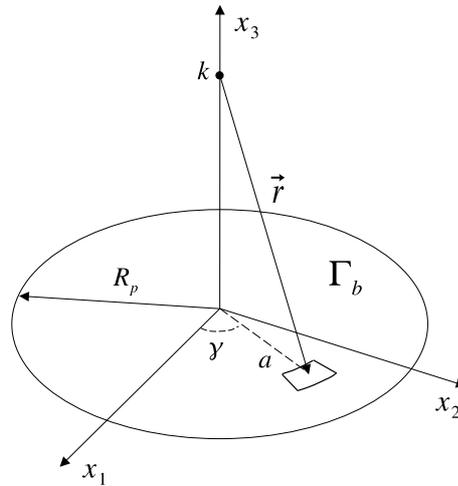


Figura 2.10: Integración sobre la superficie de la punta del pilote

donde Γ_b es la superficie de la punta del pilote y $\sigma_b = F_p/A$. Así, y utilizando coordenadas polares (véase la fig. 2.10), la ec. (2.50) pasa a ser expresada como

$$\begin{aligned} \Upsilon_k^j &= \frac{1}{4\pi\mu A} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_p} [\psi\delta_{i3} - \chi r_{,i} r_{,3}] a da d\theta = \\ &= \frac{1}{2\mu A} \int_0^{R_p} \delta_{i3} \left[\psi - (x_3^r)^2 \frac{\chi}{r^2} \right] a da \quad (2.51) \end{aligned}$$

donde la integral es regular y puede ser evaluada numéricamente.

Campo incidente producido por ondas SH y SV con un ángulo de incidencia genérico

3.1 Introducción

Una vez comentado el modelo acoplado de elementos de contorno-elementos finitos empleados en este trabajo, es necesario exponer las expresiones y las consideraciones que permitirán estudiar el comportamiento del medio al someterlo a la incidencia de ondas sísmicas de tipo SH y SV que se propagan con un ángulo de incidencia genérico.

Primero, en la sección 3.2, se establecen las consideraciones generales respecto a los fenómenos asociados a la propagación de ondas a través del terreno. Una vez planteados los datos de partida, se analizará en las secciones 3.3 y 3.4 las características propias de las ondas SH y SV respectivamente, haciendo especial hincapié en sus particularidades específicas. Finalmente, la sección 3.5 indica el modo en el que se incluye el campo incidente en la formulación general explicada en el capítulo anterior. La formulación completa, así como el método de incorporación de esta en el código y los resultados de validación del mismo pueden encontrarse en trabajos previos de los tutores [25].

3.2 Fundamentos

Considerando un semiespacio con propiedades mecánicas homogéneas, constantes con la profundidad y definidas por medio del módulo de elasticidad E y su coeficiente de Poisson ν . Se asume que por el medio se propaga un tren de ondas cuya dirección de propagación se encuentra contenida en un plano perpendicular a la superficie del semiespacio (plano x_2x_3 en la figura 3.1) formando un ángulo θ_0 con el eje x_2 , medido en sentido trigonométrico. Este tren de ondas puede suponerse formado por ondas volumétricas de tipo P o S, polarizadas estas últimas bien horizontal (ondas SH) o verticalmente (ondas SV).

La propagación del tren de ondas a través del medio produce en éste una perturbación en forma de campo de desplazamientos que es función del ángulo de incidencia θ_0 y de las propiedades mecánicas del terreno.

A continuación se definen mediante la figura 3.2 el conjunto de parámetros necesarios para una total definición de las expresiones explícitas del campo de desplazamientos que provoca el campo incidente.

Se observan los distintos ángulos: θ_0 el ángulo de la onda incidente y los ángulos θ_1 y θ_2 de las ondas reflejadas. Esto se debe a que, al llegar el frente de ondas a la superficie libre del semiespacio, se produce un proceso de reflexión que provoca la generación de dos ondas adicionales en el caso más genérico. La cantidad de onda reflejadas depende del tipo de onda

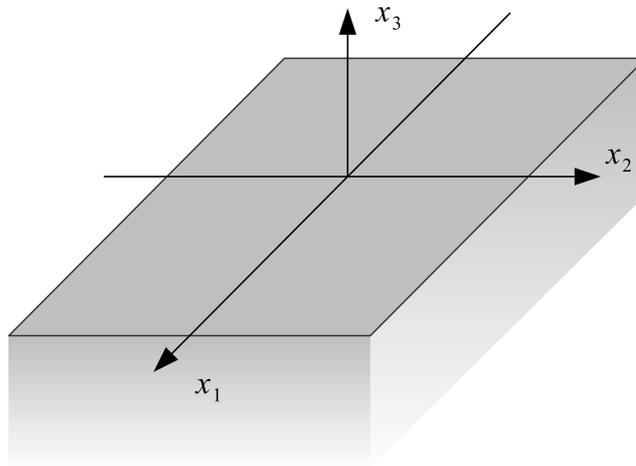


Figura 3.1: Representación de los ejes en el semiespacio

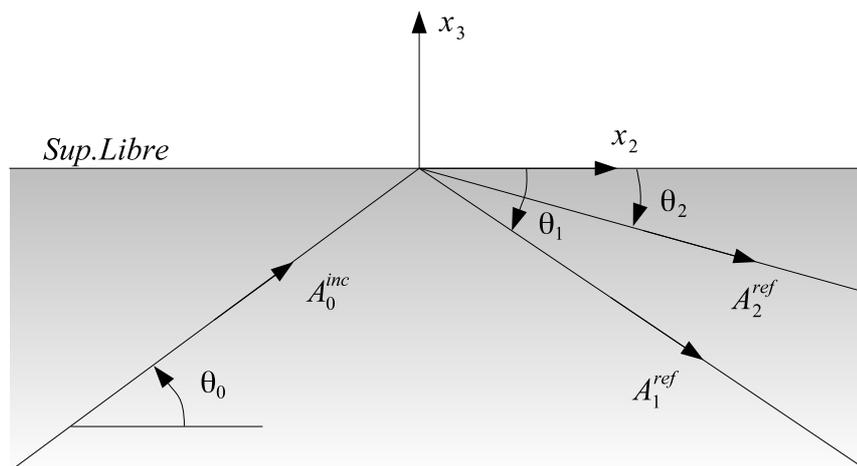


Figura 3.2: Parámetros para definir el problema de incidencia inclinada

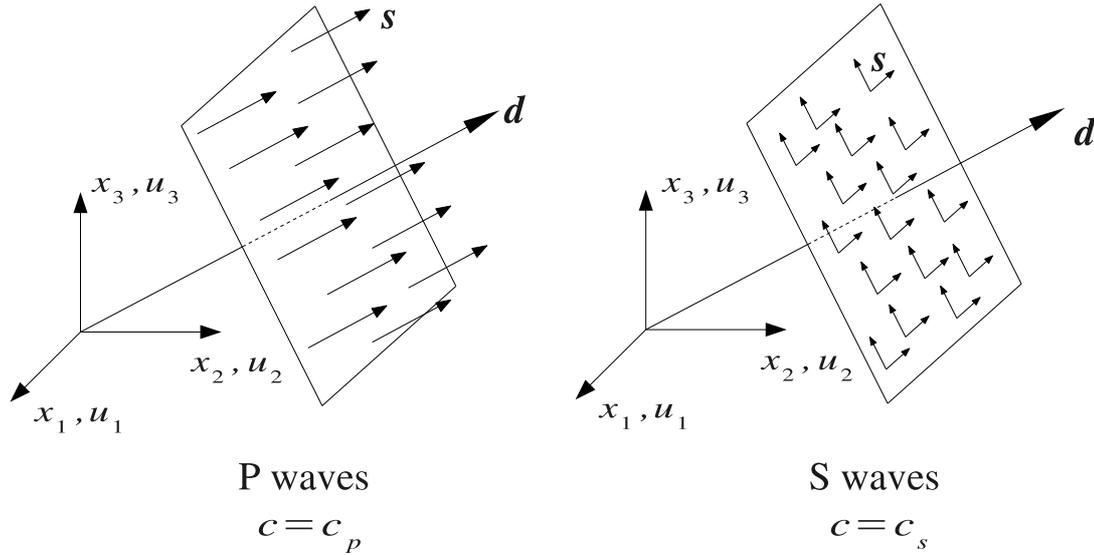


Figura 3.3: Definición de la dirección de propagación y desplazamientos de los tipos de onda

incidente, siendo una única onda cuando incide un tipo SH o dos si la onda incidente es SV (véase, por ejemplo, [1]).

Se puede definir, en función de estos ángulos, los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} que contienen a los cosenos directores de las direcciones de propagación y de los desplazamientos de las partículas que cada una de las ondas que intervienen en el problema provocan, siendo estas direcciones ortogonales en ondas S y coincidentes en ondas P, tal y como muestra la figura 3.3.

Con lo anterior, las expresiones del campo de desplazamientos se pueden representar en notación subindicada del modo siguiente:

$$u_i = \sum_{j=1}^n d_i^j A_j e^{-ik_j(\mathbf{s}^{(j)} \cdot \mathbf{r})} \quad (3.1)$$

donde u_i es la componente en la dirección i del desplazamiento, n es el número de ondas total del problema analizado, d_i^j es la componente en la dirección i del vector que contiene los cosenos directores de los desplazamientos que la onda j provoca en las partículas del medio, A_j y k_j son la amplitud de la onda j y su número de onda respectivamente; siendo el número de onda el cociente entre la frecuencia ω y la velocidad de propagación de la onda en el medio c_j , $k_j = \omega/c_j$; $\mathbf{s}^{(j)} \cdot \mathbf{r}$ representa el producto escalar del vector de la dirección de propagación de la onda j por el vector de posición del punto donde se pretenden determinar los desplazamientos ($\mathbf{s}^{(j)} \cdot \mathbf{r} = s_1^{(j)} x_1 + s_2^{(j)} x_2 + s_3^{(j)} x_3$, siendo x_1 , x_2 y x_3 las coordenadas de punto analizado). Por último, la i corresponde a la unidad imaginaria ($i = \sqrt{-1}$).

Obtenidas las expresiones del campo de desplazamientos en las tres direcciones del espacio para cualquier punto del medio, el tensor de pequeñas deformaciones puede obtenerse, para cada punto, mediante la aplicación directa de las ecuaciones de compatibilidad:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

donde las comas indican derivación con respecto a las coordenadas espaciales.

3 Campo incidente producido por ondas SH y SV con un ángulo de incidencia genérico

Una vez obtenido el tensor de deformaciones para cada caso, las componentes del tensor de tensiones se pueden determinar empleando la ecuación constitutiva que, considerando el suelo como un medio elástico, lineal, homogéneo e isótropo, se establece por la ley de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.3)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ sino), λ y μ son las constantes de Lamé y el módulo de cizalladura que se relacionan con el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν según:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.4)$$

Una vez obtenidos los tensores de tensión para los puntos del semiespacio, es posible establecer las condiciones de contorno que permitirán, una vez aplicadas, determinar las relaciones existentes entre la amplitud de la onda incidente y la reflejada (o reflejadas). Estas condiciones de contorno son las condiciones de superficie libre, esto es, que la tensión normal σ_{33} y las tensiones tangenciales σ_{31} y σ_{32} sean nulas en los puntos de coordenada $x_3 = 0$.

Estas consideraciones se han realizado sin tener en cuenta el tipo de onda incidente en concreto. En las siguientes secciones se particularizarán estas expresiones y se obtendrán las expresiones que relacionan los diferentes ángulos (de incidencia y reflejados) y las amplitudes de las distintas ondas que constituyen el problema. El desarrollo completo que permite obtener dichas expresiones se encuentra en [25].

3.3 Onda SH incidente

3.3.1 Campo incidente

En esta sección se estudiará el problema de una onda de tipo SH incidente en un semiespacio que se propaga con un ángulo de incidencia genérico. En este caso, se puede demostrar (ver [5]) que la llegada del frente de ondas a la superficie libre del semiespacio provoca un fenómeno de reflexión que genera una única onda del mismo tipo que la onda incidente. La figura 3.4 muestra este hecho, además de definir los ángulos y amplitudes de interés del problema.

Los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} , como ya se ha comentado, contienen, respectivamente, los cosenos directores de las direcciones de propagación y desplazamientos de cada una de las ondas que intervienen en el problema. Sus valores son los siguientes (*El superíndice 0 indica que pertenece a la onda incidente, mientras que el 1 es el de la onda reflejada*):

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{(0)} &= [0, s_2^{(0)}, s_3^{(0)}] = [0, \cos(\theta_0), \sin(\theta_0)] & \mathbf{d}^{(0)} &= [1, 0, 0] \\ \mathbf{s}^{(1)} &= [0, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}] = [0, \cos(\theta_1), -\sin(\theta_1)] & \mathbf{d}^{(1)} &= [1, 0, 0] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Así, las expresiones del campo de desplazamientos, en función de dichos vectores y según lo definido en 3.1, son las siguientes:

$$\begin{aligned} u_1 &= d_1^{(0)} A_{SH}^{inc} e^{-ik_s(s^{(0)} \cdot r)} + d_1^{(1)} A_{SH}^{ref} e^{-ik_s(s^{(1)} \cdot r)} \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

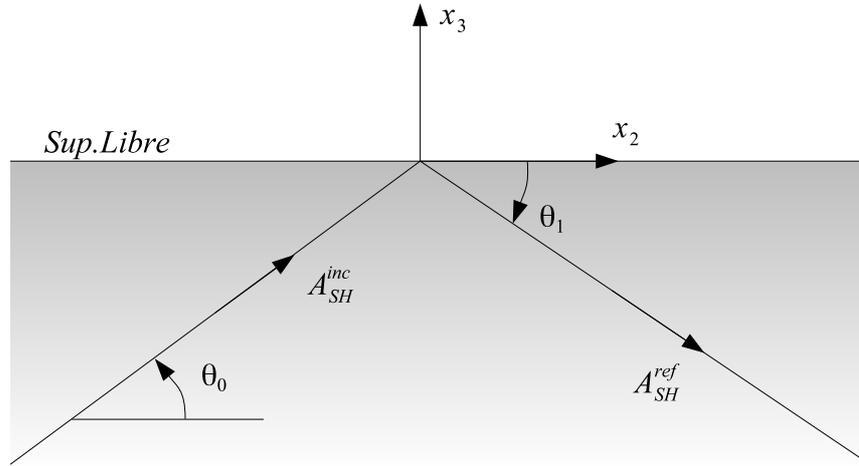


Figura 3.4: Ángulos y amplitudes para el caso de onda SH incidente

Se comprueba que una onda SH incidente con un ángulo θ_0 cualquiera provoca en el semiespacio por el que se propaga desplazamientos solo en la dirección del eje x_1 , siendo nulas el resto de las componentes del desplazamiento. Además el desplazamiento no nulo se obtiene de la suma de las contribuciones de los desplazamientos provocados por las ondas SH incidente y reflejada.

Por tratarse de un semiespacio y ser un problema en régimen estacionario, la condición de contorno debe ser independiente de la dirección x_2 , por ello se puede establecer la siguiente igualdad:

$$k_s s_2^{(0)} = k_s s_2^{(1)} \rightarrow \frac{\cos(\theta_0)}{c_s} = \frac{\cos(\theta_1)}{c_s} \rightarrow \theta_0 = \theta_1 \quad (3.7)$$

imponiendo así la condición de que el ángulo θ_0 de la onda incidente y θ_1 de la reflejada deben ser idénticos. Con esto, se pueden demostrar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} s_2^{(1)} &= s_2^{(0)} = \cos(\theta_0) \\ s_3^{(1)} &= -s_3^{(0)} = -\text{sen}(\theta_0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3.2 Tensores de deformación y tensión

Siguiendo lo establecido en el apartado 3.2, una vez conocidas las expresiones de los desplazamientos, es posible obtener los tensores de deformación y tensión.

La onda SH, sólo posee desplazamientos no nulos para la componente x_1 , es por ello que las derivadas parciales de las componentes distintas a esta se anularán, quedando el tensor de deformaciones con la siguiente forma:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

3 Campo incidente producido por ondas SH y SV con un ángulo de incidencia genérico

donde las componentes no nulas tienen las siguientes expresiones (aplicando lo establecido en 3.2):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left[-d_1^{(0)} s_2^{(0)} A_{SH}^{inc}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(0)}.r)} - d_1^{(1)} s_2^{(1)} A_{SH}^{ref}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(1)}.r)} \right] \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left[-d_1^{(0)} s_3^{(0)} A_{SH}^{inc}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(0)}.r)} - d_1^{(1)} s_3^{(1)} A_{SH}^{ref}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(1)}.r)} \right]\end{aligned}\quad (3.10)$$

Obtenido el tensor de deformaciones, es posible determinar las componentes del tensor de tensiones haciendo uso de la ley de comportamiento del medio, tal y como se expresa en la ecuación 3.3, quedando el tensor de tensiones de la siguiente forma:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (3.11)$$

donde las componentes no nulas tienen las expresiones:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} = \sigma_{21} &= \mu \left[-d_1^{(0)} s_2^{(0)} A_{SH}^{inc}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(0)}.r)} - d_1^{(1)} s_2^{(1)} A_{SH}^{ref}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(1)}.r)} \right] \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} &= \mu \left[-d_1^{(0)} s_3^{(0)} A_{SH}^{inc}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(0)}.r)} - d_1^{(1)} s_3^{(1)} A_{SH}^{ref}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(1)}.r)} \right]\end{aligned}\quad (3.12)$$

3.3.3 Aplicación de las condiciones de contorno

Finalmente, para hallar la relación entre las amplitudes de las ondas incidente y reflejada, se aplican las condiciones de contorno de campo libre establecidas en el apartado 3.2. Debido a los términos del tensor que ya son nulos, la única condición aplicable en este caso es la de $\sigma_{31} = 0$ para los puntos de $x_3 = 0$, que sustituyendo en la expresión anterior, lleva a:

$$\begin{aligned}-d_1^{(0)} s_3^{(0)} A_{SH}^{inc} - d_1^{(1)} s_3^{(1)} A_{SH}^{ref} = 0 &\rightarrow -\text{sen}(\theta_0) A_{SH}^{inc} + \text{sen}(\theta_0) A_{SH}^{ref} = 0 \\ A_{SH}^{inc} &= A_{SH}^{ref}\end{aligned}\quad (3.13)$$

Con esto, se demuestra que las amplitudes de la onda incidente y reflejada coinciden cuando la onda que se propaga en el semiespacio es una onda SH. Es necesario, no obstante, darle un valor a una de estas amplitudes, por ello, se impone una nueva condición adicional: un valor unitario a la amplitud de la onda incidente, quedando así:

$$A_{SH}^{inc} = A_{SH}^{ref} = 1\quad (3.14)$$

3.4 Onda SV incidente

3.4.1 Campo incidente

En el presente apartado se estudiarán las expresiones que gobiernan el campo de desplazamientos cuando la onda incidente es de tipo SV.

Este tipo de onda en el semiespacio genera al reflejarse otra onda SV y una onda P, tal y como se representa en la figura 3.5.

Los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} son (empleando nuevamente un superíndice 0 para la onda incidente SV, 1 para la reflejada del mismo tipo y 2 para la onda P reflejada):

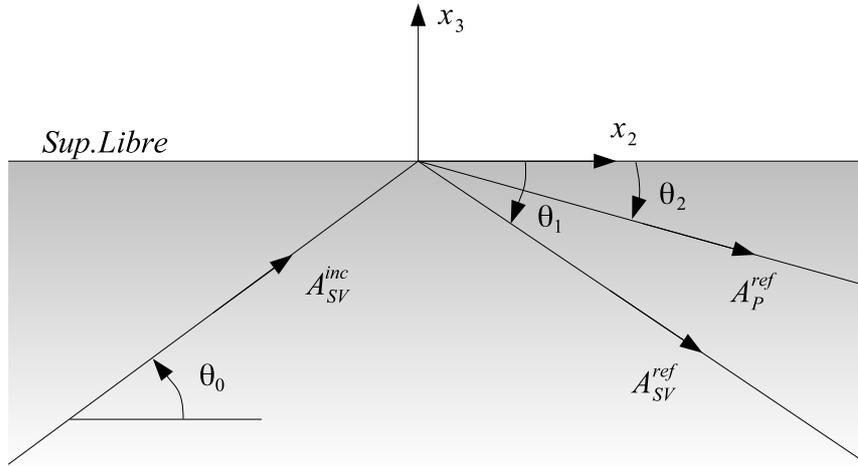


Figura 3.5: Ángulos y amplitudes para el caso de onda SV incidente

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}^{(0)} &= \begin{bmatrix} 0, s_2^{(0)}, s_3^{(0)} \end{bmatrix} = [0, \cos(\theta_0), \text{sen}(\theta_0)] \\
 \mathbf{s}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0, s_2^{(1)}, s_3^{(1)} \end{bmatrix} = [0, \cos(\theta_1), -\text{sen}(\theta_1)] \\
 \mathbf{s}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0, s_2^{(2)}, s_3^{(2)} \end{bmatrix} = [0, \cos(\theta_2), -\text{sen}(\theta_2)] \\
 \mathbf{d}^{(0)} &= \begin{bmatrix} 0, d_2^{(0)}, d_3^{(0)} \end{bmatrix} = [0, \text{sen}(\theta_0), -\cos(\theta_0)] \\
 \mathbf{d}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0, d_2^{(1)}, d_3^{(1)} \end{bmatrix} = [0, -\text{sen}(\theta_1), -\cos(\theta_1)] \\
 \mathbf{d}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 0, d_2^{(2)}, d_3^{(2)} \end{bmatrix} = [0, \cos(\theta_2), -\text{sen}(\theta_2)]
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Así, empleando la ecuación 3.1, la expresión de las componentes del campo de desplazamientos es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0 \\
 u_2 &= d_2^{(0)} A_{SV}^{inc} e^{-ik_s(s^{(0)} \cdot r)} + d_2^{(1)} A_{SV}^{ref} e^{-ik_s(s^{(1)} \cdot r)} + d_2^{(2)} A_P^{ref} e^{-ik_p(s^{(2)} \cdot r)} \\
 u_3 &= d_3^{(0)} A_{SV}^{inc} e^{-ik_s(s^{(0)} \cdot r)} + d_3^{(1)} A_{SV}^{ref} e^{-ik_s(s^{(1)} \cdot r)} + d_3^{(2)} A_P^{ref} e^{-ik_p(s^{(2)} \cdot r)}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

De la misma forma que para la onda anterior, se ha de asegurar la independencia del campo de desplazamientos con respecto al eje x_2 , de forma que:

$$k_s s_2^{(0)} = k_s s_2^{(1)} = k_p s_2^{(2)} \rightarrow \frac{\cos(\theta_0)}{c_s} = \frac{\cos(\theta_1)}{c_s} = \frac{\cos(\theta_2)}{c_p} \rightarrow \theta_0 = \theta_1 \tag{3.17}$$

demostrándose, también para este tipo de ondas, que los ángulos θ_0 de la onda SV incidente y θ_1 de la reflejada deben ser idénticos. Con esto, se comprueba que:

$$\begin{aligned}
 s_2^{(1)} = s_2^{(0)} = \cos(\theta_0) & \quad d_2^{(1)} = -d_2^{(0)} = -\text{sen}(\theta_0) \\
 s_3^{(1)} = -s_3^{(0)} = -\text{sen}(\theta_0) & \quad d_3^{(1)} = d_3^{(0)} = -\cos(\theta_0)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

3 Campo incidente producido por ondas SH y SV con un ángulo de incidencia genérico

De la igualdad de los términos primero y tercero de la ecuación 3.17, se obtiene la relación entre el ángulo de la onda incidente y el de la onda P reflejada:

$$\frac{\cos(\theta_0)}{c_s} = \frac{\cos(\theta_2)}{c_p} \rightarrow \cos(\theta_2) = \frac{c_p}{c_s} \cos(\theta_0) \quad (3.19)$$

Si se define la constante κ como el cociente entre la velocidad de propagación de la onda S entre la velocidad de propagación de la onda P en el medio, de forma que su valor solamente dependa del coeficiente de Poisson del medio y presente valores siempre inferior a la unidad:

$$\frac{c_s}{c_p} = \frac{k_p}{k_s} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} = \kappa < 1 \quad (3.20)$$

La relación existente entre el ángulo de incidencia de la onda SV y el de la onda P reflejada es proporcional a $1/\kappa > 1$. De esta forma se pueden expresar los vectores de propagación y desplazamiento de la onda P reflejada en función de los de la incidente, quedando sus expresiones:

$$\begin{aligned} s_2^{(2)} &= \frac{1}{\kappa} s_2^{(0)} & d_2^{(2)} &= s_2^{(2)} = \frac{1}{\kappa} s_2^{(0)} \\ s_3^{(2)} &= -\sqrt{1 - [s_2^{(2)}]^2} & d_3^{(2)} &= s_3^{(2)} = -\sqrt{1 - [s_2^{(2)}]^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.4.2 Ángulo crítico

Analizando la ecuación 3.21, se aprecia la particularidad que existe para este tipo de onda incidente. Tómese un ángulo de incidencia θ_0 de tal forma que el ángulo de la onda P reflejada se anule, en estas condiciones, $\cos(\theta_0) = \kappa$. A este ángulo se le denominará ángulo crítico (θ_{cr}). A continuación, supóngase que el ángulo de incidencia sea superior a este ángulo crítico θ_{cr} (ángulo supercrítico), siendo así el coseno de este ángulo de incidencia menor a κ y, por tanto, el coseno del ángulo reflejado igual a $\cos(\theta_2) = 1/\kappa \cos(\theta_0) < 1$.

Supóngase ahora que el ángulo de incidencia es inferior al ángulo crítico (ángulo subcrítico). Entonces, $\cos(\theta_0) > \kappa$, de modo que el coseno del ángulo reflejado será $\cos(\theta_2) = 1/\kappa \cos(\theta_0) > 1$. Se trata, pues, de una singularidad que implica que $\text{sen}(\theta_2) \in \mathbb{I}$. Debido a esto, se hace necesaria una modificación en la formulación que permita tener en cuenta esta situación. El cuadro 3.1 resume los ángulos críticos para algunos de los valores habituales del coeficiente de Poisson del terreno.

Para modificar la formulación planteada hasta el momento con el objetivo de tener en cuenta el fenómeno del ángulo crítico, se parte de las expresiones ya conocidas del campo de desplazamientos (3.16) y se analizan las componentes del mismo debidas a la contribución de la onda P reflejada:

ν	κ	θ_{cr}
0.1	0.667	48.16°
0.2	0.612	52.24°
0.3	0.535	57.69°
0.4	0.408	65.91°

Tabla 3.1: Ángulos críticos para una onda incidente SV en función del valor del coeficiente de Poisson del terreno

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^P &= \begin{bmatrix} d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix} A_P^{ref} e^{-ik_p[\cos(\theta_2)x_2 - \text{sen}(\theta_2)x_3]} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ -\text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} A_P^{ref} e^{-ik_p[\cos(\theta_2)x_2 - \text{sen}(\theta_2)x_3]} \end{aligned} \quad (3.22)$$

puesto que:

$$\cos(\theta_2) = \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0); \quad \text{sen}(\theta_2) = \pm i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \quad (3.23)$$

pese a no poder establecer, a priori, el signo de la unidad imaginaria, la expresión de los desplazamientos originados por la onda P se puede poner de la forma:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ \pm i(-1) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix} A_P^{ref} e^{-ik_p \left[x_2 \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) - (\pm i)x_3 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \right]} \quad (3.24)$$

de donde, analizando en la función exponencial el término correspondiente a x_3 , la estructura de la solución se mantiene si se toma $-i$. Se tiene, después de unos sencillos pasos:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix} A_P^{ref} e^{\xi x_3} e^{-ik_s \cos(\theta_0) x_2} \quad (3.25)$$

donde el valor de la constante real que acompaña a x_3 es:

$$\xi = k_p \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \quad (3.26)$$

En la expresión 3.25 puede observarse que la componente de cualquiera de los dos desplazamientos es igual al producto de un cierto valor por una amplitud por el producto de dos exponenciales, ambas decrecientes al aumentar la variable de la que dependen (algo evidente para el caso de x_2 y fácilmente demostrable para el caso de x_3 ya que sus valores son siempre negativos para todos los puntos del semiespacio). De este modo, la exponencial dependiente de x_3 es un término que modula la amplitud de la onda, decreciendo esta con la profundidad.

A partir de estas expresiones puede concluirse que se trata de una onda rasante que se propaga en dirección x_2 con una velocidad que no es ni la de las ondas P ni la de las ondas S, y que es función del ángulo de incidencia; con desplazamientos en x_2 y x_3 , ambos desfasados 90° y con una amplitud A_p^{ref} que decrece con la profundidad según ξ . Esta clase de ondas tiene grandes similitudes con las ondas de superficie.

A nivel de implementación, se considera que $\mathbf{s}^{(2)}$ y $\mathbf{d}^{(2)}$ son las siguientes expresiones complejas:

$$\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

3.4.3 Tensores de deformación y tensión

Al ser la onda incidente de tipo SV y no presentar ni desplazamientos en la dirección x_1 ni estar esta componente en las expresiones de los desplazamientos, el tensor de deformaciones

3 Campo incidente producido por ondas SH y SV con un ángulo de incidencia genérico

de cualquier punto del semiespacio presentará el siguiente aspecto:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

siendo los términos no nulos los siguientes (obtenidos a partir de la expresión 3.2):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} = & -d_2^{(0)} s_2^{(0)} A_{SV}^{inc}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(0)}.r)} - \\ & -d_2^{(1)} s_2^{(1)} A_{SV}^{ref}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(1)}.r)} - \\ & -d_2^{(2)} s_2^{(2)} A_P^{ref}(ik_p) e^{-ik_p(s^{(2)}.r)} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} = & -d_3^{(0)} s_3^{(0)} A_{SV}^{inc}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(0)}.r)} - \\ & -d_3^{(1)} s_3^{(1)} A_{SV}^{ref}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(1)}.r)} - \\ & -d_3^{(2)} s_3^{(2)} A_P^{ref}(ik_p) e^{-ik_p(s^{(2)}.r)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left[& -(d_2^{(0)} s_3^{(0)} + d_3^{(0)} s_2^{(0)}) A_{SV}^{inc}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(0)}.r)} - \right. \\ & -(d_2^{(1)} s_3^{(1)} + d_3^{(1)} s_2^{(1)}) A_{SV}^{ref}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(1)}.r)} - \\ & \left. -(d_2^{(2)} s_3^{(2)} + d_3^{(2)} s_2^{(2)}) A_P^{ref}(ik_p) e^{-ik_p(s^{(2)}.r)} \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Una vez conocido el tensor de deformaciones, es posible calcular el tensor de tensiones aplicando 3.3, de forma que este queda:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

cuyas componentes distintas de cero presentan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & -\lambda(d_2^{(0)} s_2^{(0)} + d_3^{(0)} s_3^{(0)}) A_{SV}^{inc}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(0)}.r)} - \\ & -\lambda(d_2^{(1)} s_2^{(1)} + d_3^{(1)} s_3^{(1)}) A_{SV}^{ref}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(1)}.r)} - \\ & -\lambda(d_2^{(2)} s_2^{(2)} + d_3^{(2)} s_3^{(2)}) A_P^{ref}(ik_p) e^{-ik_p(s^{(2)}.r)} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & - \left[(\lambda + 2\mu) d_2^{(0)} s_2^{(0)} + \lambda d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right] A_{SV}^{inc}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(0)}.r)} - \\ & - \left[(\lambda + 2\mu) d_2^{(1)} s_2^{(1)} + \lambda d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right] A_{SV}^{ref}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(1)}.r)} - \\ & - \left[(\lambda + 2\mu) d_2^{(2)} s_2^{(2)} + \lambda d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right] A_P^{ref}(ik_p) e^{-ik_p(s^{(2)}.r)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & - \left[\lambda d_2^{(0)} s_2^{(0)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right] A_{SV}^{inc}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(0)}.r)} - \\ & - \left[\lambda d_2^{(1)} s_2^{(1)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right] A_{SV}^{ref}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(1)}.r)} - \\ & - \left[\lambda d_2^{(2)} s_2^{(2)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right] A_P^{ref}(ik_p) e^{-ik_p(s^{(2)}.r)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{23} = \sigma_{32} = & -\mu(d_2^{(0)} s_3^{(0)} + d_3^{(0)} s_2^{(0)}) A_{SV}^{inc}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(0)}.r)} - \\ & -\mu(d_2^{(1)} s_3^{(1)} + d_3^{(1)} s_2^{(1)}) A_{SV}^{ref}(ik_s) e^{-ik_s(s^{(1)}.r)} - \\ & -\mu(d_2^{(2)} s_3^{(2)} + d_3^{(2)} s_2^{(2)}) A_P^{ref}(ik_p) e^{-ik_p(s^{(2)}.r)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

3.4.4 Aplicación de las condiciones de contorno

Al igual que en la sección anterior, para obtener la relación entre las amplitudes de las ondas del problema, se aplicarán las condiciones de contorno de superficie libre. Para este tipo de onda, los términos del tensor de tensiones que hay que anular para $x_3 = 0$ son: σ_{33} y σ_{32} .

Retomando de las ecuaciones 3.18 y 3.27 las expresiones de las componentes de los vectores \mathbf{s} y \mathbf{d} para cada una de las ondas en función del ángulo de incidencia, tenemos que dichas componentes son, para la componente x_2 :

$$\begin{aligned} s_2^{(0)} &= \cos(\theta_0) & d_2^{(0)} &= \sin(\theta_0) \\ s_2^{(1)} &= \cos(\theta_0) & d_2^{(1)} &= -\sin(\theta_0) \\ s_2^{(2)} &= \frac{1}{\kappa}\cos(\theta_0) & d_2^{(2)} &= \frac{1}{\kappa}\cos(\theta_0) \end{aligned} \quad (3.37)$$

y para la componente x_3 :

$$\begin{aligned} s_3^{(0)} &= \sin(\theta_0) & d_3^{(0)} &= -\cos(\theta_0) \\ s_3^{(1)} &= -\sin(\theta_0) & d_3^{(1)} &= -\cos(\theta_0) \\ s_3^{(2)} &= -\sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2}\cos^2(\theta_0)} & d_3^{(2)} &= -\sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2}\cos^2(\theta_0)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Aplicando la condición de contorno de $\sigma_{32} = 0$ en $x_3 = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= -\mu [\sin^2(\theta_0) - \cos^2(\theta_0)] (ik_s) A_{SV}^{inc} - \\ &\quad - \mu [\sin^2(\theta_0) - \cos^2(\theta_0)] (ik_s) A_{SV}^{ref} - \\ &\quad - \mu [-2\sin(\theta_2)\cos(\theta_2)] (ik_p) A_P^{ref} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Empleando las propiedades de los ángulos dobles y dividiendo la expresión entre $i\nu k_s$, queda:

$$\cos(2\theta_0) A_{SV}^{ref} + \sin(2\theta_2) \kappa A_P^{ref} = -\cos(2\theta_0) A_{SV}^{inc} \quad (3.40)$$

De la aplicación de la condición de contorno restante ($\sigma_{33} = 0$ en $x_3 = 0$), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 0 &= -[\lambda \sin(\theta_0)\cos(\theta_0) - (\lambda + 2\mu)\cos(\theta_0)\sin(\theta_0)] A_{SV}^{inc}(ik_s)e^{-ik_s[\cos(\theta_0)x_2]} - \\ &\quad - [-\lambda \sin(\theta_0)\cos(\theta_0) + (\lambda + 2\mu)\cos(\theta_0)\sin(\theta_0)] A_{SV}^{ref}(ik_s)e^{-ik_s[\cos(\theta_0)x_2]} - \\ &\quad - [\lambda \frac{1}{\kappa^2}\cos^2(\theta_0) + (\lambda + 2\mu)(1 - \frac{1}{\kappa^2}\cos^2(\theta_0))] A_P^{ref}(ik_p)e^{-ik_p[\frac{1}{\kappa}\cos(\theta_0)x_2]} \end{aligned} \quad (3.41)$$

operando, aplicando las propiedades del ángulo doble, dividiendo entre ik_s y empleando la relación entre θ_0 y θ_2 , que da siguiente expresión:

$$\sin(2\theta_0) A_{SV}^{ref} + \frac{1}{\kappa} [1 - 2\kappa^2\cos^2(\theta_2)] A_P^{ref} = \sin(2\theta_0) A_{SV}^{inc} \quad (3.42)$$

Así, tenemos un sistema de ecuaciones formado por las expresiones 3.40 y 3.42 con dos ecuaciones y tres incógnitas. Dándole un valor unitario a la amplitud de la onda SV incidente ($A_{SV}^{inc} = 1$), se tiene el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} \cos(2\theta_0) A_{SV}^{ref} + \sin(2\theta_2) \kappa A_P^{ref} &= -\cos(2\theta_0) \\ \sin(2\theta_0) A_{SV}^{ref} + \frac{1}{\kappa} [1 - 2\kappa^2\cos^2(\theta_2)] A_P^{ref} &= \sin(2\theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Resolviendo este sistema, se obtienen las expresiones de las amplitudes de las ondas reflejadas cuando la amplitud de la onda incidente vale la unidad. La expresión para la amplitud de la SV reflejada queda:

$$A_{SV}^{ref} = \frac{\kappa^2 \sin(2\theta_0)\sin(2\theta_2) - \cos^2(\theta_0)}{\kappa^2 \sin(2\theta_0)\sin(2\theta_2) + \cos^2(\theta_0)} \quad (3.44)$$

3 Campo incidente producido por ondas SH y SV con un ángulo de incidencia genérico

Mientras que para la onda P reflejada, la expresión de su amplitud es:

$$A_P^{ref} = \frac{\kappa \text{sen}(4\theta_0)}{\kappa^2 \text{sen}(2\theta_0) \text{sen}(2\theta_2) + \cos^2(\theta_0)} \quad (3.45)$$

Estas expresiones obtenidas son válidas para cualquier valor del ángulo de incidencia θ_0 . Resulta de interés estudiar determinadas situaciones para ver el comportamiento de estas amplitudes según el valor del ángulo incidente.

Cuando estamos en el ángulo crítico ($\theta_0 = \theta_{cr}$), se tiene:

$$\cos(\theta_2) = \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \rightarrow \cos(\theta_2) = 1 \rightarrow \text{sen}(\theta_2) = 0 \quad (3.46)$$

Sustituyendo estos valores en la expresión 3.44y 3.45, los valores de las amplitudes para las ondas reflejadas quedan:

$$A_{SV}^{ref} = -\frac{\cos^2(2\theta_0)}{\cos^2(2\theta_0)} = -1 \quad (3.47)$$

$$A_P^{ref} = -\frac{\kappa \text{sen}(4\theta_0)}{\cos^2(2\theta_0)} = -\frac{4\kappa^2 \sqrt{1 - \kappa^2} (2\kappa^2 - 1)}{(2\kappa^2 - 1)^2} = -\frac{4\kappa^2 \sqrt{1 - \kappa^2}}{2\kappa^2 - 1} \quad (3.48)$$

Así, para una incidencia con un ángulo igual al crítico, la amplitud de la onda SV reflejada toma un valor igual a -1 y la amplitud de la onda P depende del coeficiente de Poisson del medio.

Por otro lado, es posible expresar la amplitud de la onda P reflejada de la siguiente forma:

$$A_P^{ref} = \frac{R}{a - bi} = \frac{R(a + bi)}{a^2 + b^2} = M e^{i\alpha} \quad (3.49)$$

donde M y $\tan(\alpha)$ valen:

$$M = \frac{R}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \tan(\alpha) = \frac{b}{a} \quad (3.50)$$

por lo que A_P^{ref} puede escribirse como:

$$A_P^{ref} = \frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{i\alpha} \quad (3.51)$$

Sustituyendo el valor de la amplitud en las componentes del desplazamiento debidas a la contribución de la onda P reflejada (ec. 3.25), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^P = \begin{bmatrix} d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix} \frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{i\alpha} e^{\xi x_3} e^{-ik_r x_2} = \begin{bmatrix} d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix} S e^{\xi x_3} e^{-ik_r x_2 + i\alpha} \quad (3.52)$$

donde S y α son expresiones análogas a las obtenidas por Achenbach en [1], las cuales son:

$$S = \frac{\kappa \text{sen}(4\theta_0)}{\sqrt{4[\cos^2(\theta_0) - \kappa^2] \text{sen}^2(2\theta_0) \cos^2(\theta_0) + \cos^4(2\theta_0)}} \quad (3.53)$$

$$\alpha = \frac{2 \text{sen}(2\theta_0) \cos(\theta_0) \sqrt{\cos^2(\theta_0) - \kappa^2}}{\cos^2(2\theta_0)}$$

También es de interés el supuesto en el que la onda incide con un ángulo inferior al crítico. Cuando esto es así, y como ya se ha visto, el valor del seno del ángulo θ_2 toma valores imaginarios, de forma:

$$\cos(\theta_0) > \kappa \rightarrow \cos(\theta_2) = \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) > 1 \rightarrow \text{sen}(\theta_2) = \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0)} \in \mathbb{I} \quad (3.54)$$

pudiendo expresarse:

$$\text{sen}(\theta_2) = -i\sqrt{\frac{1}{\kappa^2}\cos^2(\theta_0) - 1} \quad (3.55)$$

y sustituyendo este valor en las expresiones 3.44 y 3.45 de las amplitudes de las ondas reflejadas, se obtiene:

$$A_{SV}^{ref} = \frac{-\cos^2(2\theta_0) - 2i\kappa^2\text{sen}(2\theta_0)\frac{1}{\kappa}\cos(\theta_0)\sqrt{\frac{1}{\kappa^2}\cos^2(\theta_0) - 1}}{\cos^2(2\theta_0) - 2i\kappa^2\text{sen}(2\theta_0)\frac{1}{\kappa}\cos(\theta_0)\sqrt{\frac{1}{\kappa^2}\cos^2(\theta_0) - 1}} \quad (3.56)$$

sustituyendo en esta expresión $a = \cos^2(2\theta_0)$ y $b = -2\kappa\text{sen}(2\theta_0)\cos(\theta_0)\sqrt{\frac{1}{\kappa^2}\cos^2(\theta_0) - 1}$, nos queda la misma:

$$A_{SV}^{ref} = -\frac{a+bi}{a-bi} = -\frac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)} = -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}i \quad (3.57)$$

siendo el módulo de esta expresión:

$$|A_{SV}^{ref}| = \frac{(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{(a^2+b^2)^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} = 1 \quad (3.58)$$

Así, para un ángulo de incidencia inferior al ángulo crítico se cumple que $|A_{SV}^{ref}| = 1$.

La amplitud de la onda P tiene la siguiente expresión compleja:

$$A_P^{ref} = -\frac{\kappa\text{sen}(4\theta_0)}{\cos^2(2\theta_0) - 2i\text{sen}(2\theta_0)\cos(\theta_0)\sqrt{\cos^2(\theta_0) - \kappa^2}} \quad (3.59)$$

3.4.5 Cambios de modo

Analizando las expresiones de las amplitudes de las dos ondas reflejadas, se comprueba que existe un cierto ángulo de incidencia que produce que la amplitud de la onda SV reflejada se anule, produciéndose el fenómeno denominado cambio de modo. Así, una onda incidente de tipo SV se refleja en forma de una única onda de tipo P (de ahí el nombre de cambio de modo). Para obtener el valor del ángulo de cambio de modo se recurre al numerador de la expresión de la amplitud de la onda SV reflejada (ec. 3.44) y se iguala a cero:

$$\kappa^2\text{sen}(2\theta_0)\text{sen}(2\theta_2) - \cos^2(2\theta_0) = 0 \quad (3.60)$$

poniendo esta expresión en función únicamente del ángulo de incidencia, se tiene:

$$4\kappa\cos^2(\theta_0)\sqrt{1 - \cos^2(\theta_0)}\sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2}\cos^2(\theta_0)} - 4\cos^4(\theta_0) + 4\cos^2(\theta_0) - 1 = 0 \quad (3.61)$$

Este valor del ángulo de incidencia para el cual se produce el cambio de modo es función únicamente del coeficiente de Poisson del terreno (que se encuentra en el interior de κ). Atendiendo al comportamiento de la amplitud de la onda SV reflejada conforme varía el ángulo θ_0 de incidencia, se observa que, para ángulos subcríticos, la amplitud es, en el caso general, un valor complejo, ya que el radicando $1 - 1/\kappa^2\cos^2(\theta_0)$ toma valores negativos cuando el ángulo está por debajo del crítico.

Esto es, existe una componente imaginaria no nula en las amplitudes de las ondas SV reflejadas cuando el ángulo de incidencia es subcrítico, componente que se anula, en todos los casos, al sobrepasar el ángulo crítico, a partir del cual la amplitud de la onda solo toma valores reales.

3 Campo incidente producido por ondas SH y SV con un ángulo de incidencia genérico

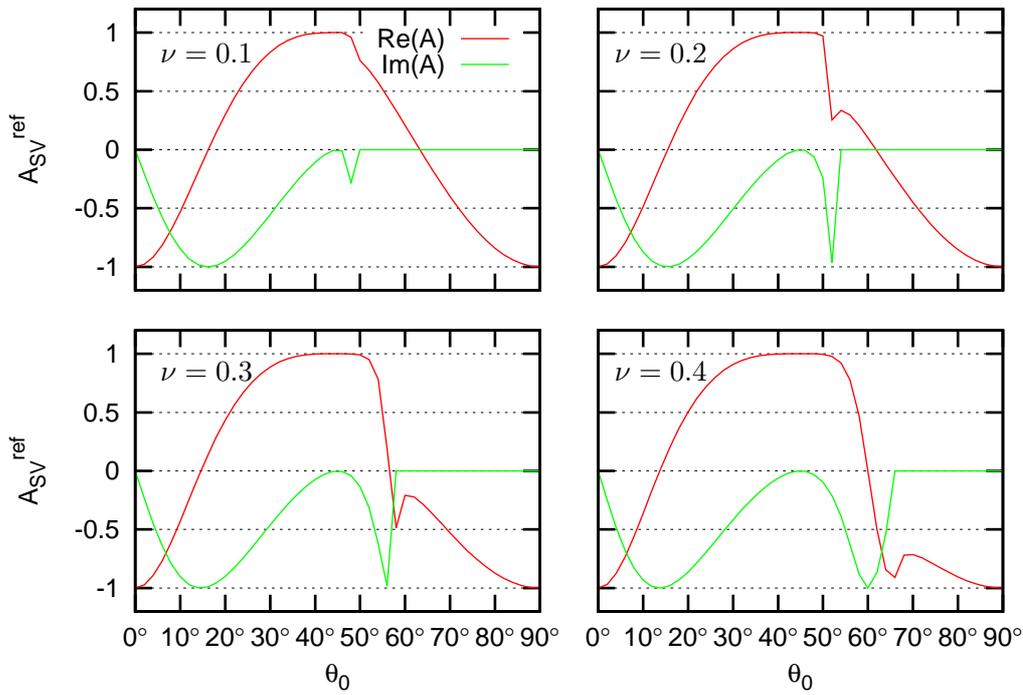


Figura 3.6: Parte real e imaginaria de la amplitud de la onda SV reflejada en función del ángulo de incidencia

ν	κ	θ_{cmodo}
0.1	0.667	16.229° y 63.206°
0.2	0.612	15.444° y 61.752°
0.3	0.535	14.608° y 56.353°
0.4	0.408	13.702° y 59.996°

Tabla 3.2: Ángulos de cambio de modo para una onda incidente SV en función del valor del coeficiente de Poisson del terreno

Por otra parte, el cambio de modo se traduce en un cambio de signo en la parte real de la amplitud de la onda incidente, permaneciendo la parte imaginaria siempre con signo negativo o nula.

La figura 3.6 permite visualizar la situación descrita anteriormente, mostrando la variación de las partes real e imaginaria de la amplitud de la onda SV con el ángulo de incidencia para diferentes valores del coeficiente de Poisson del terreno.

En el cuadro 3.2 se muestra, para más información, los valores del ángulo de cambio de modo para valores típicos del coeficiente de Poisson del terreno, se comprueba que estos valores coinciden con los determinados en la figura 3.6, existiendo dos valores del ángulo de cambio de modo para cada coeficiente de Poisson. Añadir finalmente que, para un valor del coeficiente de Poisson de 0.5, existe una singularidad en la formulación que impide obtener la amplitud de la onda SV reflejada.

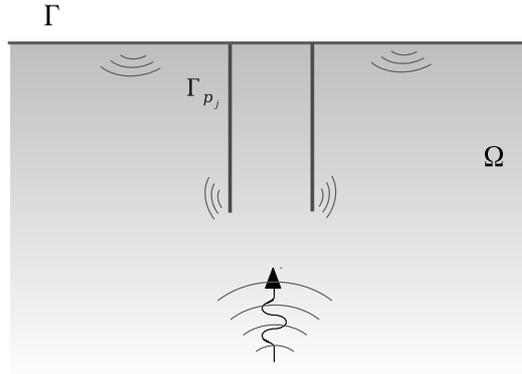


Figura 3.7: Fenómenos de reflexión de ondas para pilotes embebidos en el terreno

3.5 Implementación del campo incidente en la formulación

Establecidas las ecuaciones de gobierno del problema en estudio, se verá a continuación su implementación en el código acoplado de elementos de contorno-elementos finitos. Para ello, es necesario expresar las ecuaciones del capítulo anterior en términos de las variables comentadas a lo largo de este capítulo.

Así, cuando inciden ondas sísmicas en el lugar bajo estudio, tienen lugar fenómenos de reflexión y refracción de ondas, de forma que el campo de ondas que surge modifica el tren de ondas incidente. El campo de ondas original se asume que proviene de una fuente lejana y se denominará campo incidente \mathbf{u}_I , mientras que el que se produce por los fenómenos de reflexión y refracción se conoce como campo reflejado \mathbf{u}_R . De esta forma, los campos de desplazamientos y tensiones resultantes (campos totales) se pueden obtener por superposición siendo estos $\mathbf{u} = \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_R$ y $\mathbf{p} = \mathbf{p}_I + \mathbf{p}_R$ respectivamente.

Considerando una cimentación pilotada embebida en un semiespacio homogéneo y sometida a un tren de ondas armónicas incidentes, tal y como se muestra en la figura 3.7. Así, se asume que el dominio semiinfinito Ω está definido por el contorno Γ . Debe destacarse que la magnitud del campo reflejado disminuye con la distancia debido al amortiguamiento del material y de radiación del terreno y, en consecuencia, no es preciso discretizar el contorno más alejado de la cimentación.

Así, retomando la ecuación 2.3 para el semiespacio Ω en términos del campo total:

$$\mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{sp_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \mathbf{r}^{s_j} F_{p_j} = 0 \quad (3.62)$$

Como tanto el campo incidente, el reflejado y el total satisfacen las ecuaciones de gobierno, la ecuación 2.3 puede escribirse también en términos del campo incidente, quedando de la forma:

$$\mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}_I^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}_I^s = 0 \quad (3.63)$$

donde no existen las tensiones sobre la interfase pilote-suelo (q^{s_j}) ni las fuerzas en las puntas de los pilotes (F_{p_j}) ya que estas forman parte únicamente del campo reflejado. La sustracción de la ecuación 3.63 en 3.62 resulta en:

$$\mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{spj} \mathbf{q}^{sj} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{sj} F_{pj} = \mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}_I^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}_I^s \quad (3.64)$$

donde la parte derecha es conocida ya que las expresiones analíticas de \mathbf{u}_I^s y \mathbf{p}_I^s son las obtenidas a lo largo del presente capítulo en función del tipo de onda incidente. Este mismo procedimiento se puede seguir para obtener las ecuaciones del método de los elementos de contorno 2.4 y 2.6 para las líneas de carga. La ecuación de elementos finitos 2.23, sin embargo, no precisan ser reescritas al contener variables solamente en el campo reflejado.

De esta forma, los campos de desplazamientos y tensiones del campo incidente que se han obtenido en el presenta capítulo pasan a convertirse en un dato más del problema, formando parte del vector del lado derecho del sistema global de ecuaciones del problema (\mathcal{B} de la ecuación 2.40 del capítulo anterior).

3.6 Implementación del modelo en el código. Tratamiento de la simetría

El modelo existente permite abordar la resolución de problemas mediante la discretización de tan solo un cuarto de la geometría real, con el consiguiente ahorro en grados de libertad y, por tanto, de tiempo de computación que ello implica. No obstante, si bien para el problema de incidencia vertical esta consideración no supone ningún problema, más que definir correctamente el tipo de simetría de ambos planos; el problema de propagación de ondas inclinadas no puede resolverse mediante el análisis de un único caso. Así, al ser la geometría simétrica pero no serlo la sollicitación, es necesario realizar un tratamiento especial del problema, de modo que la solución del mismo se obtenga como la superposición de cuatro casos: uno doblemente simétrico respecto a los planos x_1x_3 y x_2x_3 , otro simétrico respecto a x_1x_3 pero antisimétrico respecto a x_2x_3 , otro antisimétrico respecto a x_1x_3 pero simétrico respecto a x_2x_3 y, por último, el caso doblemente antisimétrico.

La formulación obtenida debe adaptarse a estas consideraciones, de modo que las expresiones varíen en función del caso de simetría bajo análisis. Para ello, es necesario adaptar las expresiones del campo incidente de forma que se tenga en cuenta esta necesidad. Atendiendo a la expresión genérica del campo de desplazamientos (ec. 3.1):

$$u_i = \sum_{j=1}^n d_i^j A^j e^{-ik_j(s^{(j)} \cdot r)} \quad (3.65)$$

Los términos que se ven afectados por la simetría son aquellos que hacen referencia a las coordenadas espaciales, en este caso, los términos exponenciales. Para cada una de las j ondas del problema se tiene, de forma general:

$$e^{-ik_j(s^{(j)} \cdot r)} = e^{-ik_j(s_1^{(j)} x_1)} e^{-ik_j(s_2^{(j)} x_2)} e^{-ik_j(s_3^{(j)} x_3)} \quad (3.66)$$

Los términos afectados por la simetría son los correspondientes a x_1 y x_2 . Estos términos se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} e^{-ik_j(s_1^{(j)} x_1)} &= \frac{1}{2} \left[e^{-ik_j(s_1^{(j)} x_1)} + e^{ik_j(s_1^{(j)} x_1)} \right] + \frac{1}{2} \left[e^{-ik_j(s_1^{(j)} x_1)} - e^{ik_j(s_1^{(j)} x_1)} \right] = \\ &= \cos(k_j s_1^{(j)} x_1) + i \operatorname{sen}(k_j s_1^{(j)} x_1) \end{aligned} \quad (3.67)$$

para la componente dependiente de x_1 , y de forma análoga, para la dependiente de x_2 :

$$e^{-ik_j(s_2^{(j)} x_2)} = \cos(k_j s_2^{(j)} x_2) + i \operatorname{sen}(k_j s_2^{(j)} x_2) \quad (3.68)$$

La componente que depende de x_3 , en cambio, no se ve afectada por la simetría.

Para simplificar la nomenclatura, las expresiones anteriores se escribirán de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} e^{-ik_j(s_1^{(j)} x_1)} &= \operatorname{exc}(j) + \operatorname{exs}(j) \\ e^{-ik_j(s_2^{(j)} x_2)} &= \operatorname{eyc}(j) + \operatorname{eys}(j) \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde

$$\begin{aligned} \operatorname{exc}(j) &= \cos(k_j s_1^{(j)} x_1) \\ \operatorname{exs}(j) &= i \operatorname{sen}(k_j s_1^{(j)} x_1) \\ \operatorname{eyc}(j) &= \cos(k_j s_2^{(j)} x_2) \\ \operatorname{eys}(j) &= i \operatorname{sen}(k_j s_2^{(j)} x_2) \end{aligned} \quad (3.70)$$

El término dependiente de x_3 , si bien no depende de la simetría, se simplificará mediante la siguiente expresión:

$$e^{-ik_j(s_3^{(j)} x_3)} = \operatorname{ez}(j) \quad (3.71)$$

De esta forma, la exponencial genérica de la ecuación 3.66 puede expresarse como la suma de cuatro productos:

$$\begin{aligned} e^{-ik_j(s^{(j)} \cdot r)} &= [\operatorname{exc}(j) + \operatorname{exs}(j)] [\operatorname{eyc}(j) + \operatorname{eys}(j)] \operatorname{ez}(j) = \\ &= [\operatorname{exc}(j)\operatorname{eyc}(j) + \operatorname{exc}(j)\operatorname{eys}(j) + \operatorname{exs}(j)\operatorname{eyc}(j) + \operatorname{exs}(j)\operatorname{eys}(j)] \operatorname{ez}(j) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Así, sustituyendo en el campo de desplazamientos, se obtiene que este es la suma de cuatro casos, que varían únicamente en la configuración de simetría que presentan. La expresión del campo de desplazamientos en la dirección x_1 será:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{j=1}^n d_1^j A_j \operatorname{exs}(j) \operatorname{eyc}(j) \operatorname{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_1^j A_j \operatorname{exc}(j) \operatorname{eyc}(j) \operatorname{ez}(j) + \\ &+ \sum_{j=1}^n d_1^j A_j \operatorname{exs}(j) \operatorname{eys}(j) \operatorname{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_1^j A_j \operatorname{exc}(j) \operatorname{eys}(j) \operatorname{ez}(j) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Para los desplazamientos en dirección x_2 , queda:

$$\begin{aligned} u_2 &= \sum_{j=1}^n d_2^j A_j \operatorname{exc}(j) \operatorname{eys}(j) \operatorname{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_2^j A_j \operatorname{exs}(j) \operatorname{eys}(j) \operatorname{ez}(j) + \\ &+ \sum_{j=1}^n d_2^j A_j \operatorname{exc}(j) \operatorname{eyc}(j) \operatorname{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_2^j A_j \operatorname{exs}(j) \operatorname{eyc}(j) \operatorname{ez}(j) \end{aligned} \quad (3.74)$$

y, finalmente, para la dirección x_3 :

$$\begin{aligned} u_3 &= \sum_{j=1}^n d_3^j A_j \operatorname{exc}(j) \operatorname{eyc}(j) \operatorname{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_3^j A_j \operatorname{exs}(j) \operatorname{eyc}(j) \operatorname{ez}(j) + \\ &+ \sum_{j=1}^n d_3^j A_j \operatorname{exc}(j) \operatorname{eys}(j) \operatorname{ez}(j) + \sum_{j=1}^n d_3^j A_j \operatorname{exs}(j) \operatorname{eys}(j) \operatorname{ez}(j) \end{aligned} \quad (3.75)$$

3 Campo incidente producido por ondas SH y SV con un ángulo de incidencia genérico

En estas expresiones, cada uno de los sumandos representan, respectivamente, las componentes del desplazamiento debidas al caso doblemente simétrico, al simétrico respecto a x_1x_3 y antisimétrico respecto a x_2x_3 , al antisimétrico respecto x_1x_3 y simétrico respecto a x_2x_3 y, por último, el caso doblemente antisimétrico.

Una vez se obtienen las distintas componenetes del desplazamiento, la determinación del tensor de deformaciones para cada caso se realiza mediante la aplicación directa de la ecuación de compatibilidad (ec. 3.2). A partir dicho tensor, se obtiene el tensor de tensiones directamente a partir de la ley de comportamiento del material (ec. 3.3).

De esta forma, el cálculo del campo de desplazamientos y tensiones del campo incidente pasa por obtener, mediante superposición, la respuesta del medio ante cada uno de los distintos casos de simetría planteados, empleando las expresiones anteriores para determinar el campo de desplazamientos, deformaciones y tensiones de forma sucesiva. Una vez conocidos los valores de \mathbf{u}_I^s y \mathbf{p}_I^s puede resolverse el sistema acoplado BEM-FEM y obtener la solución del problema.

4.1 Definición del problema

El objetivo de este trabajo es investigar la influencia de la interacción estructura-suelo-estructura en la respuesta de un grupo de edificios sometidos a ondas sísmicas con un ángulo de incidencia variable. Para ello, se ha elegido una configuración de tres edificios idénticos alineados a lo largo de la dirección de propagación de la onda, tal y como se muestra en la figura 4.1.

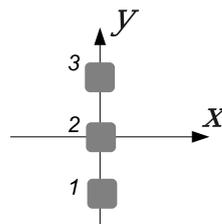


Figura 4.1: Grupo de edificios

Las estructuras son las correspondientes a edificios a cortante de una sola planta sobre una cimentación formada por un grupo 3×3 de pilotes embebidos en un semiespacio de naturaleza viscoelástica. Todas ellas presentan la misma geometría y mismas propiedades dinámicas.

La geometría de la cimentación viene definida por la longitud de los pilotes L , el diámetro de los mismos d , la distancia de separación entre centros de pilotes s , el semiancho del encepado b y la distancia de separación entre los centros de las cimentaciones D .

Los diferentes parámetros que definen el comportamiento dinámico del sistema son: la masa del encepado m_0 , la inercia del encepado I_0 , la masa de la planta m , la altura del edificio h y el periodo fundamental, T , y el coeficiente de amortiguamiento estructural, ζ , para la estructura sobre base rígida.

Así pues, cada subsistema estructura-cimentación estará definido por un total de 8 grados de libertad: dos desplazamientos horizontales de la base del encepado u_c correspondientes a los desplazamientos a lo largo de los ejes 'x' e 'y'; dos giros alrededor de estos mismos ejes φ ; el desplazamiento vertical de la base del encepado u_c^z ; un giro entorno a este eje vertical ϕ ; y los dos desplazamientos transversales de la planta respecto a su cimentación u . Al elegirse un modelo de estructura a cortante, el desplazamiento vertical de la planta, así como los diferentes giros de la misma, coinciden con los de la base de la cimentación.

4 Resultados

La figura 4.2 muestra una representación bidimensional del problema a estudiar, reflejando todos los parámetros anteriores que definen el sistema. Hay que considerar también el ángulo θ con el que se propaga la onda incidente.

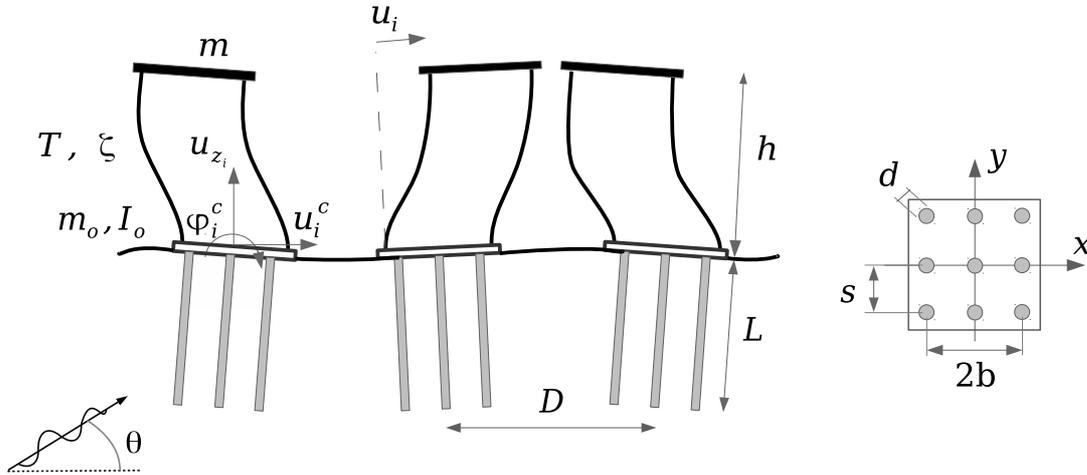


Figura 4.2: Parámetros y grados de libertad del problema

Se ha elegido la alineación de los edificios a lo largo del eje y al ser esta la dirección de propagación de las ondas inclinadas. De esta forma, se podrá comprobar el efecto 'sombra' que puede producir la presencia de un edificio al interponerse en el camino de la onda, además del resto de efectos de interacción entre estructuras cercanas. Los dos tipos de ondas seleccionadas para el análisis (ondas SH y ondas SV) se han elegido de forma que la primera produce desplazamientos de campo libre perpendiculares a la dirección de alineación de los edificios, mientras que la onda SV produce desplazamientos de campo libre paralelos a la dirección de alineación de las estructuras.

Por último, para el caso de pilotes inclinados, se definirá el ángulo de inclinación α respecto a la vertical. Esta inclinación de los pilotes se realizará en la dirección de actuación de la onda incidente (en dirección x en caso de ondas SH, y en dirección y para SV) y en el sentido de alejarse del centro de la cimentación, como refleja la figura 4.3.

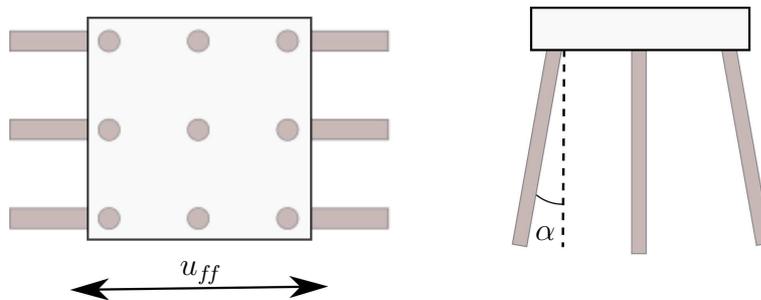


Figura 4.3: Inclinación de los pilotes

4.2 Tratamiento de la simetría

Como se ha comentado en la sección 3.6, la formulación empleada exige la representación del problema mediante la simetría. Por ello, el campo incidente y reflejado suponen la superposición de diferentes casos de simetría. En las situaciones planteadas, dos de los cuatro casos posibles se anularán al encontrarse las estructuras estudiadas sobre uno de los ejes de simetría geométrica. Por tanto, el problema real se descompondrá en la suma de dos subproblemas que se diferencian únicamente en el tipo de simetría que presentan. Los casos estudiados variarán en función del tipo de onda incidente.

La figura 4.4 representa el cuarto de la simetría empleado para el estudio. Únicamente se discretizan dos edificios: el central (u^{cen}) y el exterior (u^{ext}); obteniéndose los desplazamientos del otro edificio externo en función de la simetría considerada.

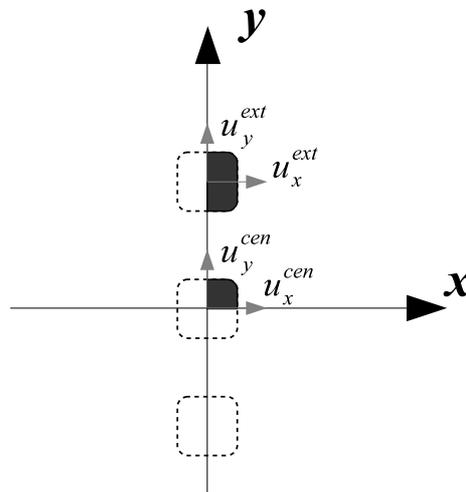


Figura 4.4: Discretización del problema. En sombreado la parte que se discretiza, en discontinuo el resultado de aplicar las simetrías

Como se ha comentado, sólo dos de los cuatro casos de simetría producen desplazamientos no nulos en los grados de libertad contemplados para el análisis. Estos casos se denominarán, de aquí en adelante, *caso 1* y *caso 2*. El *caso 1* será aquel caso de simetría que produce desplazamientos en el edificio central, mientras que el *caso 2* será el que produzca desplazamientos únicamente en los edificios exteriores.

En los siguientes apartados se definirán estos casos, concretándose la simetría de cada uno de ellos, en función del tipo de onda incidente:

4.2.1 Onda SH

La onda SH origina desplazamientos a lo largo del eje x . Por ello, para los edificios estudiados, al estar situados sobre el eje y , únicamente se verán afectados para los casos correspondientes a antisimetría en dicho eje (ya que para los casos con el eje y simétrico, el desplazamiento en x de los puntos sobre dicho eje debe ser nulo).

Así se tiene, por una parte, el caso simétrico respecto x y antisimétrico respecto a y y, por otro lado, el caso doblemente antisimétrico, como se refleja en la figura 4.5. Únicamente el primer caso (simétrico respecto a x) produce desplazamientos en el edificio central, por lo que es este caso el denominado *caso 1*; mientras que el *caso 2* será el correspondiente al caso doblemente antisimétrico.

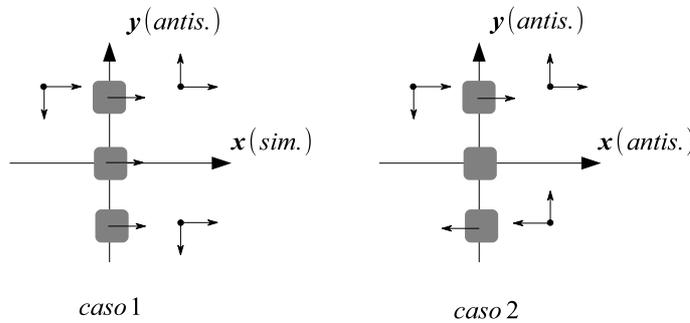


Figura 4.5: Casos de simetría para la onda SH

Con esto, los desplazamientos de los edificios para el problema real se obtendrán de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (u_{e1})_x &= u_{sim}^{ext} - u_{antis}^{ext}; \\ (u_{e2})_x &= u_{sim}^{cen}; \\ (u_{e3})_x &= u_{sim}^{ext} + u_{antis}^{ext}; \end{aligned} \quad (4.1)$$

4.2.2 Onda SV

La onda SV con incidencia inclinada se propaga en el plano 'yz' originando desplazamientos en una dirección perpendicular a la de propagación, pero contenida en el mismo plano; su componente horizontal, que será la estudiada, es, por tanto, a lo largo del eje y . Como ocurre para la onda anterior, sólo dos de los cuatro casos de simetría posibles no se anulan para las estructuras situadas sobre el eje y ; estos casos son los correspondientes a simetría respecto a este eje (ya que si el eje y fuese de antisimetría, los desplazamientos en la dirección de dicho eje serían nulos).

Así tendremos para esta onda los casos correspondientes a antisimétrico respecto x y simétrico respecto y y el caso doblemente simétrico (figura 4.6). En este caso, el *caso 1* corresponde al antisimétrico respecto al eje x (ya que es este tipo de simetría es la que permite desplazamientos en y a lo largo del eje x), mientras que el *caso 2* será el correspondiente al doblemente simétrico.

De la misma forma que para la onda anterior, los desplazamientos de los edificios para el problema real se obtendrán mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} (u_{e1})_y &= u_{antis}^{ext} - u_{sim}^{ext}; \\ (u_{e2})_y &= u_{antis}^{cen}; \\ (u_{e3})_y &= u_{antis}^{ext} + u_{sim}^{ext}; \end{aligned} \quad (4.2)$$

En este caso, el edificio central, al situarse sobre el eje x , no tendrá desplazamiento horizontal en dirección y para el caso simétrico respecto a x .

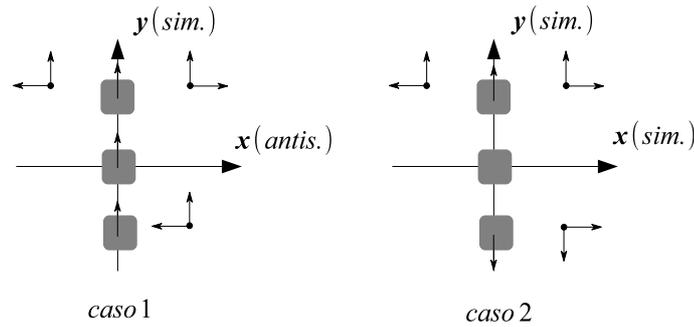


Figura 4.6: Casos de simetría para la onda SV

4.3 Parámetros del problema

Se exponen a continuación los diferentes valores adimensionales que definen el problema estudiado. Estos valores se han elegido por ser valores representativos de la realidad y que presentan un grado apreciable de interacción suelo-estructura. Valores similares han sido empleados por otros autores en [2, 3, 22].

Los valores de los parámetros que definen las propiedades mecánicas del suelo y la cimentación considerados en el problema a estudiar son los siguientes: ratio entre los módulos de Young de los pilotes y el suelo $E_p/E_s = 100$, ratio entre las densidades del suelo y los pilotes $\rho_s/\rho_p = 0.7$, coeficiente de Poisson de los pilotes $\nu_p = 0.2$, coeficiente de Poisson del suelo $\nu_s = 0.4$ y coeficiente de amortiguamiento del suelo $\beta = 0.05$.

Como se ha comentado, la cimentación se trata de una configuración cuadrada de 3×3 pilotes con la cabeza empotrada en un encepado rígido, sin masa, y que no está en contacto con el terreno. Su geometría vendrá determinada por: relación de esbeltez de los pilotes $L/d = 15$, distancia de separación entre los pilotes $s/d = 5$, valor del semiancho del encepado $b = 3s/2$.

Los parámetros relacionados con el comportamiento dinámico del sistema serán: relación de esbeltez de la estructura $h/b = 2$ y 5 ; ratio entre las rigideces de la estructura y del suelo $1/\sigma = h/(c_s T) = 0.25$, donde c_s es la velocidad de propagación de la onda de corte en el suelo; este parámetro $1/\sigma$ es el que gobierna la magnitud de los efectos de la interacción suelo-estructura: un valor de $1/\sigma = 0$ implica base rígida (por lo que no existen efectos de interacción), mientras que valores crecientes representan una reducción de la rigidez relativa del suelo llegando a valores de $1/\sigma = 0.5$ en los que el suelo es muy blando en relación a la estructura. El resto de parámetros son: coeficiente de amortiguamiento de la estructura $\zeta = 0.05$; ratio entre las masas de la estructura y del suelo $\delta = m/(4\rho_s b^2 h) = 0.15$; ratio entre las masas del encepado y de la estructura $m_0/m = 0.25$; ratio entre la inercia del encepado y la correspondiente a la estructura $I_0/(mh^2) = 0.05$.

Se estudiarán diferentes casos que corresponden a distintas separaciones entre las estructuras. Esta separación tomará los valores $D = \lambda/4$, $\lambda/3$, $\lambda/2$ y λ , donde λ viene definido como la longitud de onda a la frecuencia fundamental del sistema constituido por un edificio solo: $\lambda = c_s \tilde{T}$ siendo \tilde{T} el periodo fundamental de dicho sistema. Nótese que el valor de \tilde{T}/T refleja la variación de la frecuencia fundamental de la estructura al encontrarse sobre una base no rígida.

Los diferentes ángulos de incidencia a considerar se muestran en la tabla 4.1. La elección de un ángulo más para onda SV, se debe a que el ángulo crítico correspondiente a un coeficiente de Poisson de $\nu_p = 0.4$ es de $\theta_{cr} = 65.9^\circ$.

SV	60°	65°	67°	70°	75°	90°
SH	60°	65°	-	70°	75°	90°

Tabla 4.1: Ángulos de incidencia estudiados según el tipo de onda

Para el estudio de los efectos de la inclinación de los pilotes sobre la respuesta del sistema se considerarán inclinaciones de $\alpha = 10^\circ$ y 20° , que se compararán con la respuesta de las estructuras sobre cimentación de pilotes verticales ($\alpha = 0^\circ$). Este estudio se realizará únicamente para edificios de esbeltez $h/b = 2$ y una distancia de separación entre edificios de $D = \lambda/3$.

Por último, destacar que los resultados obtenidos se representarán frente a la frecuencia adimensional a_0 que se define como:

$$a_0 = \frac{\omega d}{c_s} \quad (4.3)$$

donde ω es la frecuencia de la excitación, d el diámetro de los pilotes y c_s la velocidad de propagación de la onda cortante en el terreno.

4.4 Definición de variables a estudiar

La aplicación del modelo BEM-FEM permite obtener los valores de los distintos desplazamientos en los grados de libertad considerados, a partir de los cuales puede obtenerse el esfuerzo cortante en la base. Este proyecto se centrará en la evolución del esfuerzo cortante que presenta la base de la estructura ante diferentes sollicitaciones sísmicas. Se ha elegido esta variable para el estudio al ser uno de los esfuerzos más críticos a la hora del diseño estructural.

El análisis consistirá tanto en obtener la función de respuesta en frecuencia del cortante para los diferentes casos estudiados, como en ver la variación de su valor resonante en función de los distintos parámetros variables de nuestro problema: ángulo de incidencia de la onda, separación entre edificios, esbeltez del edificio, posición del edificio y, en un caso concreto, inclinación de pilotes. También se estudiará variación de la frecuencia a la que se produce este valor máximo, a la que se denominará frecuencia pico. La comparación se realizará en términos relativos, tomando como referencia al sistema suelo-estructura (un edificio solo sobre el terreno) ya sea bajo la misma sollicitación sísmica o bajo incidencia vertical.

El valor del cortante no se obtiene directamente de la aplicación del modelo BEM-FEM, para llegar a él es necesario realizar unos cálculos previos a partir de los resultados del mismo. Estos cálculos se exponen a continuación:

En primer lugar es necesario conocer el valor de la deflexión lateral del edificio (u), esta variable representa el desplazamiento horizontal relativo entre la planta superior de la estructura y la base de la misma (será el correspondiente al desplazamiento en dirección x si la onda incidente es SH, o en dirección y si es SV), y se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$u = u_{planta} - u^c - h \varphi^c \quad (4.4)$$

donde u_{planta} es el valor del desplazamiento horizontal absoluto de la planta.

El producto de la deflexión y la rigidez del sistema estructural proporciona el valor del cortante en la base:

$$V(\omega) = k u \quad (4.5)$$

No obstante, es necesario conocer el valor de la deflexión de manera adimensional, en relación con la excitación que lo origina (cuantificada habitualmente mediante la aceleración a nivel del suelo), es por ello que se emplea el factor de amplificación dinámica, D , definido como la relación entre el desplazamiento producido por una acción dinámica y su valor en el caso de una acción estática de la misma magnitud:

$$D = \frac{u}{u_s} \quad (4.6)$$

donde u_s es el desplazamiento que habría si la fuerza que actuase fuese estática, que puede despejarse de la expresión $F_{eq} = k u_s$, quedando el factor de amplificación dinámica como:

$$D = \frac{u}{u_s} = \frac{u}{F_{eq}/k} = \frac{k u}{F_{eq}} \quad (4.7)$$

Empleando a continuación la expresión de la frecuencia natural del sistema:

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = \Omega^2 m \quad (4.8)$$

y expresando la acción estática equivalente sobre la masa de un sistema de un grado de libertad como:

$$F_{eq} = \omega^2 m u_{ff} \quad (4.9)$$

siendo u_{ff} el desplazamiento del campo libre en la base, nos queda la expresión del factor de amplificación dinámica como:

$$D = \frac{k u}{F_{eq}} = \frac{\Omega^2 m u}{\omega^2 m u_{ff}} = \frac{\Omega^2 u}{\omega^2 u_{ff}} \quad (4.10)$$

Este factor, multiplicado por la masa de la estructura y por la aceleración horizontal a nivel del suelo, proporciona el valor del cortante; por ello, será el utilizado para estudiar el comportamiento del cortante en las estructuras del problema planteado. Hay que tener en cuenta que, al realizar una comparación en términos relativos, las variaciones de dos variables proporcionales son idénticas.

Los valores de las funciones de respuesta en frecuencia de las variables necesarias para el cálculo de la deflexión (u_{planta} , u^c , φ^c) se encuentran en los anexos al final del documento.

4.5 Pilotes verticales

Las figuras (4.7 a 4.14) muestran las funciones de respuesta en frecuencia del factor de amplificación dinámica para los diferentes casos planteados. Estas funciones son proporcionales a las del cortante en la base de la estructura y serán las empleadas para estudiar el comportamiento de este en función de los distintos parámetros de los problemas modelados.

Las distintas gráficas corresponden a diferentes distancias de separación y a distinto tipo de edificio. Se dividen después en función de la posición relativa de la estructura con respecto a la onda incidente, siendo la primera fila la correspondiente a un edificio solo, la segunda al primer edificio que recibe la onda, la tercera al edificio central y la cuarta al último edificio del grupo.

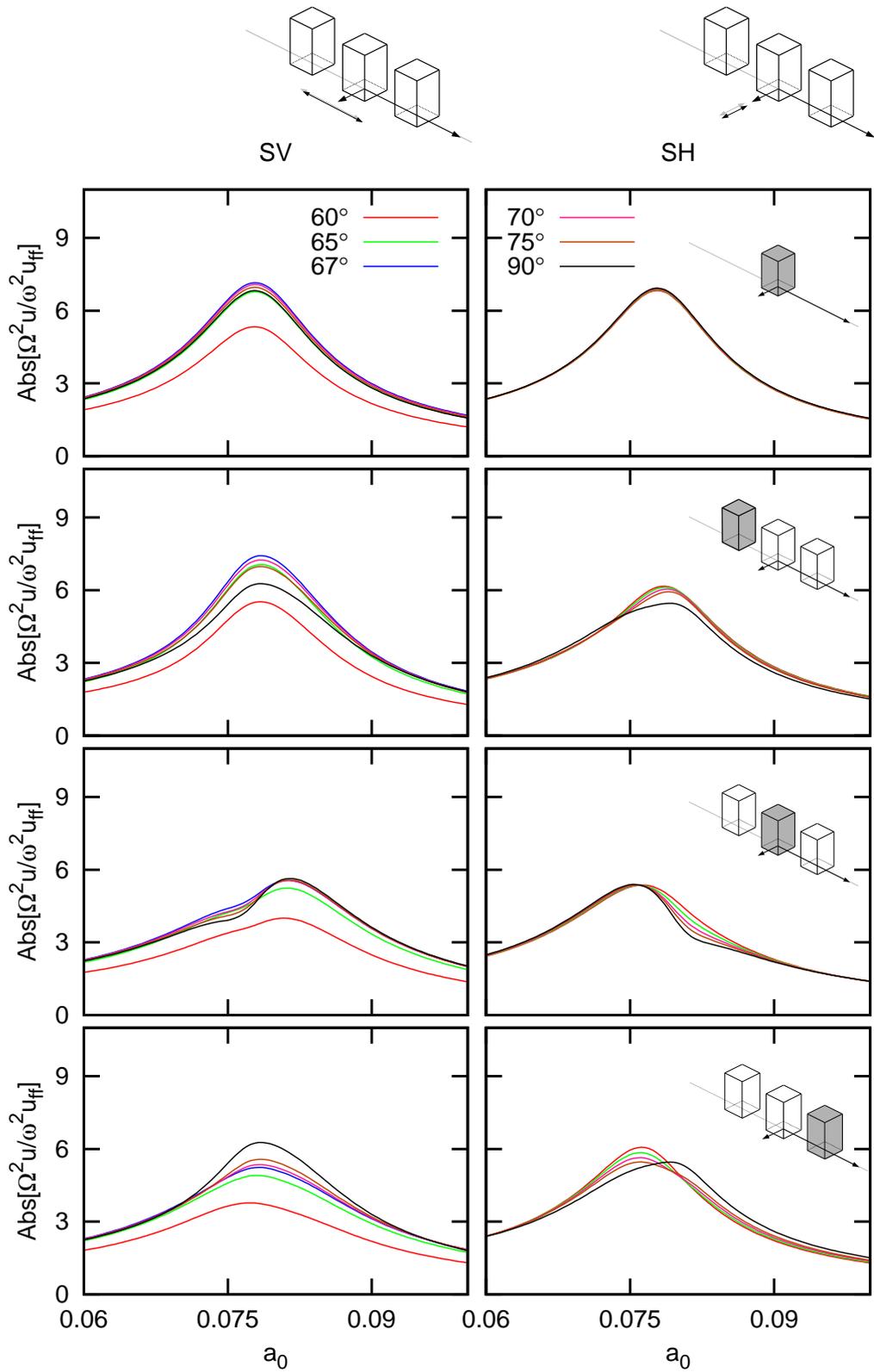


Figura 4.7: Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

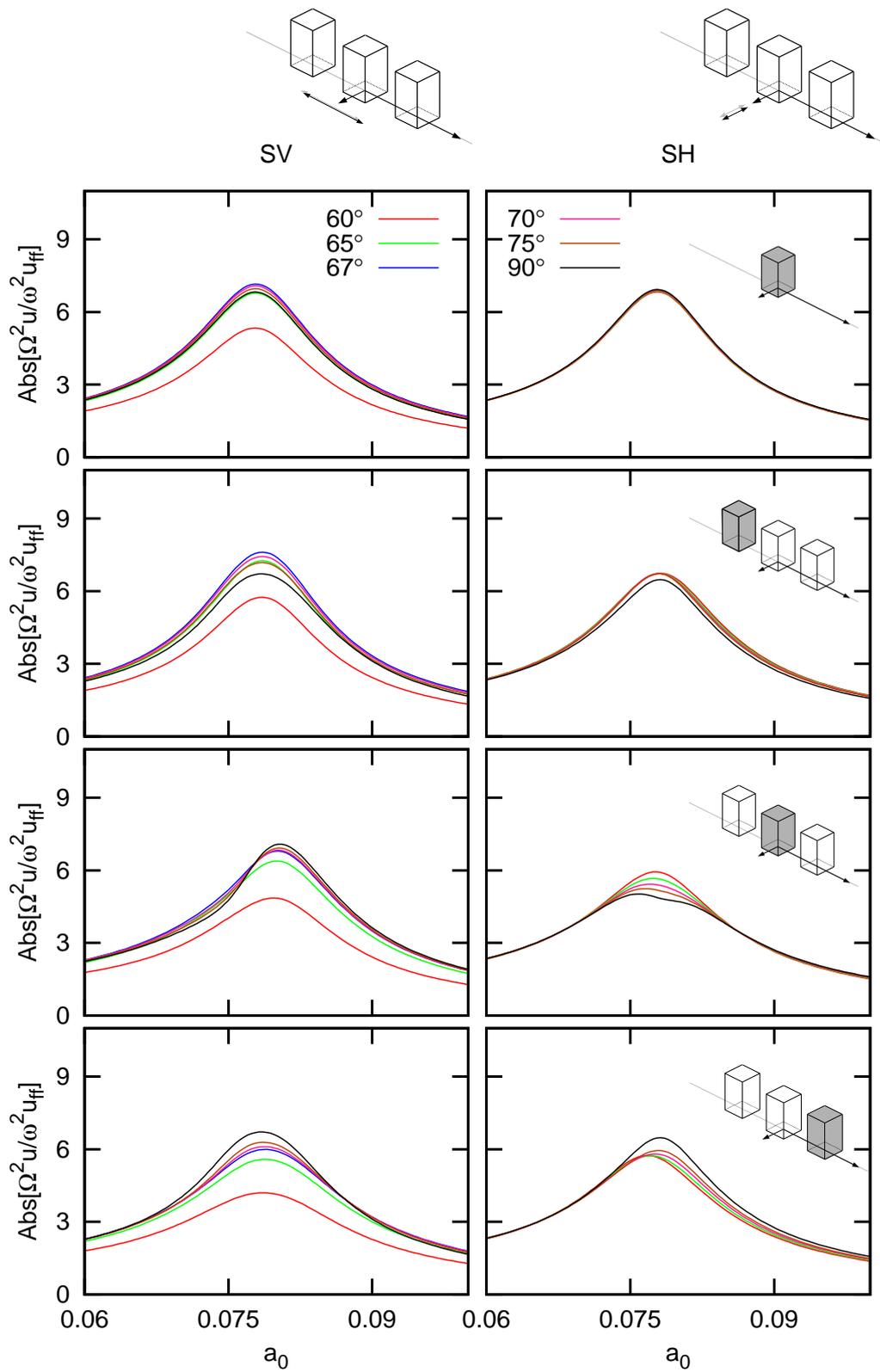


Figura 4.8: Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

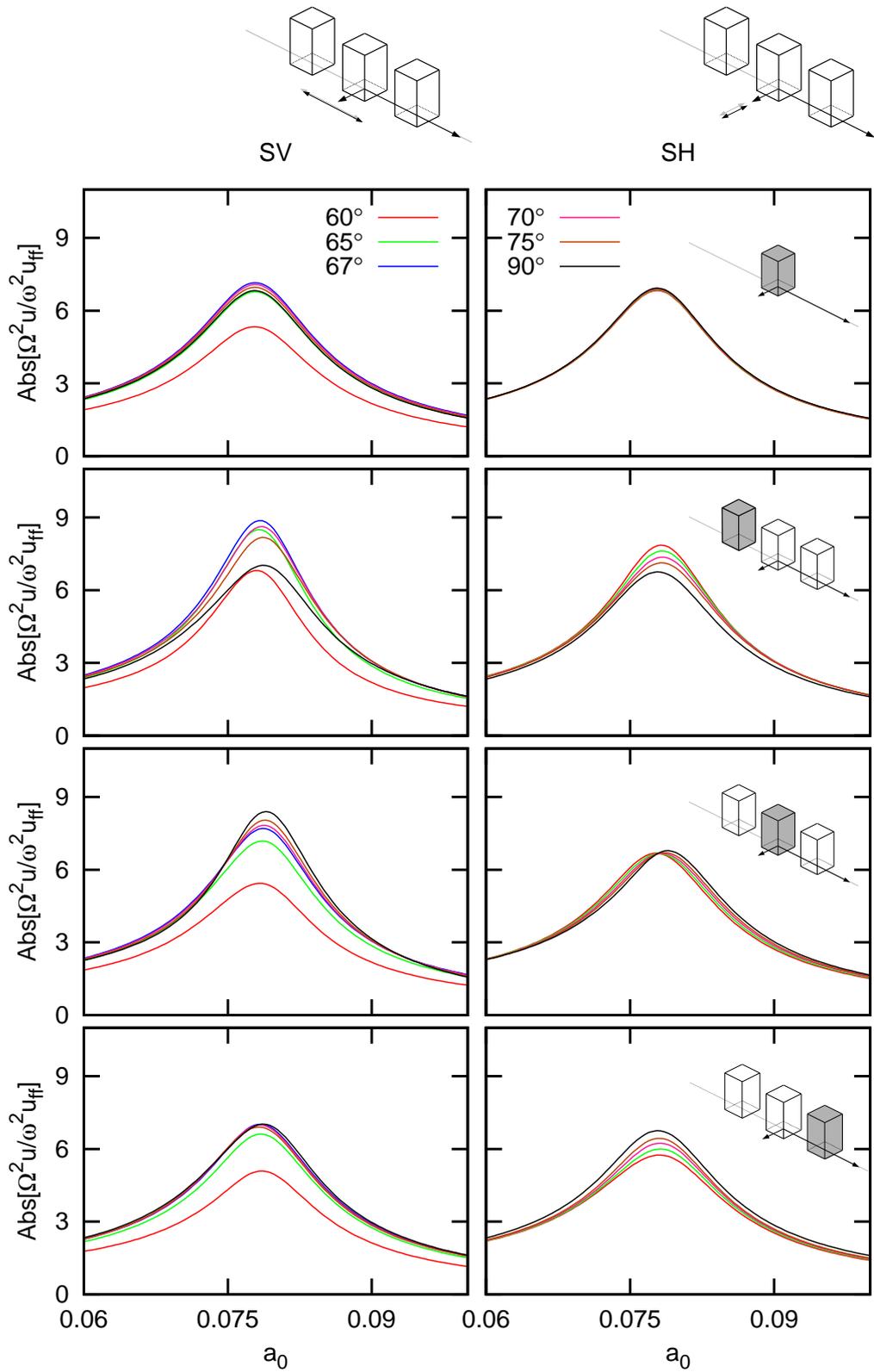


Figura 4.9: Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

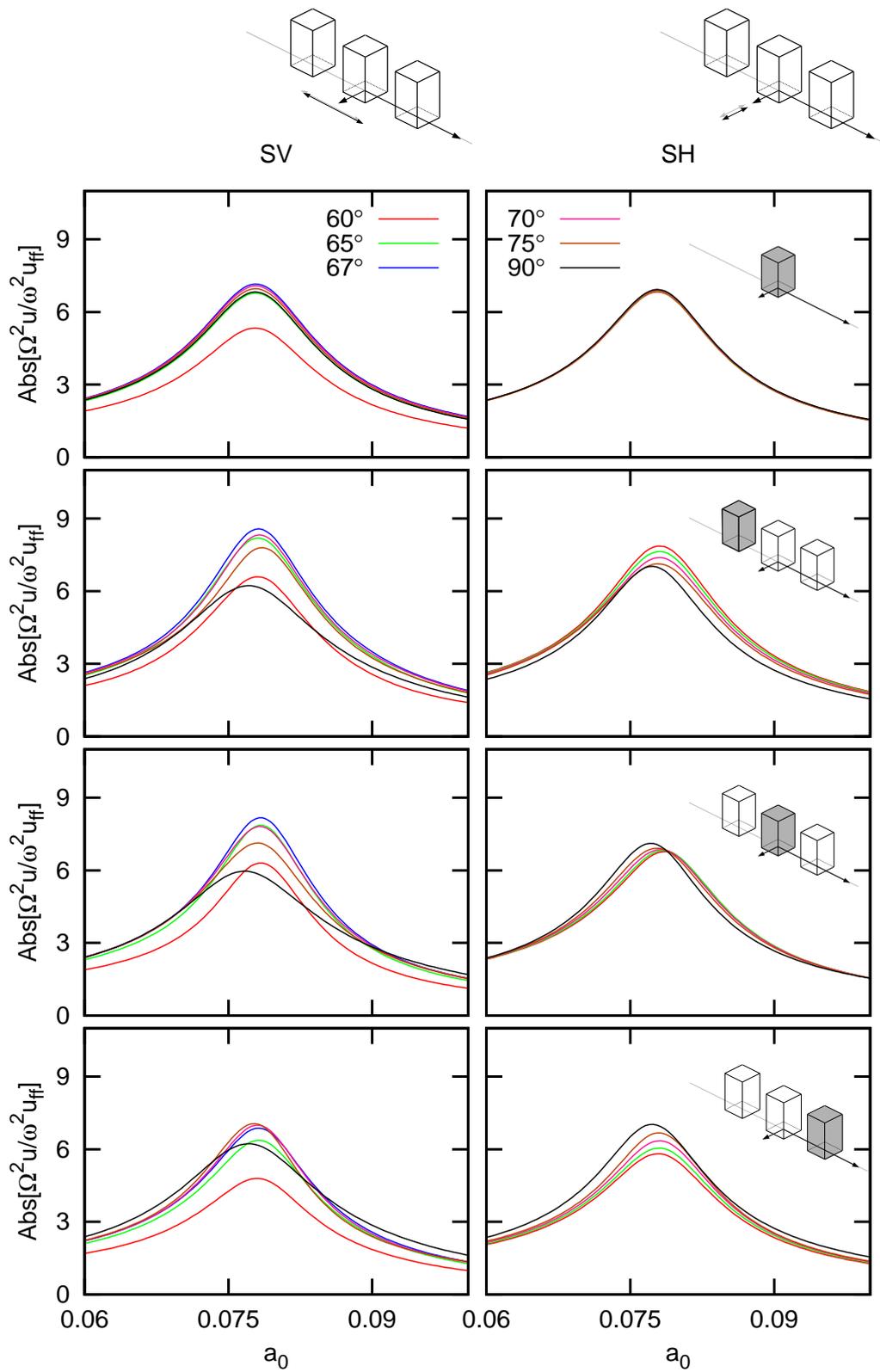


Figura 4.10: Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

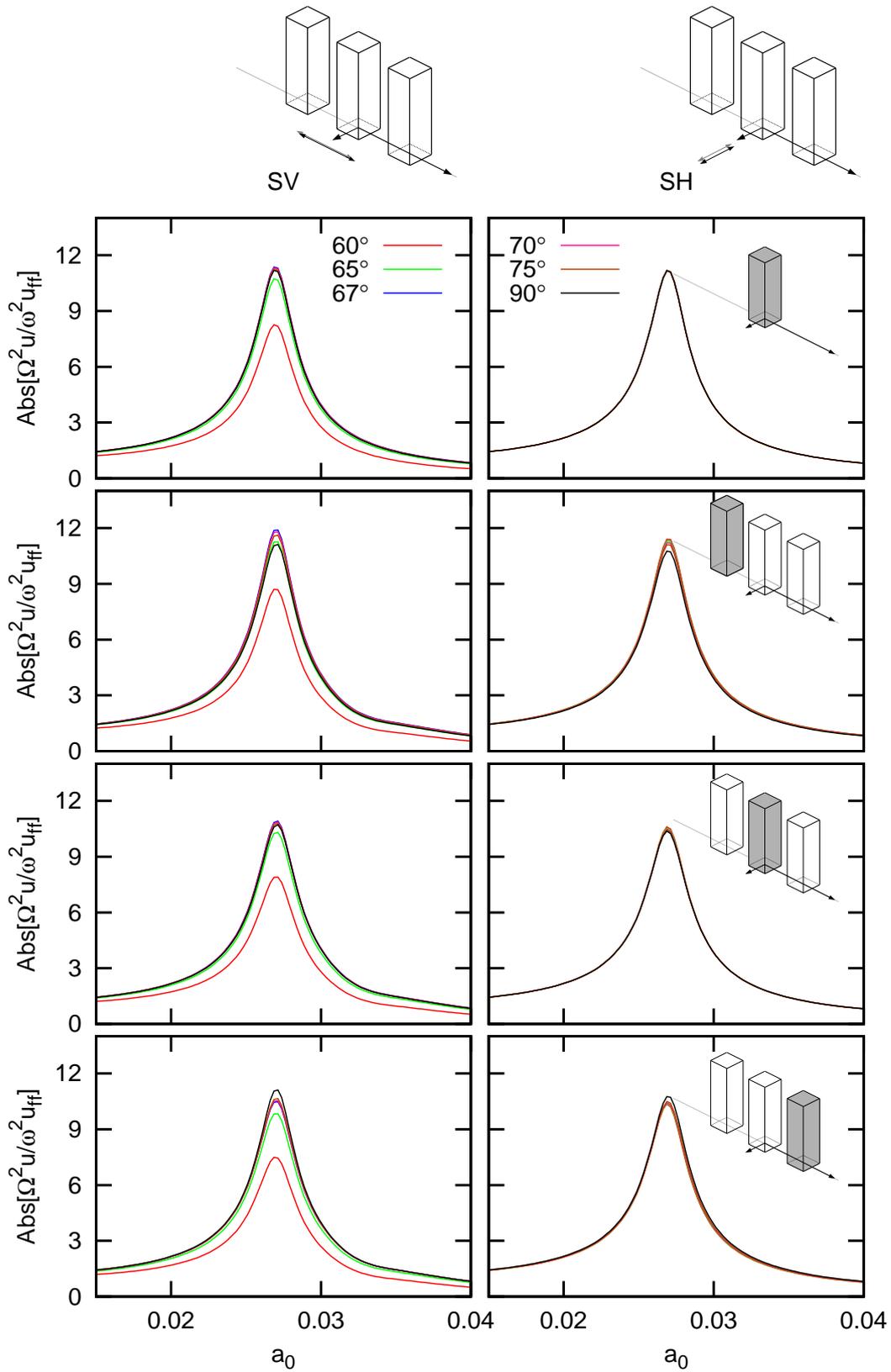


Figura 4.11: Deflexión para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

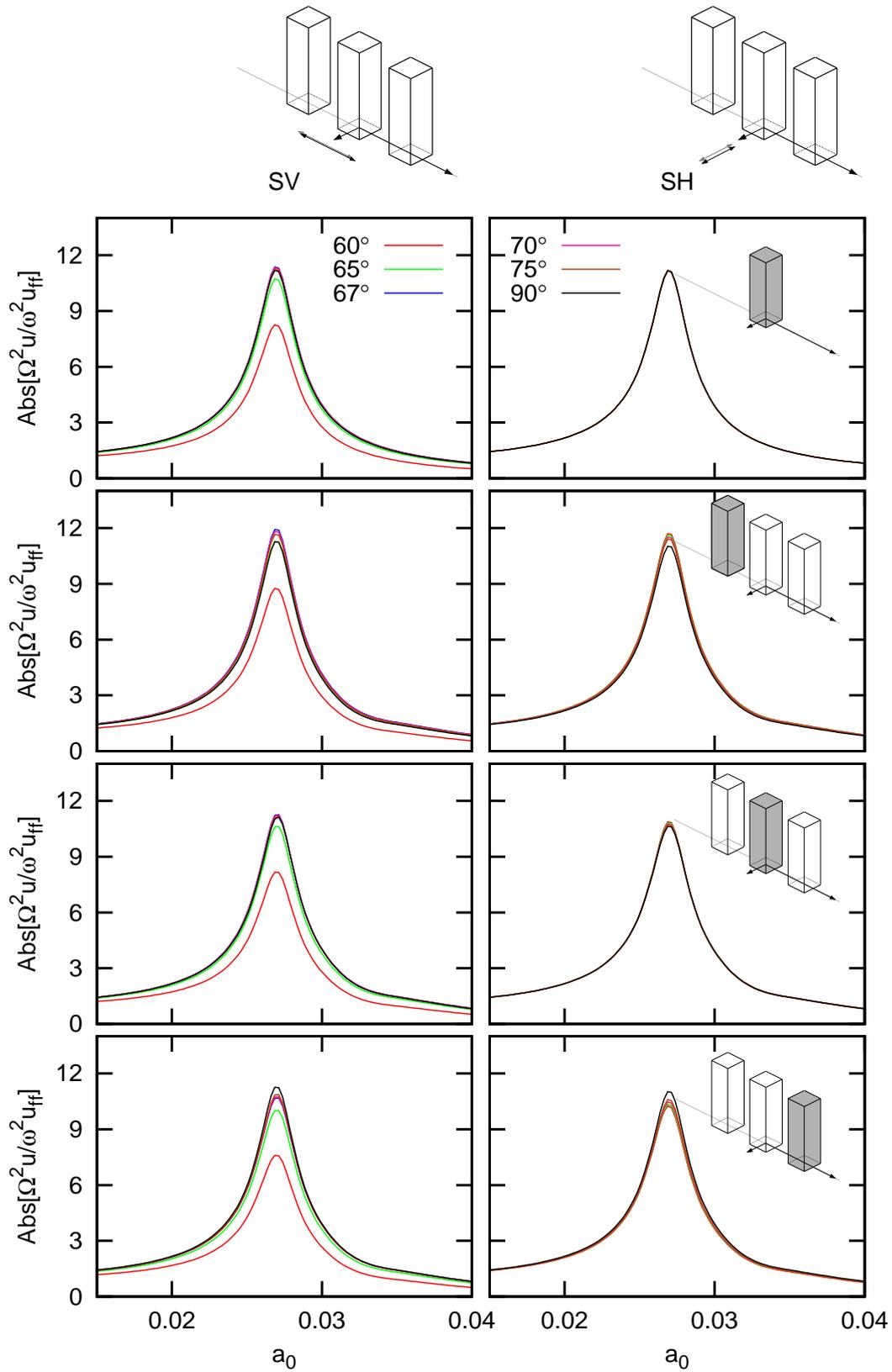


Figura 4.12: Deflexión para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

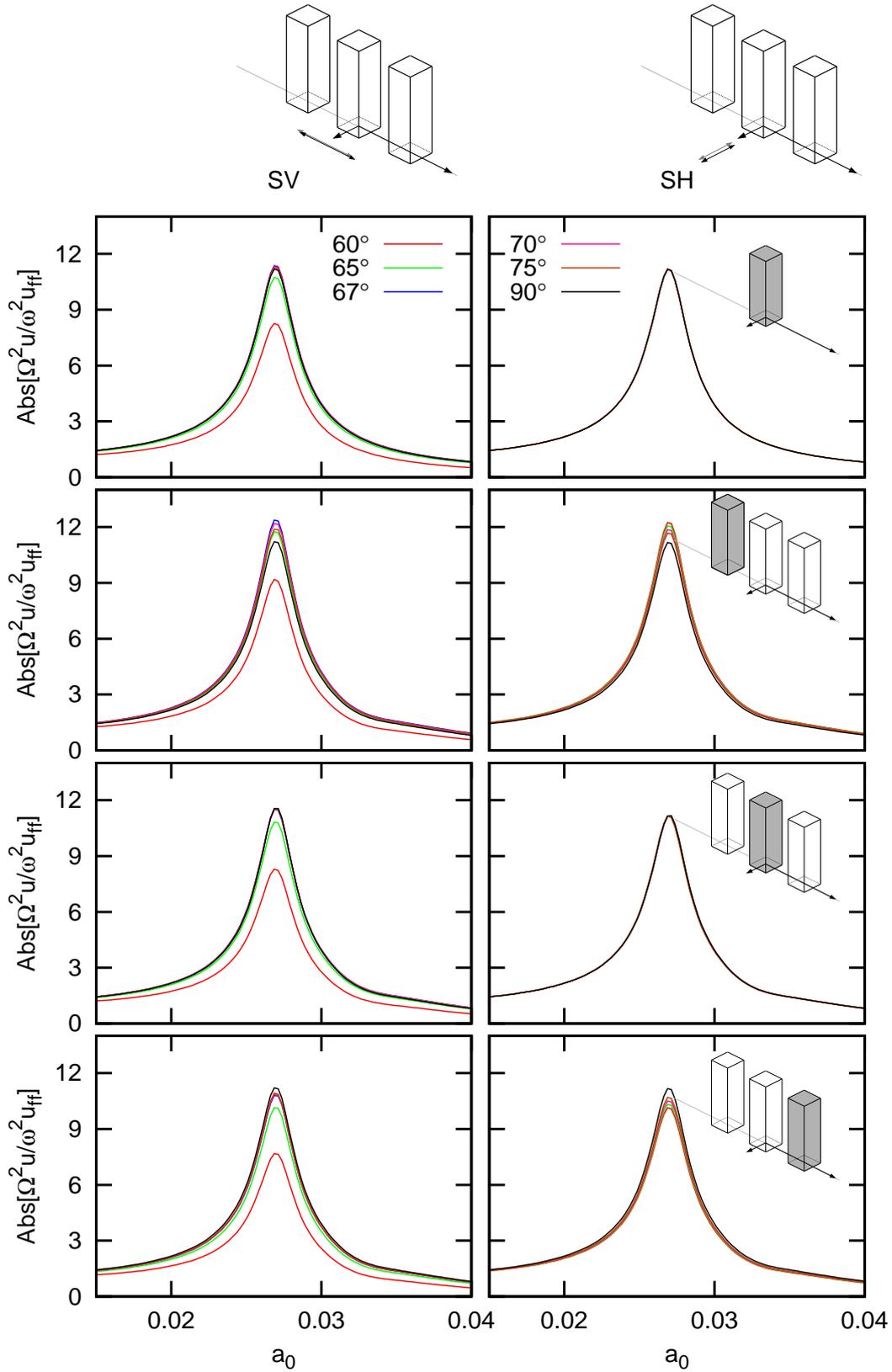


Figura 4.13: Deflexión para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

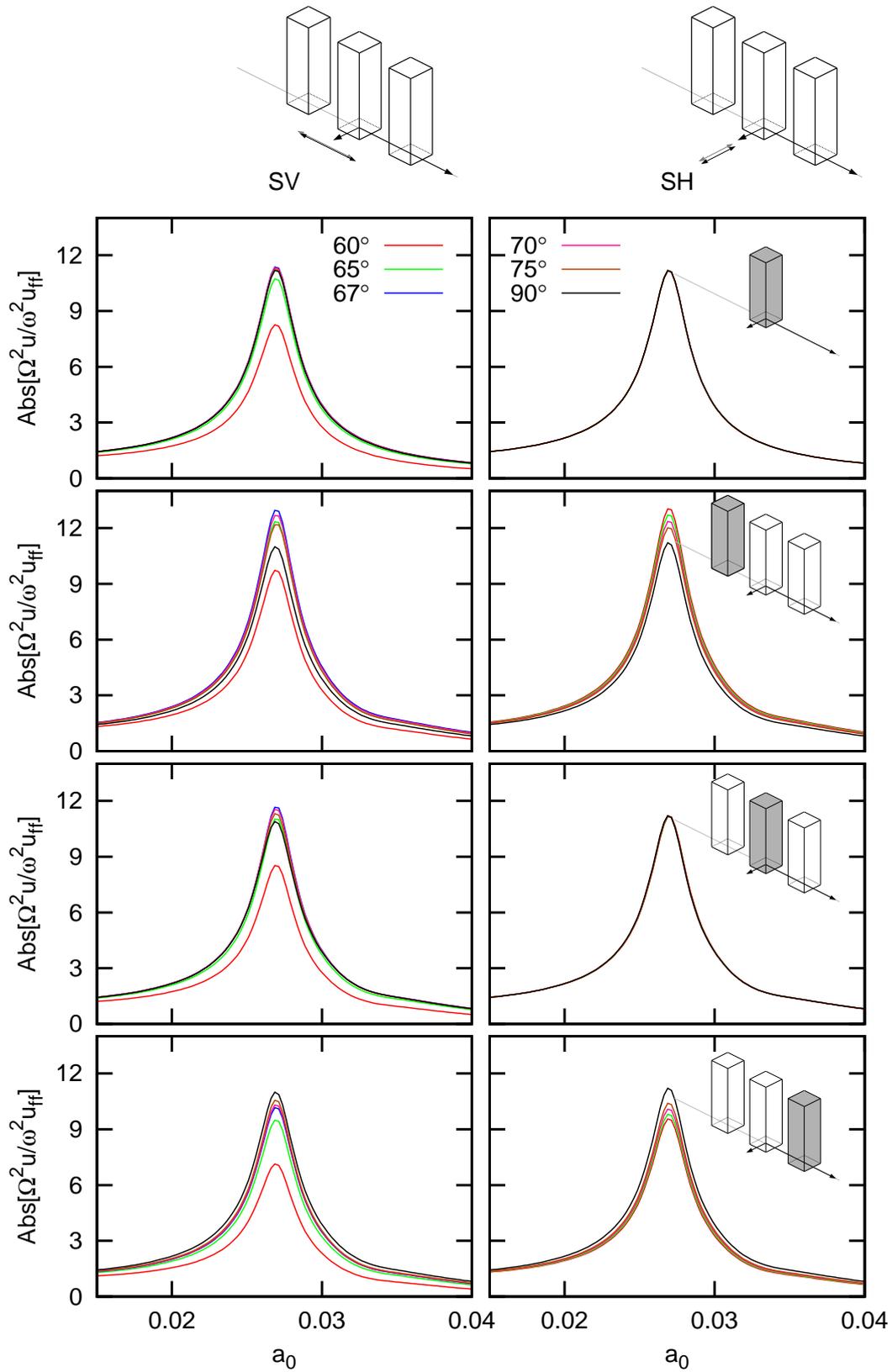


Figura 4.14: Deflexión para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

4.5.1 Variación del cortante

Se estudiará el comportamiento del cortante a partir de las gráficas obtenidas. Las variaciones del mismo se expresarán en valores relativos, empleando la siguiente fórmula para ello:

$$\delta V(\omega) = \frac{V(\omega) - V_{ref}}{V_{ref}} 100 \quad (\%) \tag{4.11}$$

De forma que un valor positivo implicará un incremento en el valor del cortante respecto al valor tomado como referencia, es decir, supondrá un caso más crítico que el de referencia; mientras que un valor con signo negativo significará un menor valor de cortante.

Los valores de estas variaciones porcentuales se reflejan en las distintas tablas, además de representarse gráficamente para una mayor facilidad en la interpretación y consulta. La representación se hará para los diferentes tipos de edificio, mostrando las distintas distancias de separación y en función del ángulo de incidencia de la onda o de la posición de la estructura en el grupo.

4.5.1.1 Comparación con el edificio solo sometido al mismo ángulo de incidencia

El objetivo de emplear como referencia el edificio solo sometido a la misma inclinación de la onda incidente es destacar la variación de los diferentes efectos de interacción estructura-suelo-estructura con este ángulo de incidencia. Se eliminan así, las variaciones en el cortante que se producen también para el edificio solo debido a la incidencia no vertical, que sí se considerarán más adelante.

Comenzando con los edificios de esbeltez $h/b = 2$, las tablas 4.2 y 4.3 muestran los diferentes valores de la variación del cortante obtenido para cada uno de los casos estudiados, tomando el valor del cortante que presenta un edificio solo frente a una onda incidente del mismo tipo y de la misma inclinación como valor de referencia, siguiendo lo establecido en la ecuación 4.11.

		SV					
		60°	65°	67°	70°	75°	90°
$D = \lambda/4$	e1	3,6	4,2	3,8	2,5	0,2	-8,1
	e2	-25,0	-22,6	-22,3	-21,5	-19,9	-17,3
	e3	-29,2	-27,5	-26,8	-24,3	-19,9	-8,1
$D = \lambda/3$	e1	7,8	7,1	6,4	5,0	3,2	-1,6
	e2	-9,0	-5,7	-5,0	-3,4	-0,6	3,8
	e3	-21,2	-17,6	-16,2	-13,7	-9,7	-1,6
$D = \lambda/2$	e1	27,8	25,4	24,1	21,9	17,5	2,9
	e2	1,9	6,1	7,6	10,6	15,6	23,1
	e3	-4,5	-2,3	-1,8	-1,2	-0,9	2,9
$D = \lambda$	e1	23,7	21,0	19,8	17,6	12,1	-8,7
	e2	18,2	16,0	14,2	10,4	2,4	-12,6
	e3	-10,0	-6,0	-3,9	-1,1	1,4	-8,7

Tabla 4.2: Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo el mismo ángulo de incidencia para una altura $h/b = 2$ y onda incidente tipo SV

En las figuras 4.15 y 4.16 se observa cómo, si bien en algunos casos el comportamiento de los distintos edificios es similar, cada uno de los parámetros variables del problema influye en alguna medida en la respuesta del sistema para las diferentes solicitaciones.

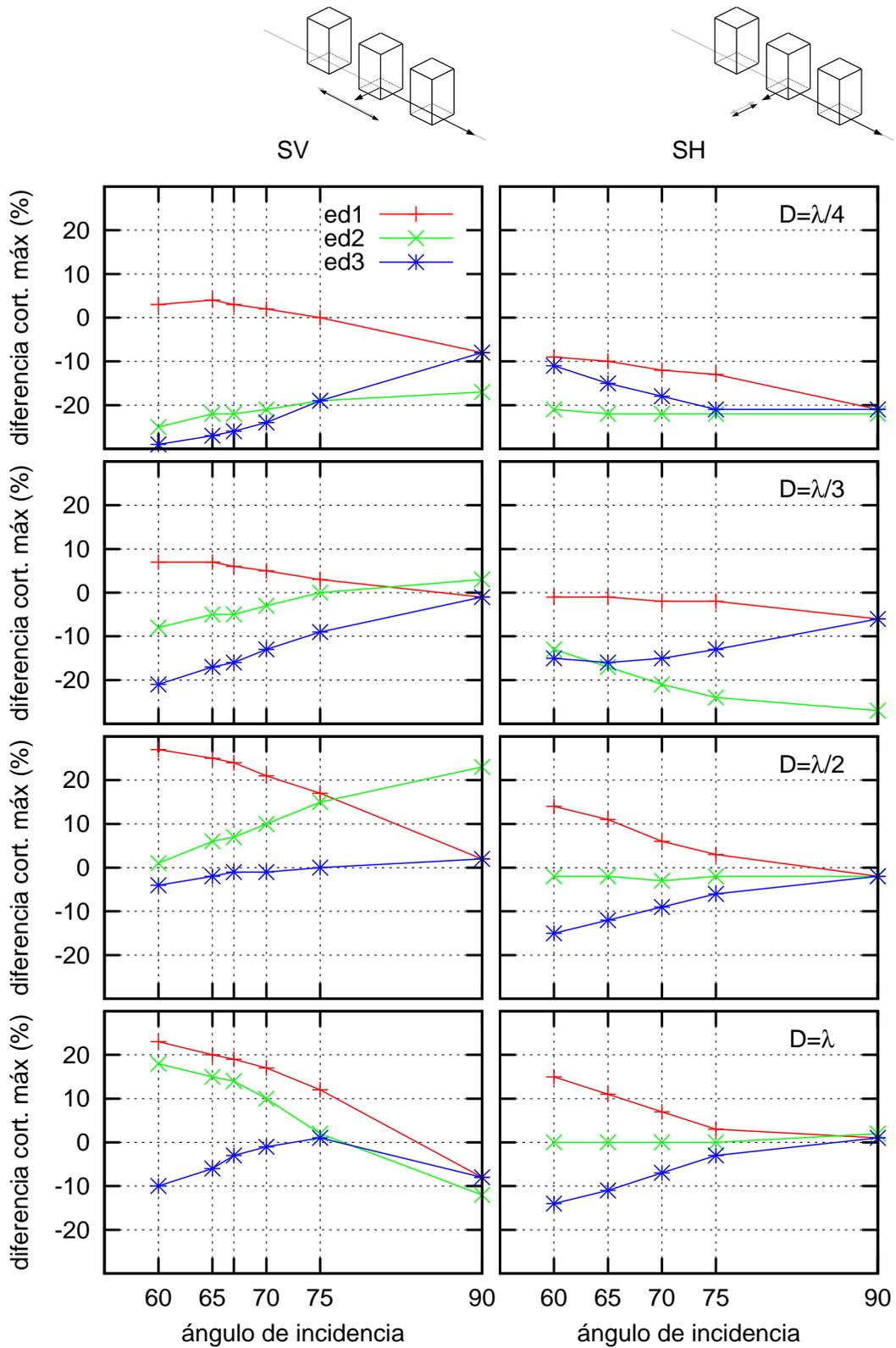


Figura 4.15: Variación del cortante máximo para edificios $h/b=2$ separados a diferentes distancias en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo sometido a la misma onda incidente)

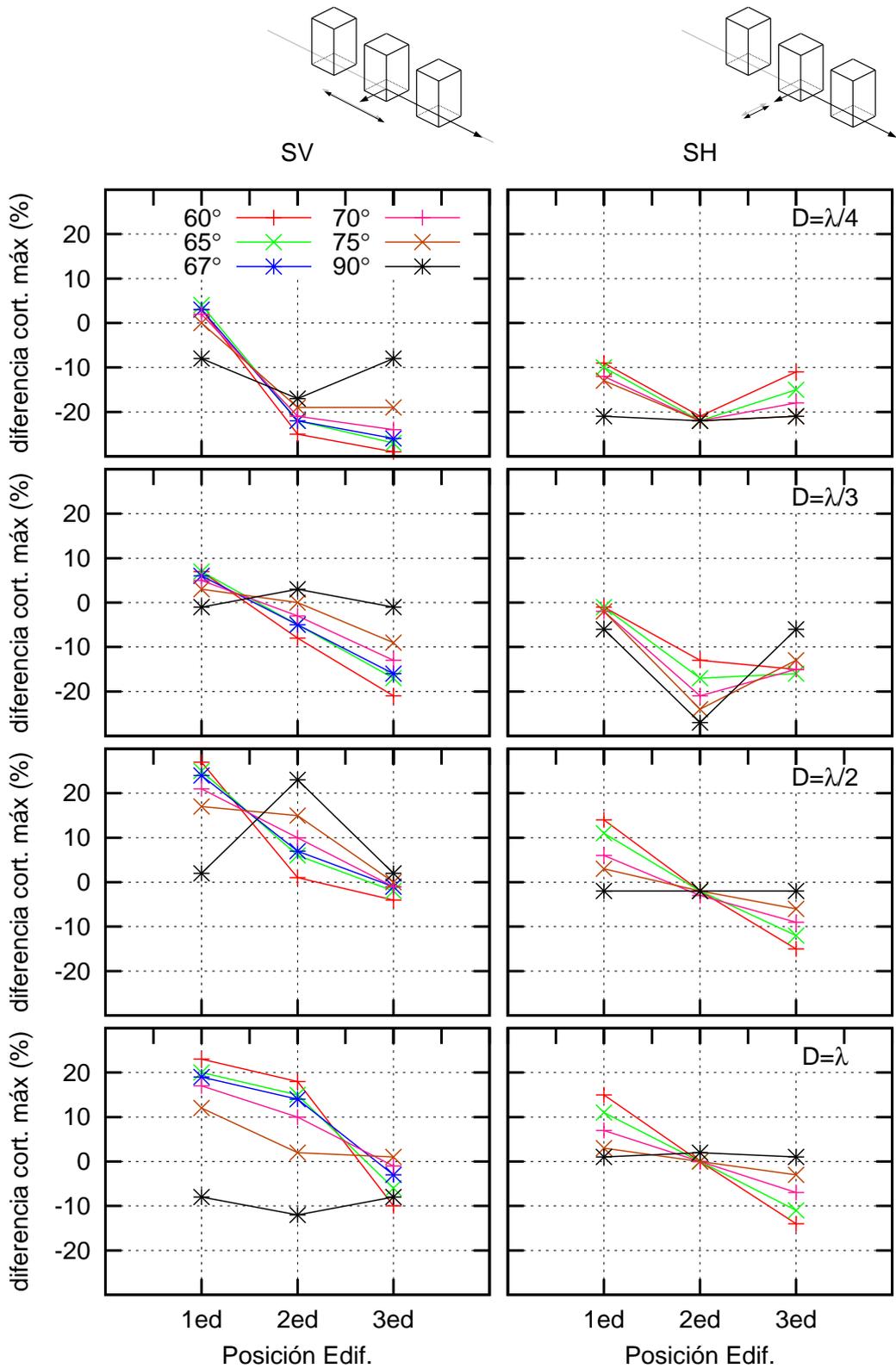


Figura 4.16: Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados a diferentes distancias en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo sometido a la misma onda incidente)

		SH				
		60°	65°	70°	75°	90°
$D = \lambda/4$	e1	-9,7	-10,7	-12,1	-14,0	-21,2
	e2	-21,8	-22,1	-22,2	-22,2	-22,1
	e3	-11,7	-15,0	-18,2	-21,1	-21,2
$D = \lambda/3$	e1	-1,4	-1,8	-2,1	-2,6	-6,5
	e2	-13,1	-17,4	-21,1	-24,0	-27,5
	e3	-15,9	-16,4	-15,7	-13,8	-6,5
$D = \lambda/2$	e1	15,0	11,1	7,0	3,3	-2,5
	e2	-2,2	-2,8	-3,0	-2,8	-2,1
	e3	-15,8	-12,5	-9,3	-6,7	-2,5
$D = \lambda$	e1	15,2	11,4	7,4	3,4	1,4
	e2	-0,8	-0,5	-0,3	0,2	2,7
	e3	-14,8	-11,8	-7,7	-3,2	1,4

Tabla 4.3: Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo el mismo ángulo de incidencia para una altura $h/b = 2$ y onda incidente tipo SH

En líneas generales, se aprecia cómo las mayores variaciones del cortante se producen para ondas de tipo SH en los casos con menor separación entre edificios ($D = \lambda/4$ o $\lambda/3$), siendo estas variaciones favorables (el cortante disminuye alrededor de un 20% para los edificios central y final, frente al caso de un único edificio); mientras que para distancias mayores entre estructuras, los mayores valores se presentan para ondas de tipo SV siendo estas desviaciones desfavorables en el sentido de incrementar el valor del cortante (alcanzando valores superiores al 20% para el primer edificio). Atendiendo al ángulo de inclinación, se ve que los mayores valores de variación se obtienen para los ángulos extremos, bien para $\theta = 60^\circ$, que es el caso con la onda más acostada, o para incidencia vertical $\theta = 90^\circ$. En cuanto a la distancia de separación, los casos con una menor distancia tienden a presentar una disminución en los valores del cortante, mientras que conforme va aumentando la separación entre las estructuras, los valores del esfuerzo en comparación con los del edificio solo van incrementando. El primero de los edificios del grupo es el que presenta unos valores de cortante superior al resto, incrementándose este efecto a medida que el ángulo es menor (por ejemplo, para $\lambda/2$ pasa de un incremento del 2.9% en incidencia vertical a un 27.8% para $\theta = 60^\circ$). Por otra parte, el último de los edificios del conjunto presenta unos valores inferiores al resto, apreciándose más esta diferencia conforme la onda incidente es más tumbada, al igual que para la posición anterior. Finalmente, para el edificio central, encontramos un comportamiento que varía en función de la onda a la que está sometido: para ondas de tipo SH mantiene unos valores relativamente constantes independientemente del ángulo de incidencia; mientras que para ondas SV el valor del cortante se incrementa conforme la onda es más vertical (excepto para el caso de $D = \lambda$).

Analizando más detenidamente los resultados para cada una de las distancias de separación, se aprecia que para una distancia de $D = \lambda/4$ prácticamente en la totalidad de los casos se producen disminuciones del cortante respecto al que presentaría un único edificio. Para ondas SH esta disminución se produce en los tres edificios, aumentando el valor de la disminución conforme la onda es más vertical (con un mayor efecto en los edificios exteriores). Mientras que para ondas SV la disminución del cortante sólo se aprecia en los edificios central y final, siendo mayor esta disminución a medida que el ángulo es menor.

Para una separación de $D = \lambda/3$ se ve cómo la diferencia de los valores del primer edificio aumenta respecto a los otros, presentando un incremento del cortante respecto al edificio solo para ondas tipo SV. Para ambos tipos de onda, continúa el comportamiento de incrementar

4 Resultados

la disminución (o reducir el aumento) en el valor del cortante de dicho edificio conforme la onda es más vertical. El edificio central experimenta una disminución clara en el valor del cortante para ondas SH, mientras que para las SV esta disminución es menor, llegando incluso a incrementar para el caso de incidencia vertical. Para el edificio final, la disminución en el valor del cortante se mantiene, siendo esta disminución mayor conforme el ángulo es menor y apreciándose más la influencia del ángulo de incidencia para las ondas de tipo SV (para estas la variación es de -1.6 % a -21.2 %; mientras que para SH el intervalo es de -6.5 % a -16.4 %).

La situación más desfavorable se presenta para una separación entre estructuras de $D = \lambda/2$. Sólo se produce una disminución del cortante para el último edificio y para ángulos de incidencia muy acostados. También hay una reducción ligera del cortante para el edificio central frente a una onda SH, mientras que para ondas SV este edificio es el que mayor incremento del cortante presenta, siendo este aumento mayor si la incidencia es más vertical (alcanzando valores del incremento del 23.1 %). El primer edificio, en cambio, presenta una situación de cortante más desfavorable conforme el ángulo es más tendido, tanto para SH como para SV, siendo las de éste último tipo de onda las más críticas.

El caso de separación $D = \lambda$ presenta un comportamiento del sistema similar al obtenido para la separación anterior. Las únicas diferencias se encuentran para ondas tipo SV en el edificio central, el cual disminuye el aumento de cortante conforme el ángulo va siendo más vertical. Destacar también el caso particular de SV con incidencia vertical donde se observa una disminución en el valor del cortante para todos los edificios, siendo la mayor disminución (-12.6 %) para el edificio central.

Observando ahora los resultados obtenidos para edificios de esbeltez $h/b = 5$ se aprecia que siguen la misma tendencia que para la altura anterior, la diferencia principal se encuentra en que las variaciones que se producen para este tipo de edificio más esbelto son menores. Así la variación del cortante máximo debida a los efectos de interacción estructura-suelo-estructura es mucho menor para estos edificios más esbeltos, como se puede comprobar en las tablas 4.4 y 4.5 y en las gráficas 4.17 y 4.18. Destacar también que las mayores variaciones se obtienen para las distancias de separación más grandes y para los ángulos más tumbados, alcanzando incrementos del 15 % para el primer edificio.

		SV					
		60°	65°	67°	70°	75°	90°
$D = \lambda/4$	e1	5,8	5,2	4,9	4,4	3,3	-0,6
	e2	-4,0	-3,9	-4,0	-4,1	-4,3	-4,4
	e3	-9,2	-8,1	-7,7	-6,9	-5,3	-0,6
$D = \lambda/3$	e1	6,2	5,4	5,0	4,5	3,7	0,9
	e2	-0,8	-0,7	-0,8	-0,8	-0,7	-0,6
	e3	-7,8	-6,4	-5,8	-4,8	-3,2	0,9
$D = \lambda/2$	e1	11,1	9,6	8,9	7,8	5,8	0,3
	e2	0,4	1,0	1,3	1,8	2,6	3,7
	e3	-6,8	-5,4	-4,8	-4,0	-2,9	0,3
$D = \lambda$	e1	17,8	15,2	14,1	12,2	8,5	-2,0
	e2	3,4	3,0	2,7	2,0	0,5	-2,8
	e3	-13,7	-11,6	-10,6	-8,9	-6,2	-2,0

Tabla 4.4: Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo el mismo ángulo de incidencia para una altura $h/b = 5$ y onda incidente tipo SV

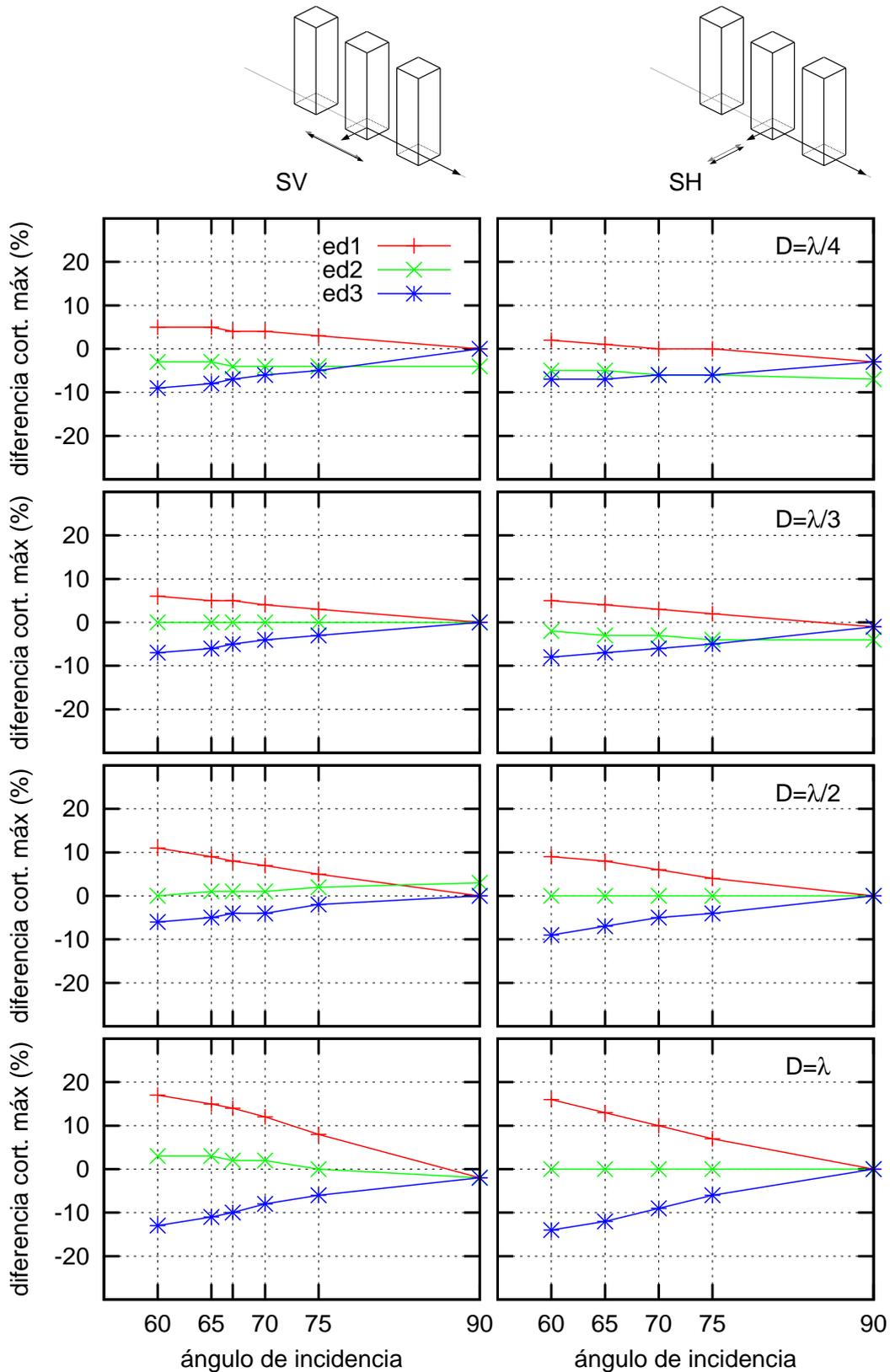


Figura 4.17: Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 5$ separados a diferentes distancias en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo sometido a la misma onda incidente)

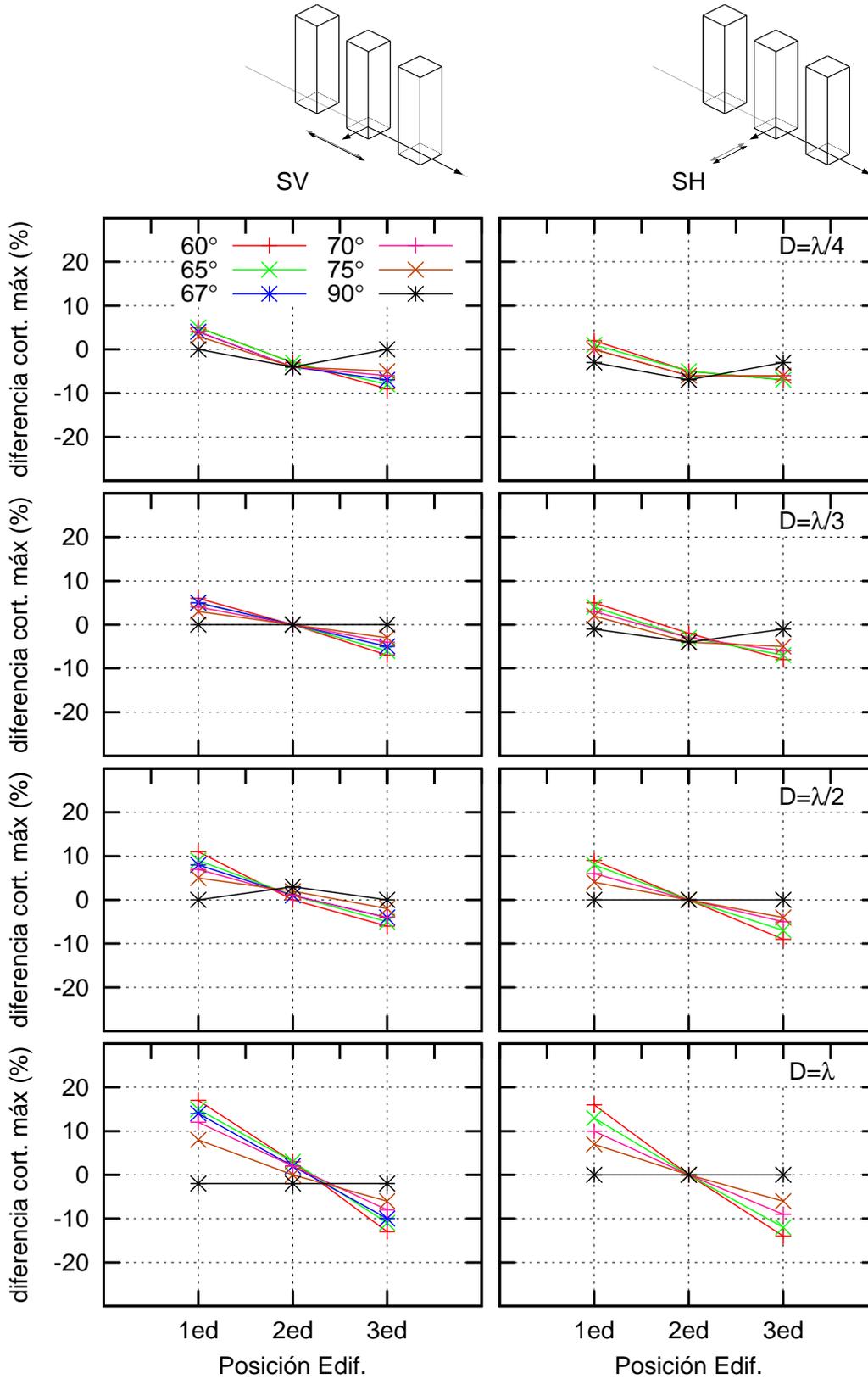


Figura 4.18: Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 5$ separados a diferentes distancias en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo sometido a la misma onda incidente)

		SH				
		60°	65°	70°	75°	90°
$D = \lambda/4$	e1	2,4	1,6	0,6	-0,4	-3,6
	e2	-5,3	-5,9	-6,5	-6,9	-7,6
	e3	-7,6	-7,3	-6,9	-6,3	-3,6
$D = \lambda/3$	e1	5,0	4,1	3,2	2,2	-1,2
	e2	-2,4	-3,1	-3,6	-4,1	-4,8
	e3	-8,3	-7,4	-6,3	-5,1	-1,2
$D = \lambda/2$	e1	9,9	8,2	6,4	4,6	0,0
	e2	-0,2	-0,1	-0,1	0,0	0,2
	e3	-9,1	-7,5	-5,9	-4,3	0,0
$D = \lambda$	e1	17,0	14,0	10,8	7,6	0,0
	e2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1
	e3	-14,3	-12,1	-9,7	-7,0	0,0

Tabla 4.5: Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo el mismo ángulo de incidencia para una altura $h/b = 5$ y onda incidente tipo SH

4.5.1.2 Influencia del ángulo de incidencia para un edificio solo

La figura 4.19 y la tabla 4.6 muestran cómo cambia el cortante para el sistema suelo-estructura según la inclinación de la onda incidente, empleando como referencia el valor del cortante que presenta frente a incidencia vertical.

	SV					SH			
	60°	65°	67°	70°	75°	60°	65°	70°	75°
$h/b = 2$	-21,8	-0,7	4,9	3,7	2,0	-1,5	-1,0	-0,7	-0,4
$h/b = 5$	-26,3	-4,1	1,7	1,3	0,7	-0,2	-0,1	-0,1	-0,1

Tabla 4.6: Variación del cortante (%) en función del ángulo de incidencia para el caso del sistema suelo-estructura

Se observa que el comportamiento de ambos edificios es el mismo, influyendo la esbeltez únicamente en el valor que toma la variación, siendo esta menor para edificios más esbeltos.

El tipo de onda, por otra parte, es un factor fundamental en la influencia en la respuesta del ángulo de incidencia ya que, aunque para ondas de tipo SH no se aprecien prácticamente variaciones con el mismo; para ondas SV se comprueba que el ángulo con el que se propaga la onda tiene un papel fundamental en la respuesta estructural. Para ángulos muy tumbados, se ve cómo el cortante sufre un gran decremento en su valor. A medida que nos encontramos en el entorno del ángulo crítico, los valores del cortante que se presentan en la base de la estructura aumentan levemente. Una vez por encima del ángulo crítico, los valores empiezan a disminuir hasta alcanzar el valor de referencia (incidencia vertical, $\theta = 90^\circ$).

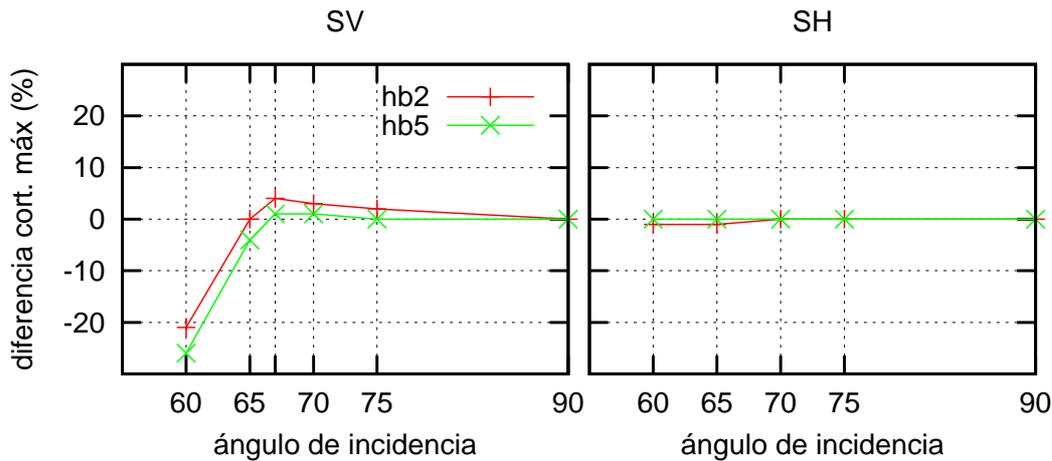


Figura 4.19: Variación del cortante máximo para el edificio solo sometido a diferentes ángulos de incidencia (comparado con incidencia vertical para el mismo tipo de edificio)

4.5.1.3 Comparación con el edificio solo sometido a incidencia vertical

Sintetizando lo visto en los dos apartados anteriores, se exponen a continuación los valores de la variación del cortante para cada uno de los edificios de los problemas estudiados tomando como referencia el valor que presenta una estructura de las mismas características sola y con una incidencia vertical del mismo tipo de onda. Se realiza esta comparación ya que es esta la disposición que se supone habitualmente en el cálculo estructural. Permite, además, tener una comparación de una forma más 'absoluta' de los valores que presentarían los cortantes en cada uno de los casos estudiados, al emplearse para todos ellos el mismo valor de referencia; identificándose así los casos más desfavorables. Nótese que los resultados obtenidos serán una combinación de los dos anteriores, ya que en el primero de ellos hemos comprobado los efectos de la interacción estructura-suelo-estructura respecto a un edificio solo sometido al mismo ángulo de incidencia; y, a continuación, se estudió cómo afecta el ángulo de incidencia en el valor del cortante respecto a la incidencia vertical. Se hará, por ello, simplemente un comentario de los casos más significativos que se reflejan en los resultados.

En las tablas 4.7 y 4.8 y en las gráficas 4.20 y 4.21, se exponen los resultados para los edificios de esbeltez $h/b = 2$.

En ellos se observa como las mayores variaciones se producen para ondas tipo SV, tanto las favorables como las desfavorables, siendo los menores valores de -44.7% y los mayores de 30.1% (mientras que para las SH, estos valores extremos son: -27.5% y 13.5%).

Para ondas SH nos encontramos que, para distancias pequeñas de separación entre estructuras, los valores de los cortantes son siempre inferiores a los presentados en el caso de encontrarse la estructura sola. Para distancias superiores a $D = \lambda/2$ empiezan a producirse incrementos en los cortantes, pero únicamente para el primer edificio. Solamente para incidencia vertical con una distancia de separación $D = \lambda$ encontramos que todos los edificios experimentan un aumento en el valor del cortante, aún así este incremento es mínimo (inferior al 3%).

Para ondas SV, recordando que son las que originan desplazamientos en la dirección de alineación de los edificios, sí encontramos mayores diferencias. Por una parte, para ángulos inferiores al crítico ($\theta = 60^\circ$) vemos como el valor del cortante sufre una gran reducción para todas

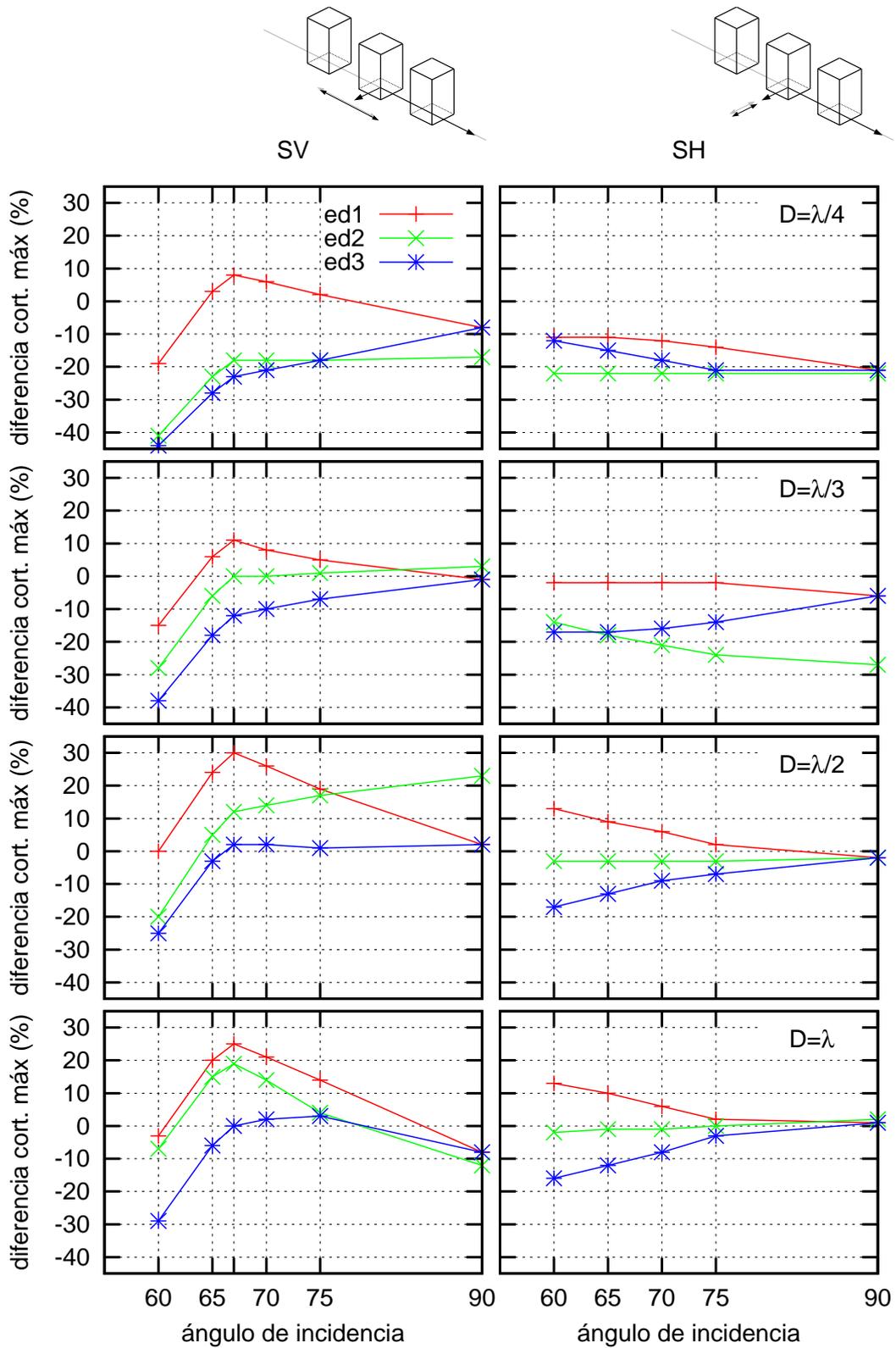


Figura 4.20: Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados a diferentes distancias en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo sometido a incidencia vertical)

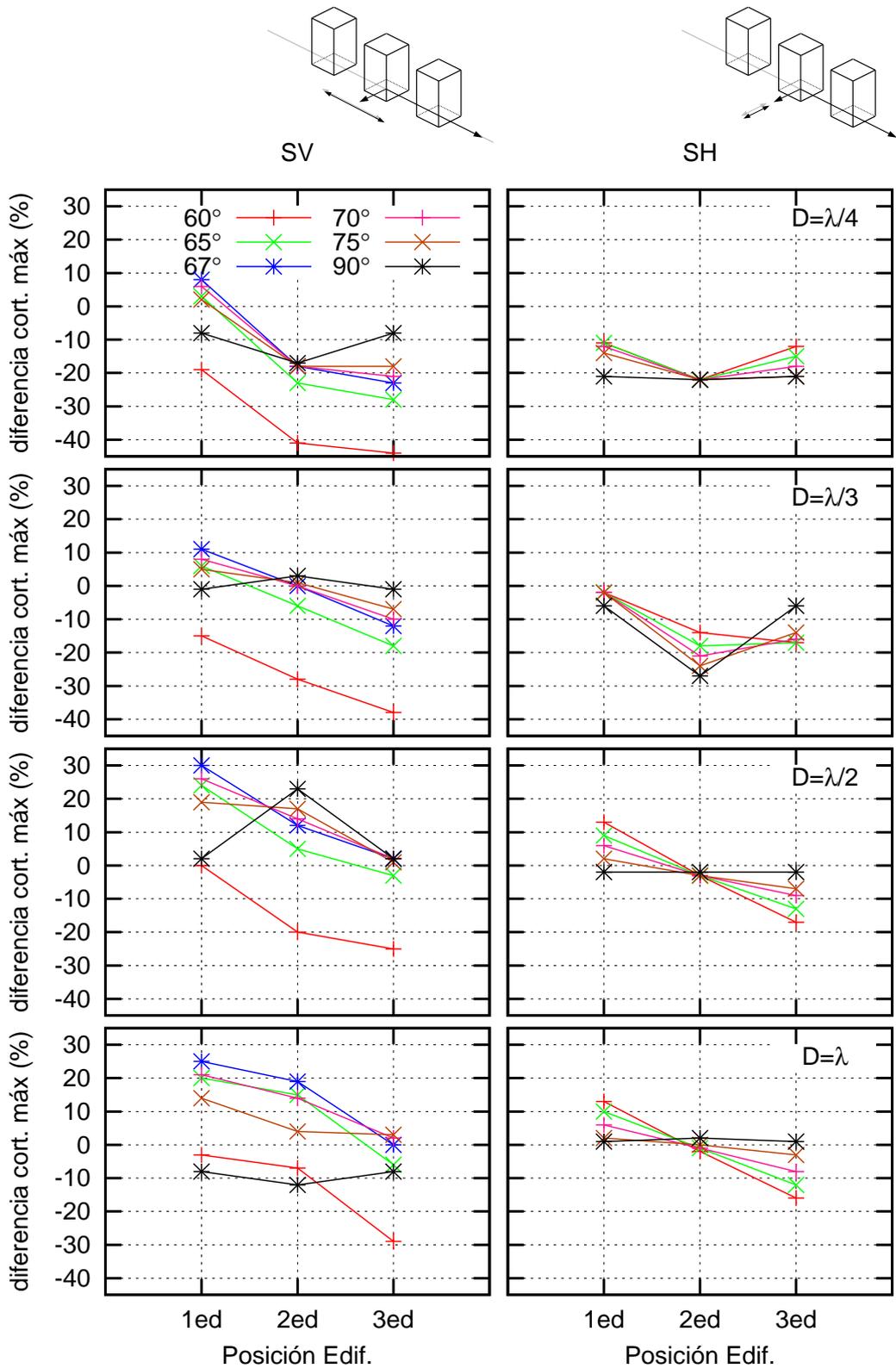


Figura 4.21: Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados a diferentes distancias en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo sometido a incidencia vertical)

		SV					
		60°	65°	67°	70°	75°	90°
$D = \lambda/4$	e1	-19,0	3,5	8,8	6,2	2,2	-8,1
	e2	-41,4	-23,2	-18,5	-18,6	-18,3	-17,3
	e3	-44,7	-28,0	-23,2	-21,5	-18,3	-8,1
$D = \lambda/3$	e1	-15,7	6,3	11,5	8,9	5,3	-1,6
	e2	-28,9	-6,4	-0,4	0,1	1,4	3,8
	e3	-38,4	-18,2	-12,2	-10,5	-7,9	-1,6
$D = \lambda/2$	e1	-0,1	24,5	30,1	26,4	19,8	2,9
	e2	-20,3	5,3	12,8	14,7	17,9	23,1
	e3	-25,3	-3,0	2,9	2,4	1,1	2,9
$D = \lambda$	e1	-3,3	20,1	25,6	21,9	14,4	-8,7
	e2	-7,6	15,2	19,8	14,4	4,5	-12,6
	e3	-29,7	-6,7	0,7	2,6	3,4	-8,7

Tabla 4.7: Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo incidencia vertical para edificios de esbeltez $h/b = 2$ y onda incidente tipo SV

		SH				
		60°	65°	70°	75°	90°
$D = \lambda/4$	e1	-11,0	-11,7	-12,7	-14,3	-21,2
	e2	-23,0	-22,9	-22,7	-22,5	-22,1
	e3	-13,0	-15,9	-18,8	-21,4	-21,2
$D = \lambda/3$	e1	-2,8	-2,8	-2,8	-2,9	-6,5
	e2	-14,3	-18,2	-21,7	-24,3	-27,5
	e3	-17,1	-17,3	-16,3	-14,2	-6,5
$D = \lambda/2$	e1	13,3	9,9	6,3	2,9	-2,5
	e2	-3,6	-3,8	-3,7	-3,2	-2,1
	e3	-17,0	-13,4	-10,0	-7,0	-2,5
$D = \lambda$	e1	13,5	10,3	6,7	3,0	1,4
	e2	-2,2	-1,5	-1,0	-0,2	2,7
	e3	-16,1	-12,7	-8,3	-3,6	1,4

Tabla 4.8: Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo incidencia vertical para edificios de esbeltez $h/b = 2$ y onda incidente tipo SH

las posiciones del grupo de edificios. Esta disminución, que llega incluso a superar el 40%, es mayor conforme los edificios están más próximos y la posición del edificio estudiado se encuentra más atrasada. En el entorno del ángulo crítico y para ángulos superiores a él, nos encontramos las variaciones más desfavorables para el cortante, que aumentan en valor si la distancia de separación entre estructuras es mayor. Este efecto se aprecia principalmente en el primer edificio y el edificio central; aunque para grandes distancias de separación y valores de θ del entorno del crítico el edificio final también experimenta cortantes superiores a los experimentados por el edificio solo. Destacar también para una separación $D = \lambda/2$ e incidencia vertical que el edificio central se encuentra sometido al mayor incremento del esfuerzo (un 23.1%), superando incluso a los experimentados por los edificios laterales (solo un 2.9%).

Observando estos mismos resultados para los edificios de esbeltez $h/b = 5$ en las tablas 4.9 y 4.10 y las figuras 4.22 y 4.23, se comprueba que el comportamiento que siguen es similar al anterior. Para ondas SH, las variaciones del cortante no sufren tanta disminución, presentando

4 Resultados

valores más elevados que para edificios de menor esbeltez. Lo mismo ocurre para ondas de tipo SV, donde los valores son más próximos a cero (menores variaciones tanto de incrementos como de disminuciones), excepto para ángulos por debajo del crítico y mayores distancias de separación entre edificios ($D = \lambda/2$ o λ), donde la disminución que presenta el cortante es superior en esta tipología de edificación.

Para este tipo de estructuras, la posición crítica es únicamente la primera del grupo, ya que, al contrario que para edificios menos esbeltos, la posición central no presenta valores excesivos de incremento de esfuerzos (un 3.7% en el caso más desfavorable).

		SV					
		60°	65°	67°	70°	75°	90°
$D = \lambda/4$	e1	-22,0	1,0	6,7	5,7	4,0	-0,6
	e2	-29,2	-7,8	-2,4	-2,9	-3,6	-4,4
	e3	-33,0	-11,9	-6,2	-5,7	-4,7	-0,6
$D = \lambda/3$	e1	-21,7	1,1	6,8	5,9	4,4	0,9
	e2	-26,8	-4,8	0,9	0,5	-0,1	-0,6
	e3	-32,0	-10,2	-4,3	-3,6	-2,5	0,9
$D = \lambda/2$	e1	-18,1	5,2	10,8	9,2	6,5	0,3
	e2	-25,9	-3,1	3,0	3,1	3,2	3,7
	e3	-31,3	-9,2	-3,2	-2,8	-2,2	0,3
$D = \lambda$	e1	-13,1	10,5	16,0	13,7	9,2	-2,0
	e2	-23,8	-1,2	4,4	3,3	1,2	-2,8
	e3	-36,3	-15,2	-9,1	-7,8	-5,6	-2,0

Tabla 4.9: Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo incidencia vertical para edificios de esbeltez $h/b = 5$ y onda incidente tipo SV

		SH				
		60°	65°	70°	75°	90°
$D = \lambda/4$	e1	2,2	1,4	0,5	-0,5	-3,6
	e2	-5,4	-6,0	-6,5	-7,0	-7,6
	e3	-7,8	-7,5	-7,0	-6,3	-3,6
$D = \lambda/3$	e1	4,8	4,0	3,1	2,2	-1,2
	e2	-2,6	-3,2	-3,7	-4,2	-4,8
	e3	-8,4	-7,5	-6,4	-5,2	-1,2
$D = \lambda/2$	e1	9,6	8,0	6,3	4,6	0,0
	e2	-0,4	-0,3	-0,1	0,0	0,2
	e3	-9,3	-7,6	-5,9	-4,3	0,0
$D = \lambda$	e1	16,7	13,8	10,7	7,6	0,0
	e2	-0,1	0,1	0,2	0,2	0,1
	e3	-14,5	-12,3	-9,7	-7,0	0,0

Tabla 4.10: Variación del cortante (%) respecto al presentado por el edificio solo bajo incidencia vertical para edificios de esbeltez $h/b = 5$ y onda incidente tipo SH

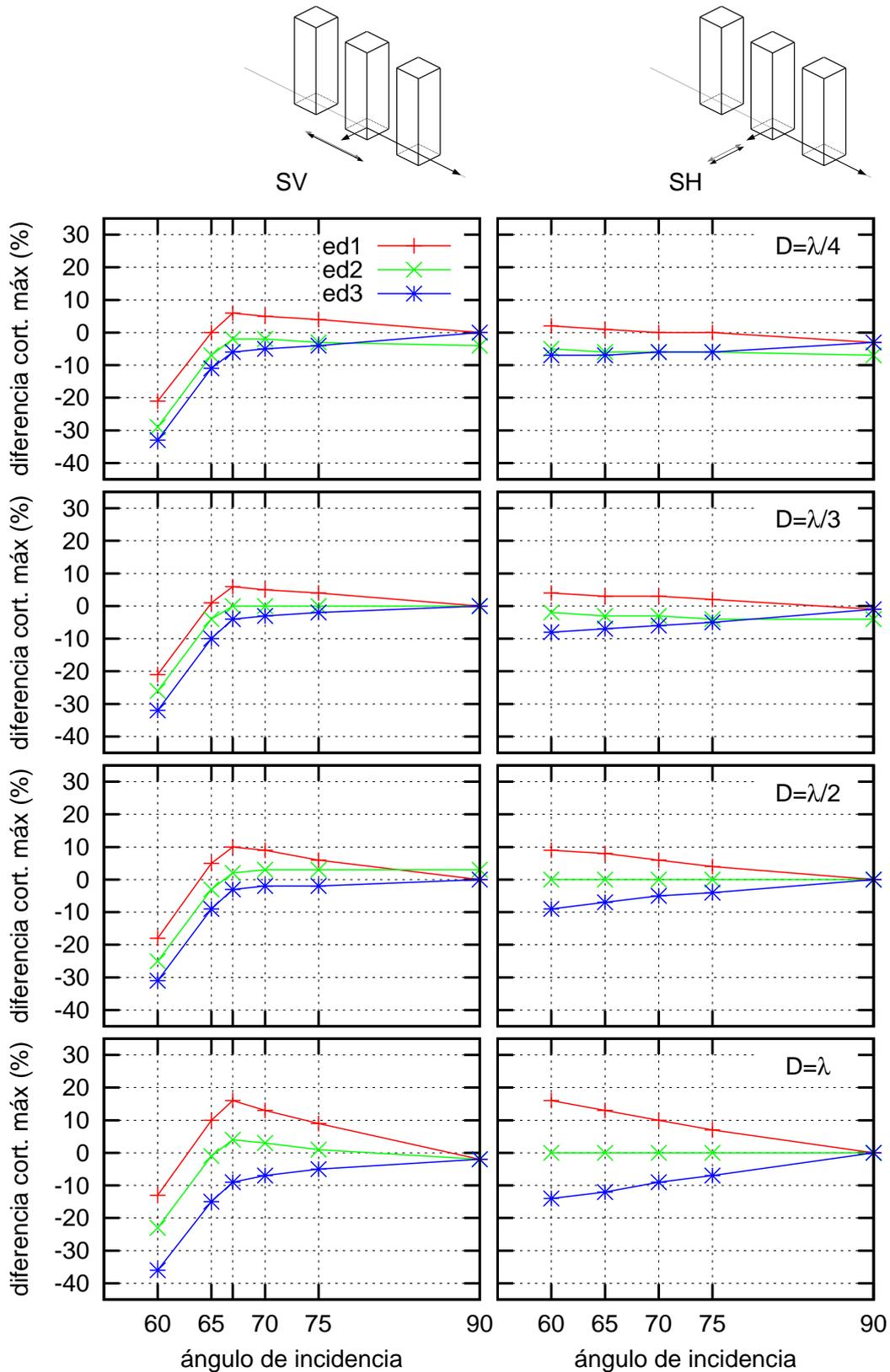


Figura 4.22: Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 5$ separados a diferentes distancias en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo sometido a incidencia vertical)

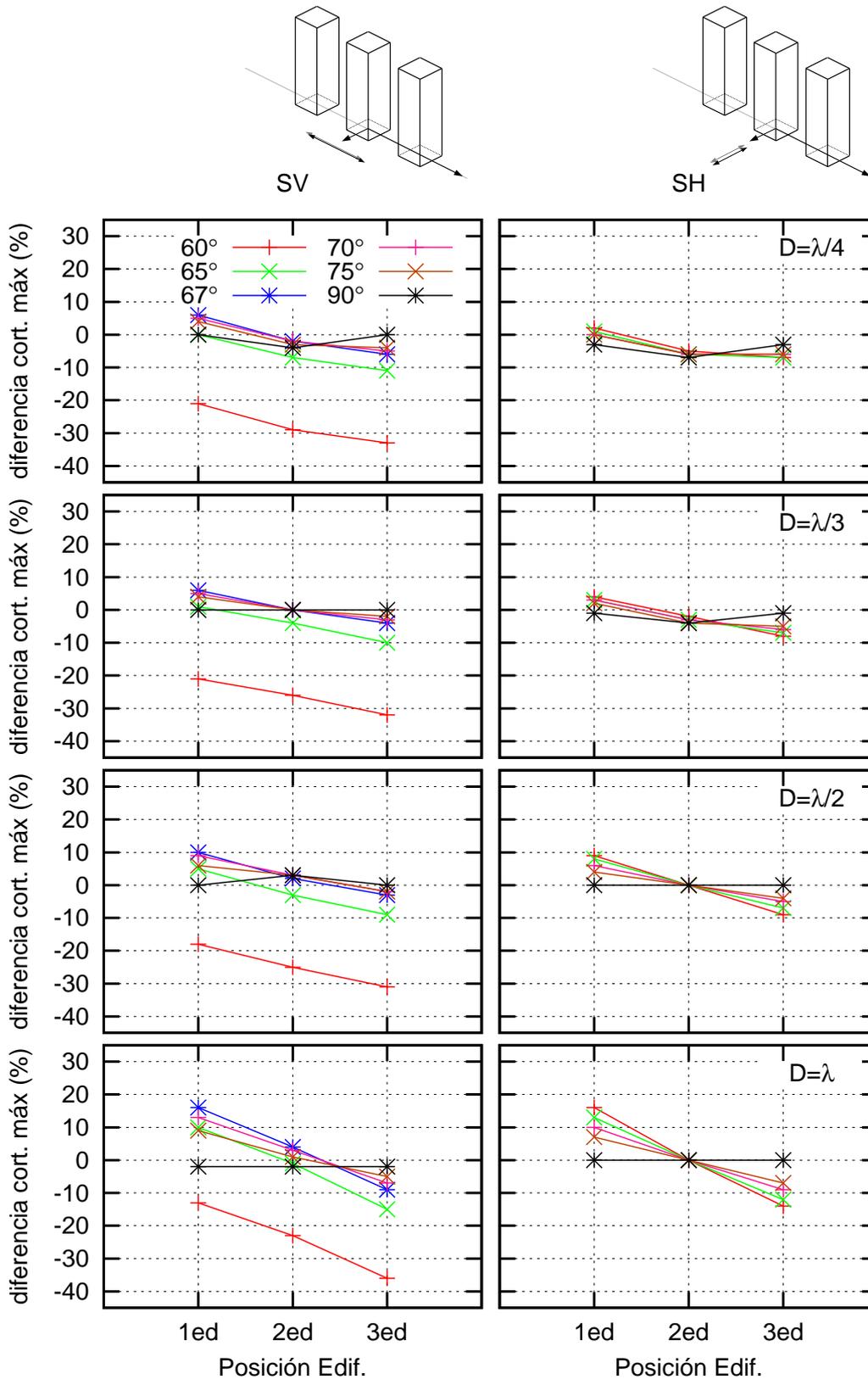


Figura 4.23: Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 5$ separados a diferentes distancias en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo sometido a incidencia vertical)

4.5.2 Variación de la frecuencia del cortante máximo

Se estudiarán a continuación los cambios producidos en los valores de frecuencia en los que se obtiene la máxima respuesta en cortante. Estos valores se compararán con el valor de frecuencia de pico que se presenta para el sistema suelo-estructura, el cual es constante y, por tanto, independiente del tipo de onda y ángulo de incidencia al que esté sometido; cambiando lógicamente según la tipología de estructura estudiada. A la hora de interpretar los resultados hay que considerar que pequeñas variaciones en la frecuencia no son significativas, ya que al emplearse una herramienta numérica, podemos encontrarnos en uno de los dos extremos del intervalo en el que se encuentra la frecuencia de respuesta máxima. Por ello, no se considerarán variaciones menores a un 0.8 % como significativas.

Las figuras 4.24 y 4.25 junto a la tabla 4.11 muestran las variaciones en los valores de la frecuencia de pico para los edificios de esbeltez $h/b = 2$. En ellas se observa cómo las mayores variaciones de frecuencia se producen para distancias de separación pequeñas, siendo el edificio central el que presenta un mayor cambio en su frecuencia pico, seguido por el edificio final.

Se comprueba también que, para un sistema con varias edificaciones, tanto el ángulo de incidencia como el tipo de onda influyen en el valor de frecuencia a la cual se produce el máximo cortante, al contrario que ocurre para una estructura aislada. Esta variación con el ángulo incidente se aprecia más para el edificio central. Además, para determinados casos (como el edificio final en SH y $D = \lambda/4$ o el central y primer edificio en SV y $D = \lambda$) se observa que en los valores de ángulos extremos ($\theta = 60^\circ$ o $\theta = 90^\circ$) la frecuencia cambia sensiblemente en comparación con los valores obtenidos para los otros ángulos de incidencia.

Considerando la posición central se observa cómo, para separaciones pequeñas, la frecuencia pico experimenta un aumento si la onda es de tipo SV, mientras que disminuye su valor en el caso de SH; acentuándose este efecto para el caso de incidencia vertical. Este caso de incidencia vertical ilustra claramente cómo afecta la dirección en la que se producen los desplazamientos en relación con la dirección de alineación de las edificaciones, ya que el comportamiento de ambas ondas es el mismo para incidencia vertical, variando únicamente en que las SH producen desplazamientos de campo libre en la dirección x (perpendicular a la alineación de las estructuras), mientras que las SV lo hacen en la misma dirección en la que se encuentran alineadas las edificaciones. Para una distancia de separación mayor, $D = \lambda$, no sufre cambios importantes en la frecuencia excepto para incidencia vertical, donde su frecuencia de pico se ve reducida. Atendiendo al tipo de onda, se ve que el tipo SH presenta mayores variaciones de la frecuencia según el ángulo de incidencia, efecto que se refleja claramente en la figura 4.25 observando el edificio central.

La figura 4.26 muestra claramente cómo para estructuras con una mayor esbeltez, $h/b = 5$ en este caso, los valores de la frecuencia de pico se mantienen invariables tanto con los diferentes tipos de onda y ángulos de incidencia, como con la posición relativa de la edificación en el grupo. Presenta pues, un comportamiento similar al de un edificio solo.

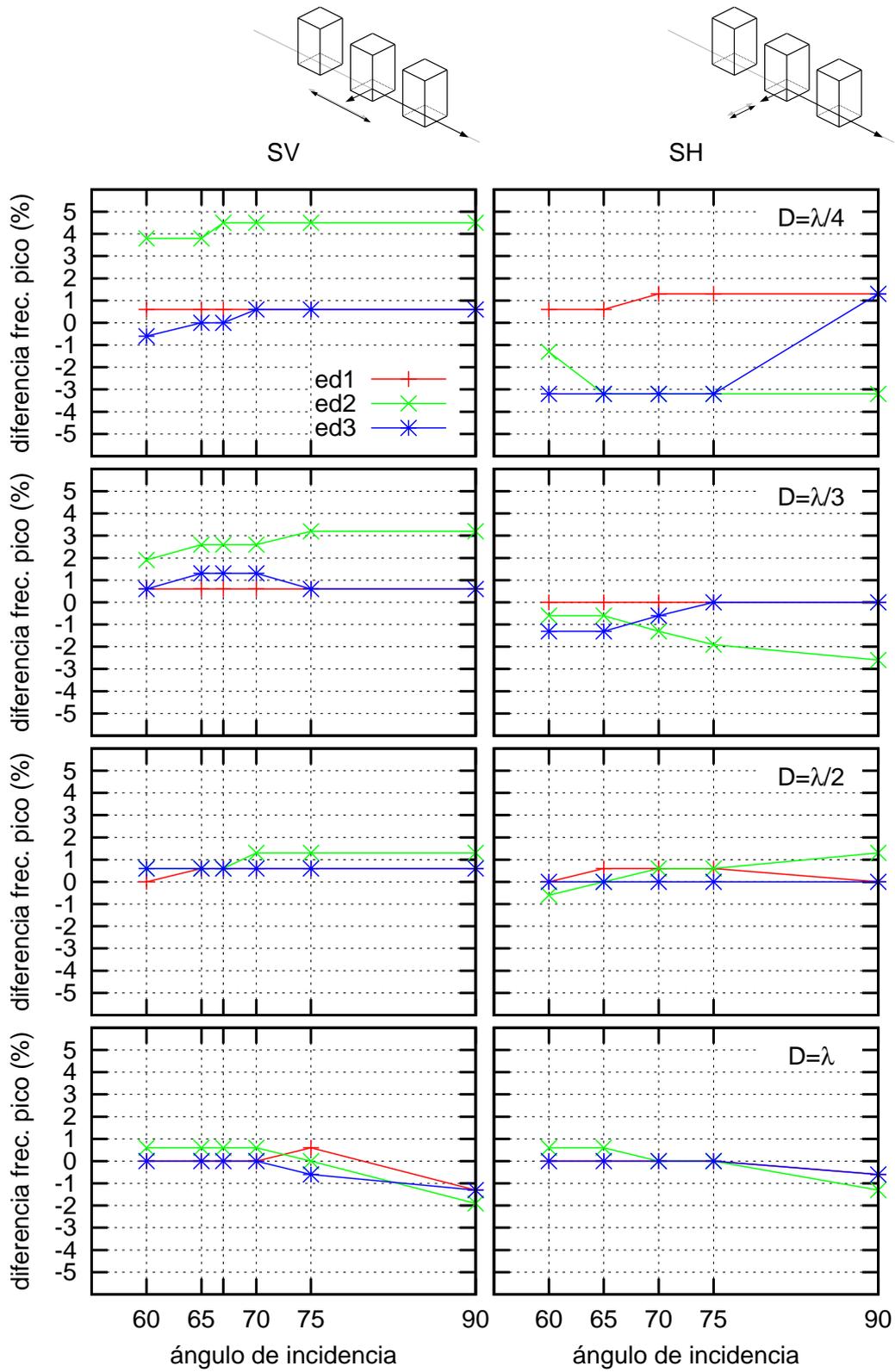


Figura 4.24: Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 2$ separados a diferentes distancias en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo)

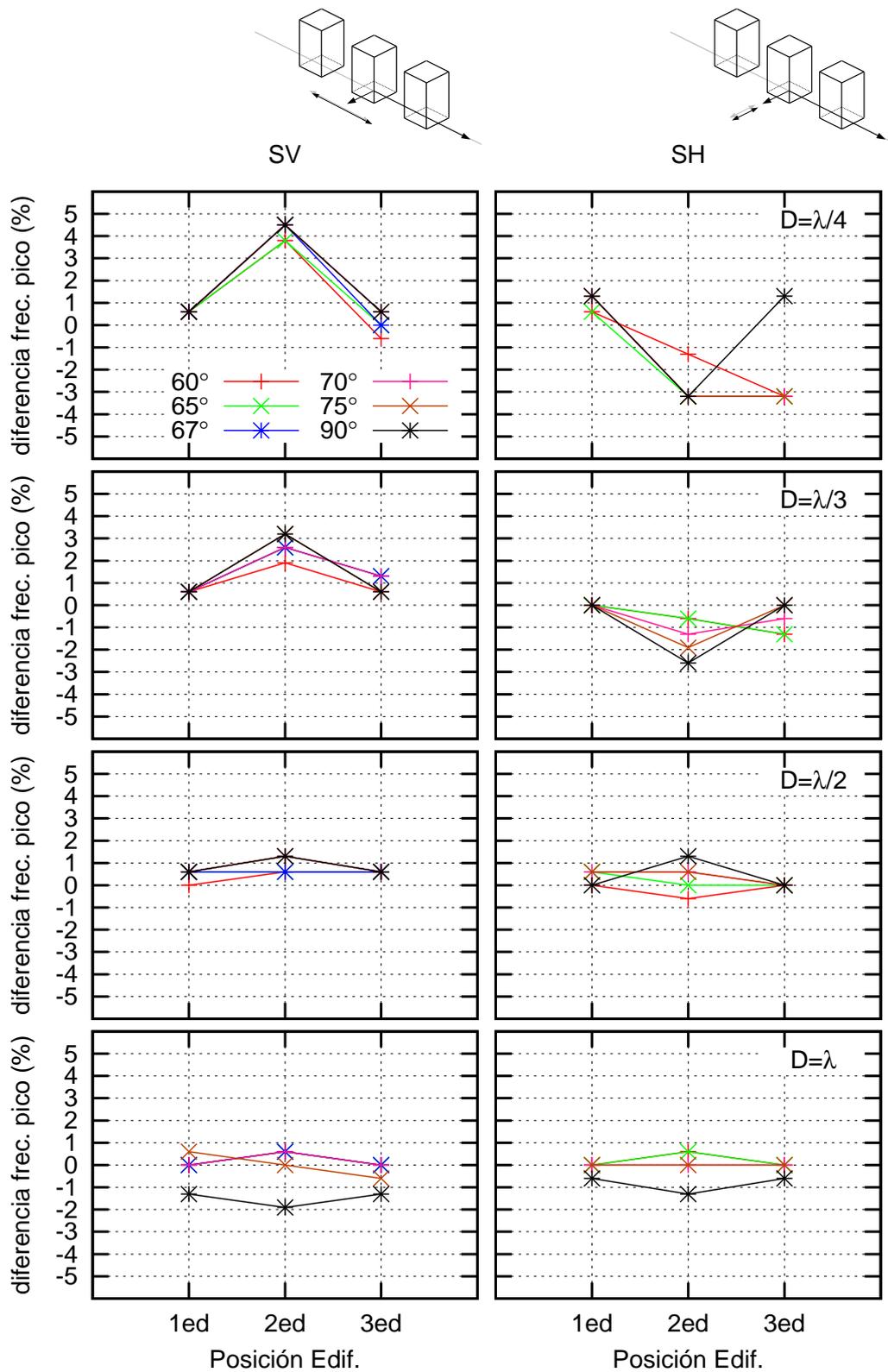


Figura 4.25: Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 2$ separados a diferentes distancias en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo)

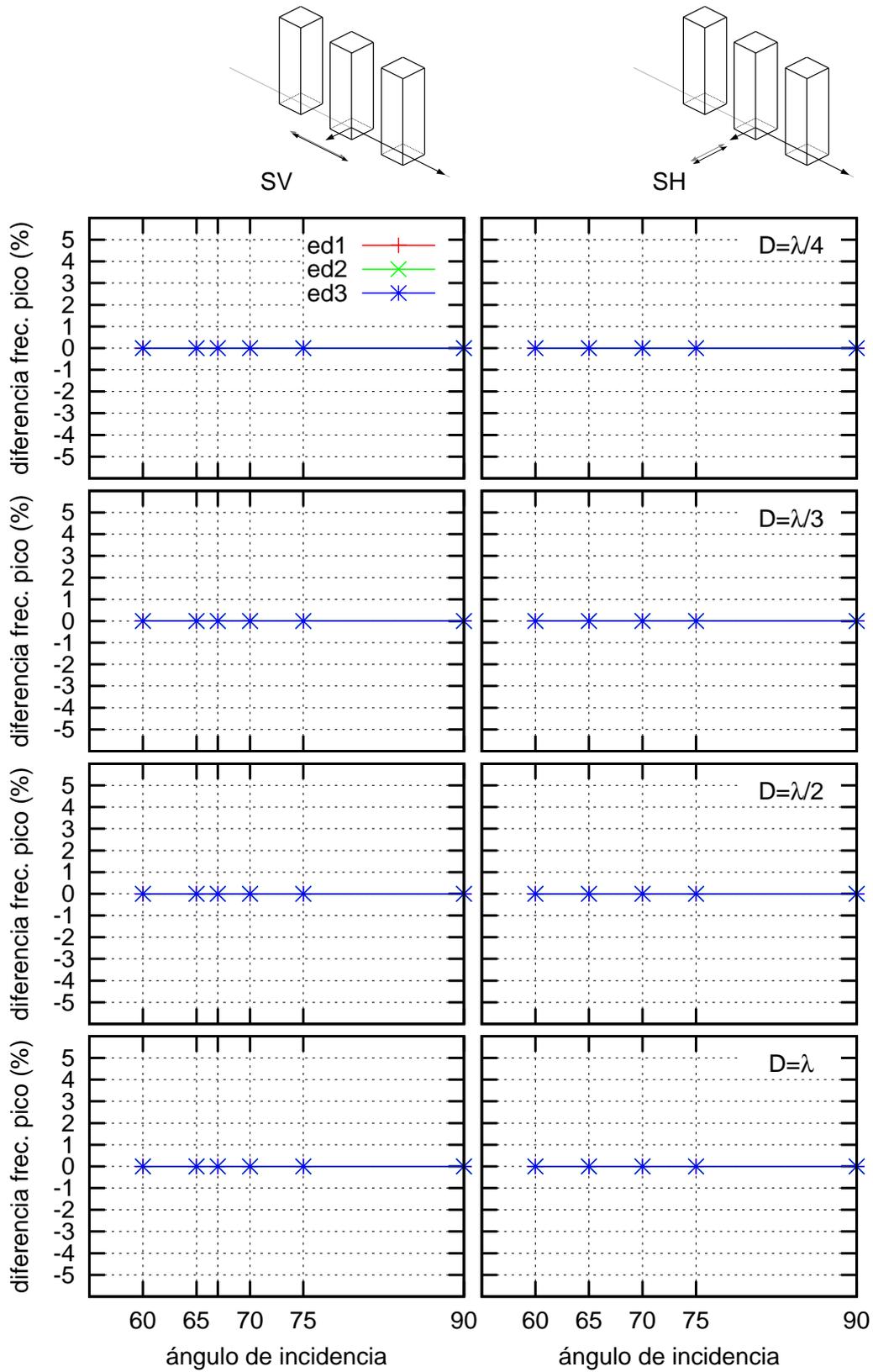


Figura 4.26: Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 5$ separados a diferentes distancias en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo)

		SV						SH				
		60°	65°	67°	70°	75°	90°	60°	65°	70°	75°	90°
$D = \lambda/4$	e1	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	1,3	1,3	1,3
	e2	3,8	3,8	4,5	4,5	4,5	4,5	-1,3	-3,2	-3,2	-3,2	-3,2
	e3	-0,6	0,0	0,0	0,6	0,6	0,6	-3,2	-3,2	-3,2	-3,2	1,3
$D = \lambda/3$	e1	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	e2	1,9	2,6	2,6	2,6	3,2	3,2	-0,6	-0,6	-1,3	-1,9	-2,6
	e3	0,6	1,3	1,3	1,3	0,6	0,6	-1,3	-1,3	-0,6	0,0	0,0
$D = \lambda/2$	e1	0,0	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,0	0,6	0,6	0,6	0,0
	e2	0,6	0,6	0,6	1,3	1,3	1,3	-0,6	0,0	0,6	0,6	1,3
	e3	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$D = \lambda$	e1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	-1,3	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,6
	e2	0,6	0,6	0,6	0,6	0,0	-1,9	0,6	0,6	0,0	0,0	-1,3
	e3	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,6	-1,3	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,6

Tabla 4.11: Variación de la frecuencia pico (%) en función del ángulo de incidencia y las diferentes configuraciones para edificios de esbeltez $h/b = 2$

4.5.3 Interpretación de los resultados

4.5.3.1 Efecto pantalla

Observando los resultados, se comprueba que los valores del cortante que presentan las estructuras en las diferentes posiciones va decreciendo conforme se avanza en la dirección de propagación de la onda. El primero de ellos es el que presenta los mayores valores, mientras que el edificio final ve reducido el valor de su esfuerzo resonante.

Este fenómeno se denomina efecto pantalla y se produce al tener una onda de excitación inclinada, caso en el que la onda incidente es parcialmente refractada por una cimentación antes de alcanzar la siguiente. La primera estructura o cimentación que atraviese absorberá parte de su energía al empezar a vibrar, llegando a las siguientes estructuras una onda más debilitada. Este efecto se acentúa al disminuir el ángulo de incidencia, puesto que a menor valor de θ más distancia horizontal recorre la misma onda y más posibilidad tiene de afectar a varias cimentaciones y estructuras.

El efecto pantalla, como se ha comentado, es propio de campos de ondas inclinadas, ya que para incidencia vertical todas las edificaciones reciben la onda simultáneamente; por esto, para $\theta = 90^\circ$ el comportamiento de los dos edificios extremos es el mismo.

La figura 4.27 ilustra algunos fenómenos relacionados con el denominado efecto pantalla. Por una parte se representa la reflexión de ondas sobre la superficie libre, creando un campo reflejado que se suman al campo que incide directamente sobre los edificios (A), efecto que tenderá a incrementar la energía recibida por el primer edificio del grupo. Al entrar las ondas inclinadas en la zona de la cimentación aparecen los fenómenos de refracción-reflexión. Debido al cambio de dominio, parte de la energía de la onda es reflejada y otra parte continúa su propagación pero con una dirección diferente. Esto ocurre tanto al llegar a un pilote individual como al llegar a la cota inferior de la cimentación dado que, en este punto, la onda entra en un dominio más rígido debido a la presencia de la misma. De la energía reflejada, una parte se dirige a los edificios anteriores (C) y otra se refleja de nuevo hacia el semiespacio (B), continuando la parte refractada para excitar el edificio al que corresponde la cimentación o al siguiente (D) (pudiendo ser reflejada esta onda también por la superficie libre).

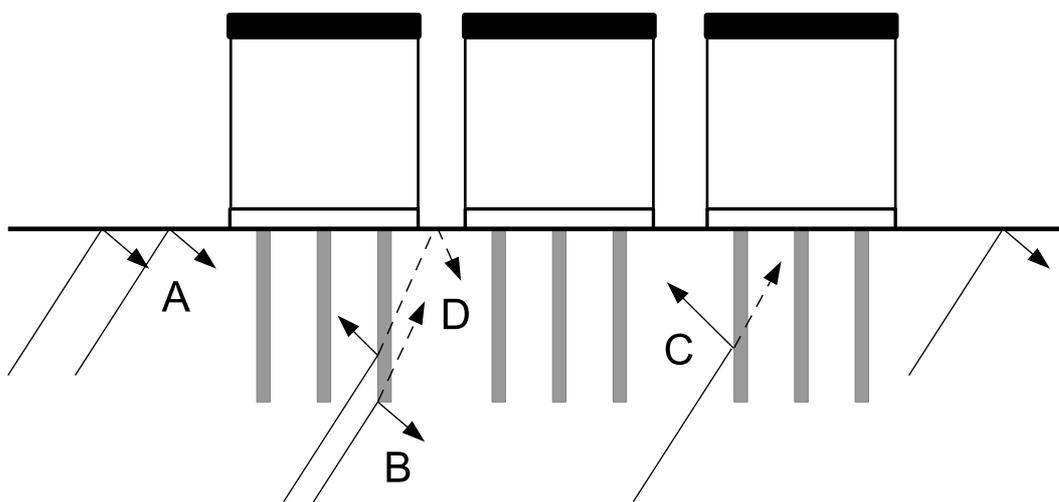


Figura 4.27: Fenómenos de reflexión y refracción que intervienen en el problema estudiado

4.5.3.2 Superposición de modos

Atendiendo a los resultados obtenidos en los valores de las frecuencias a las que se produce el cortante máximo, se aprecia cómo, para diferentes valores de la inclinación de la onda incidente, la frecuencia donde se produce el pico se va desplazando. Este efecto, no se observa para el caso de un edificio solo, el cual presenta siempre un valor de la frecuencia de respuesta máxima fijo.

Una primera explicación a este efecto la da el hecho de que el problema real es la combinación de dos formas de vibración diferentes definidas por distintas condiciones de simetría, las cuales no tienen por qué presentar el mismo valor en la frecuencia pico. Estos dos modos de vibración son los explicados en la sección 4.2, y pueden corresponder a los representados en la figura 4.28 para el caso de ondas SV (desplazamiento en la dirección de alineación de los edificios) y en la figura 4.29 para el caso de la SH (desplazamientos perpendiculares a la alineación de las estructuras).

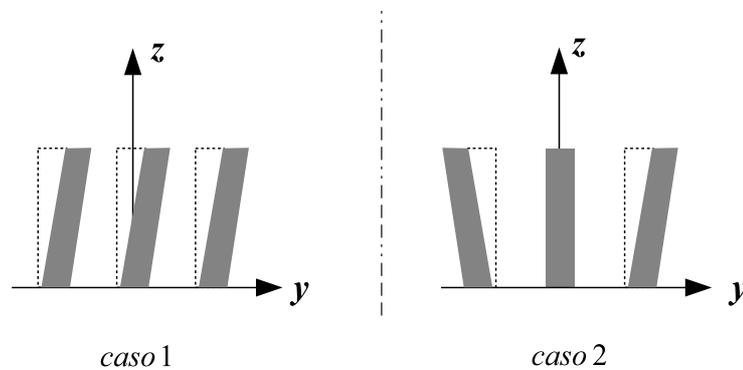


Figura 4.28: Modos de vibración para las diferentes simetrías para ondas SV (desplazamiento paralelo a la alineación de edificios)

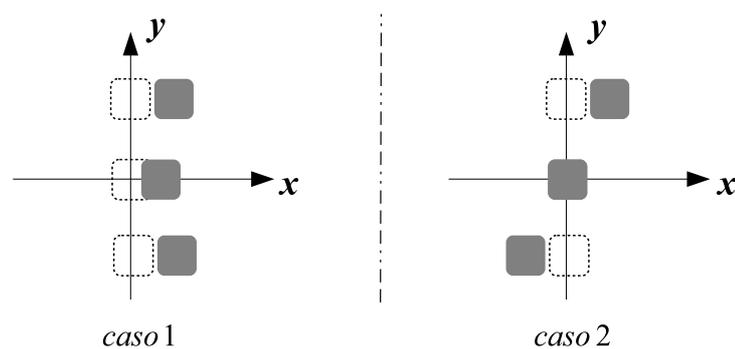


Figura 4.29: Modos de vibración para las diferentes simetrías para ondas SH (desplazamiento perpendicular a la alineación de edificios)

Para una mayor comprensión de este efecto, se muestran en las figuras (4.30 a 4.35) los cortantes de los dos casos de simetría por separado y los del caso completo para los diferentes ángulos de incidencia. Según lo expuesto en la sección 4.2 y para simplificar la nomenclatura, se ha llamado *caso 1* a aquel caso que produce desplazamientos en el edificio central (el caso

de antisimetría en x para la onda SV y el de simetría en x para SH) y caso 2 al otro.

En las figuras (4.30 a 4.35) se observa cómo los diferentes edificios extremos son la combinación de los dos casos de simetría. Al poder presentar la deflexión signos contrarios tanto en la parte real como la imaginaria, la adición de ambos (edificio 3) no implica un aumento en el valor del cortante; de la misma forma que la diferencia de ellos (edificio 1) no crea una reducción del mismo. Se aprecia que al ir pasando a un ángulo de incidencia más vertical, el valor del caso 1 va aumentando, mientras que el del caso 2 disminuye, hasta anularse completamente para $\theta = 90$. Esta variación del peso de las dos simetrías en el problema final explica las variaciones en la frecuencia de pico de los edificios extremos. Este efecto se puede observar mejor en las figuras 4.36 y 4.37.

Se presenta ahora un nuevo problema al comprobar que, para el edificio central (el cual está sometido a un único caso de simetría) la frecuencia de cortante máximo también varía. Además, para los edificios extremos, también se producen desplazamientos de la frecuencia de pico en función del ángulo de incidencia para un caso de simetría en concreto. Esto se comprueba en la figura 4.36 donde para la onda SH el valor máximo se alcanza a valores de frecuencia cada vez más elevados conforme la onda es más vertical. Este efecto se puede explicar, recurriendo una vez más a los diferentes modos de vibración del sistema. Hay que considerar que, para un caso de simetría en concreto, pueden existir diferentes modos de vibración con frecuencias de pico próximas entre sí.

Se exponen a modo de ejemplo en la figura 4.38 algunos posibles modos de vibración para el caso de una onda SH con simetría en el eje x . Los desplazamientos están exagerados para una mejor visión de los mismos, la parte sombreada corresponde a la planta, mientras que la parte discontinua a la base de la estructura.

Puede existir una gran cantidad de modos de vibración (como se ilustra en la figura 4.38), que involucran a múltiples grados de libertad (desplazamientos horizontales de planta y base, giros del edificio en torno a los ejes horizontales, giros de torsión en torno a z , etc.) cuyas combinaciones dan lugar a los distintos modos con frecuencias propias ligeramente diferentes. La existencia de estos modos, y el hecho de que son excitados en mayor o menor medida en función del tipo de excitación, provoca que el pico de cortante observado (obtenido de la superposición de todos los modos participantes) cambie de posición según el tipo de excitación (reflejado en el problema en forma de ángulo de incidencia). Este pico no corresponde en sí a ningún modo concreto (cuya frecuencia propia, por su propia naturaleza, no depende de la excitación).

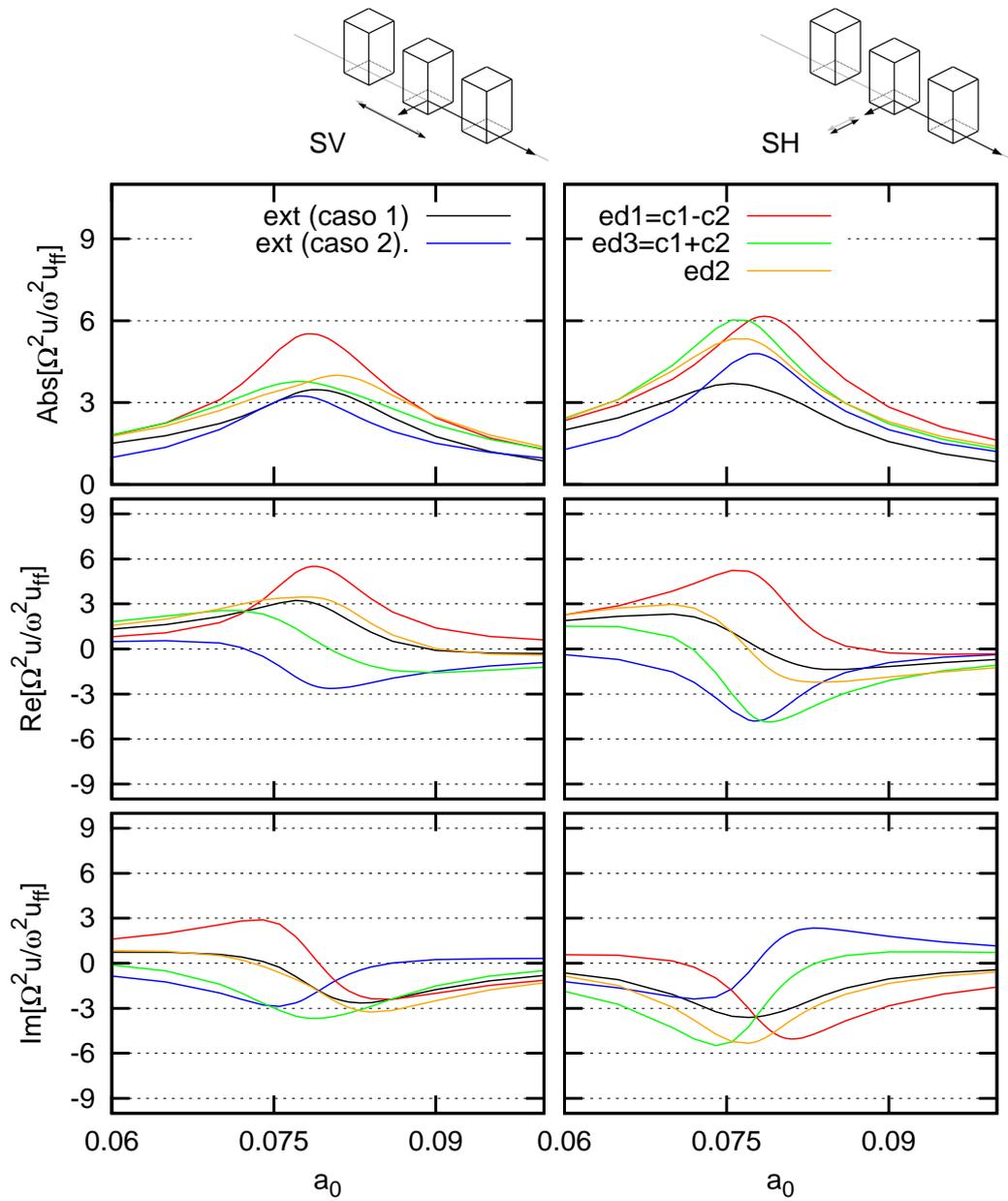


Figura 4.30: Deflexión para los diferentes edificios de altura $h/b = 2$ sometidos a ondas SV/SH con un ángulo incidente de 60° para el caso de distancia $D = \lambda/4$

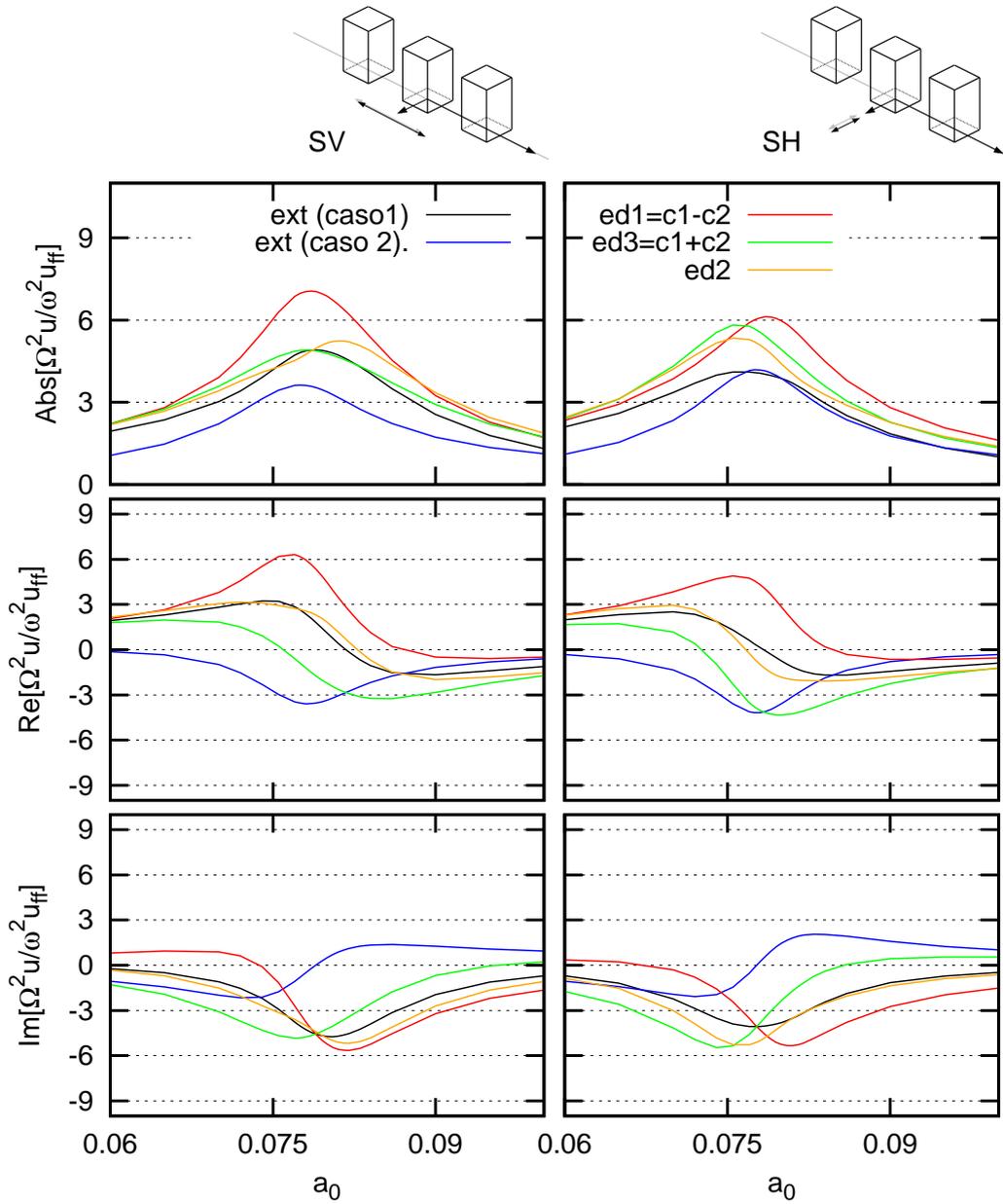


Figura 4.31: Deflexión para los diferentes edificios de altura $h/b = 2$ sometidos a ondas SV/SH con un ángulo incidente de 65° para el caso de distancia $D = \lambda/4$

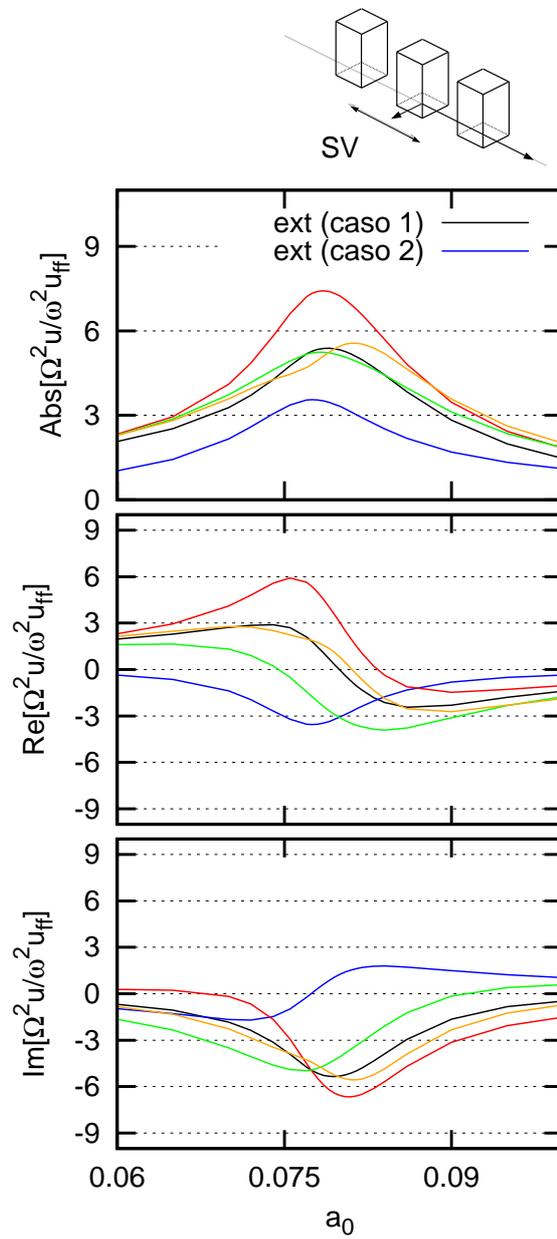


Figura 4.32: Deflexión para los diferentes edificios de altura $h/b = 2$ sometidos a ondas SV con un ángulo incidente de 67° para el caso de distancia $D = \lambda/4$

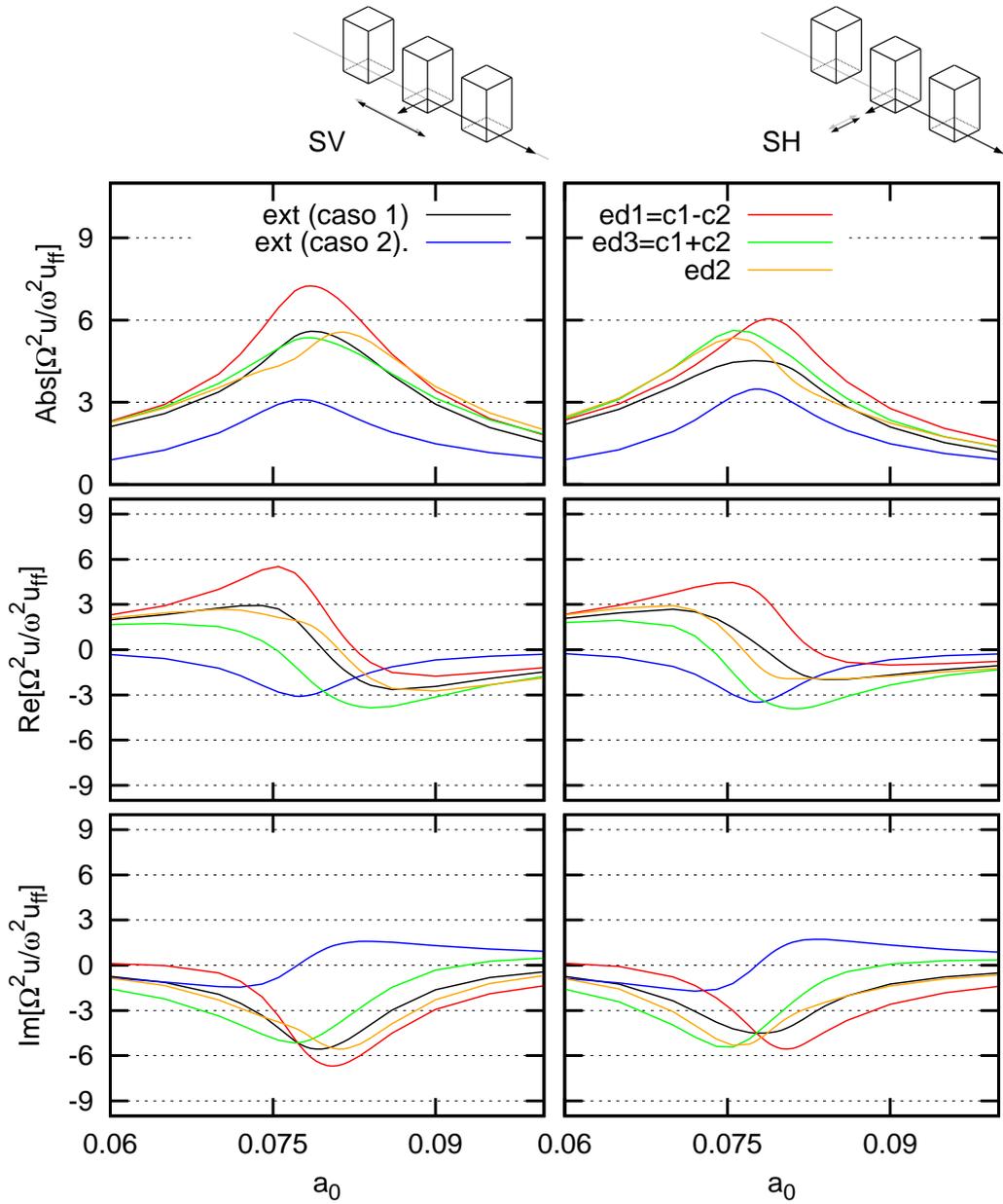


Figura 4.33: Deflexión para los diferentes edificios de altura $h/b = 2$ sometidos a ondas SV/SH con un ángulo incidente de 70° para el caso de distancia $D = \lambda/4$

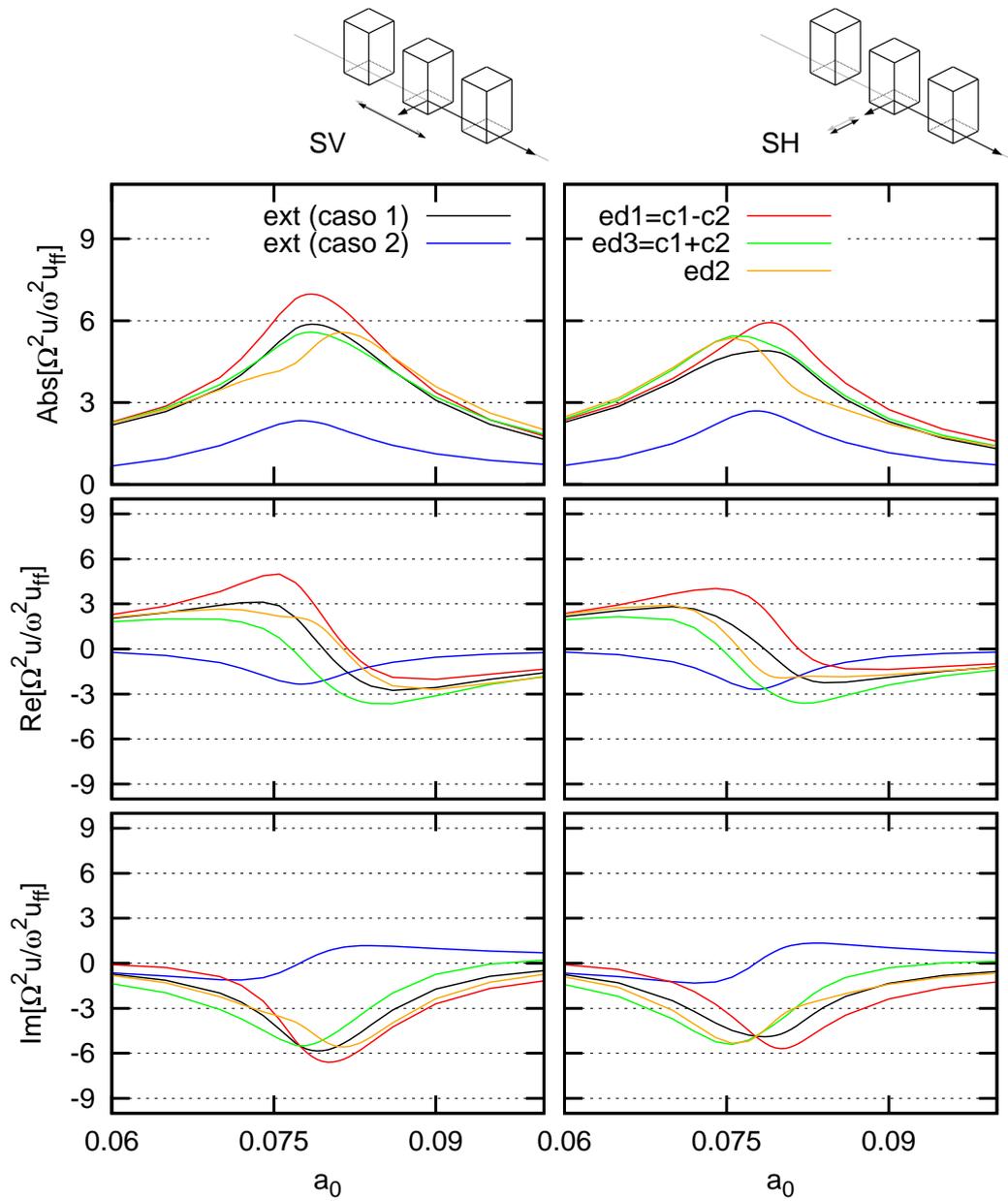


Figura 4.34: Deflexión para los diferentes edificios de altura $h/b = 2$ sometidos a ondas SV/SH con un ángulo incidente de 75° para el caso de distancia $D = \lambda/4$

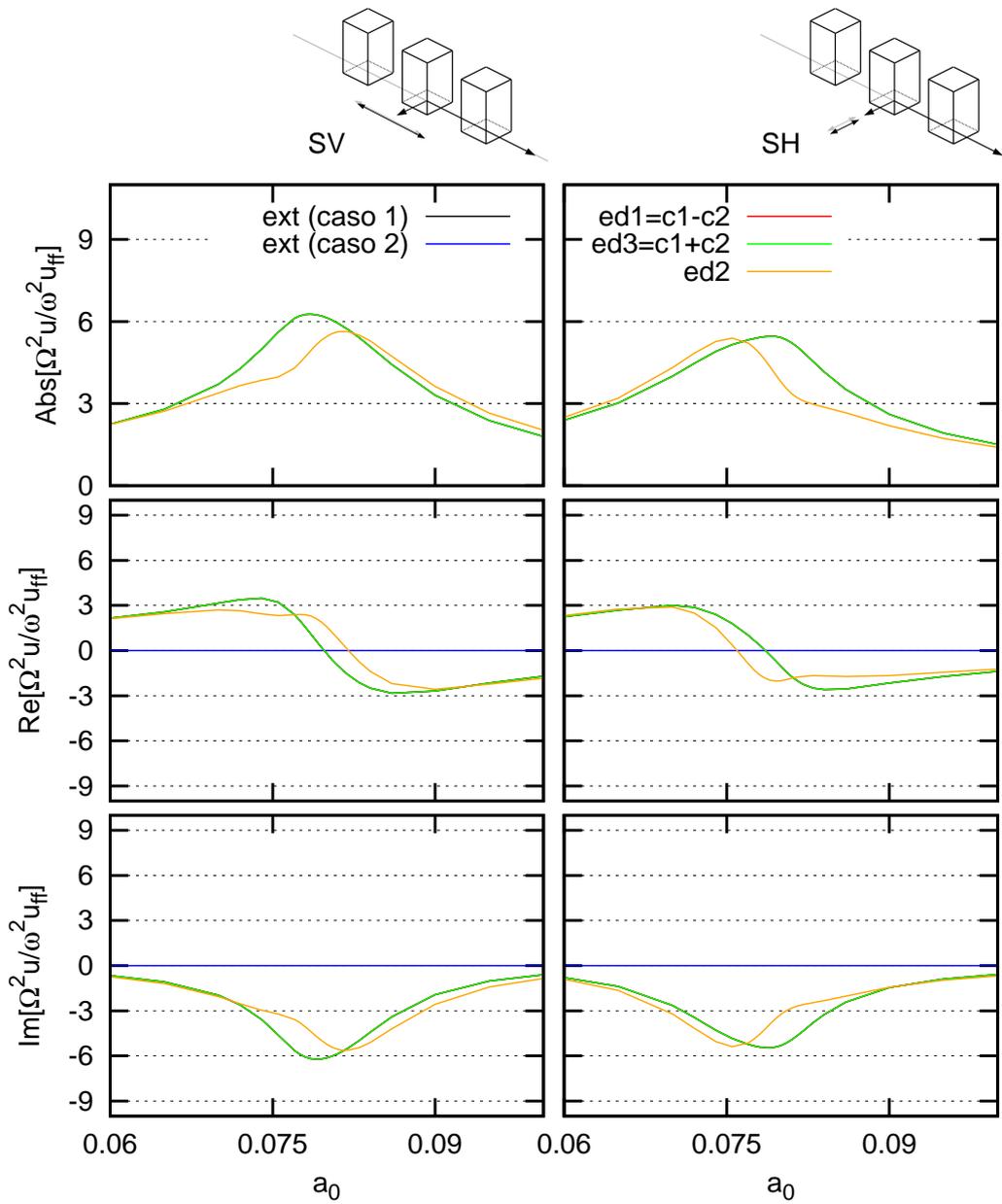


Figura 4.35: Deflexión para los diferentes edificios de altura $h/b = 2$ sometidos a ondas SV/SH con un ángulo incidente de 90° para el caso de distancia $D = \lambda/4$

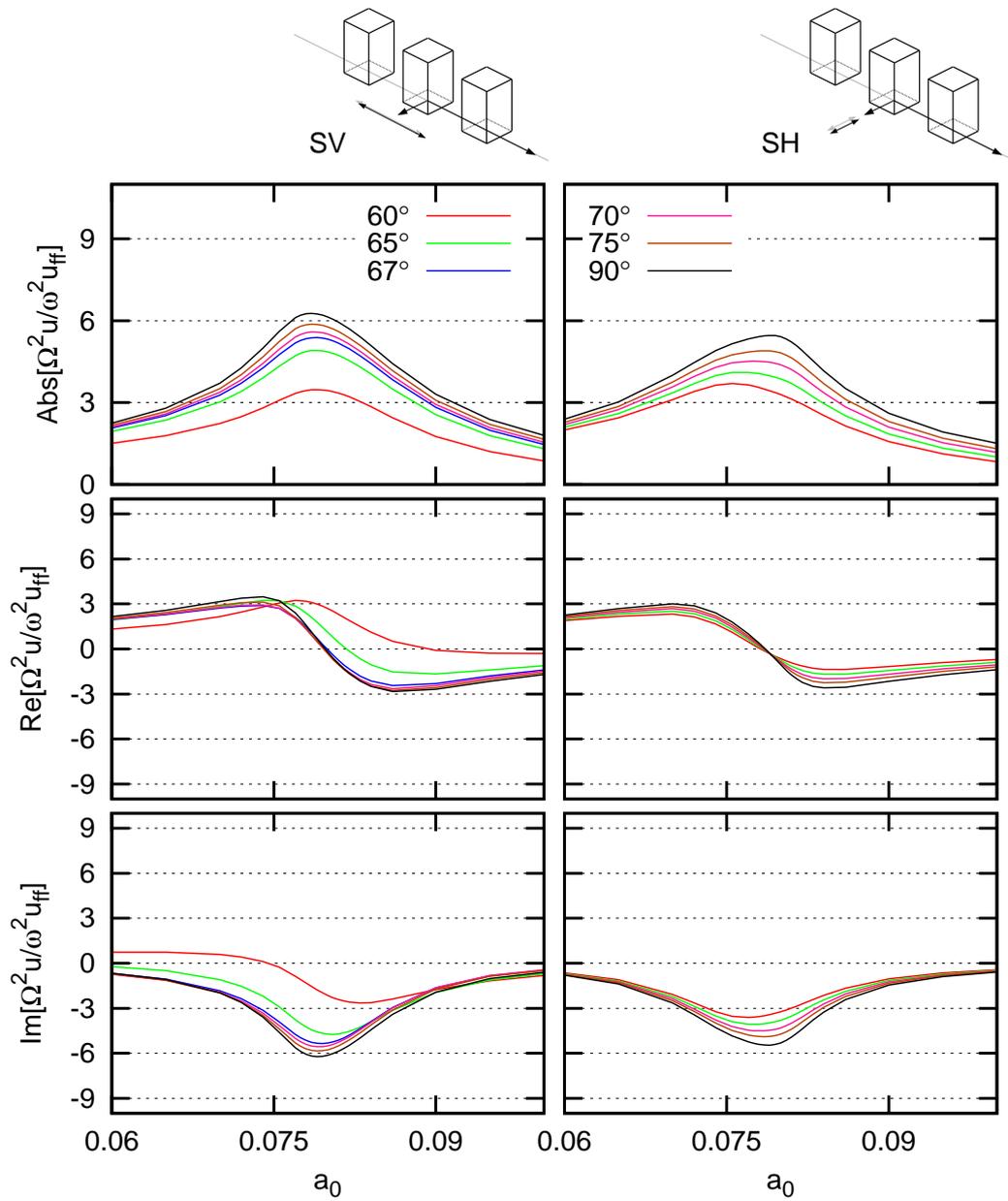


Figura 4.36: Deflexión para el caso 1 del edificio exterior de altura $h/b = 2$ sometido a ondas SV/SH con un ángulo incidente variable para el caso de distancia $D = \lambda/4$

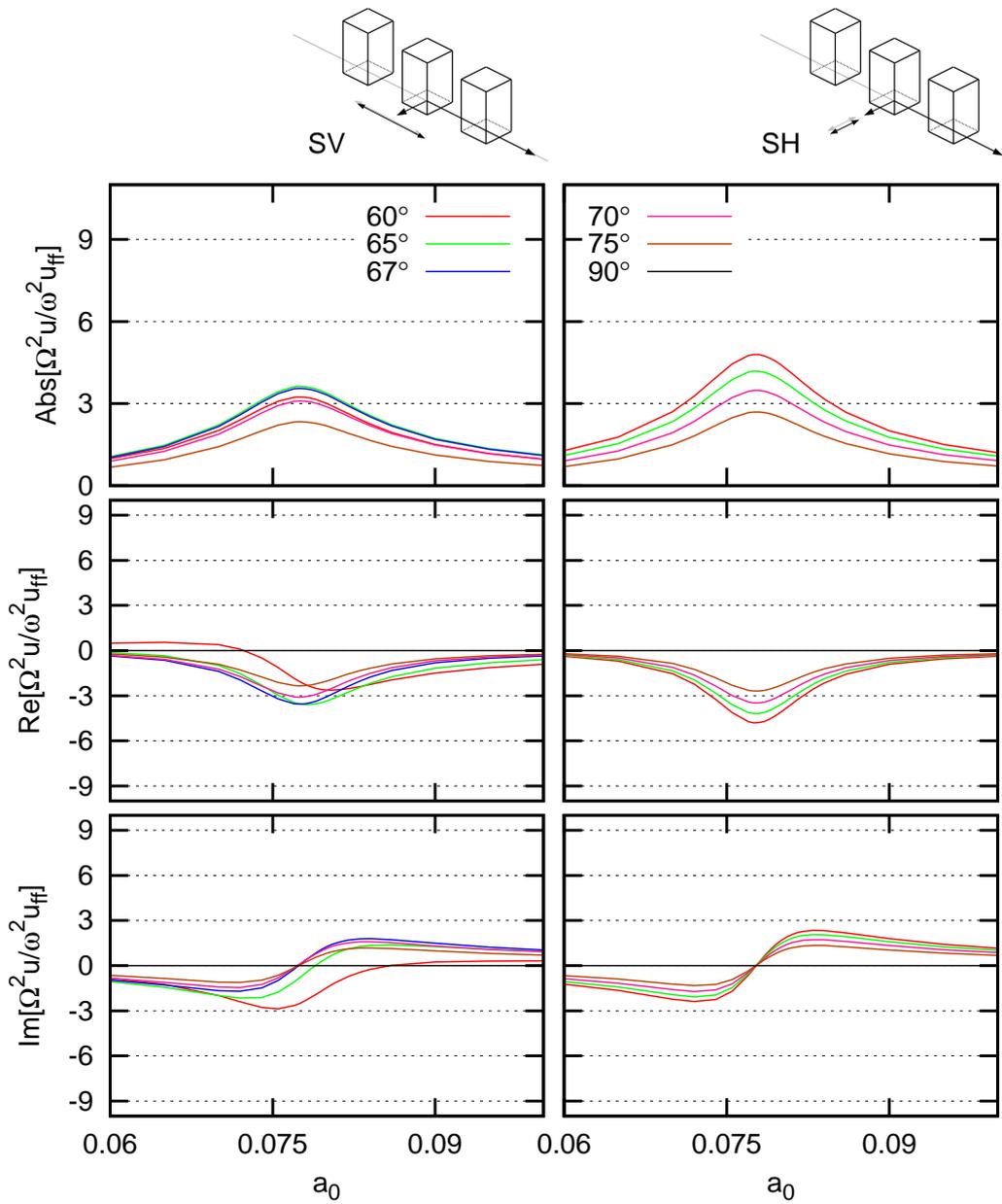


Figura 4.37: Deflexión para el caso 2 del edificio exterior de altura $h/b = 2$ sometido a ondas SV/SH con un ángulo incidente variable para el caso de distancia $D = \lambda/4$

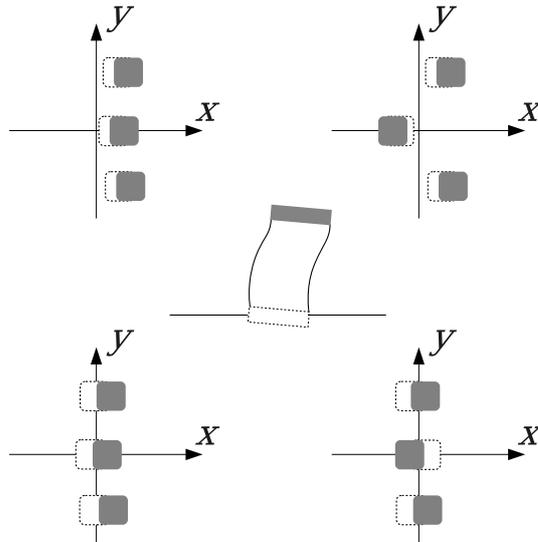


Figura 4.38: Diferentes modos simétricos de vibración para desplazamientos en dirección x

4.6 Pilotes inclinados

A modo de ilustración, se ha escogido uno de los casos empleados en el estudio anterior para observar los efectos que producen la inclinación en los pilotes de la cimentación sobre la respuesta de la estructura que soporta, en términos de cortante.

El caso escogido ha sido el de edificios con esbeltez $h/b = 2$, ya que este tipo de edificación presenta una mayor variación en el cortante, así como distintas frecuencias de pico según la excitación. Para la distancia de separación se ha optado por la de $D = \lambda/3$ al ser esta la menor para asegurar una inclinación suficiente de los pilotes sin alcanzar las cimentaciones cercanas.

Las figuras 4.39, 4.40 y 4.41 muestran la función de respuesta en frecuencia para los distintos casos de inclinación de pilotes estudiados y serán estas figuras las empleadas para el análisis del cortante y de los valores de la frecuencia de pico.

En ellas tenemos los diferentes valores proporcionales a los cortantes en la base de las distintas estructuras: en la primera fila encontramos los valores para un edificio solo con la misma inclinación de pilotes, las siguientes tres filas corresponden al primer edificio, edificio central y edificio final respectivamente.

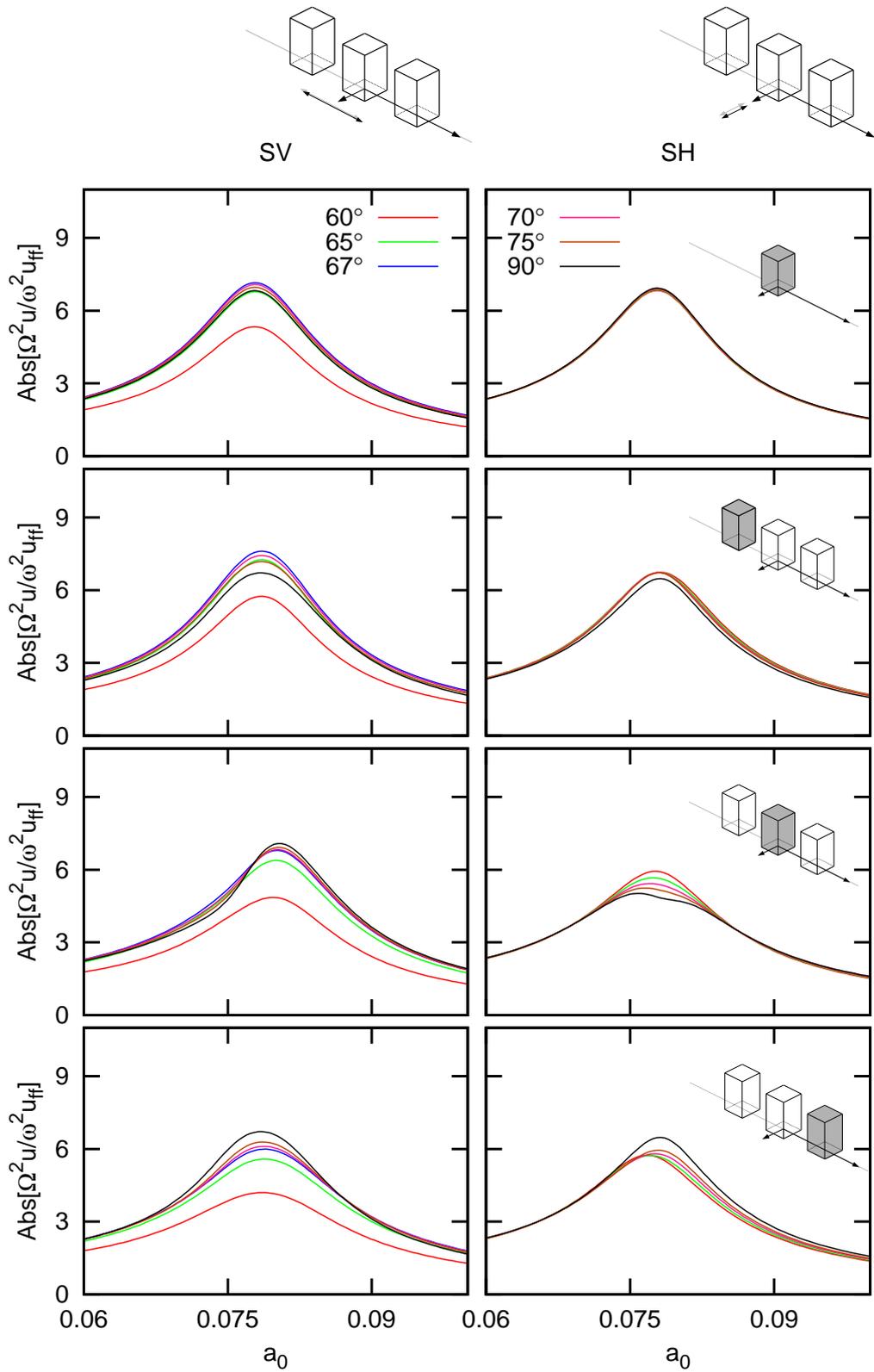


Figura 4.39: Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes verticales

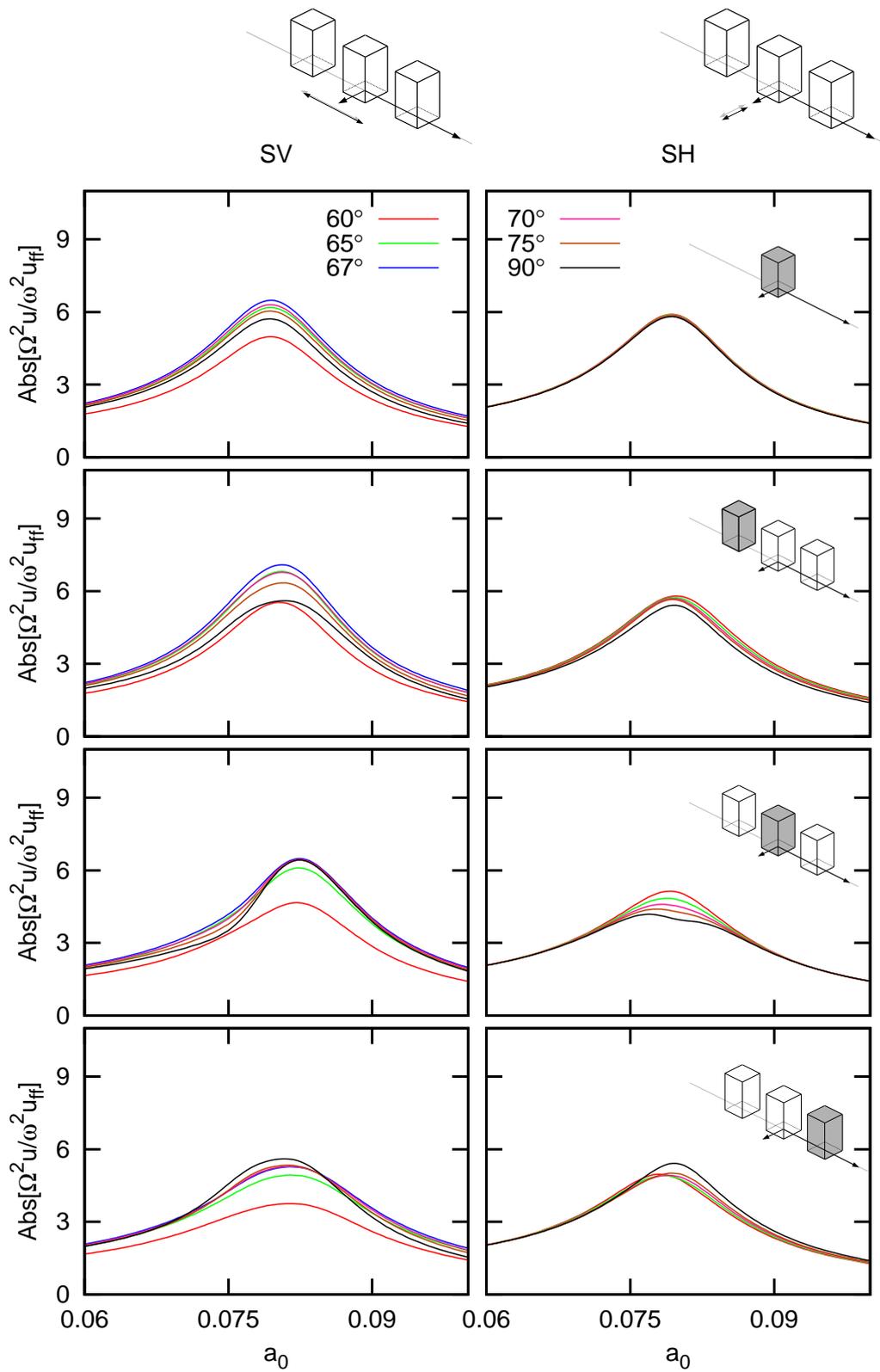


Figura 4.40: Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 10°

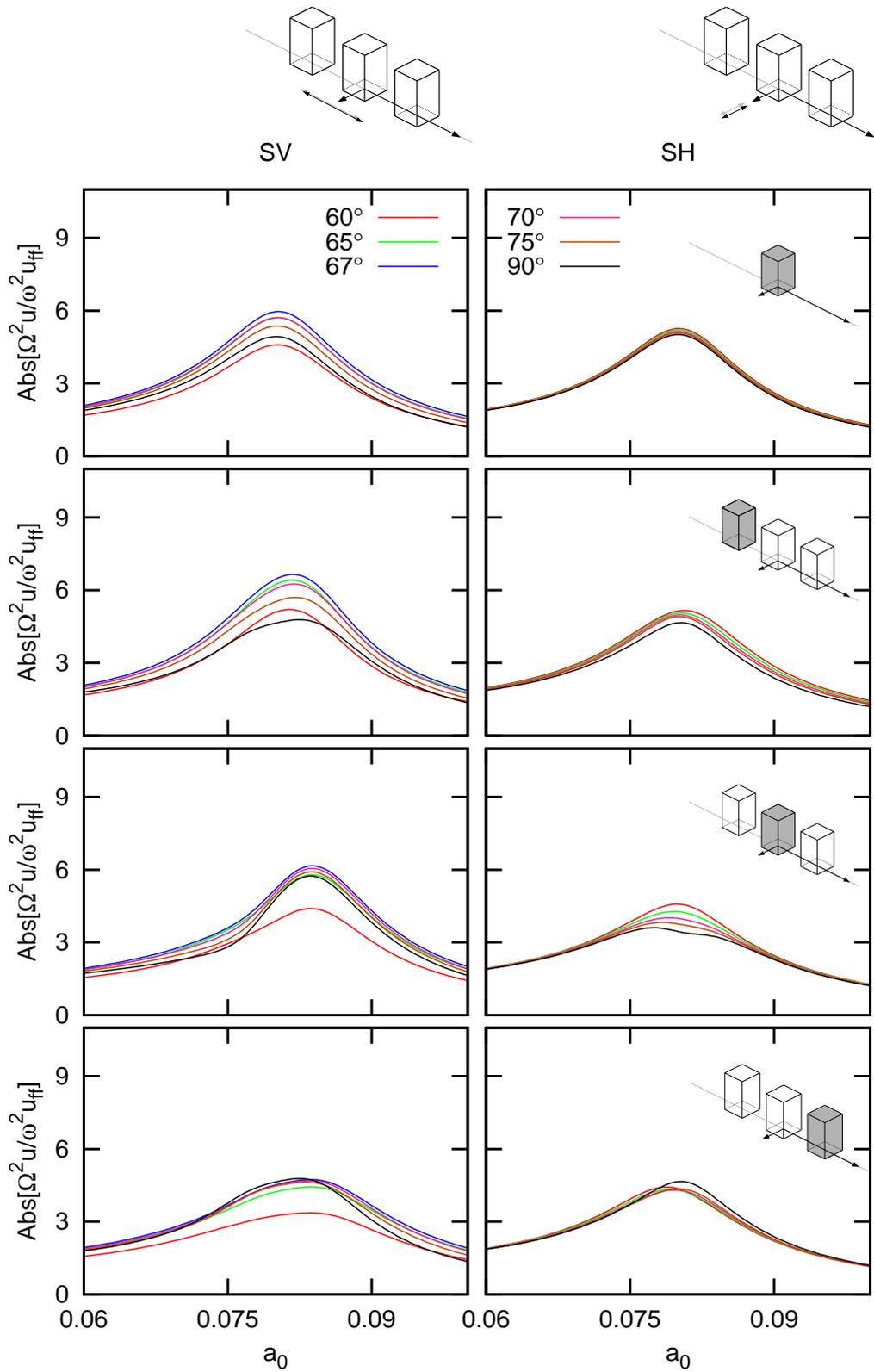


Figura 4.41: Deflexión para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20°

4.6.1 Variación del cortante

4.6.1.1 Influencia de la inclinación de pilotes para un edificio solo

En primer lugar, se estudiará cómo afecta la inclinación de los pilotes de la cimentación a la respuesta de una única estructura en el semiespacio. Se comparará este efecto para cada tipo y ángulo de onda incidente, empleando como valores de referencia los correspondientes a un edificio solo con pilotes verticales bajo la misma solicitación sísmica (tanto tipo de onda como ángulo de incidencia). Recordar que la inclinación de los pilotes se realizará en la componente horizontal de la dirección de actuación de la onda incidente (en dirección x en caso de ondas SH, y en dirección y para SV) y en el sentido de alejarse del centro de la cimentación.

Las variaciones se encuentran reflejadas en la tabla 4.12 y en la figura 4.42. En ellas se aprecia cómo existe una gran reducción en el cortante que se va incrementando a medida que la incidencia es más vertical, siendo este efecto más significativo para las ondas tipo SV. La disminución en el cortante es mayor al aumentar la inclinación de los pilotes.

	SV						SH				
	60°	65°	67°	70°	75°	90°	60°	65°	70°	75°	90°
10°	-6,7	-8,7	-9,4	-11,0	-13,2	-16,2	-13,5	-14,3	-15,0	-15,5	-16,2
20°	-13,9	-15,9	-16,7	-19,2	-22,9	-27,7	-22,9	-24,3	-25,5	-26,4	-27,7

Tabla 4.12: Variación del cortante (%) en función de la inclinación de los pilotes para los diferentes ángulos de incidencia respecto a estructura sobre cimentación de pilotes verticales bajo la misma solicitación

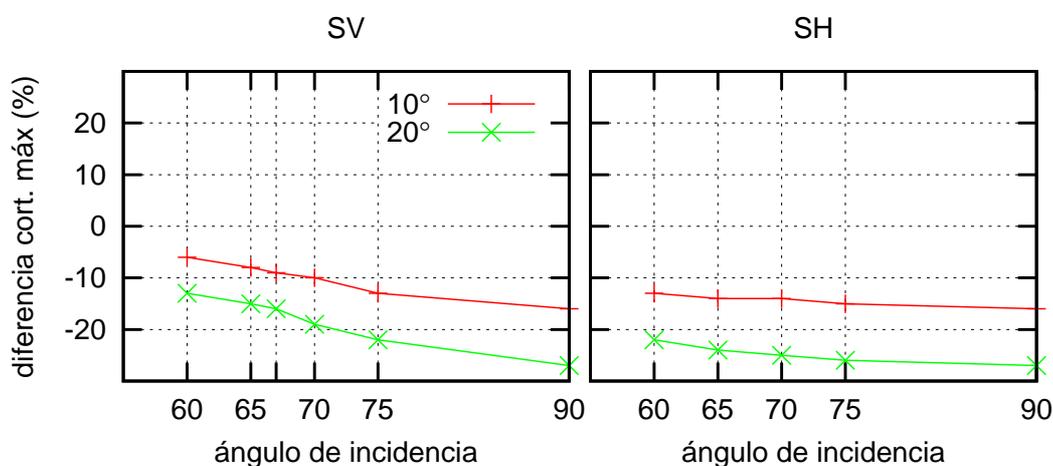


Figura 4.42: Variación del cortante máximo para el edificio solo con diferentes inclinaciones de pilotes (comparado con pilotes verticales sometidos al mismo ángulo de incidencia)

Atendiendo a la influencia de este tipo de cimentación en la variación del cortante con el ángulo de incidencia, en la figura 4.43 y en la tabla 4.13 se ve cómo la inclinación de pilotes incrementa la diferencia del valor máximo del cortante para cada ángulo de inclinación de la onda en comparación con la vertical (excepto para el caso de SV con $\theta = 60^\circ$).

El comportamiento que se presenta es idéntico al de pilotes verticales para ondas SV: con mayores valores de cortante en el entorno del ángulo crítico y menores valores para ángulos por debajo de él; pero conforme se aumenta la inclinación de los pilotes, el cortante experimenta un aumento en su valor respecto a la incidencia vertical. Esto se explica con la figura 4.42 que

4 Resultados

muestra que los valores del cortante para incidencia vertical disminuyen en mayor medida que para ondas más acostadas según aumenta el ángulo de los pilotes.

Para ondas tipo SH, se aprecia como una inclinación de los pilotes hace que la inclinación del campo incidente resulte ligeramente más desfavorable que el caso de incidencia vertical.

	SV					SH			
	60°	65°	67°	70°	75°	60°	65°	70°	75°
0°	-21,8	-0,7	4,9	3,7	2,0	-1,5	-1,0	-0,7	-0,4
10°	-12,9	8,2	13,4	10,2	5,6	1,7	1,2	0,8	0,4
20°	-6,9	15,5	20,8	15,8	8,8	5,1	3,6	2,4	1,3

Tabla 4.13: Variación del cortante (%) con el ángulo de incidencia respecto a incidencia vertical en función de la inclinación de pilotes

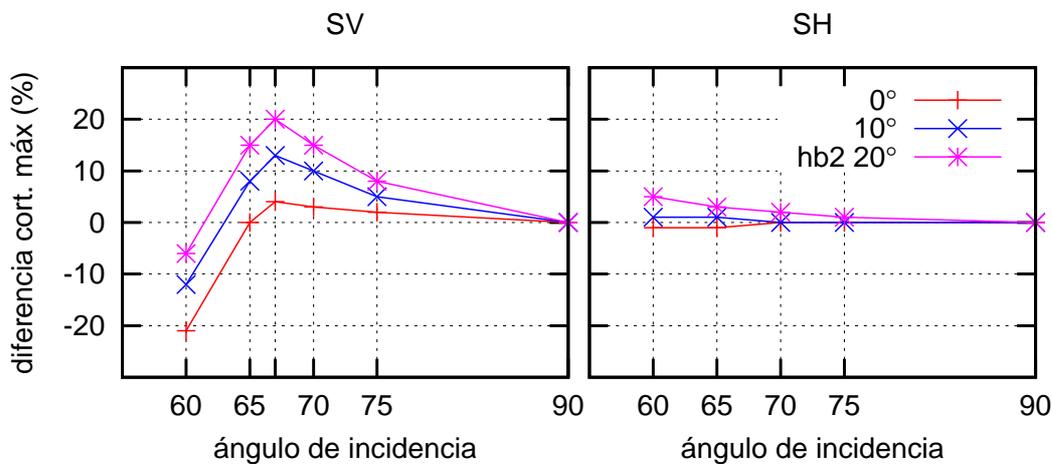


Figura 4.43: Variación del cortante máximo para el edificio solo sometido a diferentes ángulos de incidencia (comparado con incidencia vertical para el mismo tipo de edificio)

4.6.1.2 Comparación con el edificio solo con misma inclinación de pilotes y mismo ángulo incidente

El objetivo de emplear como referencia el caso de un edificio de las mismas características y sometido al mismo tipo de incidencia es estudiar cómo afecta la inclinación de los pilotes a la interacción entre edificios. Los valores de las variaciones del cortante para cada uno de los casos se reflejan en la tabla 4.14 y en las figuras 4.44 y 4.45.

En ellas se observa cómo, para todos los ángulos de inclinación de los pilotes, los diferentes edificios presentan el mismo comportamiento, variando muy ligeramente para las distintas inclinaciones de pilotes. Para el caso de una onda incidente de tipo SH, se ve que, el efecto de la inclinación de los pilotes es despreciable, obteniendo prácticamente los mismos valores para cualquier valor del ángulo de inclinación de pilotes.

En cuando a las ondas SV, se aprecian efectos diferentes según la posición del edificio estudiada. Así para los edificios extremos, se amplifica tanto la reducción como el incremento de los valores del cortante: para el primer edificio (que presenta un aumento en el cortante para incidencias no verticales) este incremento es mayor conforme la inclinación de pilotes aumenta, apreciándose más este efecto para ángulos menores. Para incidencia vertical, en donde presenta

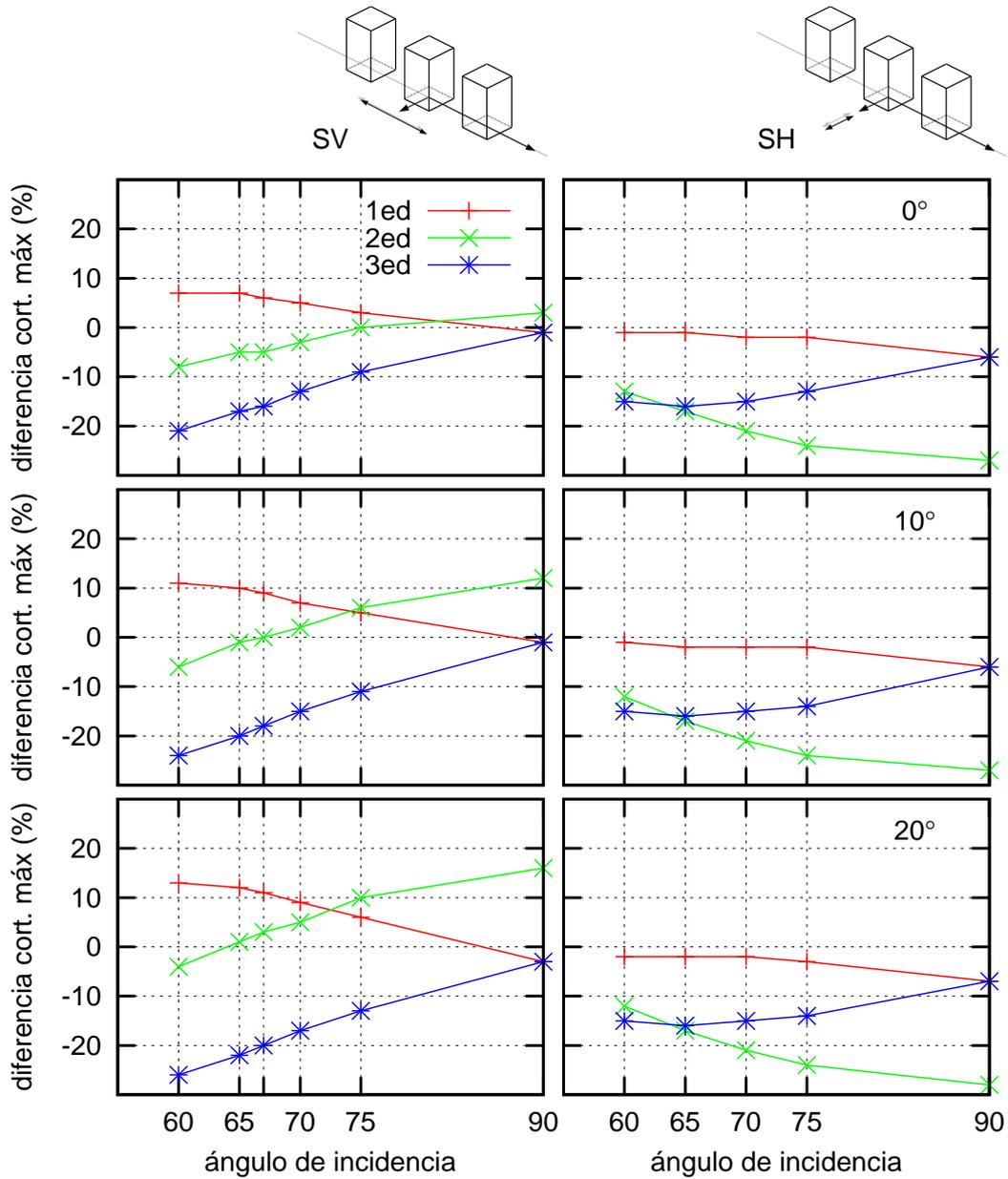


Figura 4.44: Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo con la misma inclinación de pilotes y sometido a la misma onda incidente)

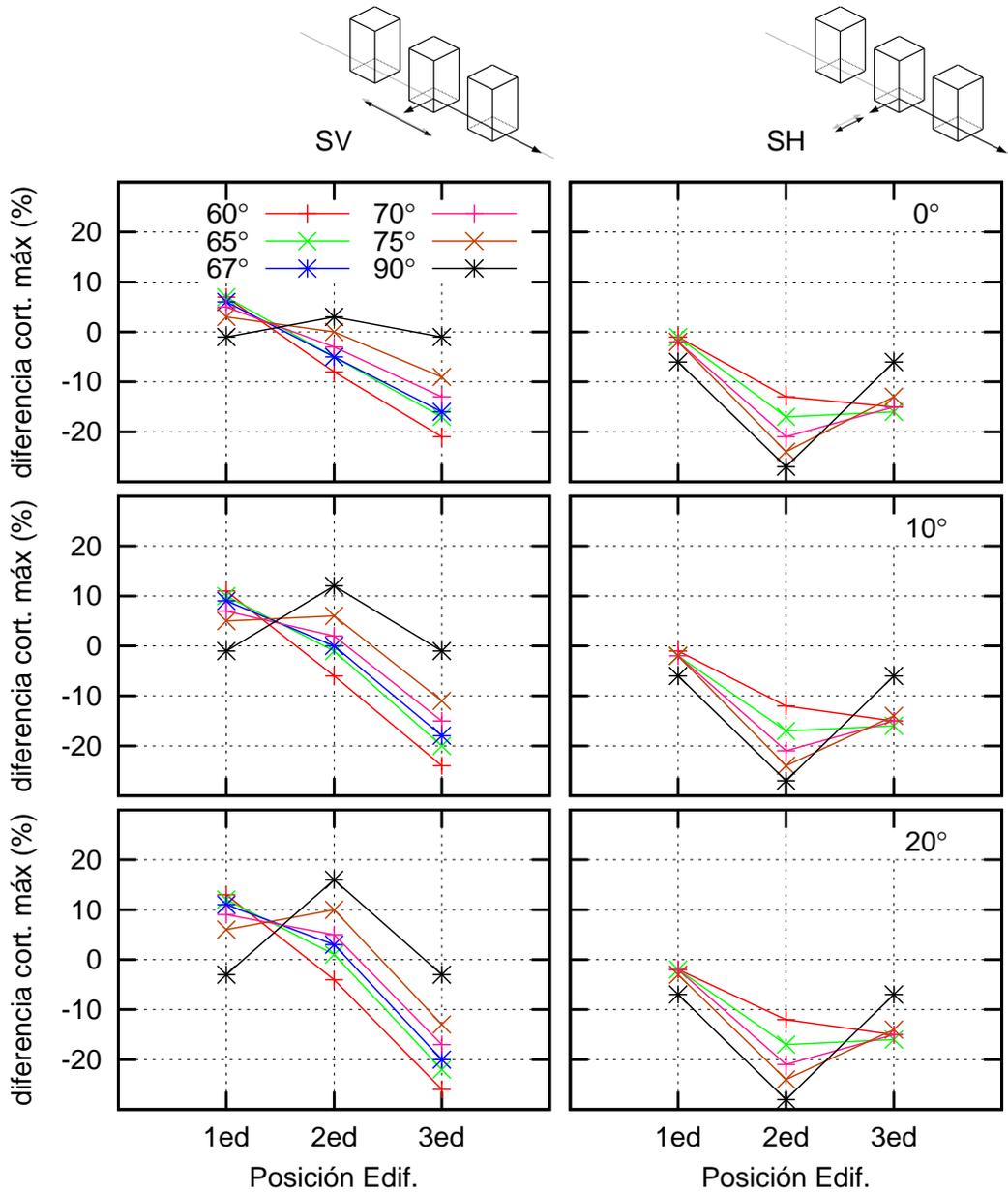


Figura 4.45: Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo con la misma inclinación de pilotes y sometido a la misma onda incidente)

		SV						SH				
		60°	65°	67°	70°	75°	90°	60°	65°	70°	75°	90°
0°	e1	7,8	7,1	6,4	5,0	3,2	-1,6	-1,4	-1,8	-2,1	-2,6	-6,5
	e2	-9,0	-5,7	-5,0	-3,4	-0,6	3,8	-13,1	-17,4	-21,1	-24,0	-27,5
	e3	-21,2	-17,6	-16,2	-13,7	-9,7	-1,6	-15,9	-16,4	-15,7	-13,8	-6,5
10°	e1	11,2	10,3	9,4	7,7	5,1	-1,9	-1,8	-2,3	-2,6	-3,0	-6,7
	e2	-6,3	-1,5	-0,2	2,3	6,2	12,1	-12,9	-17,5	-21,5	-24,5	-27,9
	e3	-24,5	-20,2	-18,6	-15,9	-11,6	-1,9	-15,7	-16,4	-15,8	-14,0	-6,7
20°	e1	13,4	12,5	11,5	9,5	6,2	-3,1	-2,0	-2,7	-2,9	-3,3	-7,0
	e2	-4,2	1,6	3,3	5,9	10,1	16,3	-12,9	-17,7	-21,7	-24,7	-28,0
	e3	-26,7	-22,2	-20,5	-17,9	-13,7	-3,1	-15,8	-16,5	-16,0	-14,2	-7,0

Tabla 4.14: Variación del cortante (%) en función de la inclinación de los pilotes para el caso de esbeltez $h/b = 2$ y separación $D = \lambda/3$ respecto al edificio solo con la misma inclinación de pilotes y bajo el mismo tipo de onda

una disminución en el valor del cortante, esta disminución es mayor conforme se aumenta el valor de α . Este aumento de la disminución del cortante con la inclinación de los pilotes se aprecia también para el edificio final. En cambio, para la estructura central, al incrementarse el ángulo de los pilotes, el valor del cortante va aumentando, llegando a pasar de un signo negativo en la variación del cortante a uno positivo. Este incremento con la inclinación de pilotes es mayor tanto más vertical sea la onda incidente.

4.6.1.3 Comparación con el edificio solo de pilotes verticales sometido a incidencia vertical

Realizando la comparación con el edificio solo de pilotes verticales y con incidencia vertical, al igual que se realiza en la sección 4.5.1.3, obtendremos el efecto conjunto de todas las variables que modifican la respuesta de los edificios del sistema cuando se encuentran sobre una cimentación de pilotes inclinados, empleando para su comparación el mismo sistema de referencia.

		SV					
		60°	65°	67°	70°	75°	90°
0°	e1	-15,7	6,3	11,5	8,9	5,3	-1,6
	e2	-28,9	-6,4	-0,4	0,1	1,4	3,8
	e3	-38,4	-18,2	-12,2	-10,5	-7,9	-1,6
10°	e1	-18,9	0,0	3,9	-0,6	-7,0	-17,8
	e2	-31,7	-10,7	-5,1	-5,6	-6,0	-6,0
	e3	-44,9	-27,7	-22,7	-22,3	-21,7	-17,8
20°	e1	-23,7	-6,0	-2,6	-8,3	-16,4	-29,9
	e2	-35,6	-15,1	-9,7	-11,3	-13,4	-15,9
	e3	-50,7	-35,0	-30,5	-31,2	-32,1	-29,9

Tabla 4.15: Variación del cortante (%) en función de la inclinación de los pilotes para el caso de esbeltez $h/b = 2$ y separación $D = \lambda/3$ respecto al edificio solo de pilotes verticales sometido a incidencia vertical para ondas SV

Los valores de las variaciones del cortante se muestran en las tablas 4.15 y 4.16 y en las figuras

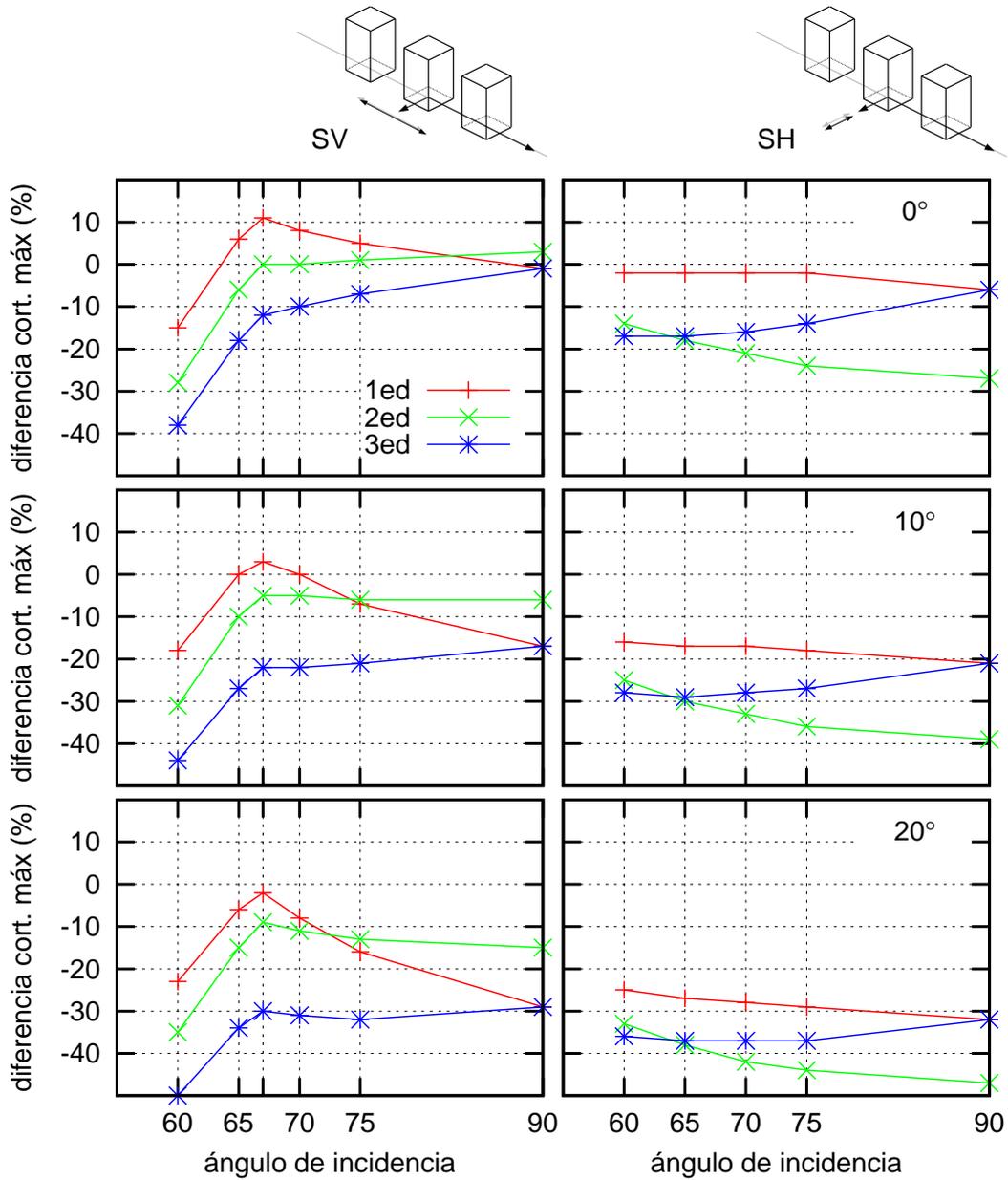


Figura 4.46: Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo con pilotes verticales y sometido a incidencia vertical)

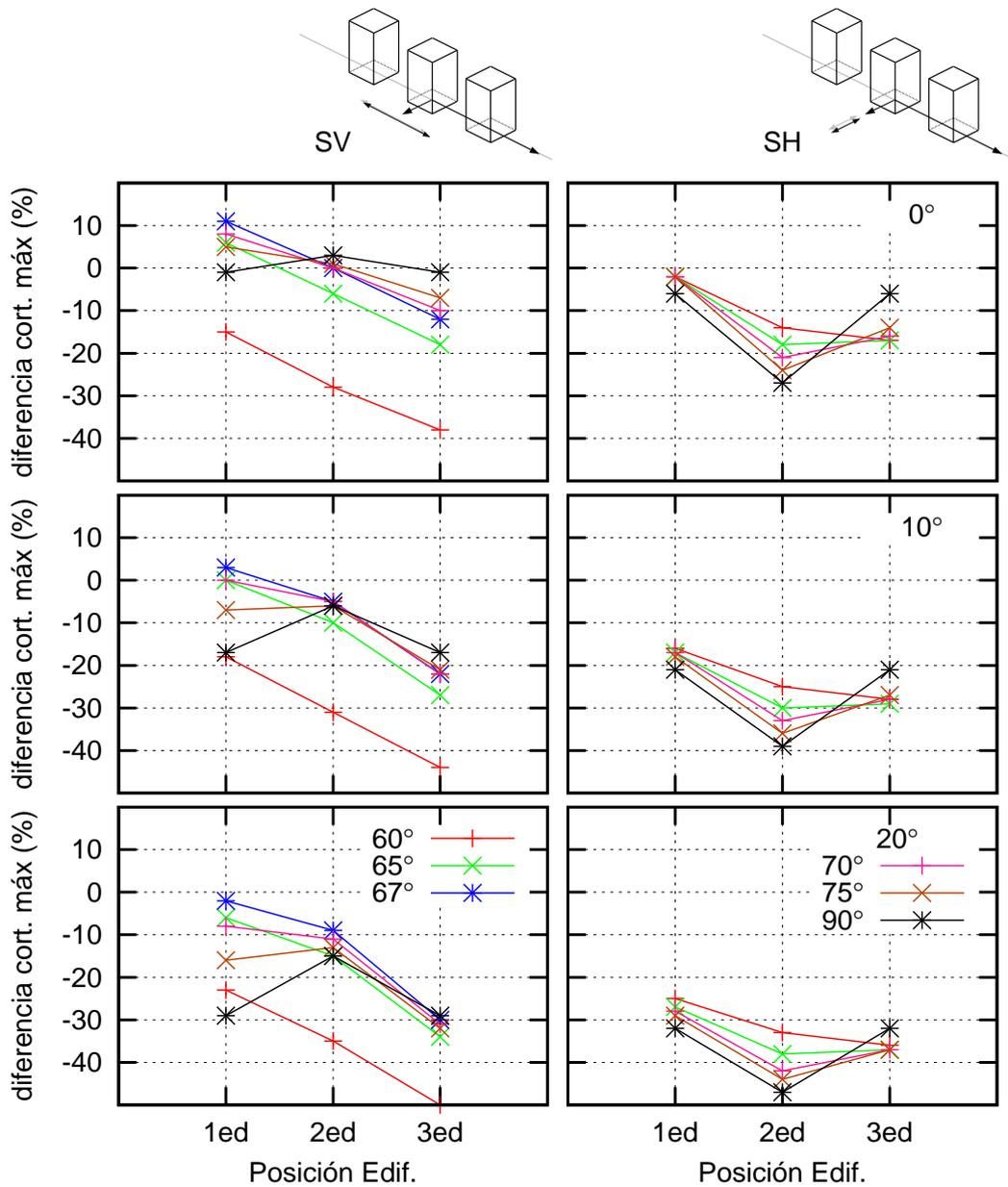


Figura 4.47: Variación del cortante máximo para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo con pilotes verticales y sometido a incidencia vertical)

		SH				
		60°	65°	70°	75°	90°
0°	e1	-2,8	-2,8	-2,8	-2,9	-6,5
	e2	-14,3	-18,2	-21,7	-24,3	-27,5
	e3	-17,1	-17,3	-16,3	-14,2	-6,5
10°	e1	-16,3	-17,2	-17,8	-18,3	-21,8
	e2	-25,8	-30,1	-33,7	-36,5	-39,6
	e3	-28,2	-29,1	-28,9	-27,6	-21,8
20°	e1	-25,6	-27,1	-28,2	-29,1	-32,8
	e2	-33,9	-38,3	-42,1	-44,8	-48,0
	e3	-36,0	-37,4	-37,8	-37,1	-32,8

Tabla 4.16: Variación del cortante (%) en función de la inclinación de los pilotes para el caso de esbeltez $h/b = 2$ y separación $D = \lambda/3$ respecto al edificio solo de pilotes verticales sometido a incidencia vertical para ondas SH

4.46 y 4.47. Se ve cómo, para ambos tipos de onda, al incrementar la inclinación de los pilotes, el valor de los esfuerzos para todas las posiciones de las estructuras y todas las solicitaciones sísmicas cae en gran medida. Es decir, el incrementar la inclinación de los pilotes en el sentido de la excitación provoca una disminución de los esfuerzos a los que se ve sometida la base de la estructura en términos de cortante.

Para ambos tipos de ondas, si bien para todos los ángulos de incidencia la reducción que se experimenta es independiente de la posición del edificio en el grupo, en el caso de incidencias verticales la reducción que experimentan los edificios exteriores es ligeramente superior a la que sufre el central conforme se incrementa la inclinación de los pilotes.

4.6.2 Variación de la frecuencia del cortante máximo

4.6.2.1 Influencia de la inclinación de pilotes para un edificio solo

En primer lugar, se verá la manera en la que afecta la inclinación de pilotes a la frecuencia de pico en la respuesta de cortante del sistema suelo-estructura. Se comprueba, mediante la figura 4.48 que la frecuencia aumenta conforme se incrementa la inclinación de los pilotes, manteniendo un valor constante independiente del tipo de onda y del ángulo de incidencia de la misma. Recordar que al ser resultados numéricos obtenidos a frecuencias discretas, no puede afirmarse que la frecuencia cambia si el valor de la diferencia es pequeño, al igual que en la sección 4.5.2 no se considerarán como significativas diferencias inferiores a un 0.8%.

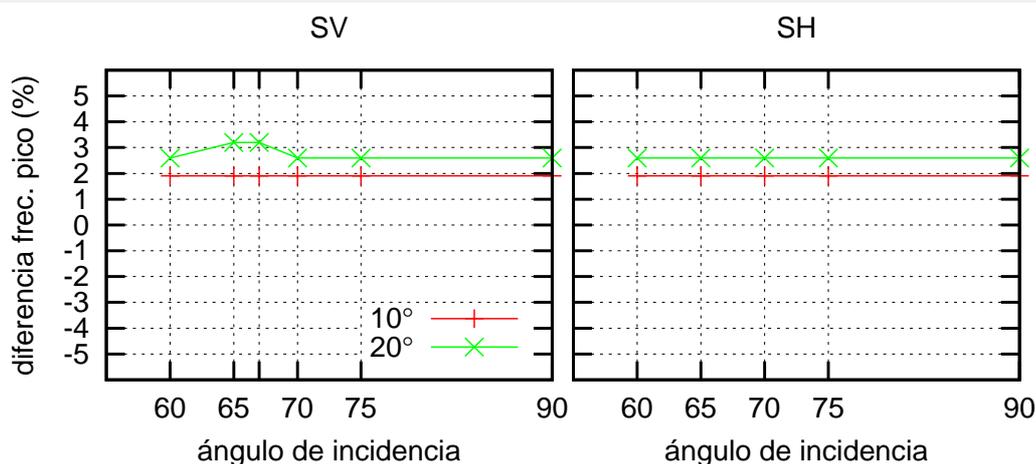


Figura 4.48: Variación de la frecuencia de pico para el edificio solo con diferentes inclinaciones de pilotes (comparado con el edificio solo de pilotes verticales)

4.6.2.2 Comparación con el edificio solo con la misma inclinación de pilotes

Se estudiarán a continuación, las variaciones en las frecuencias en las que se producen los máximos en el cortante para las distintas posiciones y ángulos de incidencia tomando como referencia la frecuencia de pico para la estructura sola con la misma inclinación de pilotes. De esta forma, se eliminará el incremento en la frecuencia respecto a los pilotes verticales que se vio en el apartado anterior.

Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.17 y en la figuras 4.49 y 4.50.

		SV						SH				
		60°	65°	67°	70°	75°	90°	60°	65°	70°	75°	90°
0°	e1	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	e2	1,9	2,6	2,6	2,6	3,2	3,2	-0,6	-0,6	-1,3	-1,9	-2,6
	e3	0,6	1,3	1,3	1,3	0,6	0,6	-1,3	-1,3	-0,6	0,0	0,0
10°	e1	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,9	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0
	e2	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	-0,6	-0,6	-1,3	-2,5	-3,1
	e3	2,5	2,5	2,5	2,5	1,9	1,9	-1,9	-1,3	-0,6	0,0	0,0
20°	e1	1,9	1,9	2,5	2,5	2,5	3,1	1,3	0,0	0,0	0,0	0,0
	e2	4,4	5,0	5,0	5,0	4,4	4,4	0,0	-0,6	-1,3	-1,9	-3,1
	e3	4,4	4,4	4,4	4,4	3,8	3,1	-1,3	-1,3	-0,6	0,0	0,0

Tabla 4.17: Variación de la frecuencia de pico (%) respecto al edificio solo con la misma inclinación de pilotes

En ellas se observa cómo para ondas SH, la inclinación de los pilotes tiene muy poca influencia en la variación frecuencia de pico del cortante debido a la interacción con los edificios del entorno, ya que los tres edificios presentan prácticamente los mismos valores de variación de la frecuencia independientemente de la inclinación de pilotes, únicamente para el primer edificio y ángulo de incidencia de $\theta = 60^\circ$ se aprecia un aumento en la frecuencia de pico conforme se incrementa la inclinación de los pilotes. Esto parece indicar que, en este caso y con pilotes inclinados, hay un modo concreto de vibración que prevalece claramente sobre los demás.

En cambio, si la onda es SV, se aprecia que al ir incrementando la inclinación de los pilotes, los

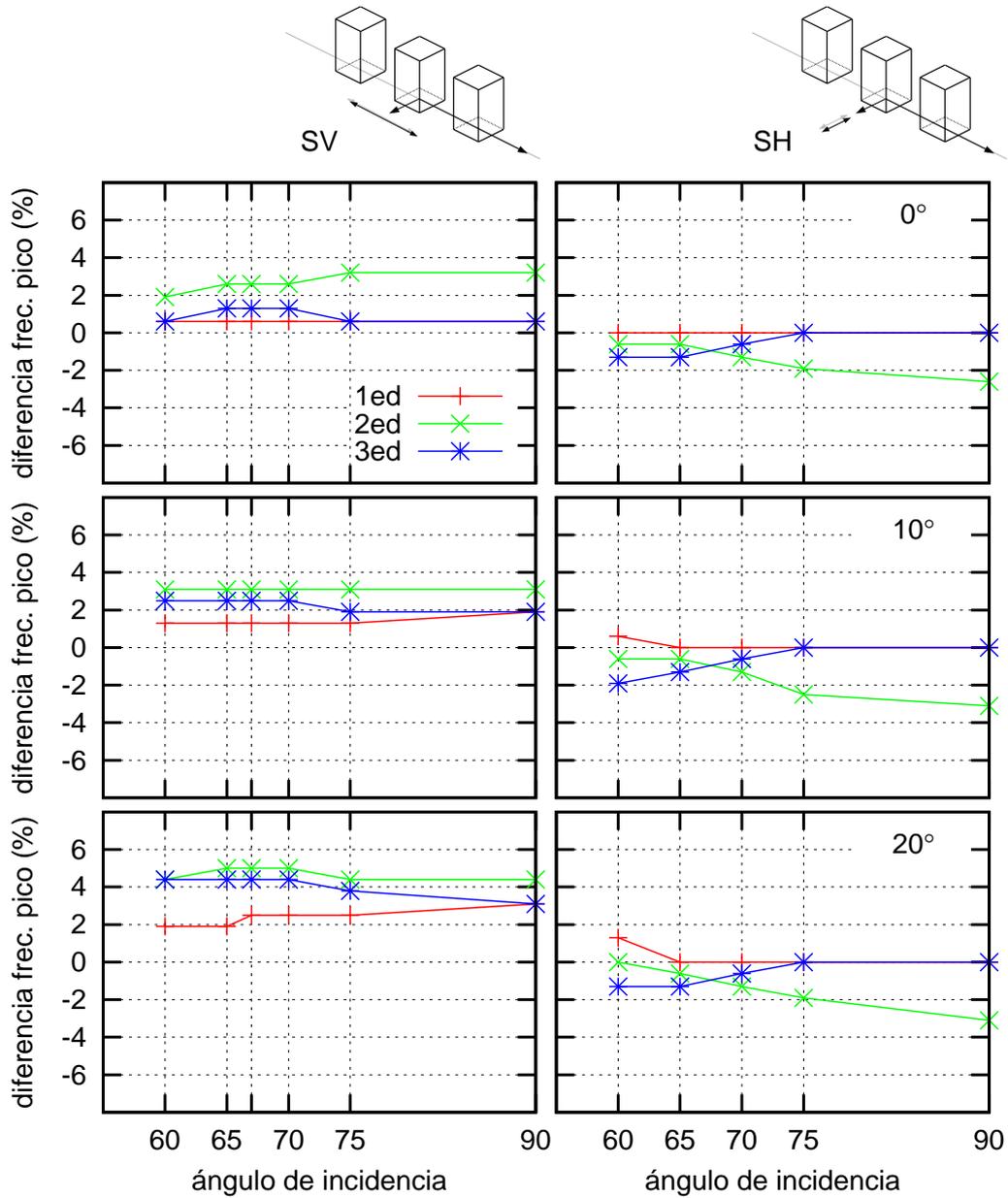


Figura 4.49: Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo con la misma inclinación de pilotes)

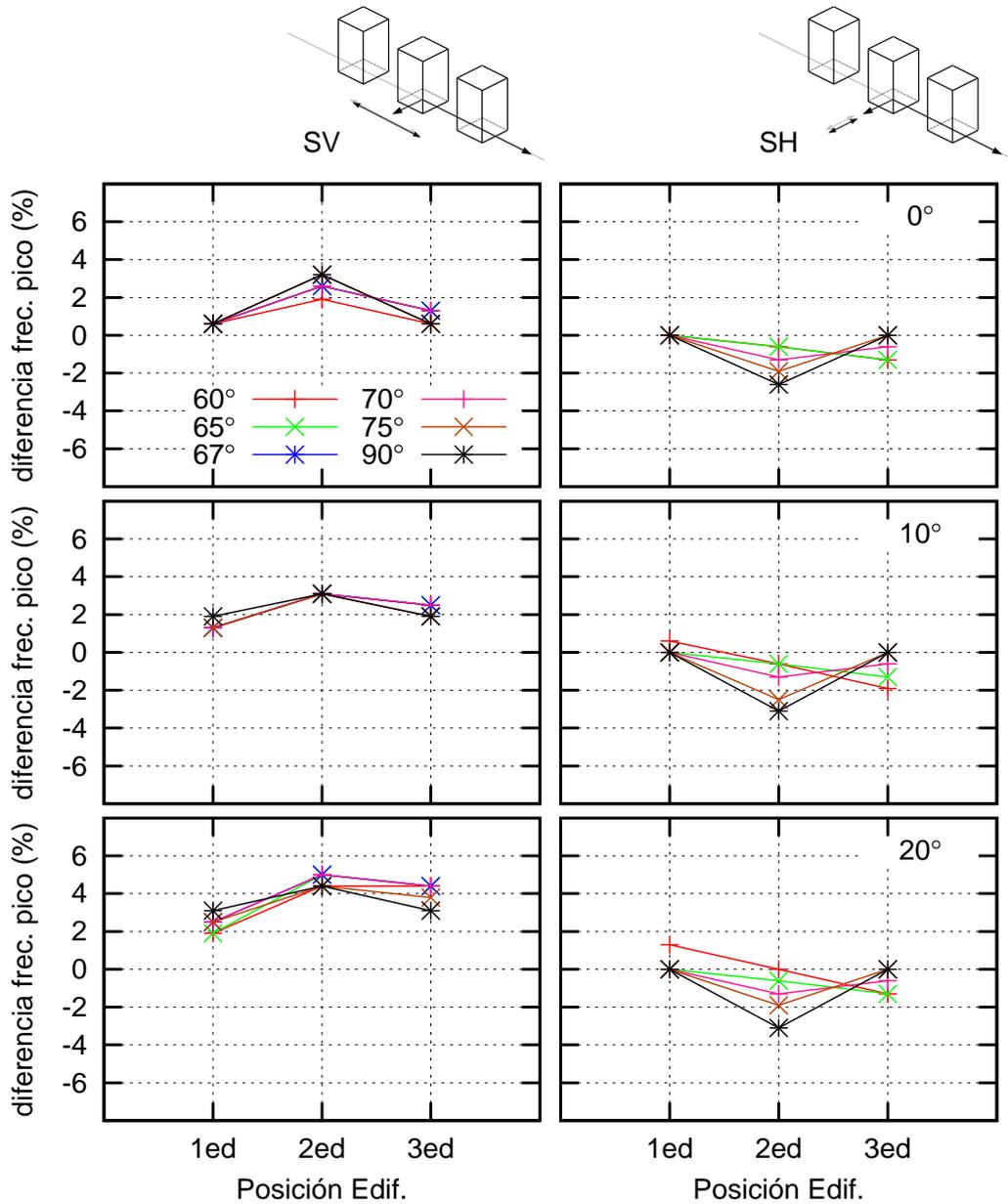


Figura 4.50: Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo con la misma inclinación de pilotes)

4 Resultados

valores de frecuencias pico son cada vez mayores en comparación a la de la estructura aislada. Este efecto, si bien aparece en todos los edificios del grupo, se aprecia mejor en los edificios central y final.

4.6.2.3 Comparación con el edificio solo de pilotes verticales

En la tabla 4.18 y en las gráficas 4.51 y 4.52 se presentan las variaciones de la frecuencia del cortante máximo respecto al edificio solo de pilotes verticales. Muestran, por tanto, la combinación de los dos efectos estudiados anteriormente, tal y como se puede comprobar en ellas.

El comportamiento es idéntico al de las figuras 4.49 y 4.50 respectivamente, pero desplazadas un valor que corresponde al incremento de la frecuencia debido a la inclinación de los pilotes, que es mayor a medida que aumenta el ángulo de inclinación de los mismos.

		SV						SH				
		60°	65°	67°	70°	75°	90°	60°	65°	70°	75°	90°
0°	e1	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	e2	1,9	2,6	2,6	2,6	3,2	3,2	-0,6	-0,6	-1,3	-1,9	-2,6
	e3	0,6	1,3	1,3	1,3	0,6	0,6	-1,3	-1,3	-0,6	0,0	0,0
10°	e1	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,8	2,6	1,9	1,9	1,9	1,9
	e2	5,1	5,1	5,1	5,1	5,1	5,1	1,3	1,3	0,6	-0,6	-1,3
	e3	4,5	4,5	4,5	4,5	3,8	3,8	0,0	0,6	1,3	1,9	1,9
20°	e1	4,5	4,5	5,1	5,1	5,1	5,8	3,8	2,6	2,6	2,6	2,6
	e2	7,1	7,7	7,7	7,7	7,1	7,1	2,6	1,9	1,3	0,6	-0,6
	e3	7,1	7,1	7,1	7,1	6,4	5,8	1,3	1,3	1,9	2,6	2,6

Tabla 4.18: Variación de la frecuencia de pico (%) respecto al edificio solo de pilotes verticales

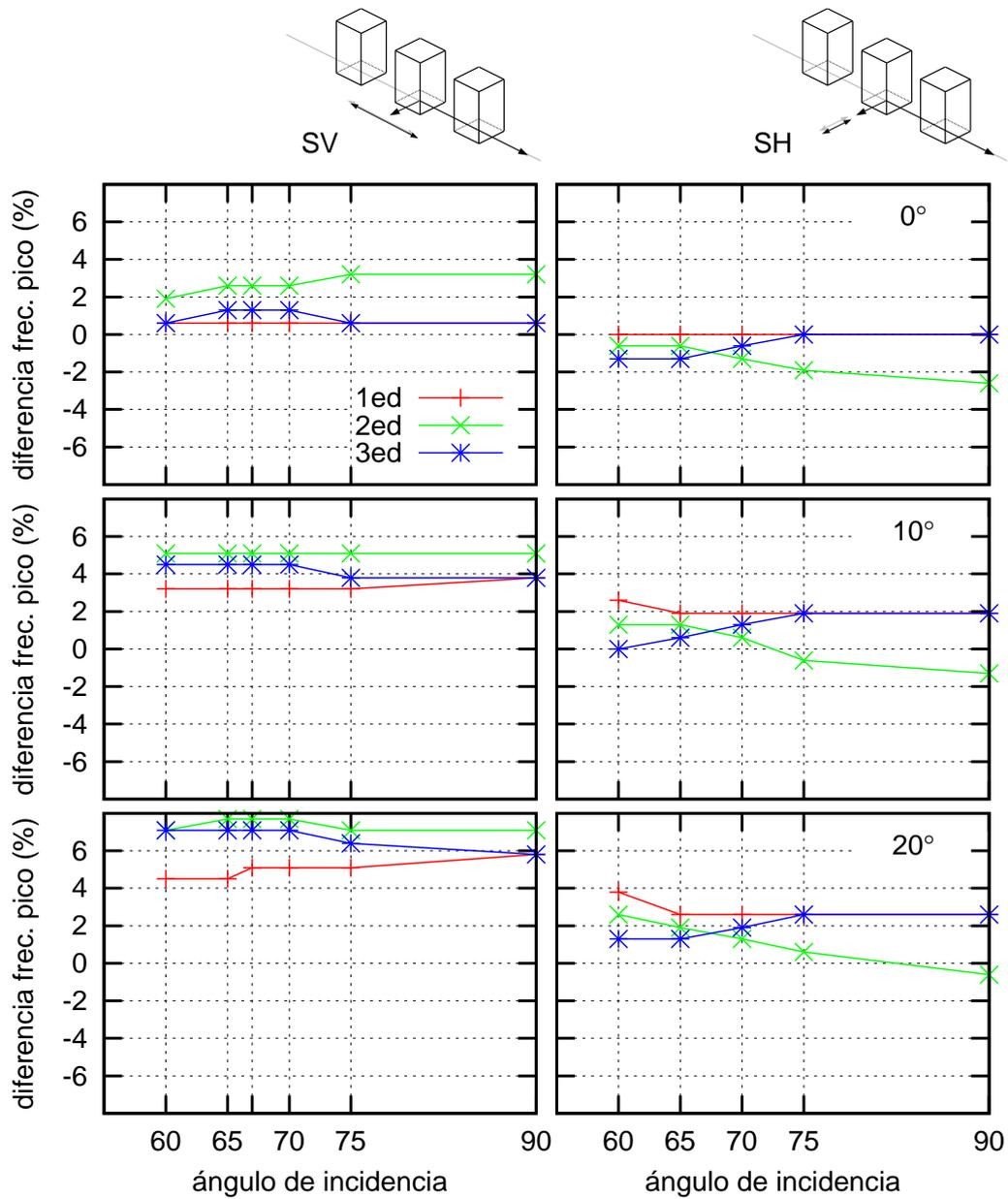


Figura 4.51: Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función del ángulo de incidencia (comparado con el edificio solo con pilotes verticales)

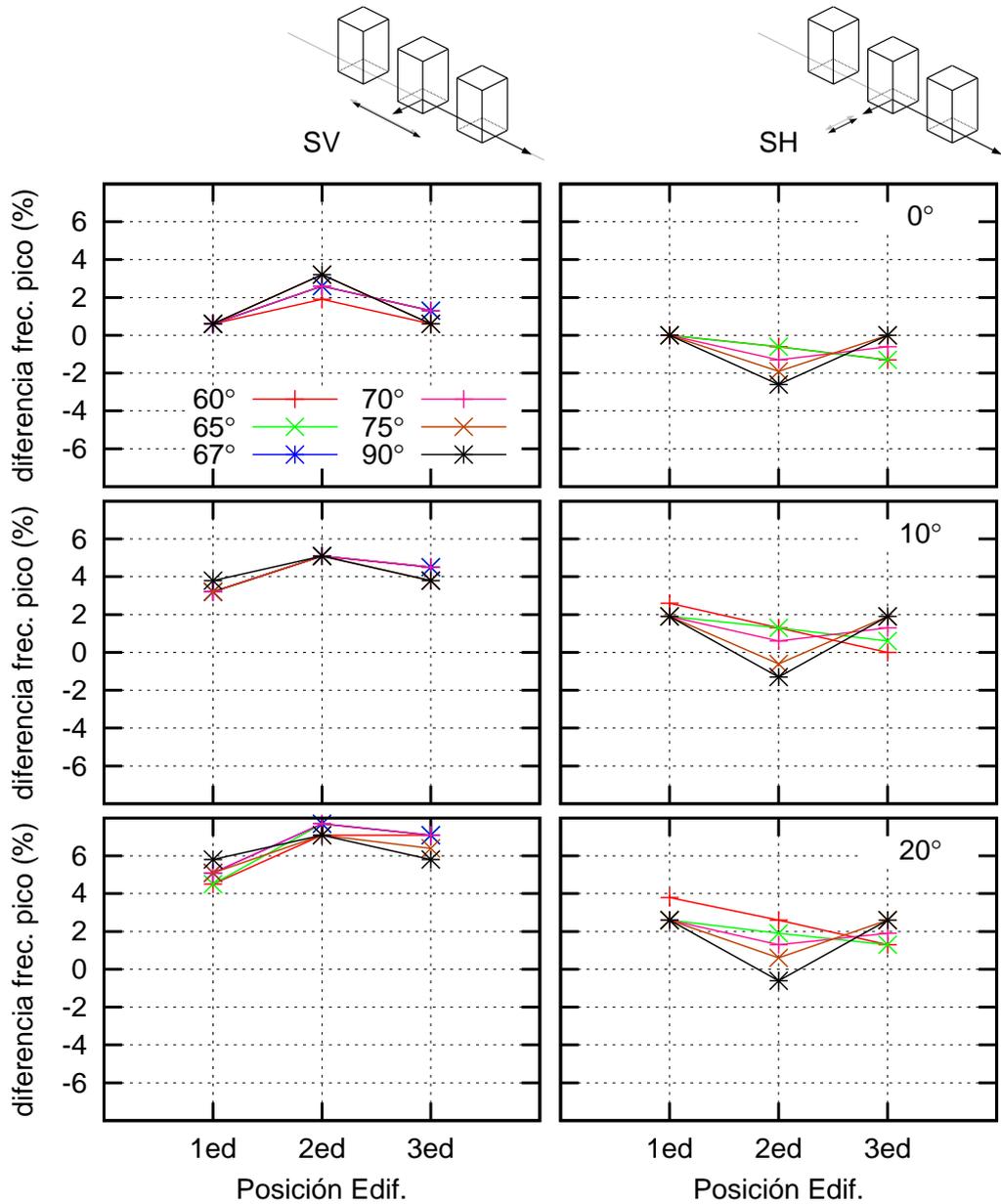


Figura 4.52: Variación de la frecuencia de pico para edificios $h/b = 2$ separados una distancia $D = \lambda/3$ con diferentes inclinaciones de pilotes en función de la posición del edificio (comparado con el edificio solo con pilotes verticales)

4.6.3 Interpretación de los resultados

Para el caso estudiado, la inclinación de pilotes no afecta sensiblemente en la interacción estructura-suelo-estructura del sistema, pero que sí produce unos cambios apreciables frente a la respuesta del edificio solo. Por ello, en esta sección se comentará lo relativo a las variaciones que produce la inclinación de pilotes frente a los pilotes verticales.

4.6.3.1 Aumento de la rigidez

Se comprueba que al inclinar los pilotes en la cimentación, se produce un incremento en la rigidez de la misma, al encontrarse que el valor de la frecuencia de pico se incrementa a medida que aumentamos la inclinación.

Se observa, no obstante, que el incremento de la misma es menor a medida que pasamos a ángulos mayores. Así entre 0° y 10° de inclinación la frecuencia se incrementa alrededor de un 2%, mientras que entre 10° y 20° sólo lo hace entorno a un 1%.

4.6.3.2 Disminución del valor del cortante

Los esfuerzos a los que se encuentran sometidas las superestructuras se ven reducidos en gran medida cuando estas se encuentran sobre una cimentación de pilotes inclinados. Esta reducción se acentúa conforme la onda incidente es más vertical.

Estos resultados implican que bajo esta configuración, los pilotes disipan más energía que si estuvieran en vertical, lo que podría suponer mayores esfuerzos internos en los mismos y más probabilidad de fallo en la cimentación. Se pone de manifiesto la necesidad de realizar un estudio más detallado sobre los esfuerzos a los que se encuentran sometidos esta configuración de pilotes.

Conclusiones y desarrollo futuro

5.1 Resumen y conclusiones

El presente trabajo emplea un modelo acoplado elementos finitos-elementos de contorno para el estudio de la respuesta dinámica de estructuras de cimentación pilotadas bajo ondas sísmicas con un ángulo de incidencia variable. Este modelo ha sido desarrollado por la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria y se ha verificado su validez en numerosos trabajos anteriores.

El objetivo de este proyecto es ahondar en el conocimiento de los efectos de interacción estructura-suelo-estructura mediante el análisis de la influencia del ángulo de incidencia del tren de ondas en dichos efectos. Este estudio se realizará centrado en los esfuerzos cortantes presentados en la base de la estructura. Para ello, se ha elegido una configuración de tres edificios a cortante de las mismas características sobre una cimentación formada por un grupo de 3×3 de pilotes. Los edificios se distribuyen en una línea a lo largo de la dirección de propagación de la onda. La distancia de separación entre ellos se expresará en relación a la longitud de onda en el suelo λ a la frecuencia fundamental \tilde{T} del sistema suelo-estructura, $\lambda = c_s \tilde{T}$.

La importancia de este análisis radica en que la hipótesis comúnmente empleada para el diseño estructural es la de incidencia vertical actuando en el edificio solo sobre el terreno, pudiéndose omitir situaciones más desfavorables que en la realidad se presenten y pongan en riesgo la seguridad de la edificación.

Por último, se realizará un análisis de los efectos de la inclinación de los pilotes de la cimentación sobre la respuesta en cortante de la superestructura del sistema suelo-estructura así como sobre los efectos de interacción estructura-suelo-estructura de uno de los casos previamente analizados para pilotes verticales. La inclinación de los pilotes se realizará en sentido de alejarse del centro de la cimentación y en la dirección de actuación de la onda estudiada.

Hay que tener en cuenta que las conclusiones siguientes se extraen en base al número discreto de ángulos de incidencia analizados (desde $\theta = 60^\circ$ a incidencia vertical $\theta = 90^\circ$), así como los dos casos de esbelteces estudiados, edificios poco esbeltos ($h/b = 2$) y muy esbeltos ($h/b = 5$). Atendiendo a los resultados obtenidos en los valores del cortante en las funciones de respuesta en frecuencia de las diferentes edificaciones del problema para pilotes verticales, cabe destacar:

- El ángulo de incidencia del tren de ondas juega un papel importante en los efectos de interacción estructura-suelo-estructura, no coincidiendo siempre la situación más desfavorable con la incidencia vertical.
- Los resultados más críticos se obtienen para el primer edificio que encuentra la onda en su propagación, siendo el que más energía recibe debido al efecto pantalla propio de las ondas inclinadas. Para ondas muy acostadas, este incremento es tanto mayor si se realiza la comparación con el sistema suelo-edificio bajo el mismo ángulo de incidencia, manifestando la importancia del estudio del entorno a la hora de diseñar la estructura.
- Los efectos de interacción estructura-suelo-estructura cobran una mayor importancia para edificaciones menos esbeltas, tanto los favorables como los perjudiciales.
- Los resultados más desfavorables corresponden a las ondas que originan desplazamientos paralelos a la alineación de los edificios. La situación empeora en el entorno del ángulo crítico y para valores de incidencia superiores a él (los mayores incrementos corresponden a $\theta = 67^\circ$ que es, del conjunto de ángulos discretizados, el primero por encima del valor del ángulo crítico que corresponde con el coeficiente de Poisson del terreno del problema estudiado $\theta_{cr}(\nu = 0.4) = 65.9^\circ$).

Para ángulos por debajo del crítico, los esfuerzos en la base de la estructura se ven enormemente reducidos.

- Para ondas con desplazamientos perpendiculares a su dirección de propagación, los resultados más desfavorables se producen para el edificio en primera línea y aumentan conforme disminuye el ángulo de incidencia.
- A medida que la distancia entre edificios aumenta y se aproxima a λ , los efectos de la interacción entre estructuras se vuelven más críticos, independientemente del tipo de excitación.
- Centrándose en el caso de ondas SV y edificios poco esbeltos ($h/b = 2$), la distancia más desfavorable es para $D = \lambda/2$ con los mayores esfuerzos en el edificio central para incidencia vertical; mientras que para valores cercanos al ángulo crítico, el primer edificio es el más afectado (alcanzando incrementos del 30 %).

No obstante, es para el caso $D = \lambda$ donde el estudio del ángulo de incidencia se hace más necesario. Para incidencia vertical se observa que los efectos de interacción estructura-suelo-estructura originan una disminución del valor del cortante de las estructuras; pero, a medida que nos aproximamos al ángulo crítico, estos efectos se vuelven perjudiciales, pasando de una reducción del 12 % a un aumento del 20 % en el edificio central. Esto demuestra como una configuración que puede considerarse como más segura para un tipo de excitación, se convierte en algo perjudicial bajo otras sollicitaciones no contempladas en el diseño.

- Desde el punto de vista de la frecuencia del cortante máximo, se aprecian variaciones de la misma en función del ángulo de incidencia llegando a producirse en determinadas configuraciones variaciones superiores al 2 %. Además, atendiendo a las funciones de respuesta, se comprueba que el ángulo de incidencia puede modificar la forma de la misma.
- Esta variación de la frecuencia no aparece para estructuras muy esbeltas, donde los valores de la frecuencia pico del sistema no se ven afectados ni por el ángulo de la onda incidente, ni por los efectos de interacción estructura-suelo-estructura.

Las conclusiones que pueden extraerse del análisis del caso estudiado con cimentación de pilotes inclinados son las siguientes:

- La inclinación de los pilotes se traduce en una disminución drástica de los esfuerzos a los que se encuentra sometida la base de la estructura. Este efecto se aprecia para todas las inclinaciones de onda, pero es mayor cuanto más vertical sea la incidencia.
- La reducción del cortante para ángulos más tumbados es mayor si la componente horizontal de la dirección de actuación de la onda (y, por tanto, la de inclinación de los pilotes) es perpendicular a la componente horizontal de su propagación, ondas SH.
- Este efecto provoca que se acentúe la diferencia entre el valor del cortante para un ángulo de incidencia en el entorno del crítico y el que presenta para incidencia vertical.
- Los efectos de interacción estructura-suelo-estructura se ven incrementados por la inclinación de pilotes para el caso de ondas SV (actuación, inclinación de pilotes y alineación de edificios con la misma componente horizontal).

Para ondas SH, los valores de la interacción son independientes de la inclinación de los pilotes.

- En comparación con la hipótesis clásica de cálculo (pilotes verticales e incidencia vertical), la inclinación de pilotes origina unos menores valores de esfuerzos en la base de la estructura.
- La inclinación de pilotes provoca un incremento en la rigidez del sistema en el sentido de que este ve incrementada su frecuencia de pico conforme aumenta la inclinación de los pilotes.

5.2 Líneas futuras

Los resultados de este estudio, si bien ponen de manifiesto la importancia del estudio del ángulo de incidencia y de los efectos de interacción estructura-suelo-estructura a la hora de comprender mejor el comportamiento de las diferentes estructuras que forman parte de un conjunto, dejan abiertas diferentes líneas de investigación y preguntas que responder para poder explicar estos fenómenos.

Así, respecto al análisis de interacción entre estructuras, se puede profundizar en los siguientes aspectos:

- Los efectos de interacción estructura-suelo-estructura para ondas inclinadas en diferentes tipos de suelo.
- Un estudio más exhaustivo discretizando un mayor número de valores del ángulo de incidencia θ .
- La búsqueda y análisis de los diferentes modos de vibración para sistemas formados por grupos de estructuras, para comprender mejor las variaciones que se producen en la frecuencia de pico en función de la excitación.
- Estudio de otras tipologías de grupos de edificaciones bajo los efectos de ondas inclinadas: cuadrículas tipo ciudad, o alineaciones de edificios en una dirección perpendicular a la de propagación de ondas.

5 Conclusiones y desarrollo futuro

- Obtención de espectros de respuesta máxima para diferentes terremotos a partir de las funciones de respuesta en frecuencia halladas.

En cuanto al estudio de pilotes inclinados, hay un amplio camino que recorrer, si bien los estudios realizados en este trabajo no son suficientes para realizar ninguna conclusión general, se ha comprobado que el valor del cortante se ve reducido al emplearse esta tipología de cimentación. Las diferentes líneas que el autor plantea son:

- Estudiar el efecto de la inclinación de pilotes sobre la respuesta estructural para edificios con otros valores de esbeltez.
- Estudiar su efecto sobre la interacción estructura-suelo-estructura para comprobar si se realiza una amplificación de la misma para las diferentes distancias de separación.
- Estudiar el efecto sobre la superestructura de ondas con una actuación perpendicular a la inclinación de los pilotes, ya que si bien presentan efectos favorables a nivel de cortante para una onda paralela a su inclinación, pueden ser desfavorables para otro tipo de excitación.
- Es importante realizar un estudio de los esfuerzos a los que se encuentran sometidos los pilotes en este tipo de cimentación, pudiendo abrirse de esta forma, un nuevo diseño para cimentaciones más favorables frente a cargas dinámicas.

Referencias

- [1] J D Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [2] Javier Avilés and Luis E Pérez-Rocha. Evaluation of interaction effects on the system period and the system damping due to foundation embedment and layer depth. *Soil Dyn Earthquake Eng*, 15:11–27, 1996.
- [3] J Bielak. Dynamic behavior of structures with embedded foundations. *Earthquake Eng Struct Dyn*, 3:259–274, 1975.
- [4] D Clouteau and D Aubry. Modifications of the ground motion in dense urban areas. *J Comput Acoustics*, 9:1659–1675, 2001.
- [5] J. Domínguez. *Boundary elements in dynamics*. Computational Mechanics Publications & Elsevier Applied Science, Southampton, NY, 1993.
- [6] A M Kaynia. Dynamic stiffness and seismic response of pile groups. Technical Report R83-03, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1982.
- [7] A M Kaynia and M Novak. Response of pile foundations to rayleigh waves and obliquely incident body waves. *Earthquake Eng Struct Dyn*, 21:303–318, 1992.
- [8] M Kham, J F Semblat, P Y Bard, and P Dangla. Seismic site-city interaction: main governing phenomena through simplified numerical models. *Bull Seism Soc Ame*, 96(5):1934–1951, 2006.
- [9] T H Lee and D A Wesley. Soil-structure interaction of nuclear reactor structures considering through-soil coupling between adjacent structures. *Nuclear Eng Design*, 24:374–387, 1973.
- [10] L Lehmann and H Antes. Dynamic structure-soil-structure interaction applying the symmetric galerkin boundary element method (sgbem). *Mech Research Comm*, 3:297–304, 2001.
- [11] J E Luco and L Contesse. Dynamic structure-soil-structure interaction. *Bull Seism Soc Ame*, 63:1289–1303, 1973.
- [12] Badoni D Makris N. Seismic response of pile groups under oblique-shear and rayleigh waves. *Earthquake Eng Struct Dyn*, 24(4):517–532, 1995.
- [13] S M Mamoon and S Ahmad. Seismic response of piles to obliquely incident sh, sv and p waves. *J Geotech Eng, ASCE*, 116(2):186–204, 1990.
- [14] S M Mamoon and P K Banerjee. Response of piles and pile groups to travelling sh-waves. *Earthquake Eng Struct Dyn*, 19:597–610, 1990.

- [15] R Matos Filho, A V Mendonça, and J B Paiva. Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads. *Eng Anal Boundary Elem*, 29:195–203, 2005.
- [16] L A Padrón. *Numerical Model for the Dynamic Analysis of Pile Foundations*. PhD thesis, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 2009.
- [17] L A Padrón, J J Aznárez, and O Maeso. A bem-fem model for studying dynamic impedances of piles in elastic soils. In B H V Topping, G Montero, and R Montenegro, editors, *Proc. of the Fifth Int Conf on Eng Comput Technology*, number 163, Stirlingshire, UK, 2006. Civil-Comp Press.
- [18] L A Padrón, J J Aznárez, and O. Maeso. Bem-fem coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups. *Eng Anal Bound Elem*, 31:473–484, 2007.
- [19] R S Y Pak and P C Jennings. Elastodynamic response of the pile under transverse excitation. *J Eng Mech, ASCE*, 113(7):1101–1116, 1987.
- [20] R Sen, T G Davies, and P K Banerjee. Dynamic analysis of piles and pile groups embedded in homogeneous soils. *Earthquake Eng Struct Dyn*, 13:53–65, 1985.
- [21] C Tsogka and A Wirgin. Simulation of seismic response in an idealized city. *Soil Dyn Earthquake Eng*, 23:391–402, 2003.
- [22] A S Veletsos and J W Meek. Dynamic behaviour of building-foundation systems. *Earthquake Eng Struct Dyn*, 3:121–138, 1974.
- [23] S Wang and G Schmid. Dynamic structure-soil-structure interaction by fem and bem. *Comput Mech*, 9:347–357, 1992.
- [24] H L Wong and M D Trifunac. Two-dimensional, antiplane, building-soil-building interaction for two or more buildings and for incident plane sh waves. *Bull Seism Soc Ame*, 65(6):1863–1885, 1975.
- [25] J M Zarzalejos. Influencia del ángulo de incidencia y tipo de onda en la respuesta sísmica de estructuras de edificación pilotadas. Master's thesis, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, 2011.

Parte *I*

Apéndices

Apéndice *A*

**Funciones de Respuesta en
Frecuencia de los desplazamientos de
las plantas de las estructuras**

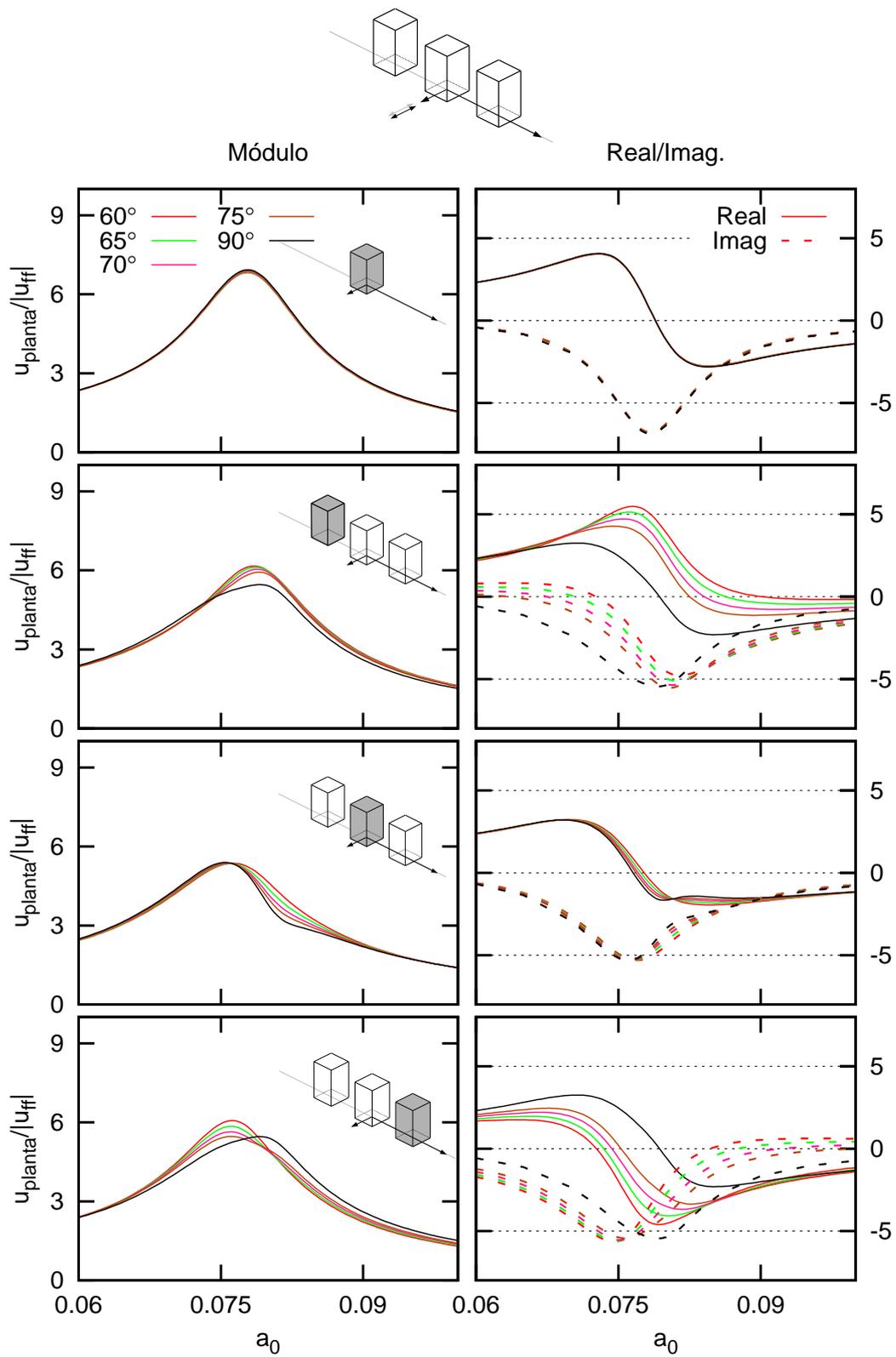


Figura A.1: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

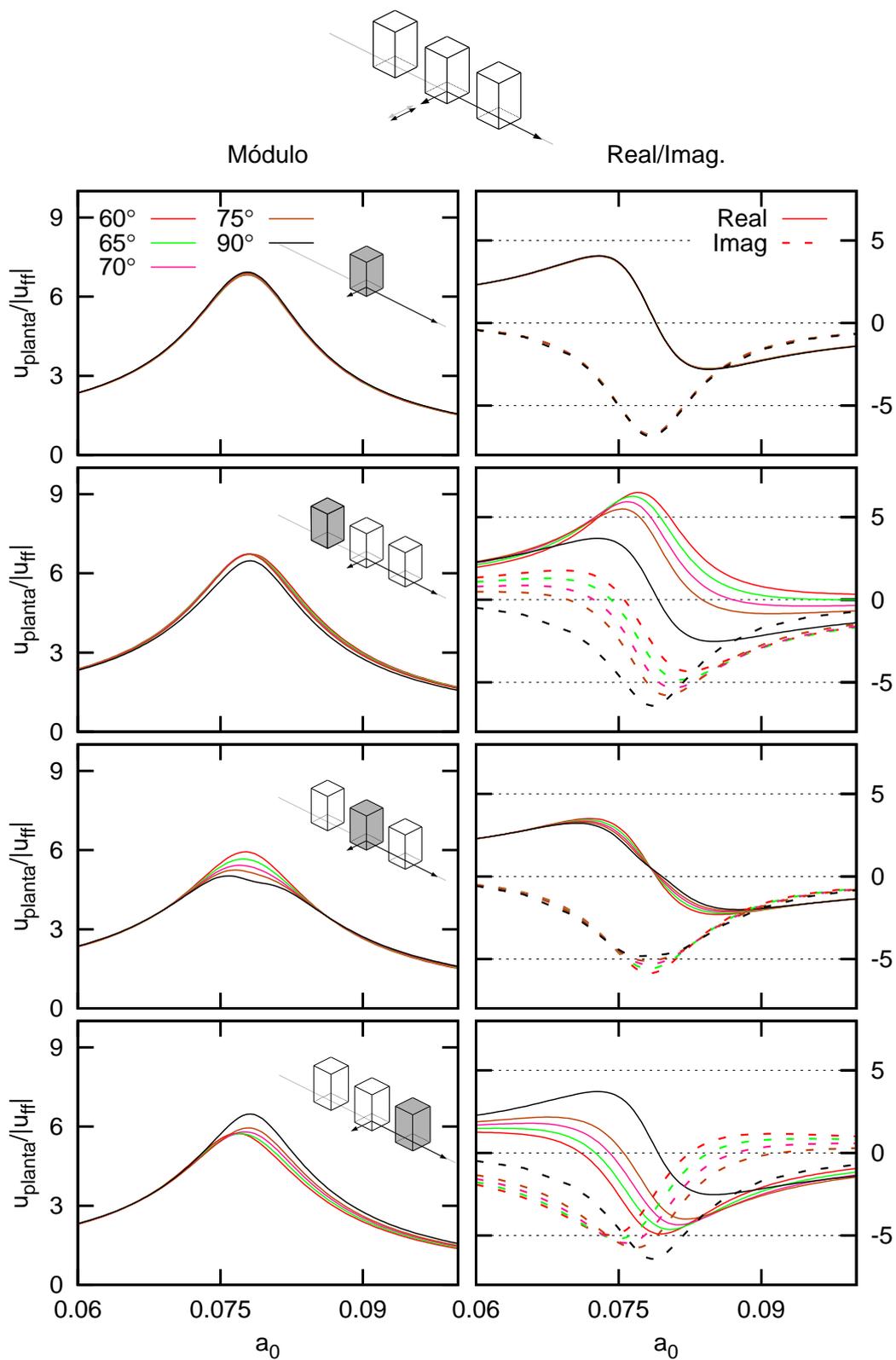


Figura A.2: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

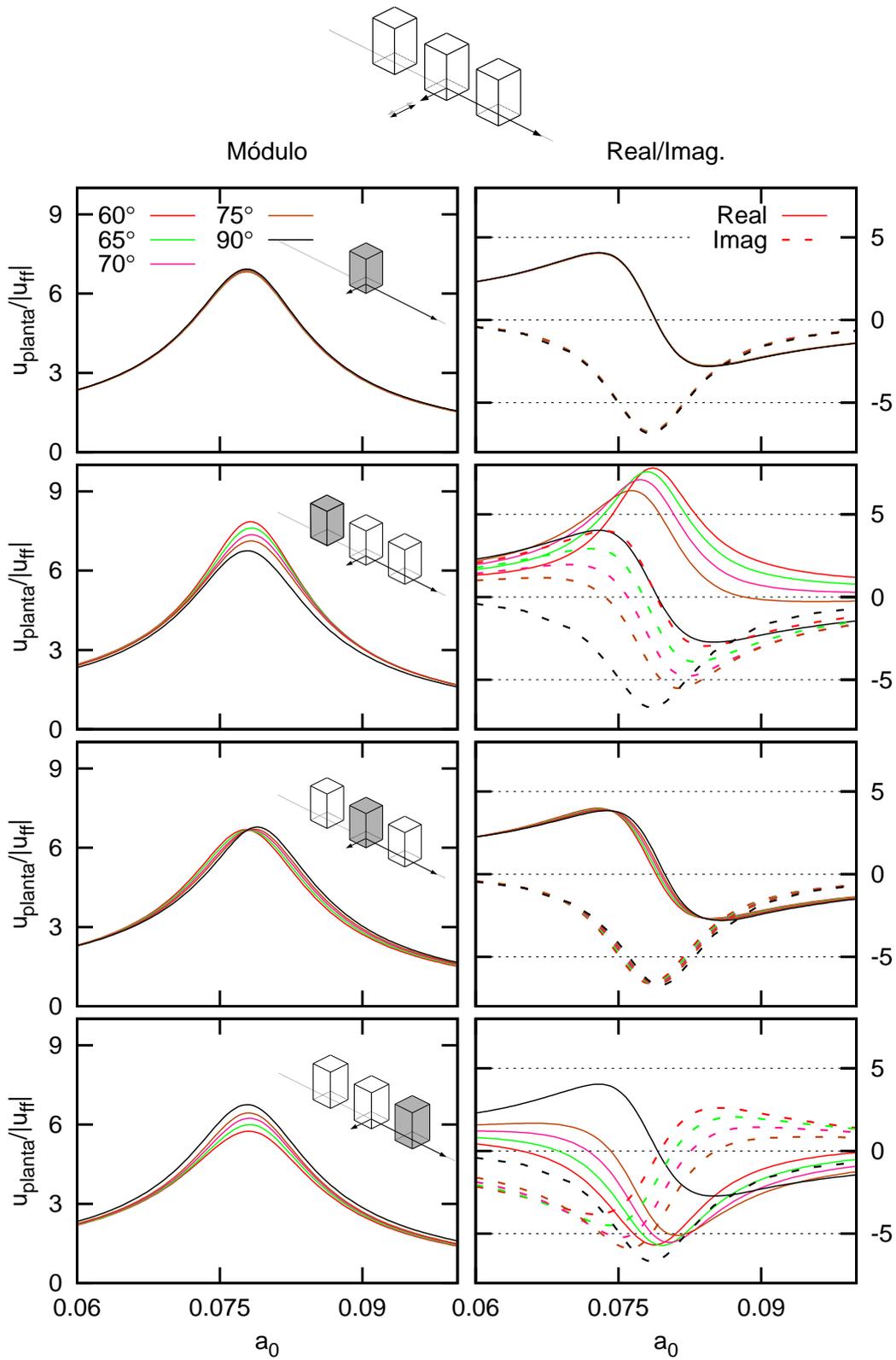


Figura A.3: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

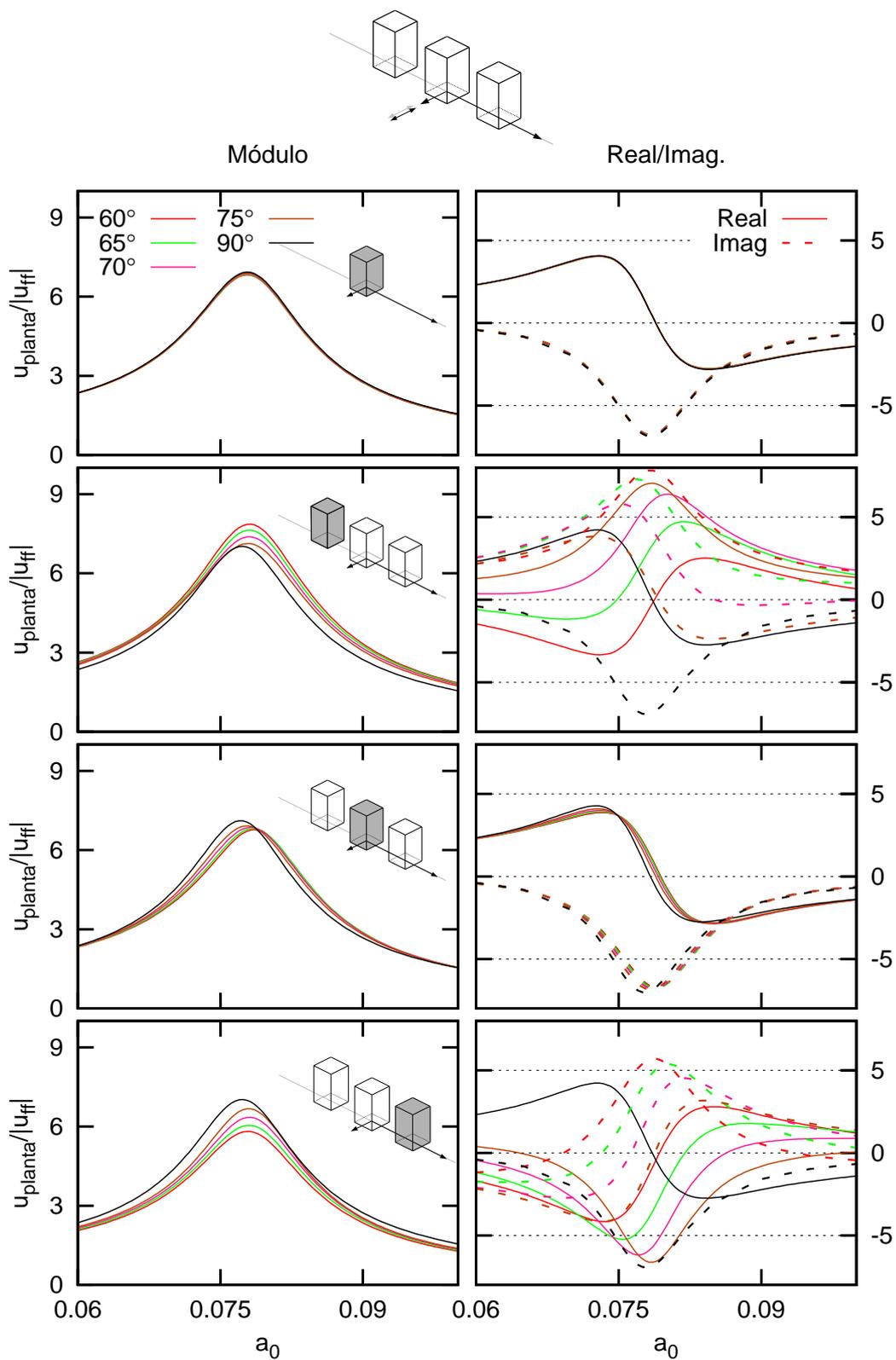


Figura A.4: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

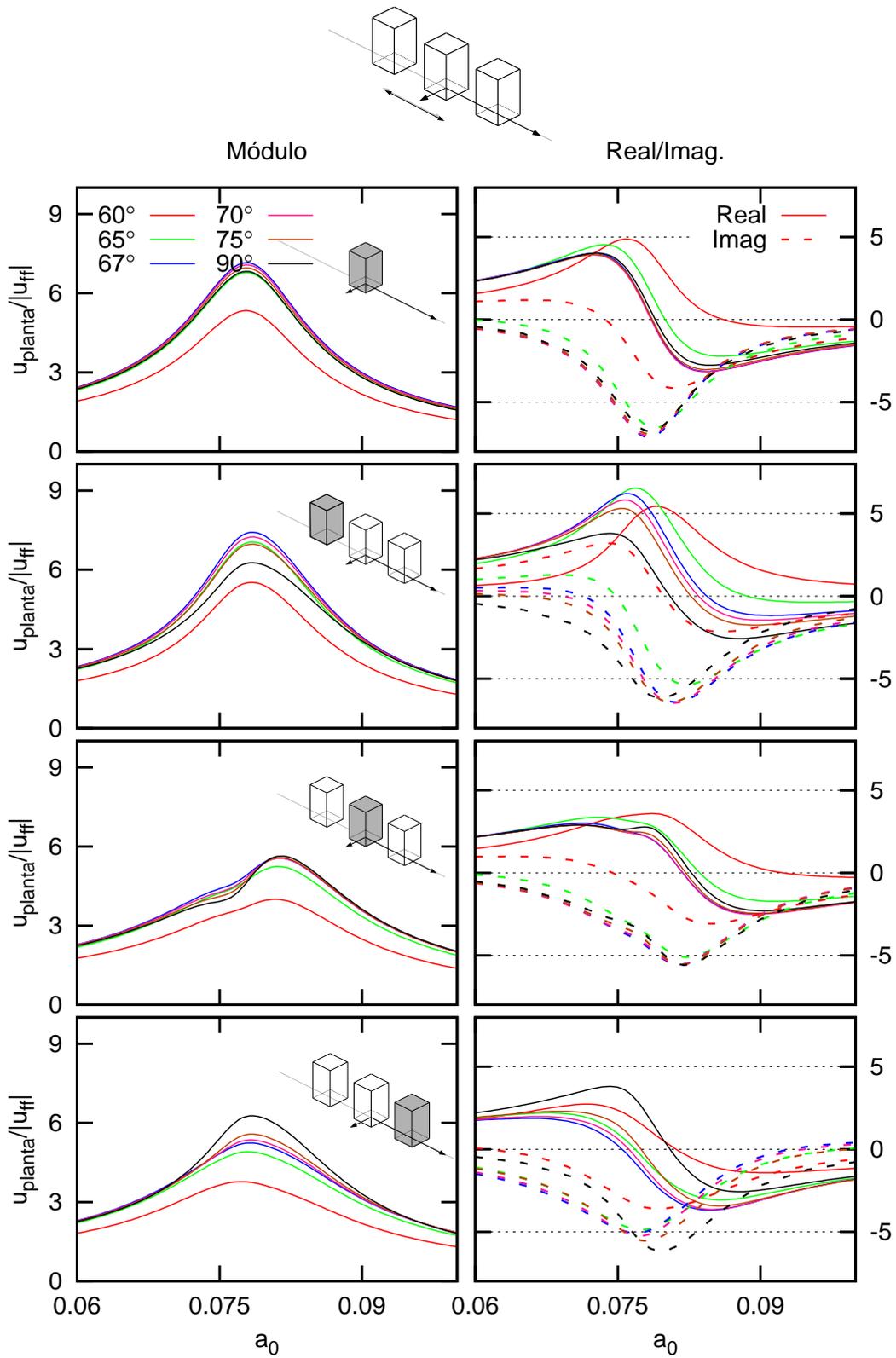


Figura A.5: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

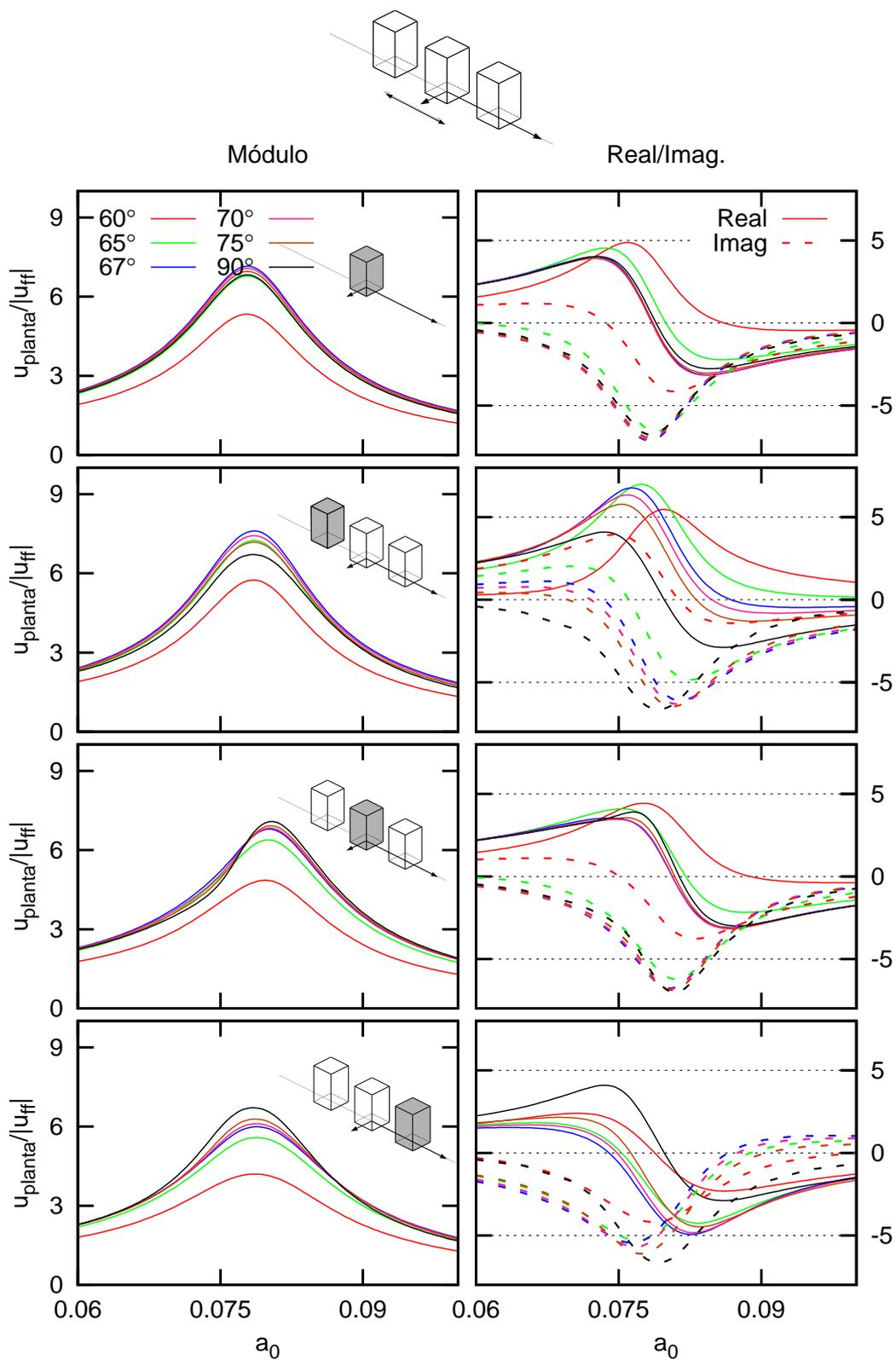


Figura A.6: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

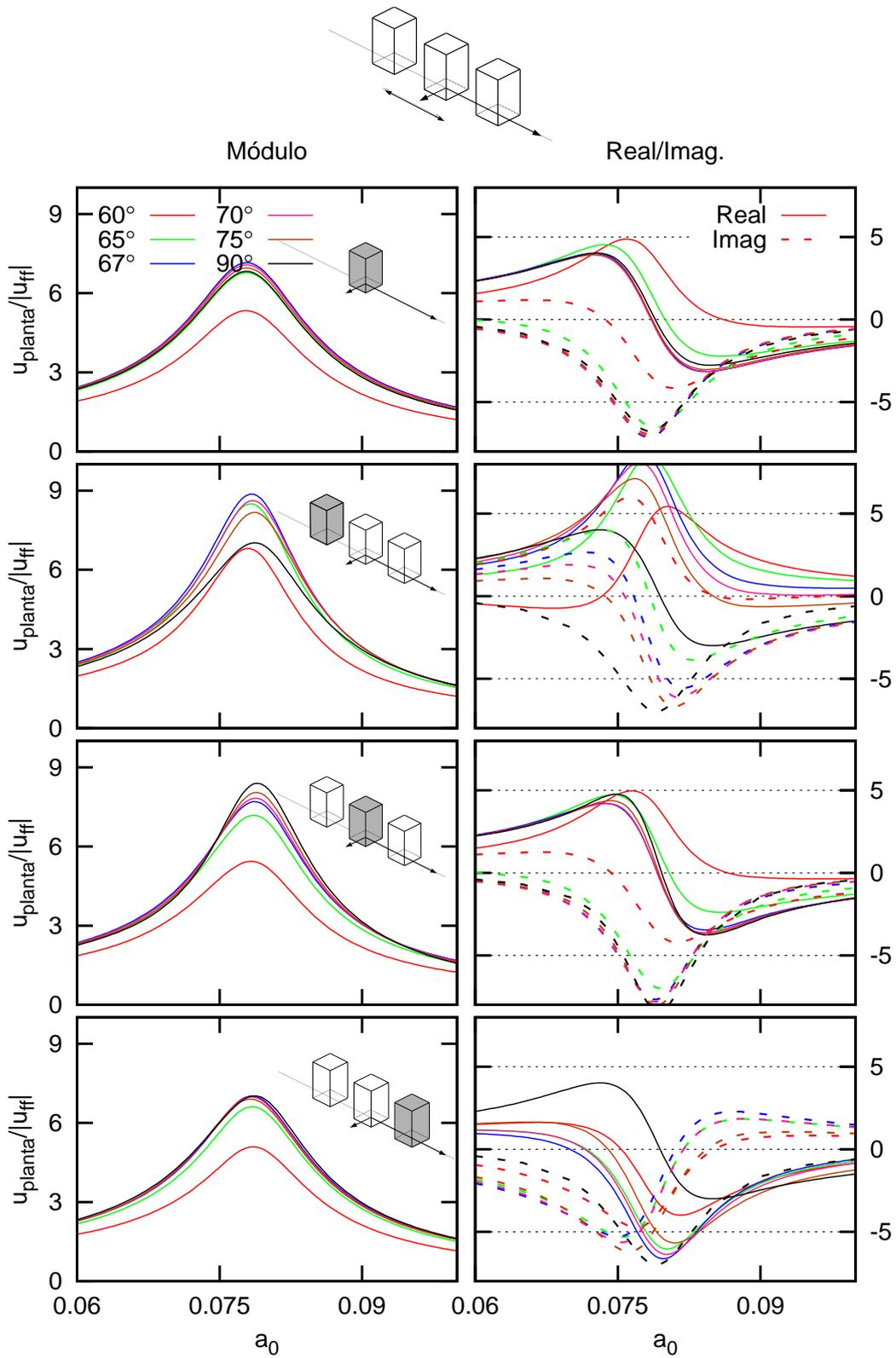


Figura A.7: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

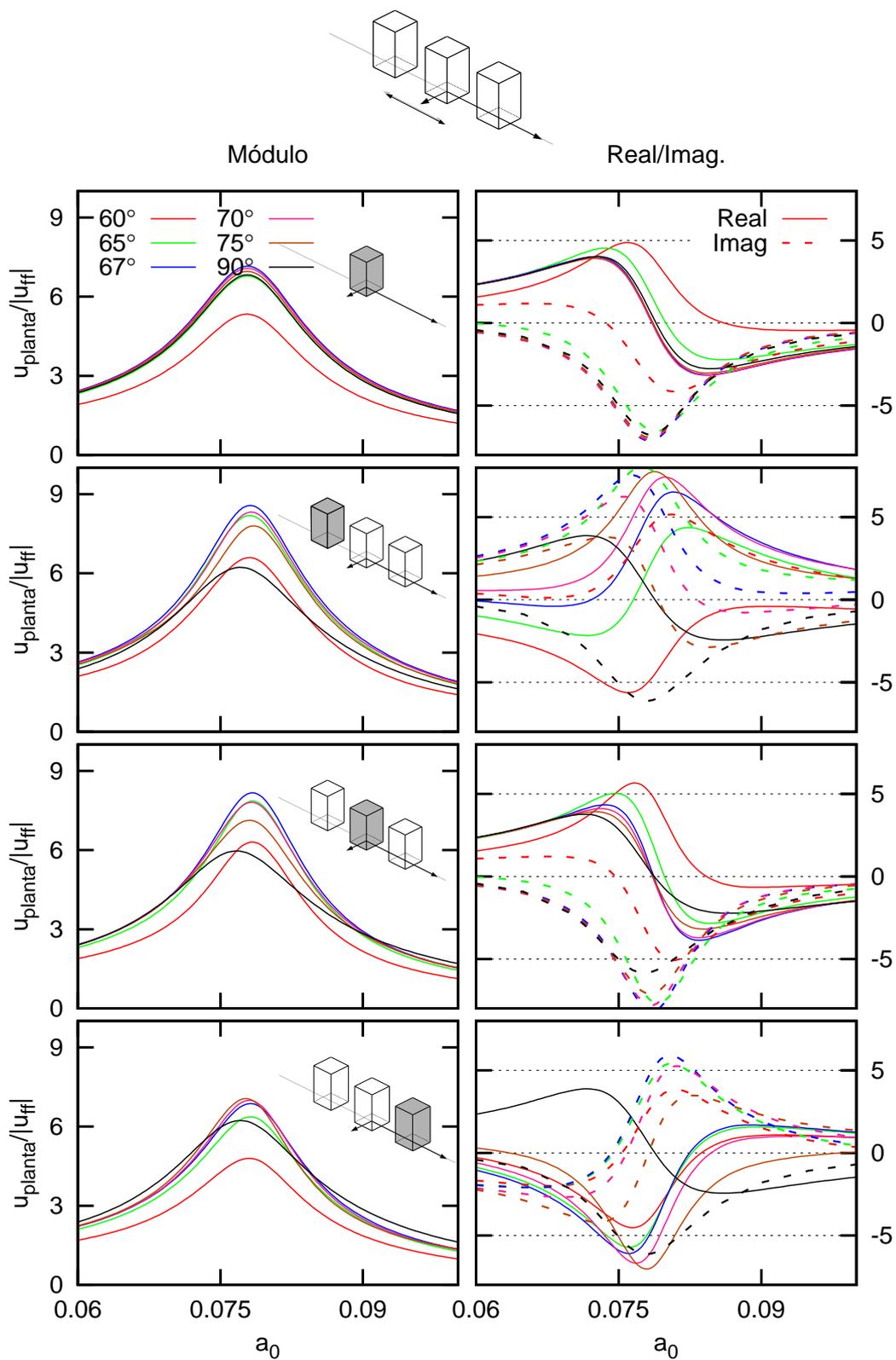


Figura A.8: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

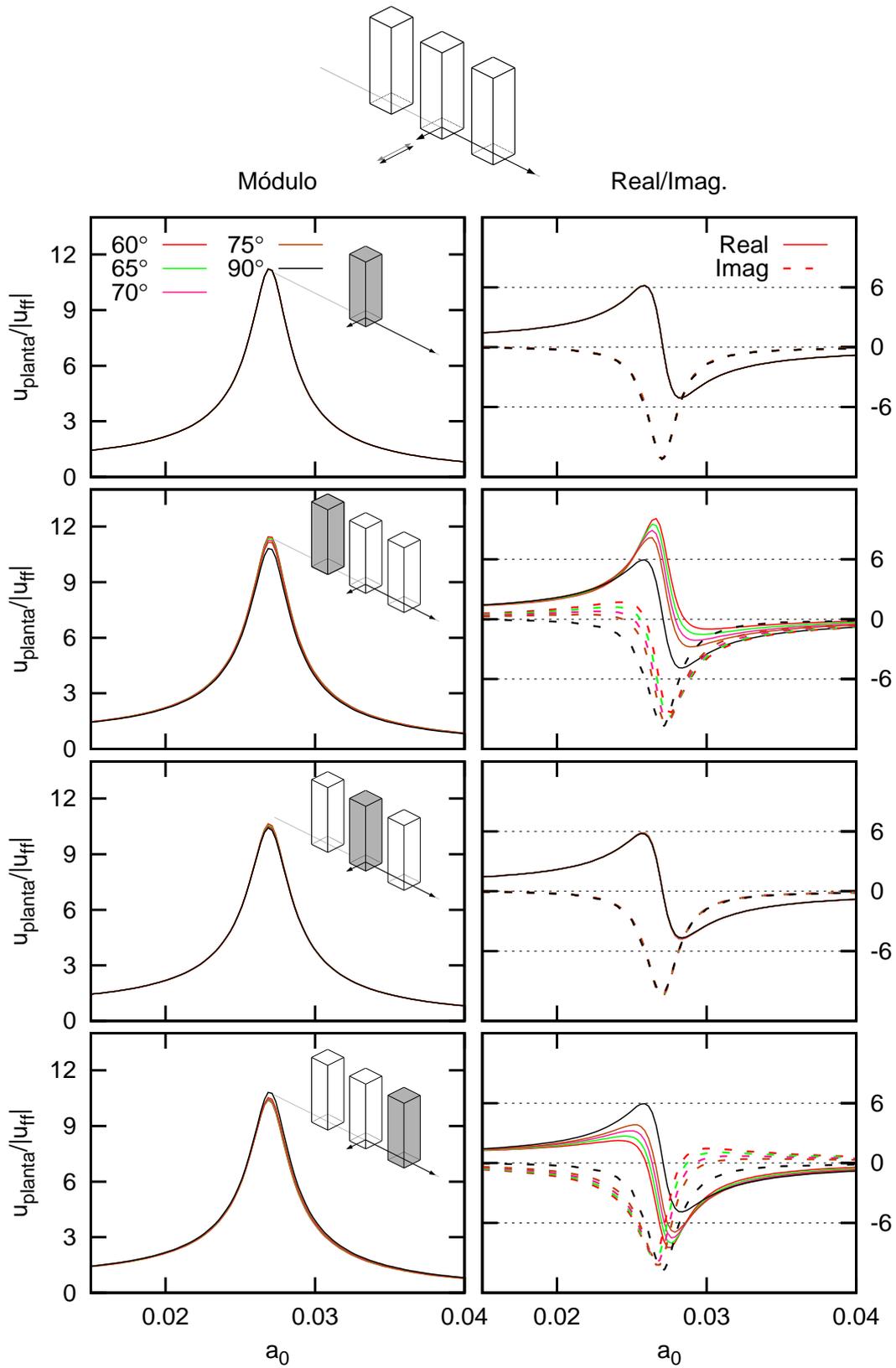


Figura A.9: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

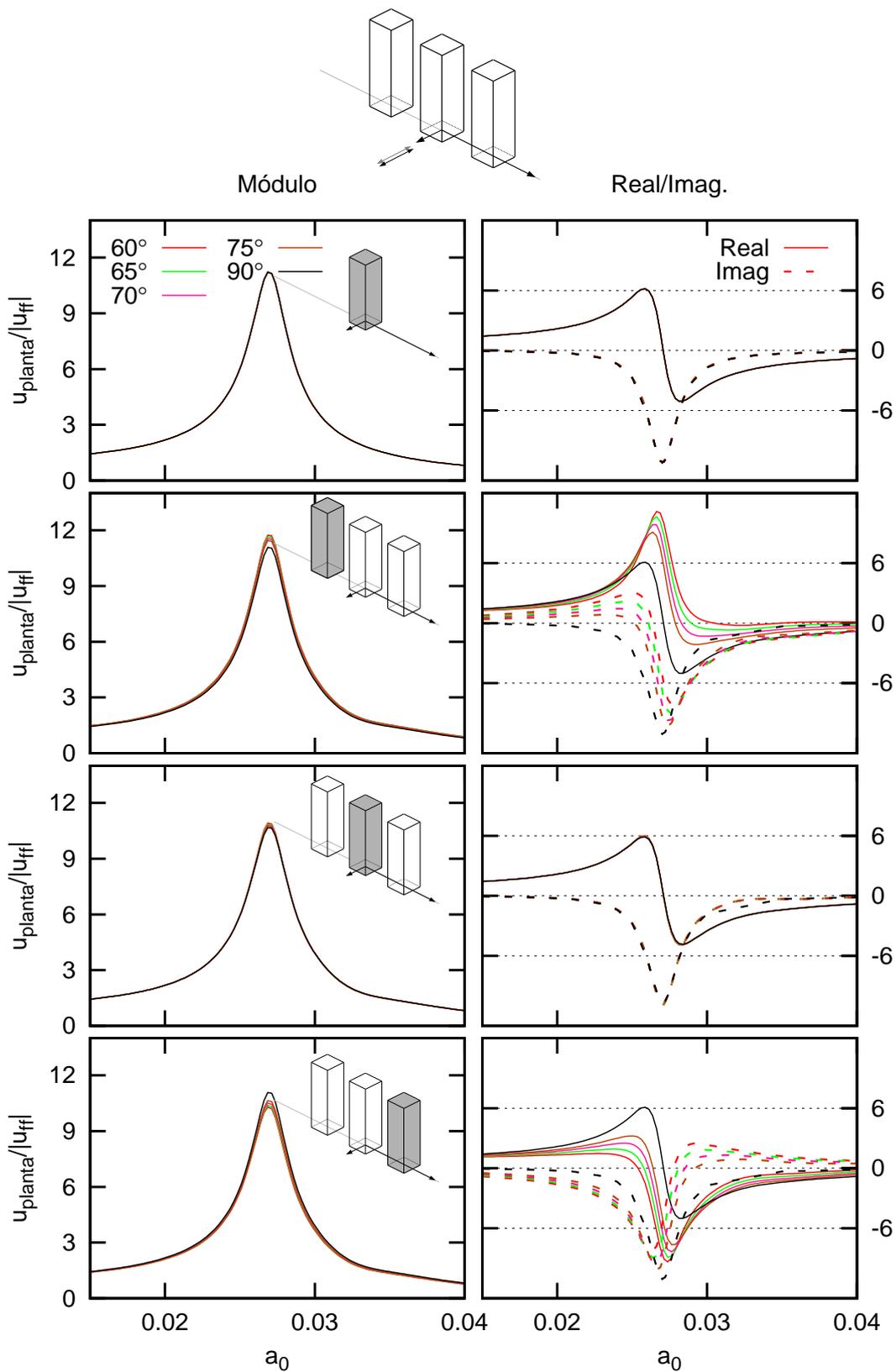


Figura A.10: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

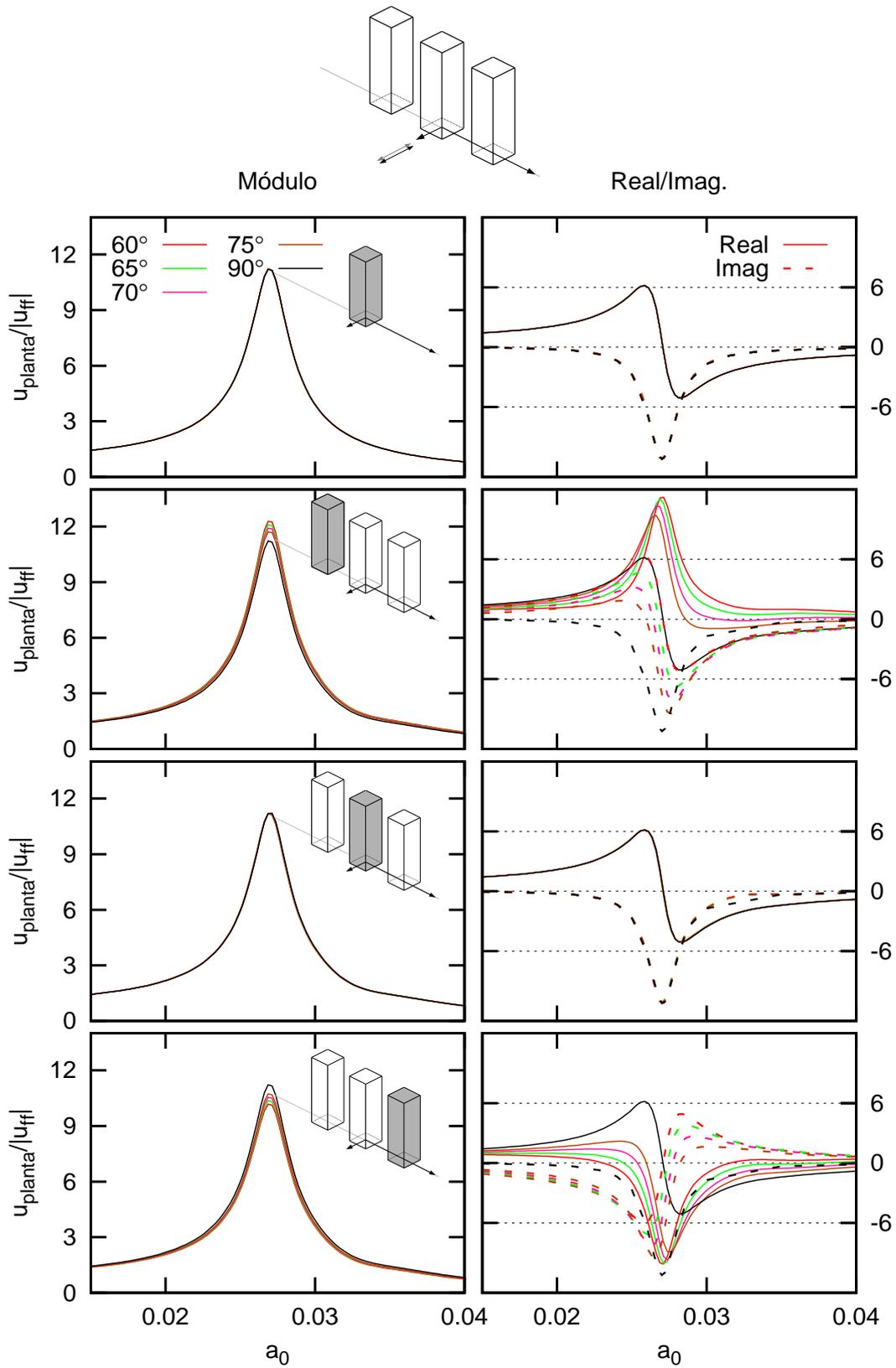


Figura A.11: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

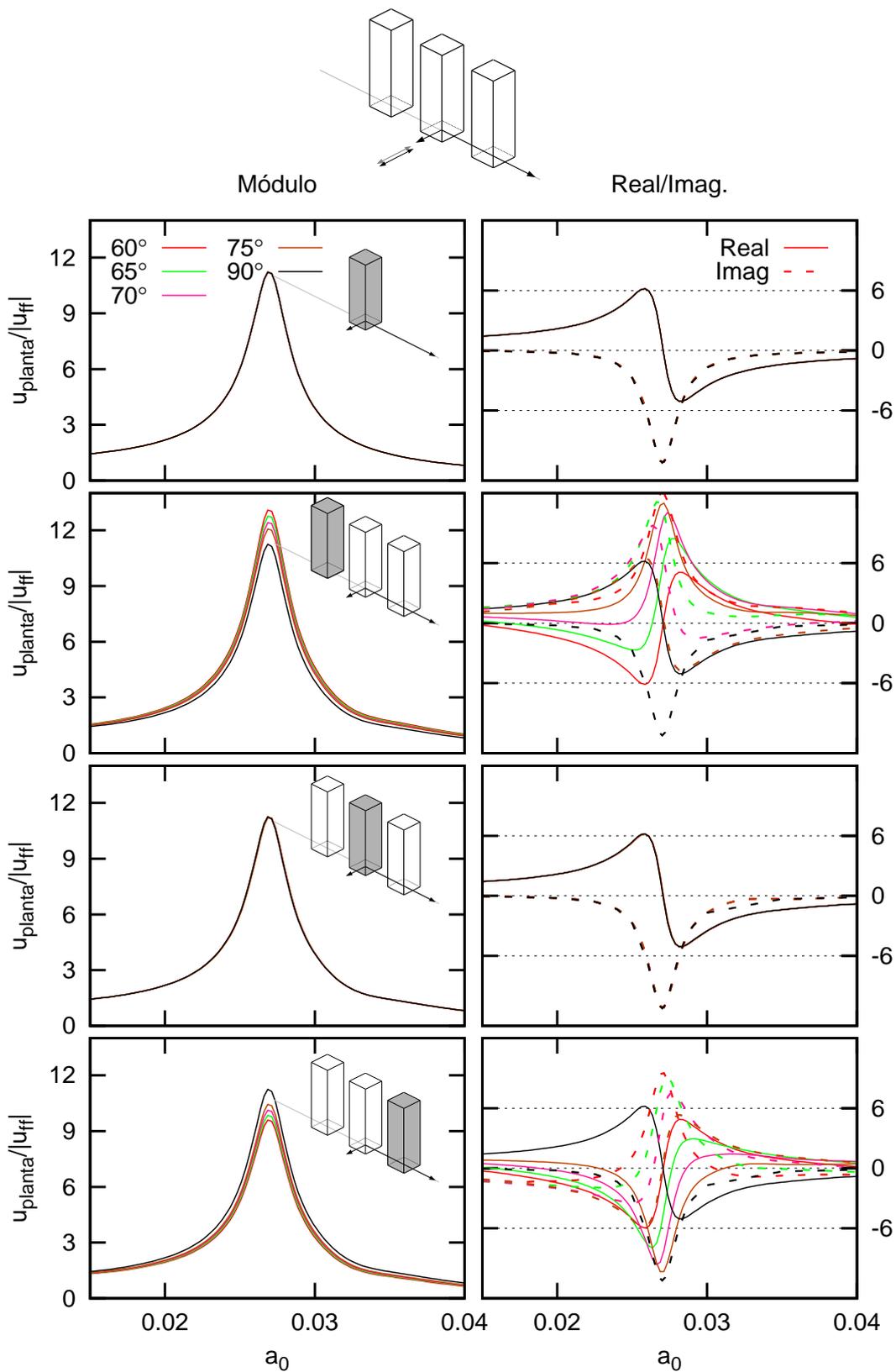


Figura A.12: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

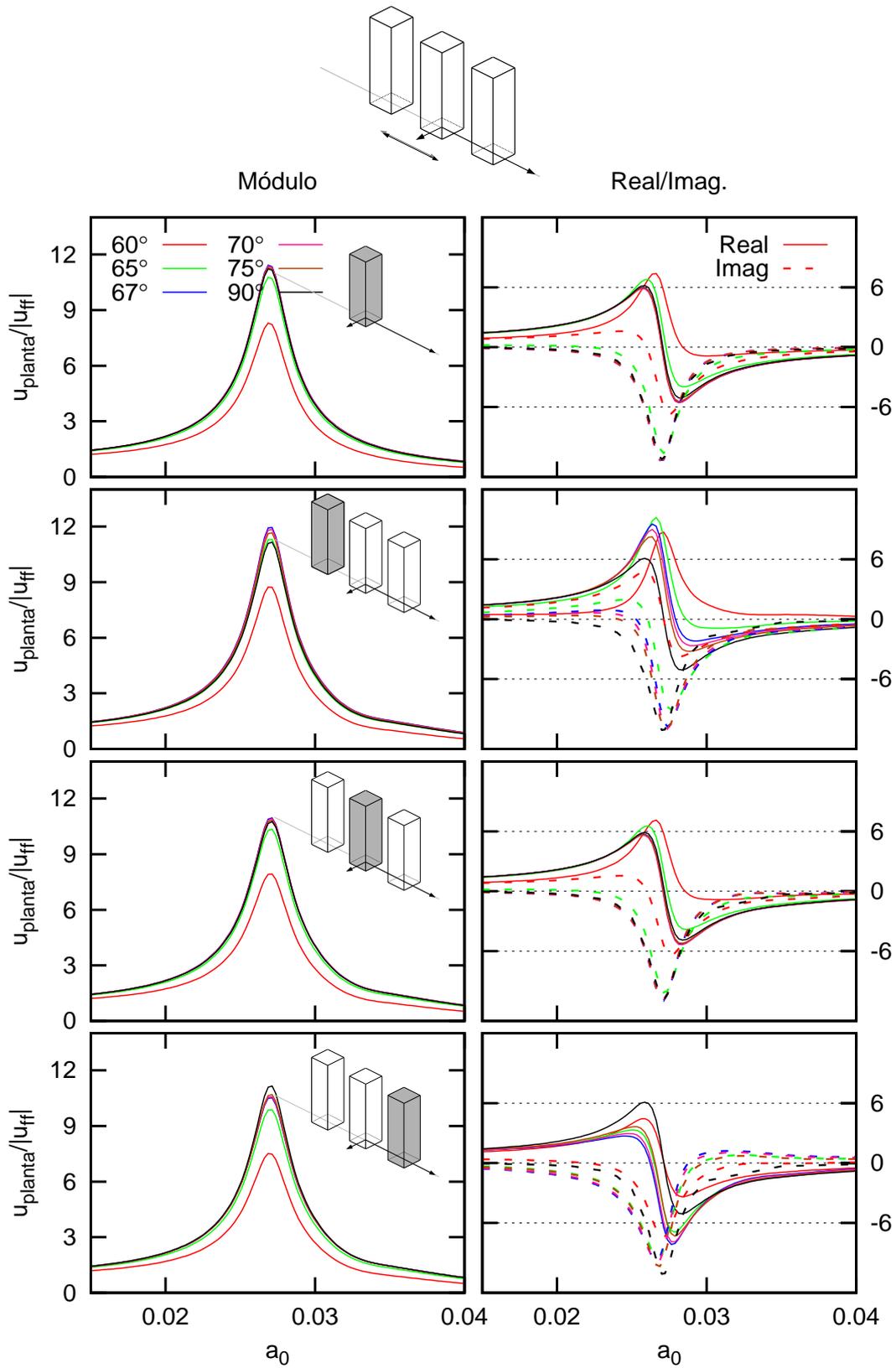


Figura A.13: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

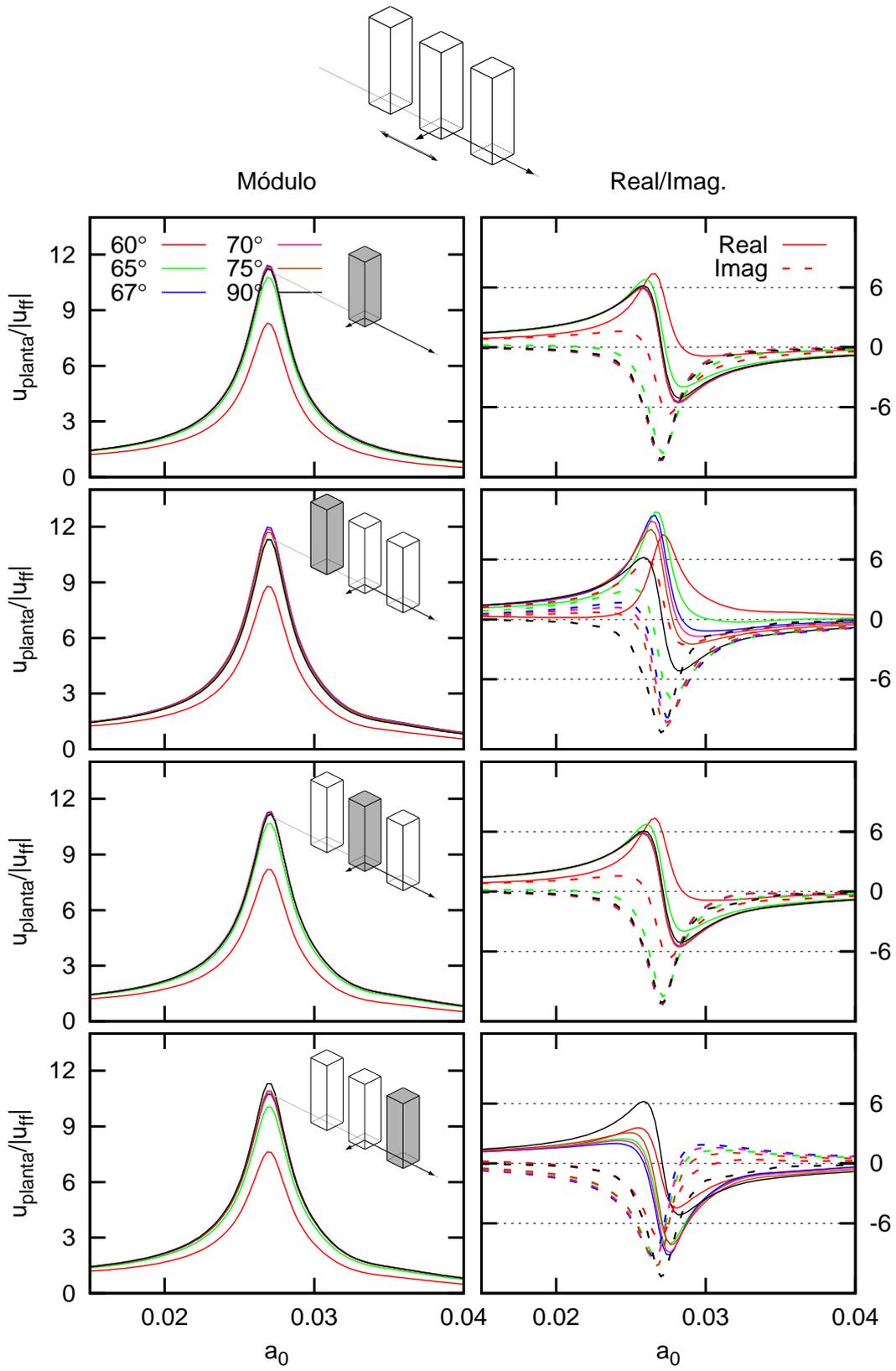


Figura A.14: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

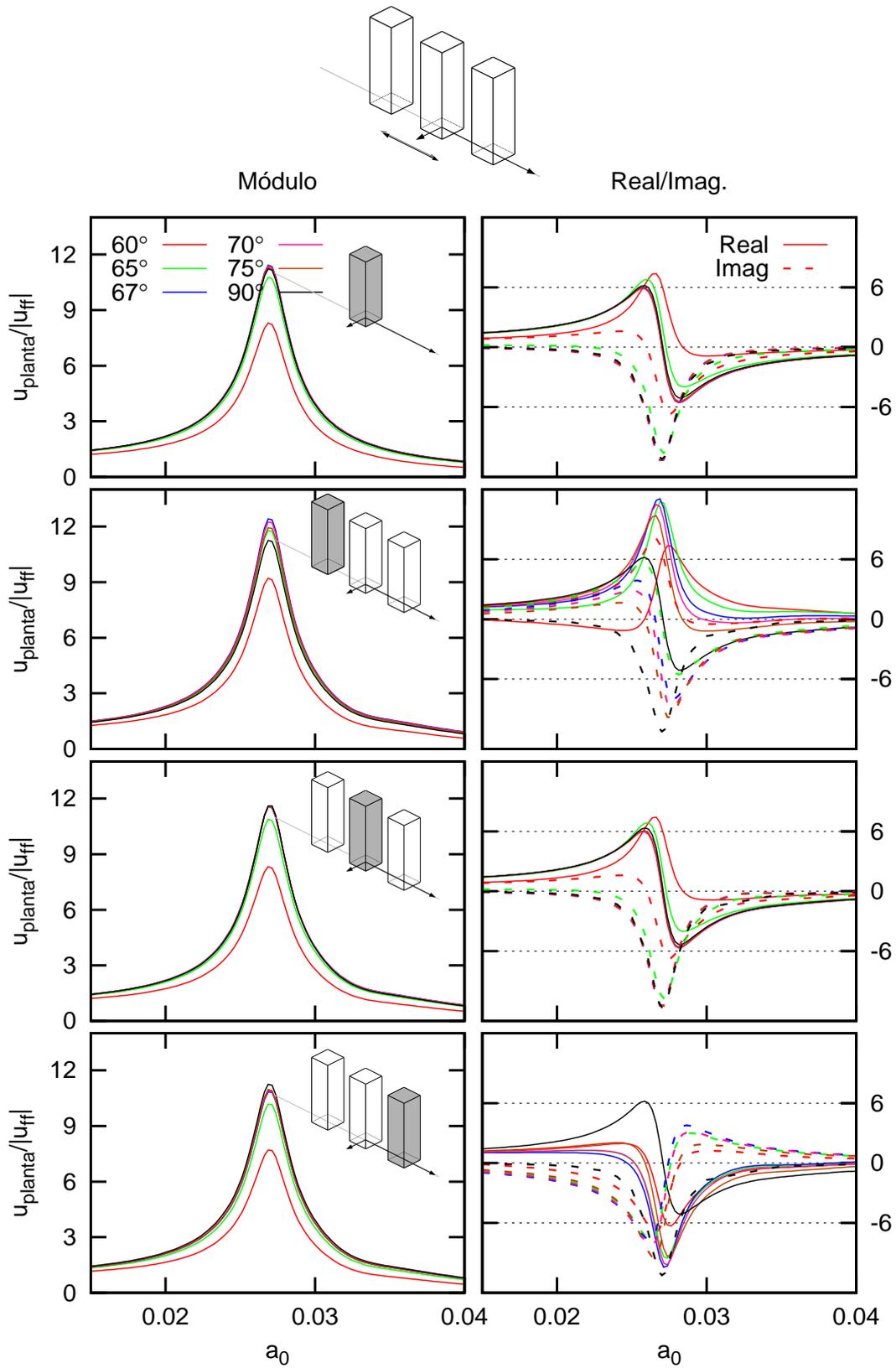


Figura A.15: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

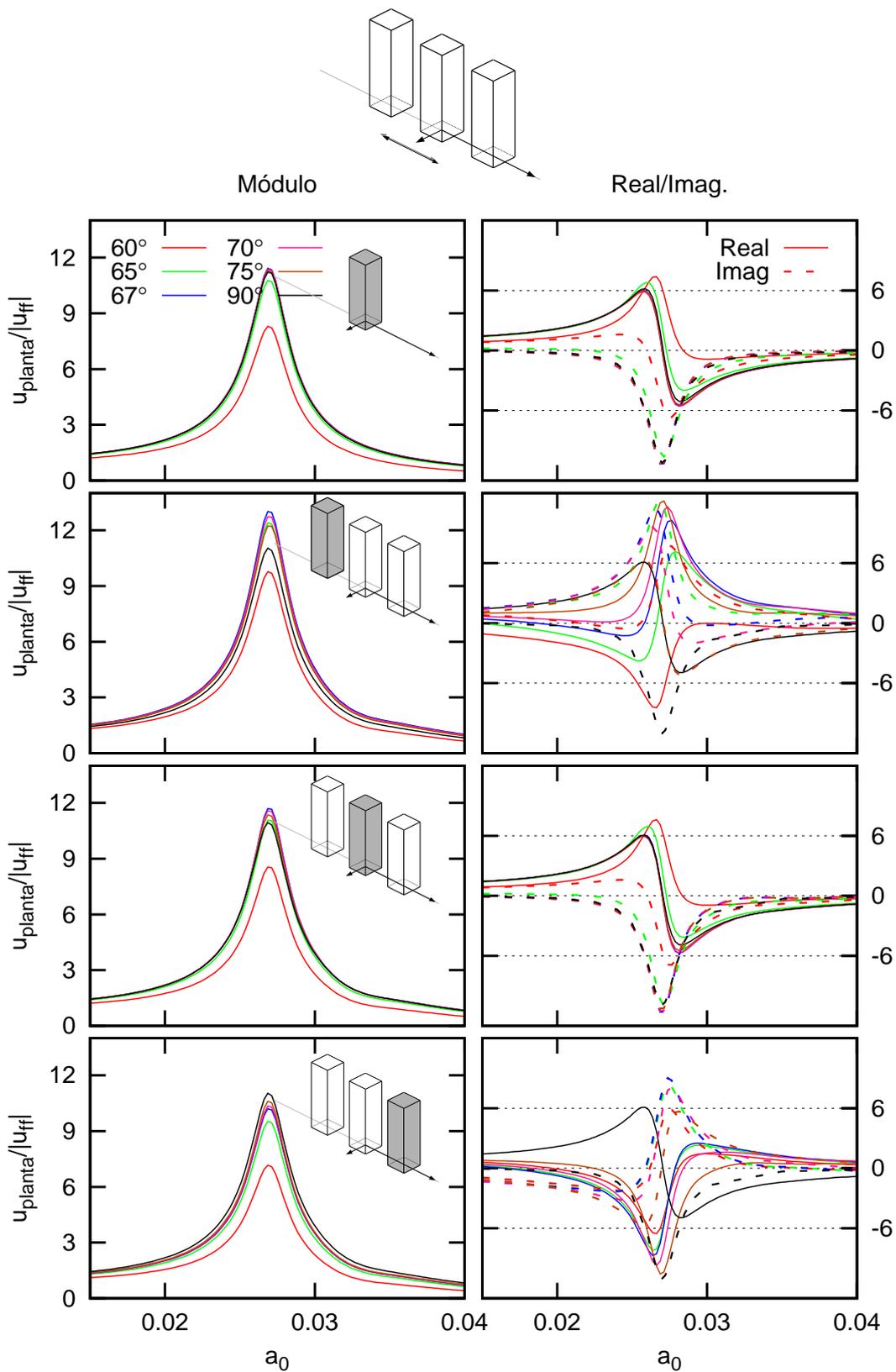


Figura A.16: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

**Funciones de Respuesta en
Frecuencia de los desplazamientos de
las bases de las estructuras**

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

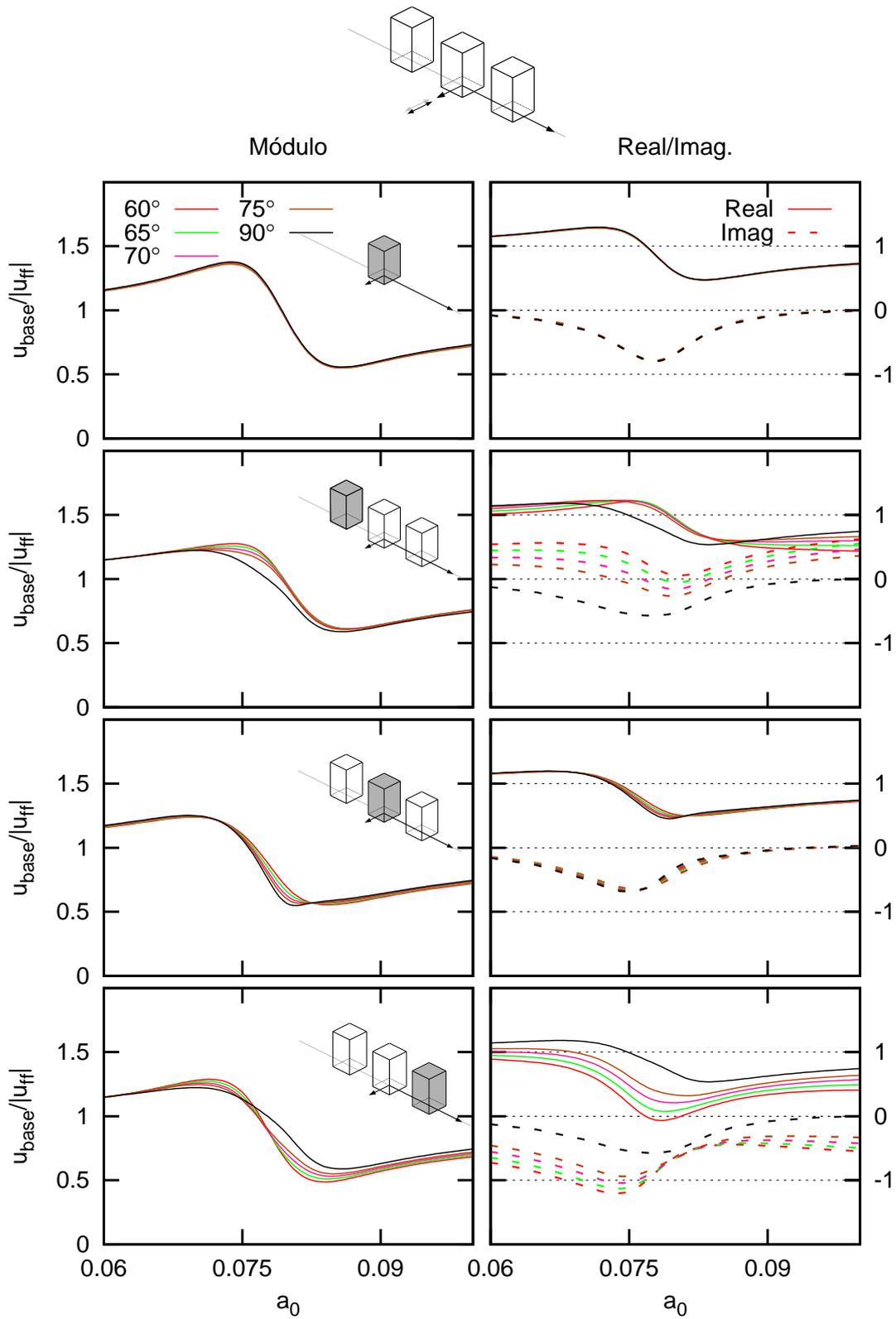


Figura B.1: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

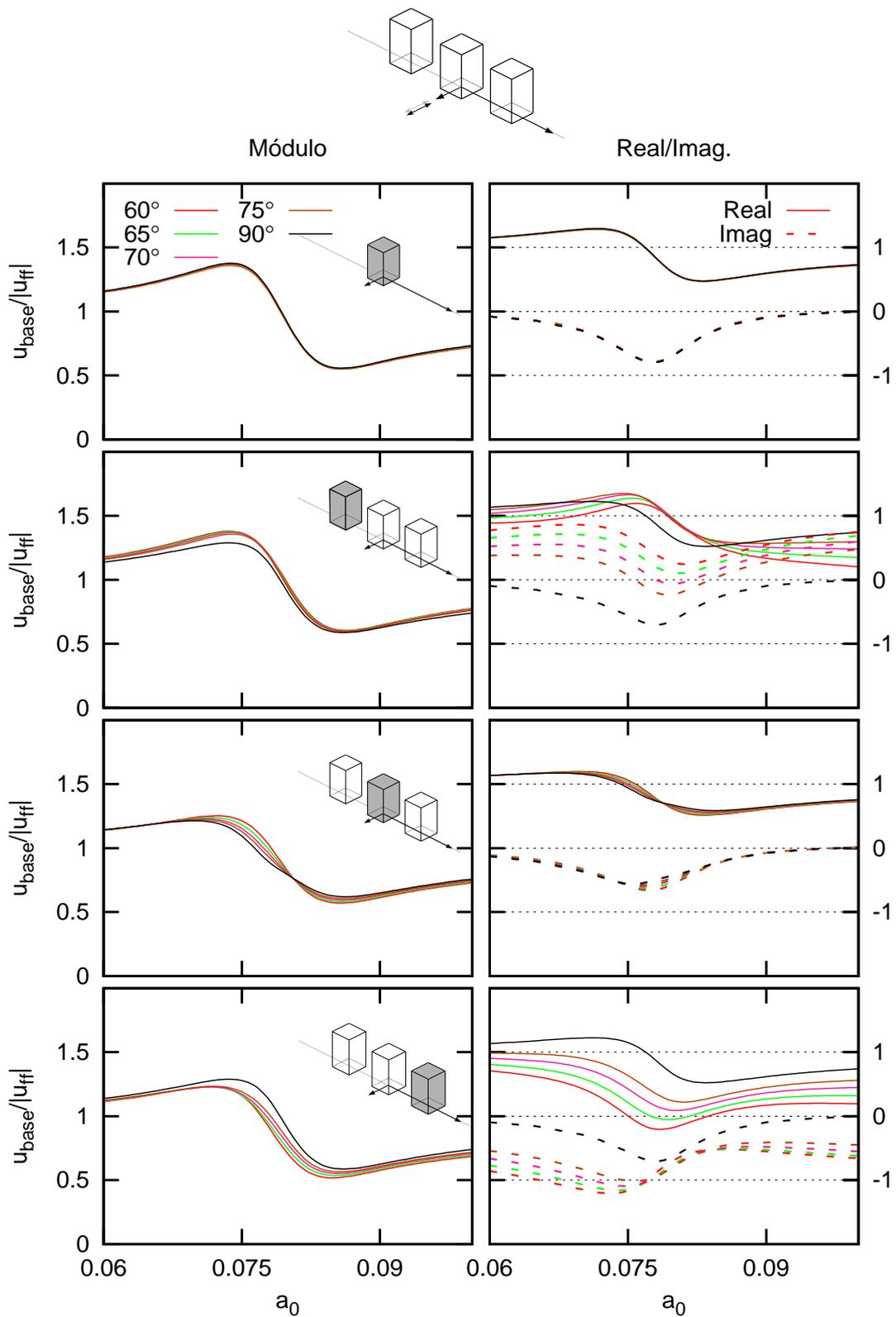


Figura B.2: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

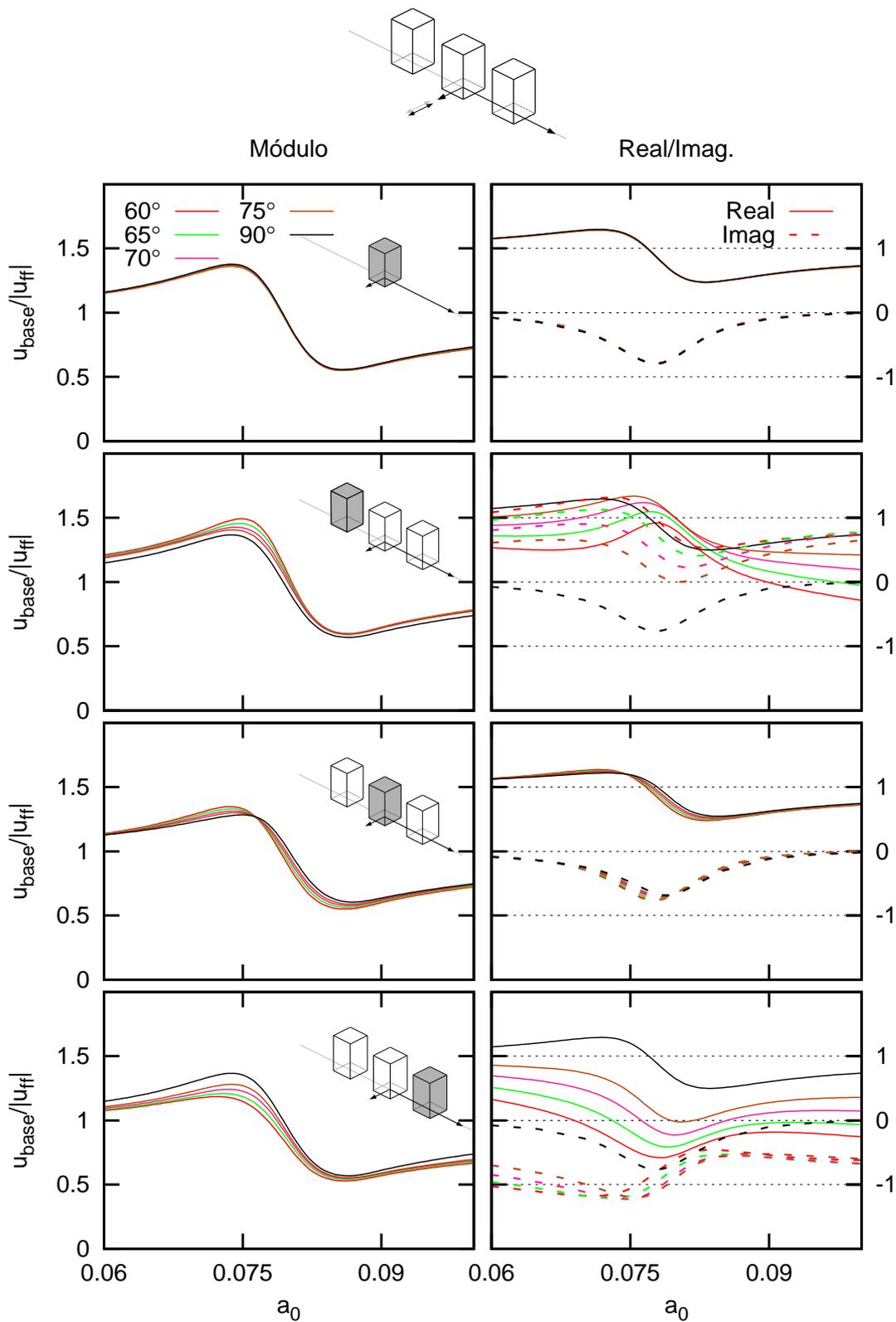


Figura B.3: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

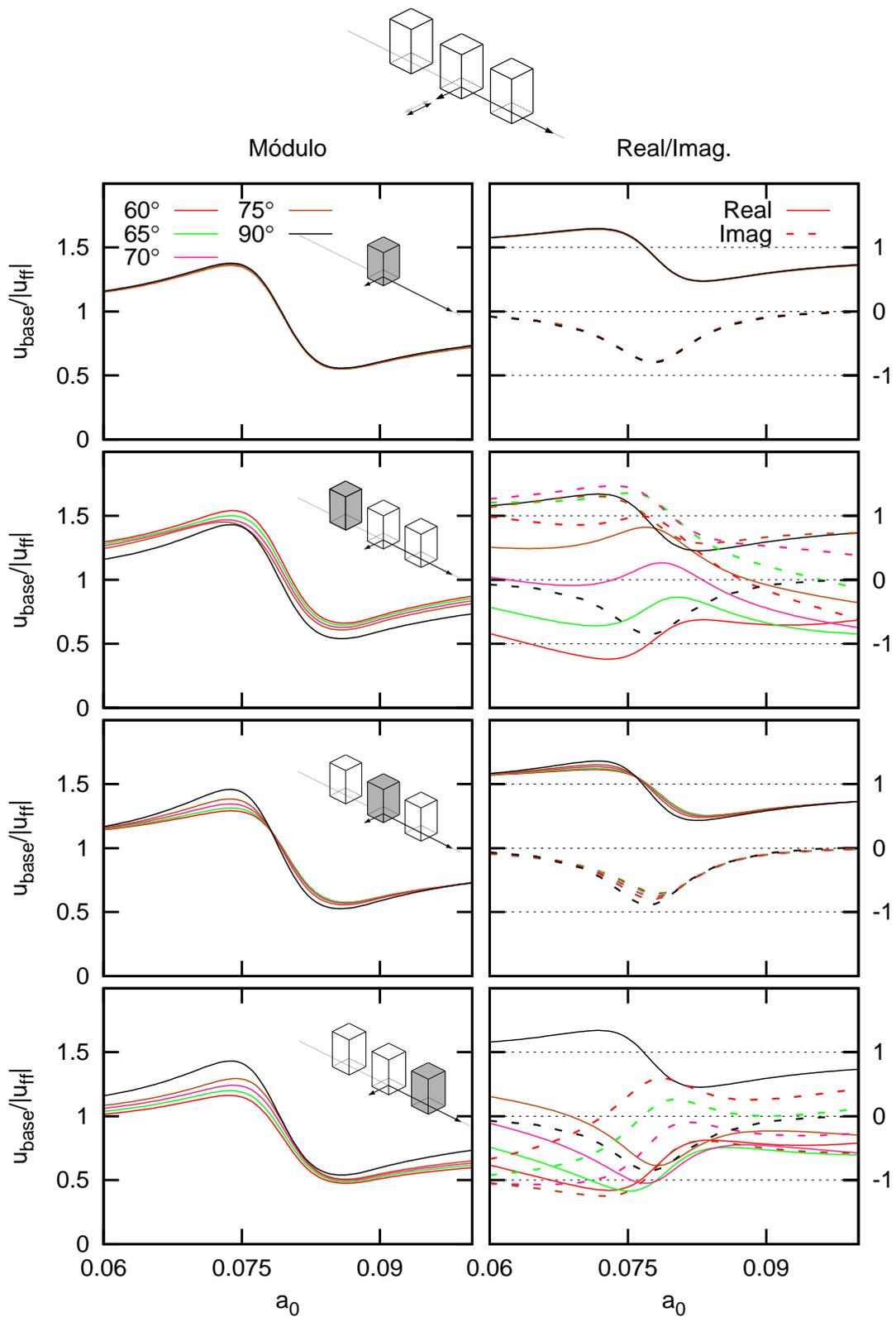


Figura B.4: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

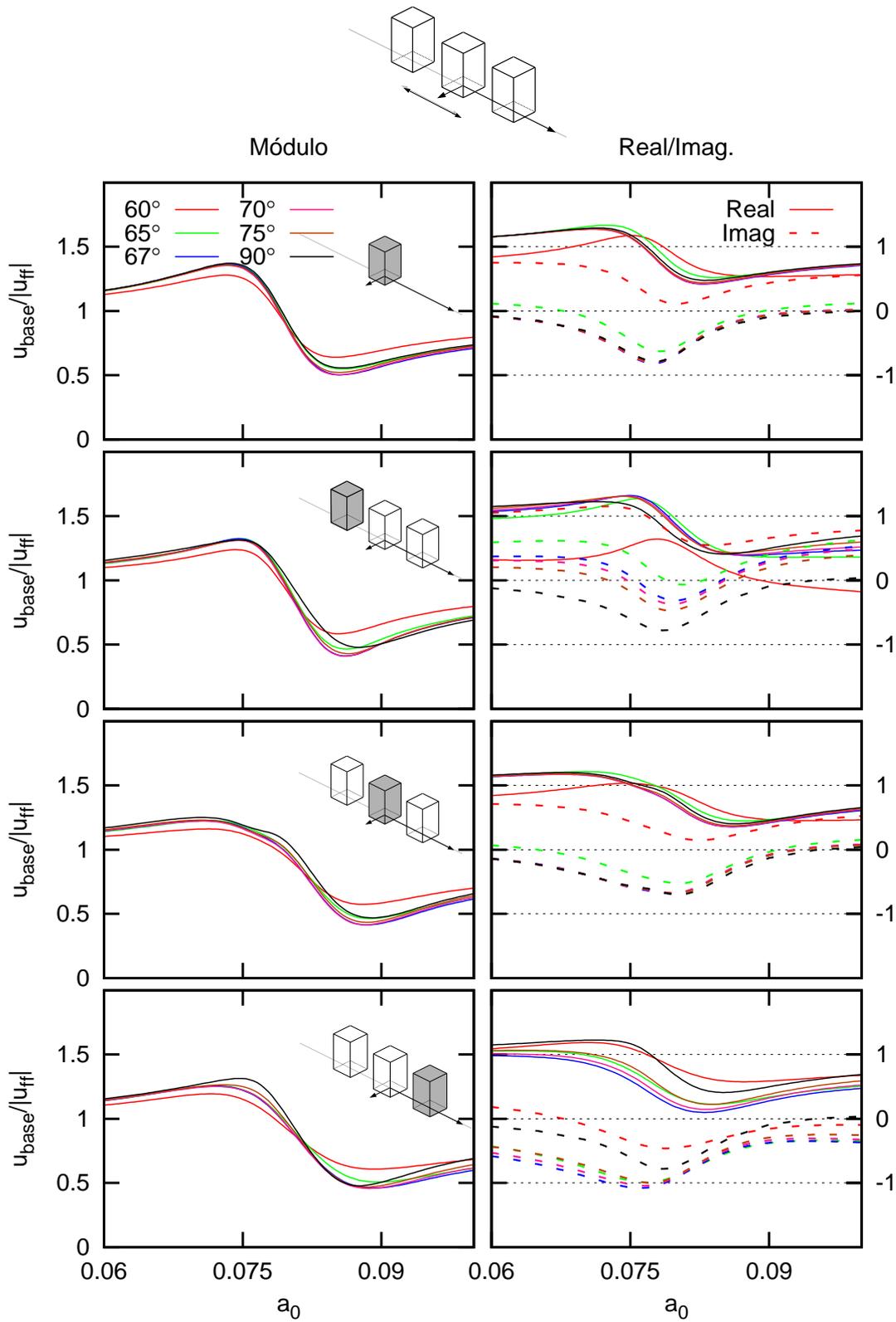


Figura B.5: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

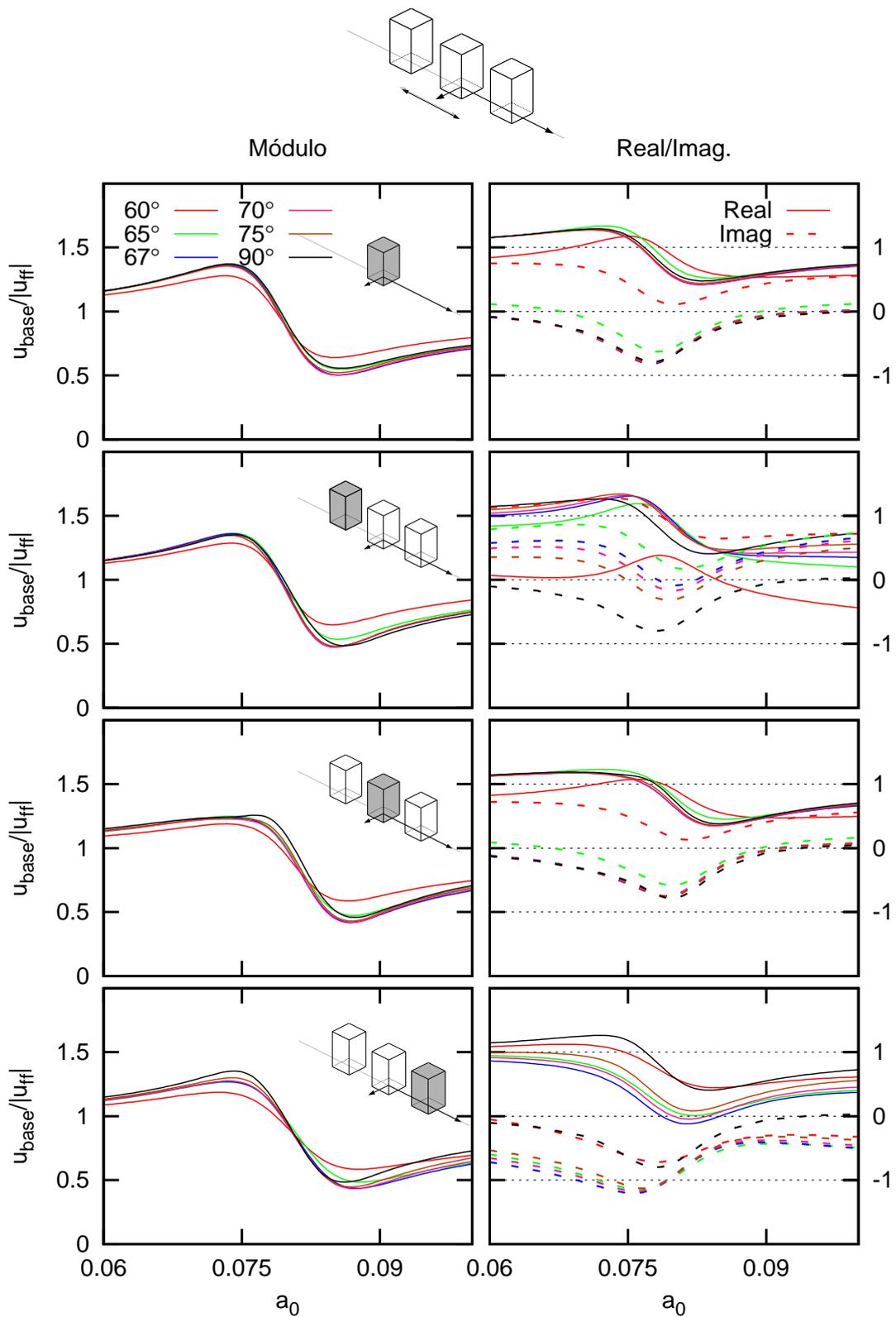


Figura B.6: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

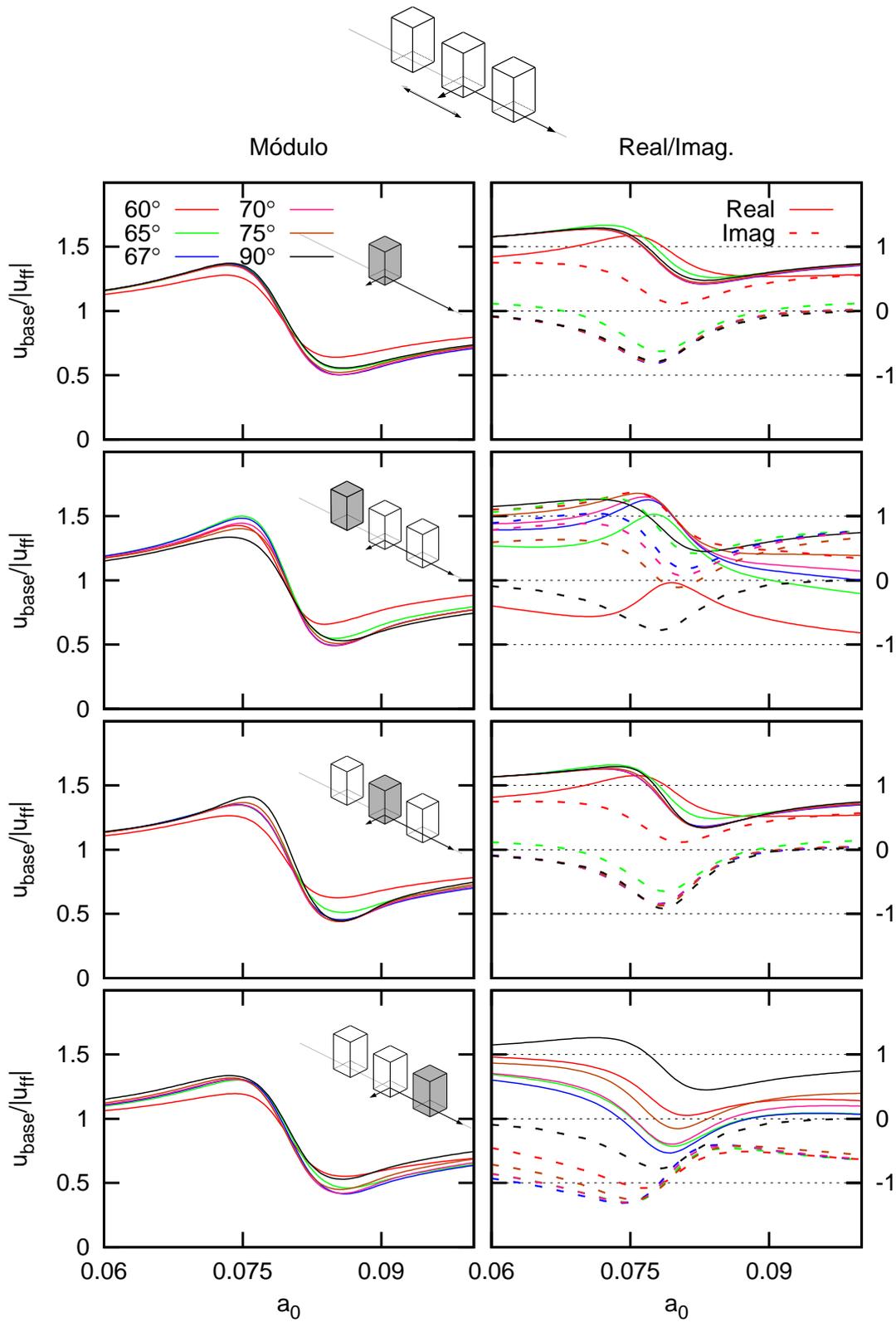


Figura B.7: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

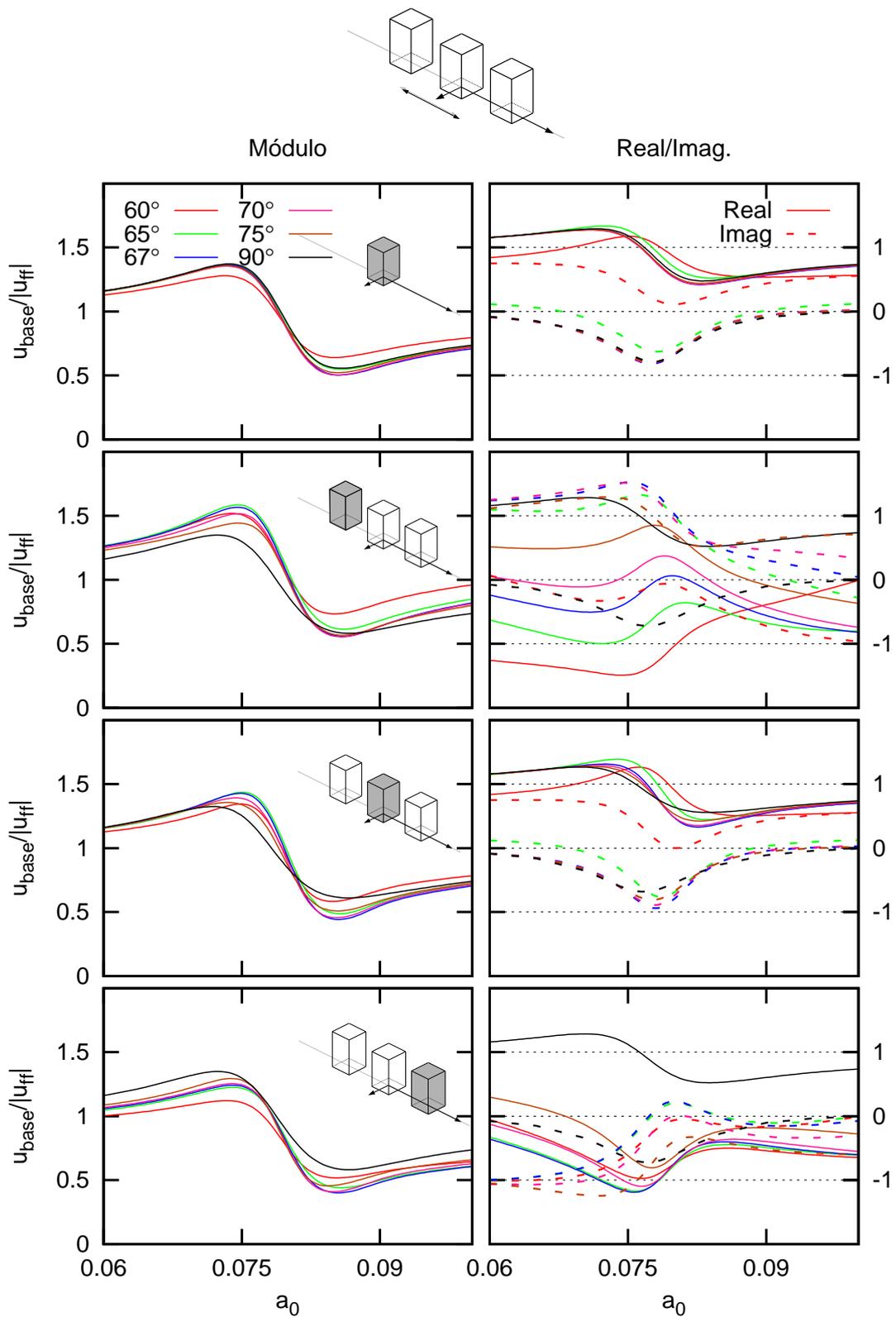


Figura B.8: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

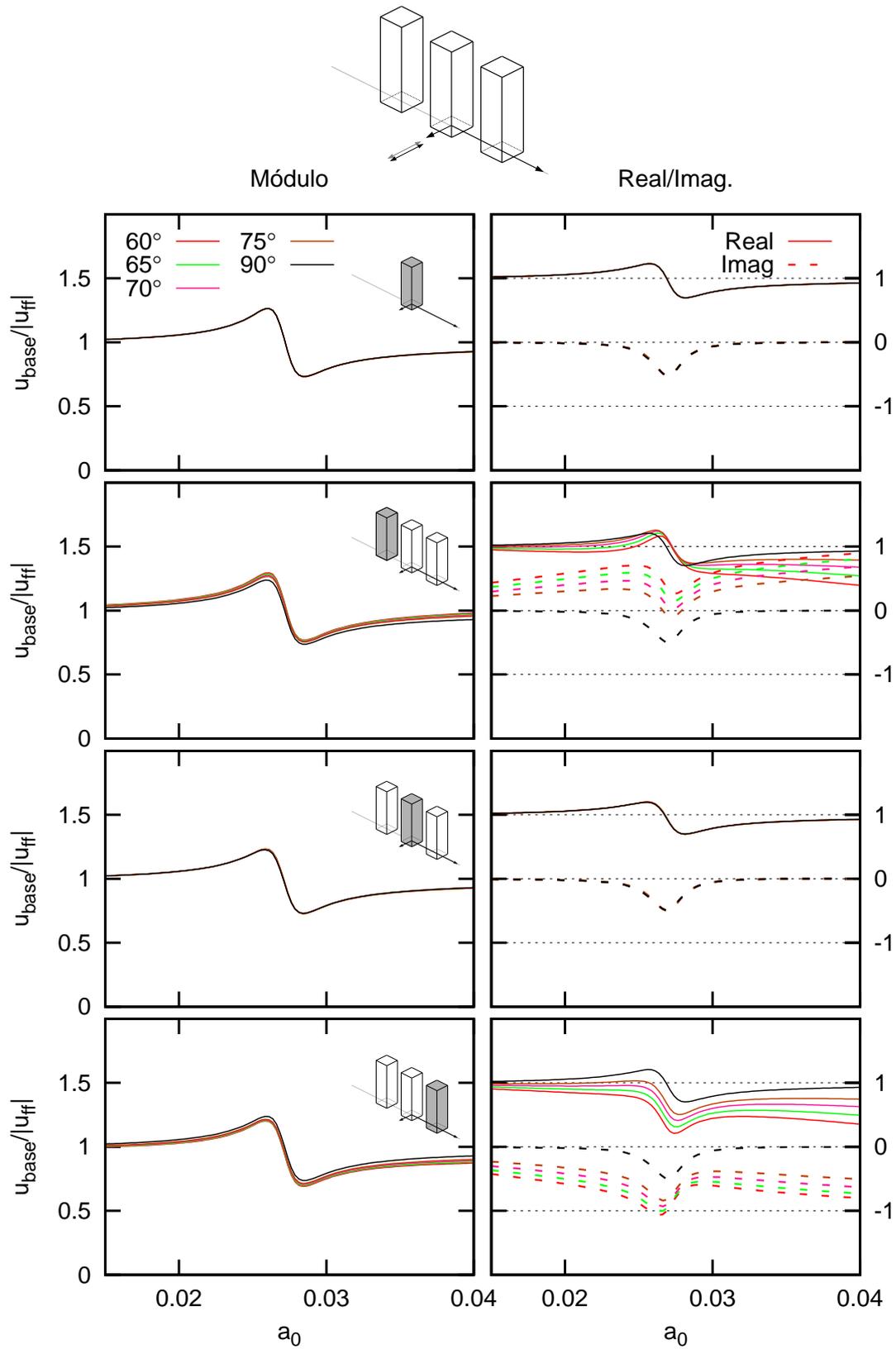


Figura B.9: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

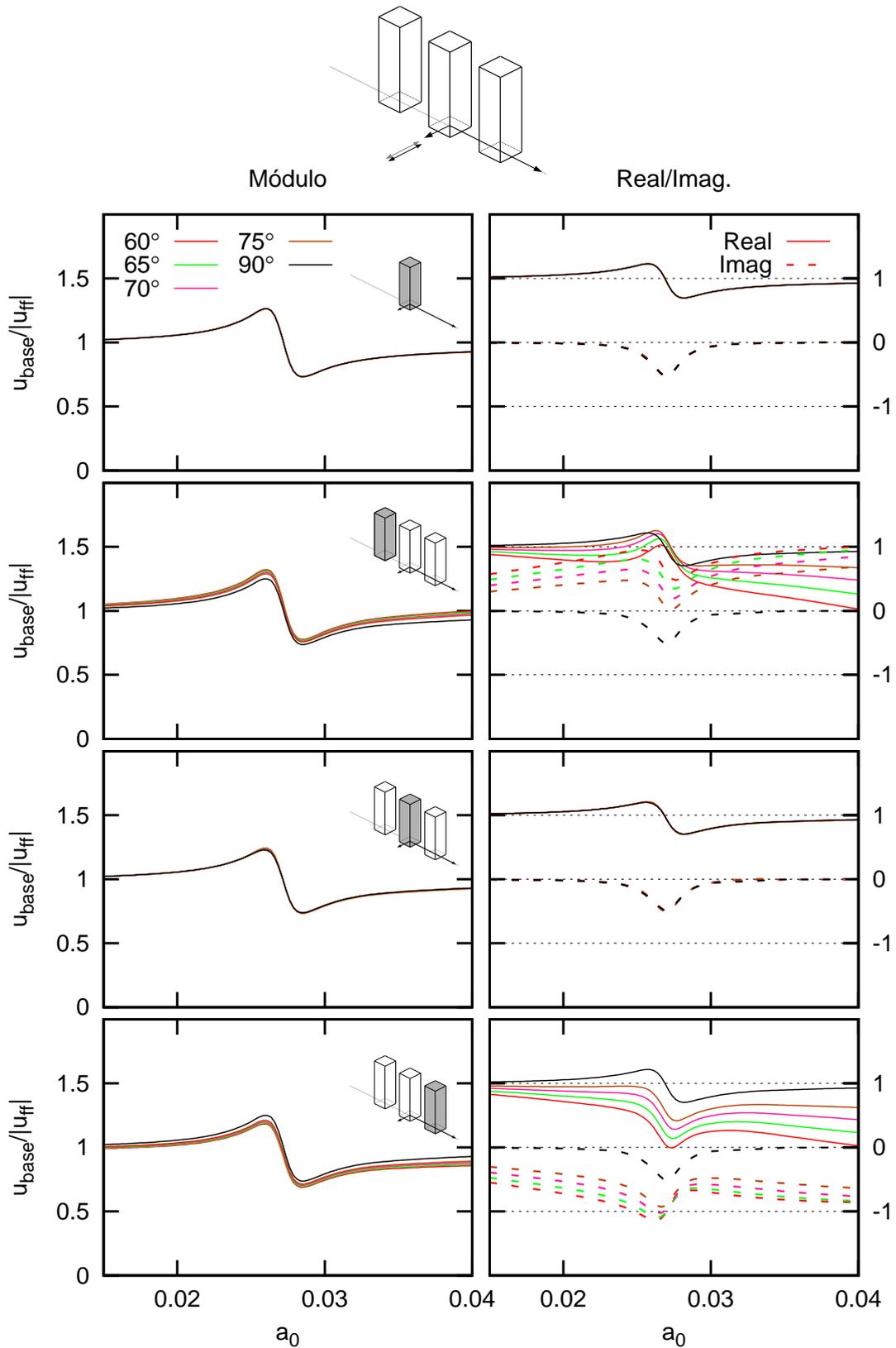


Figura B.10: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

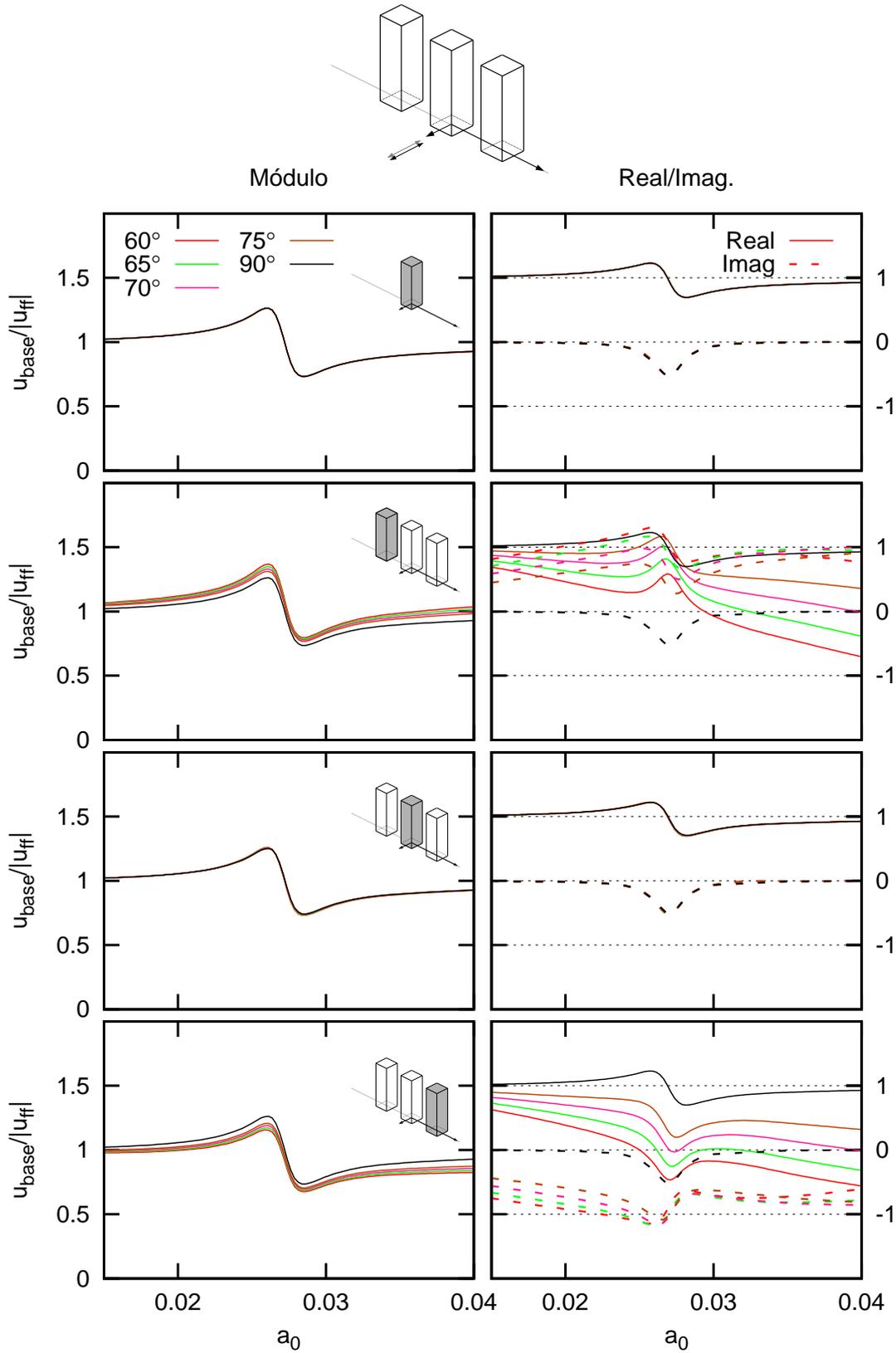


Figura B.11: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

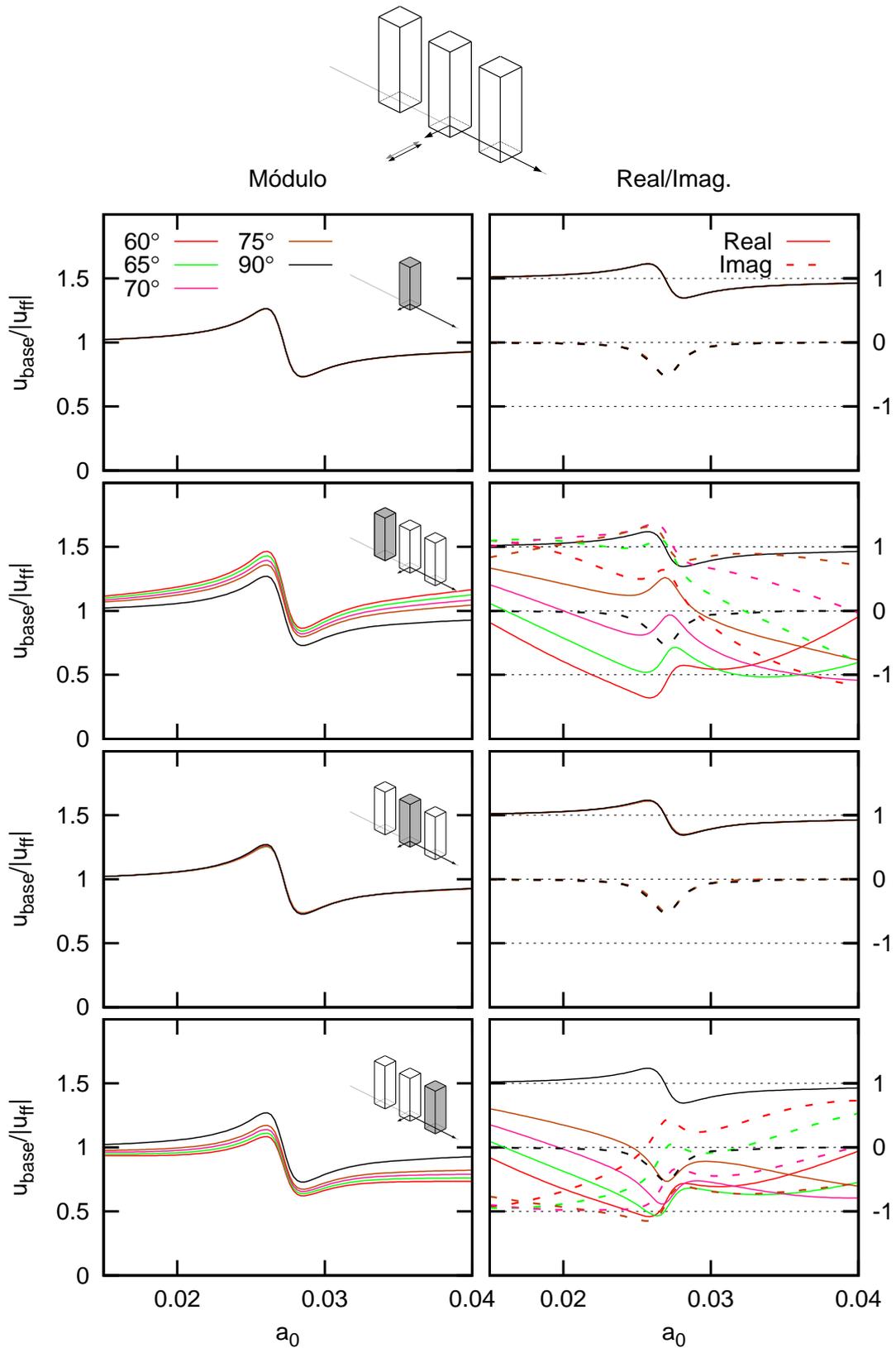


Figura B.12: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

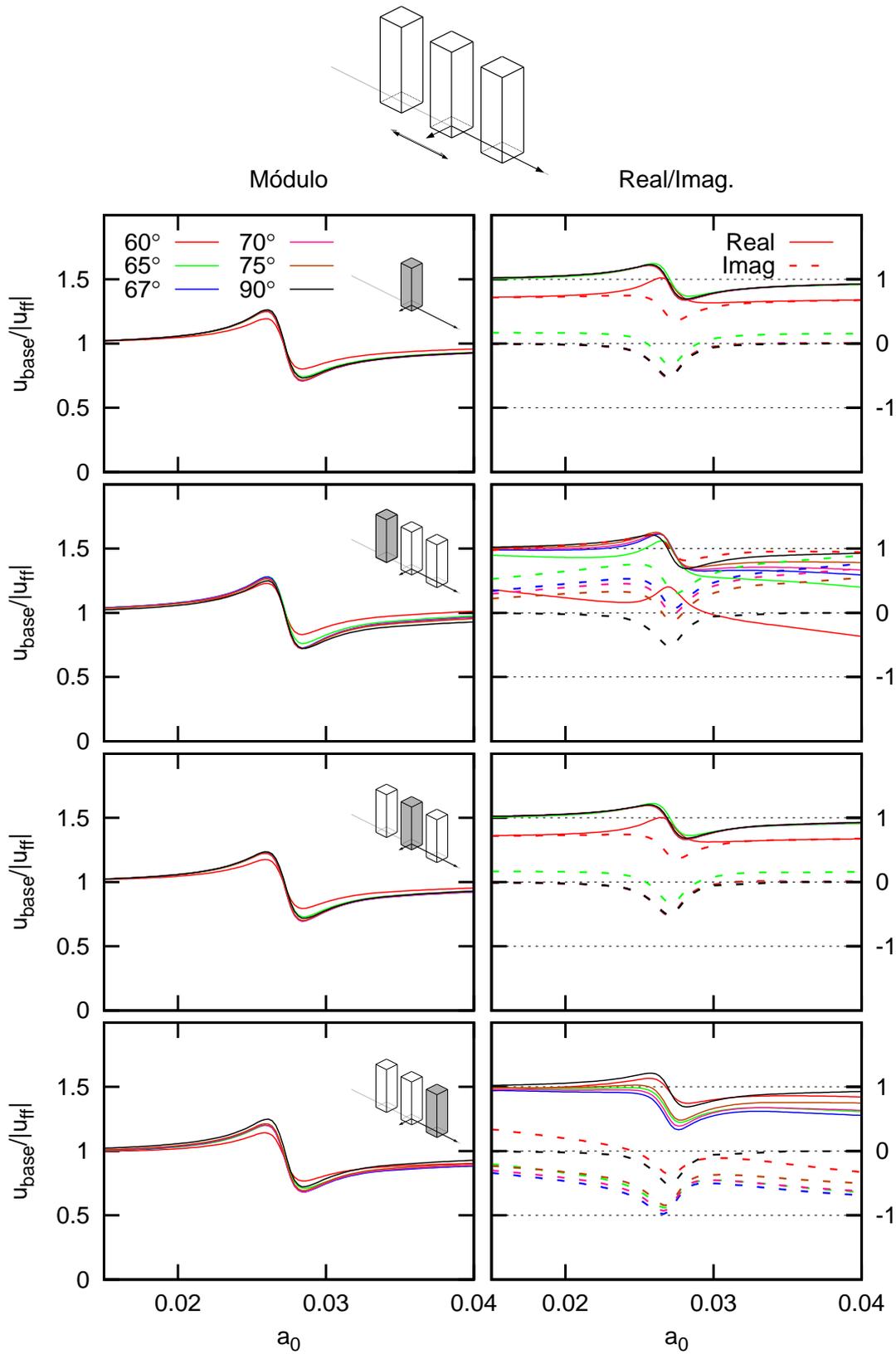


Figura B.13: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

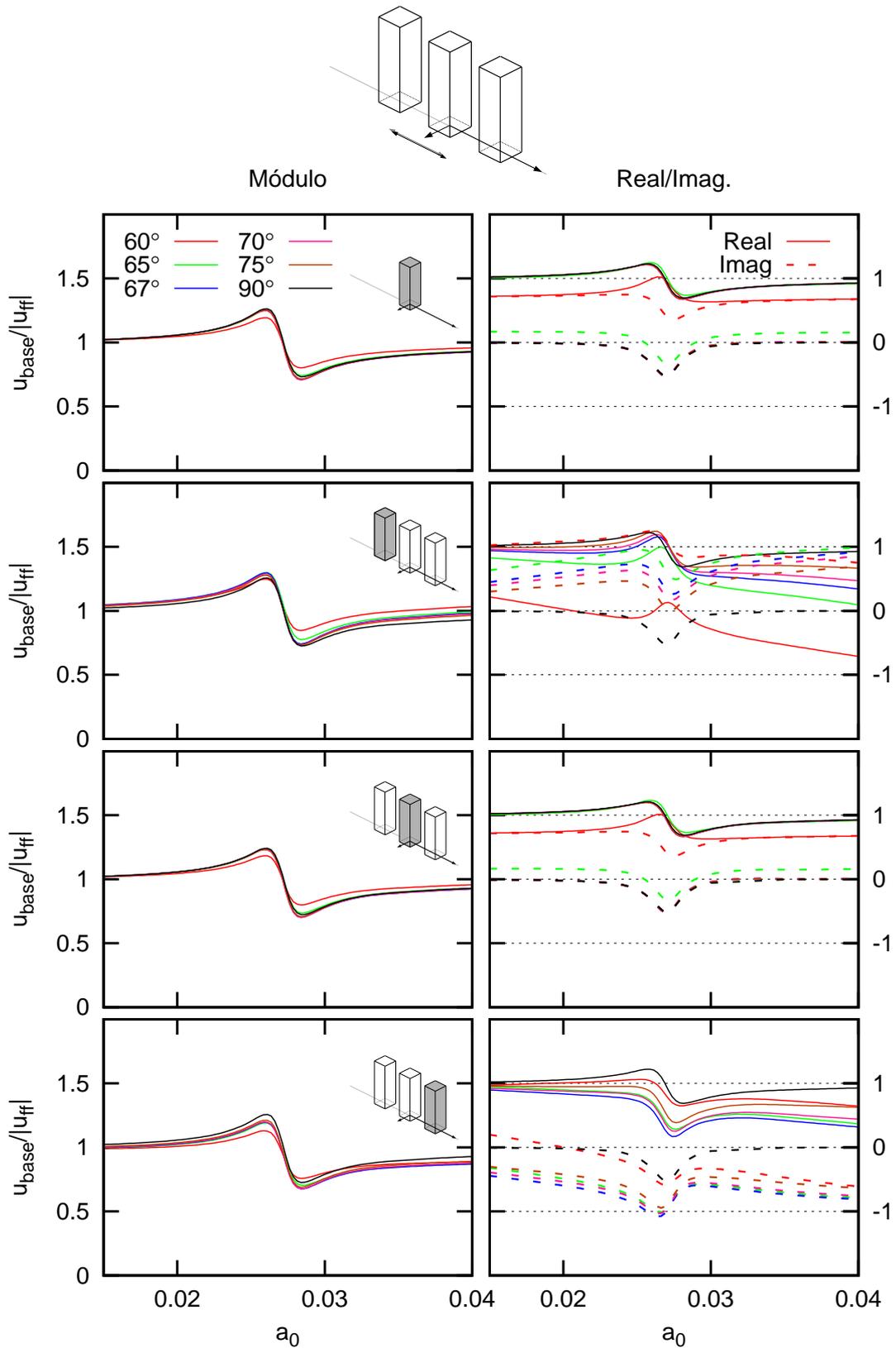


Figura B.14: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

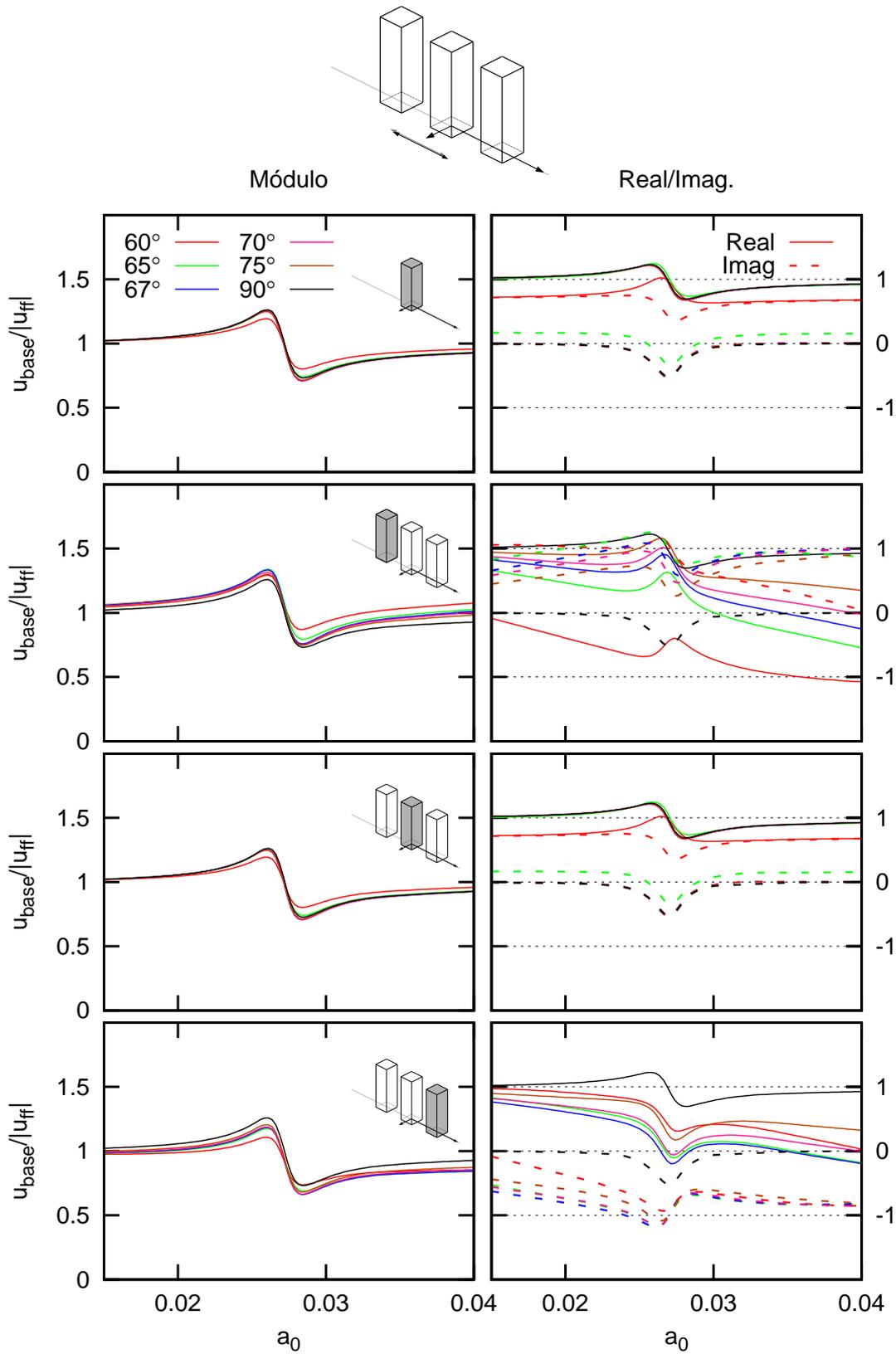


Figura B.15: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

B Funciones de Respuesta en Frecuencia de los desplazamientos de las bases de las estructuras

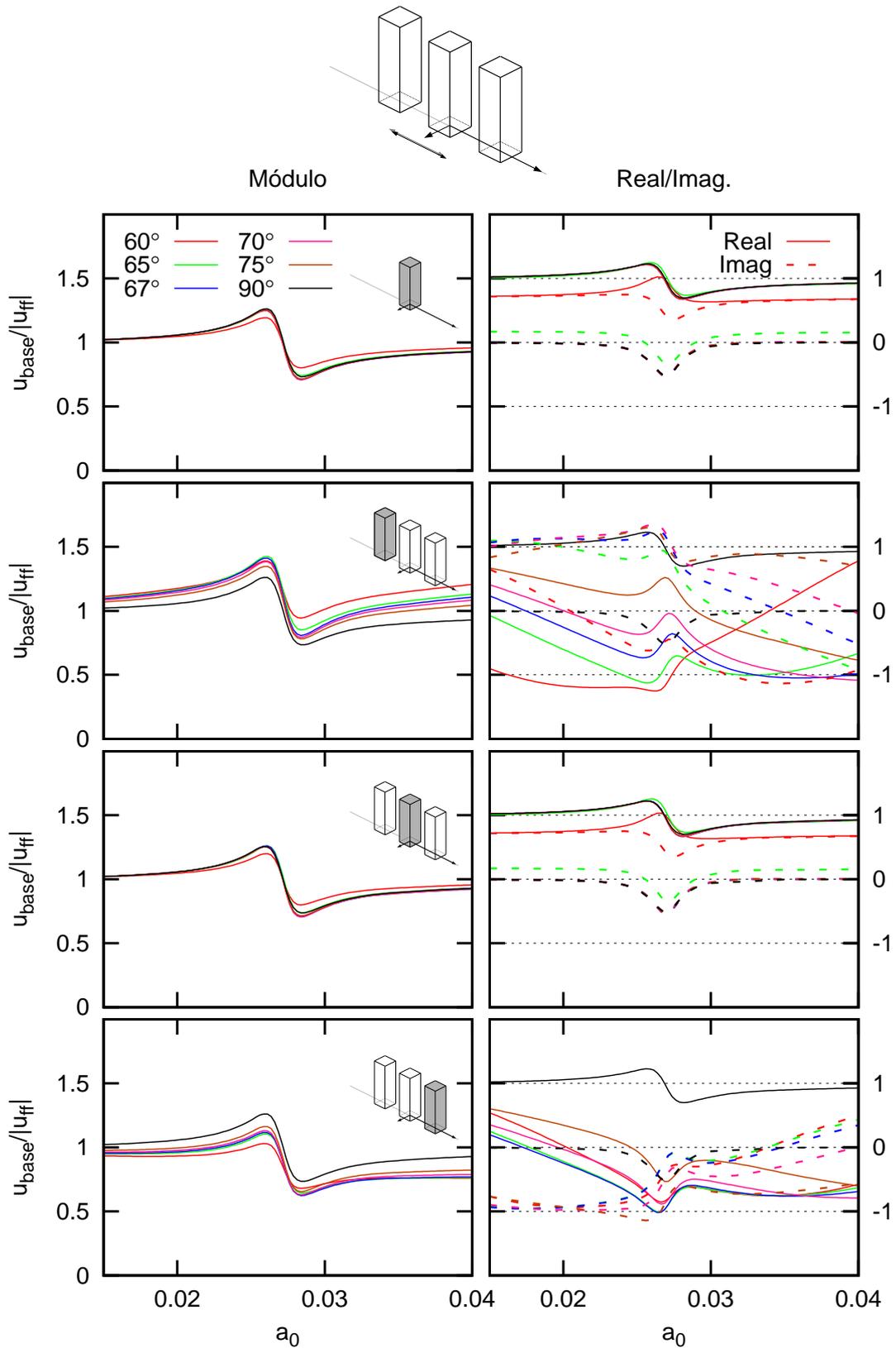


Figura B.16: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

Apéndice **C**

Funciones de Respuesta en Frecuencia de los giros de las bases de las estructuras

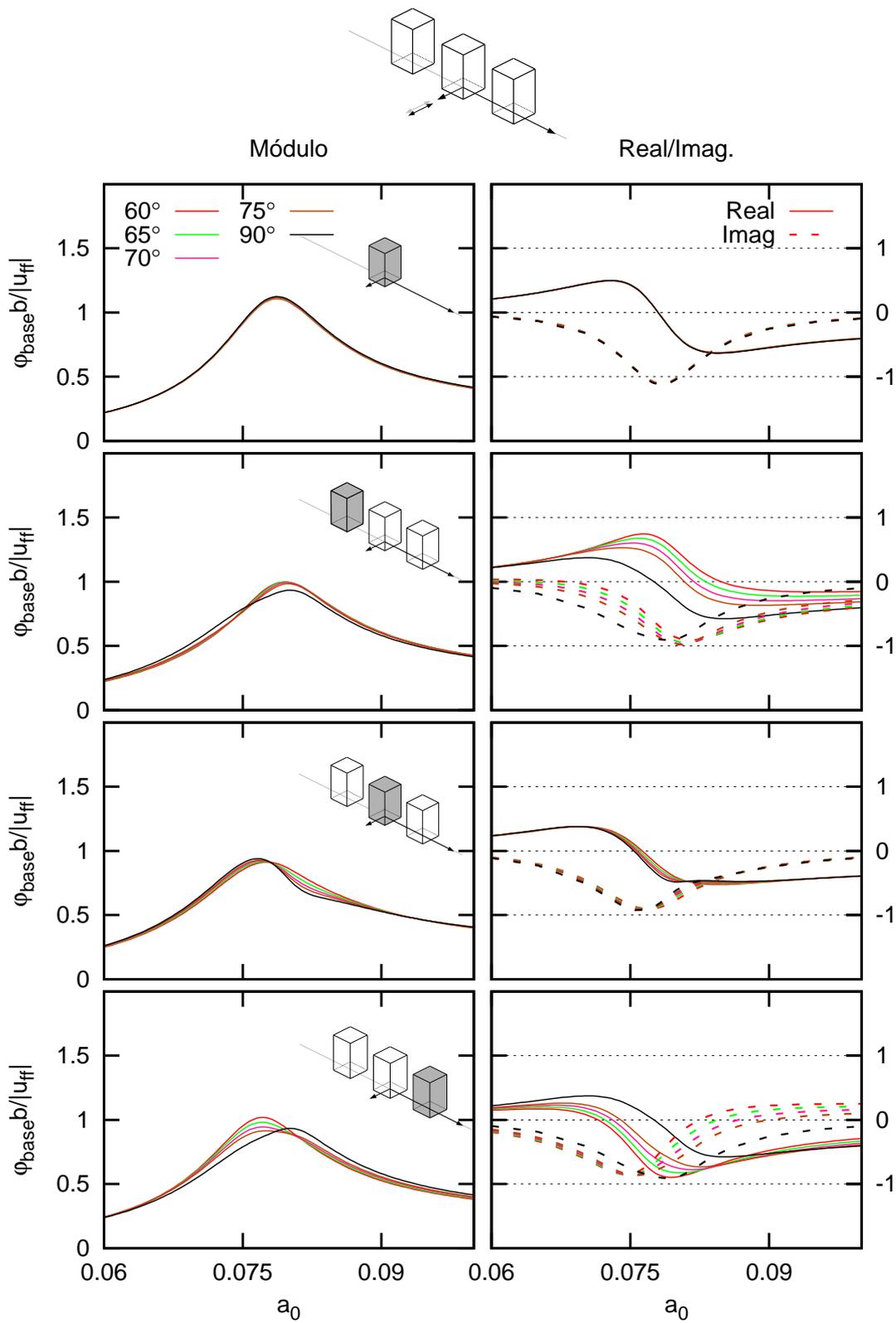


Figura C.1: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

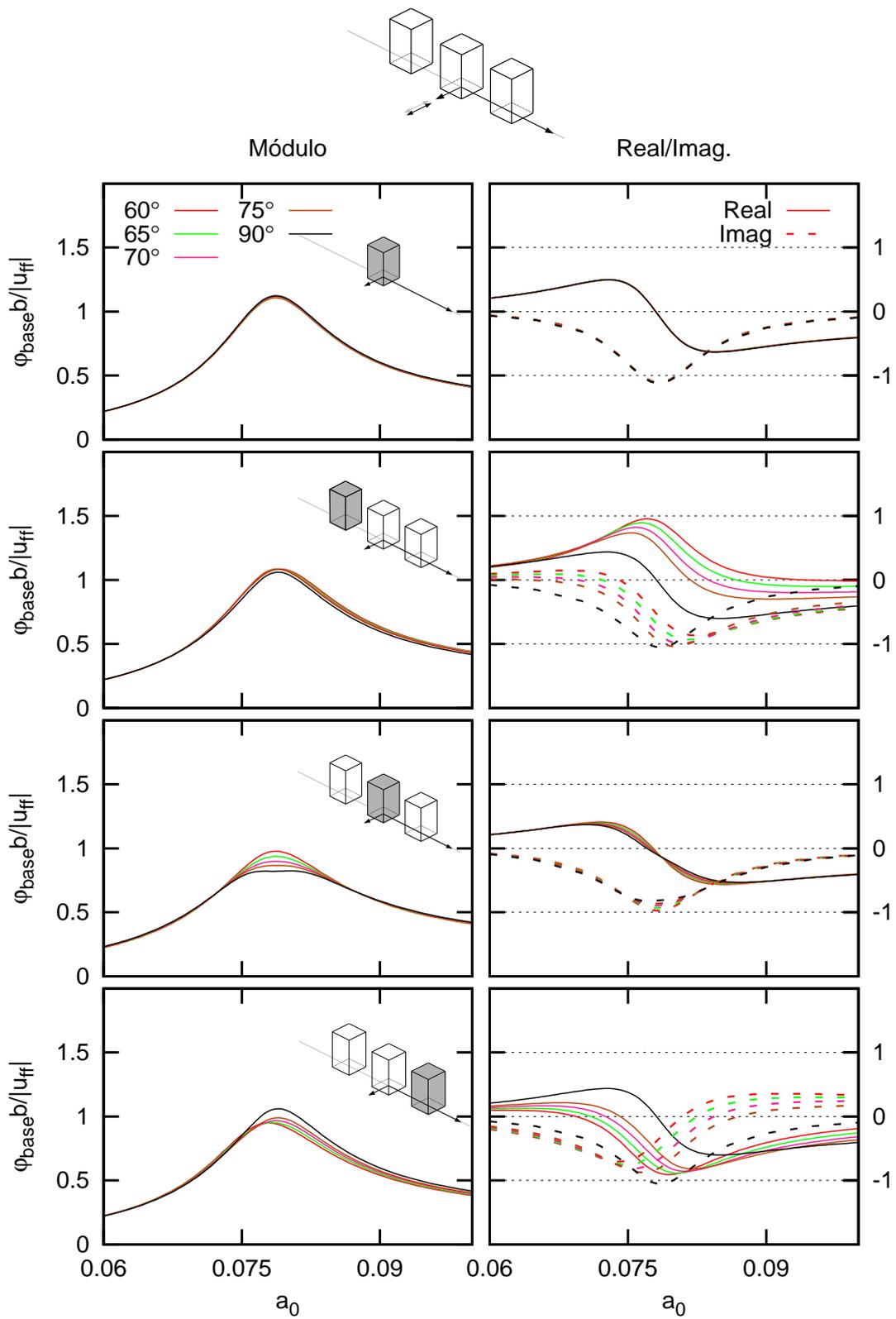


Figura C.2: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

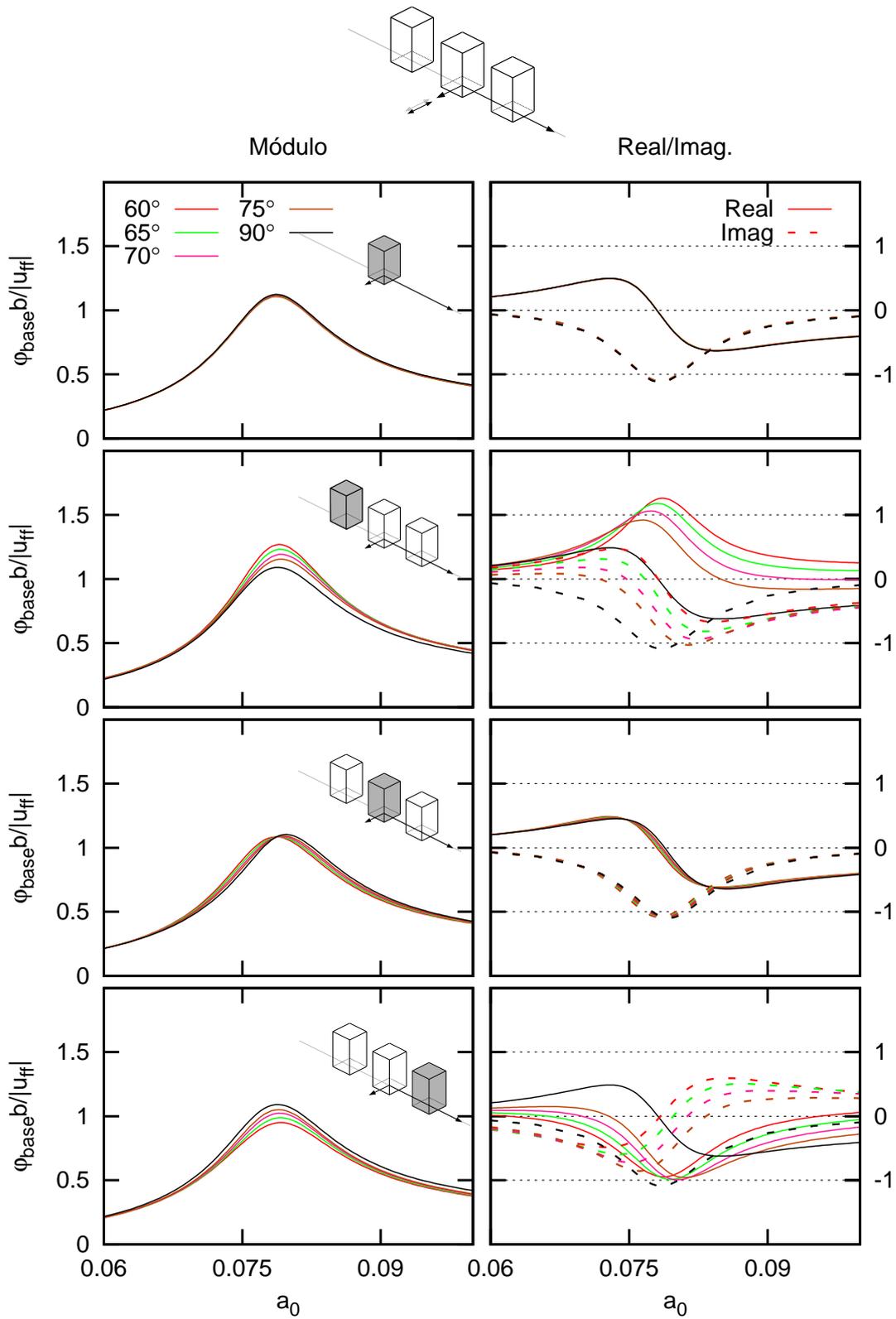


Figura C.3: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

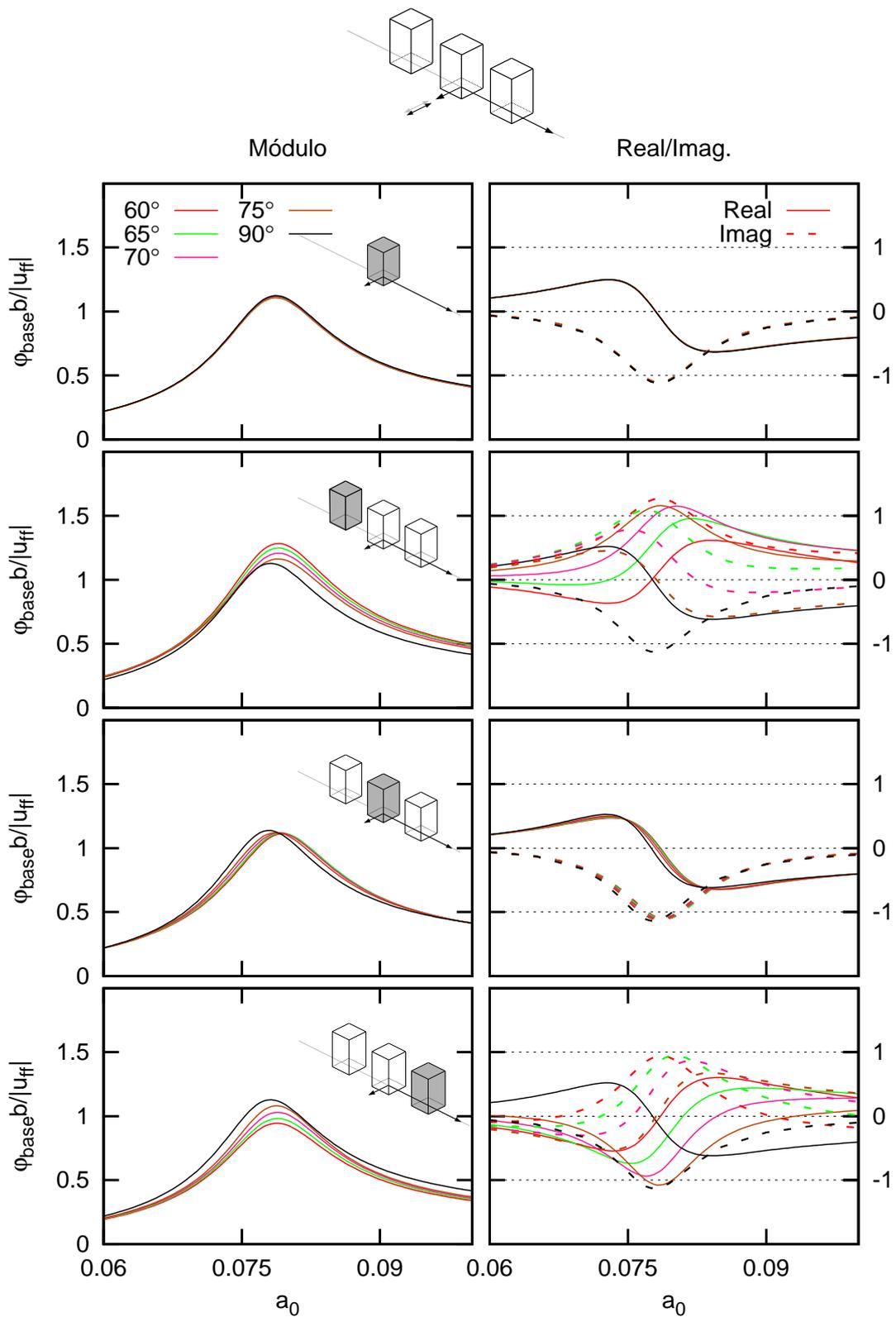


Figura C.4: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

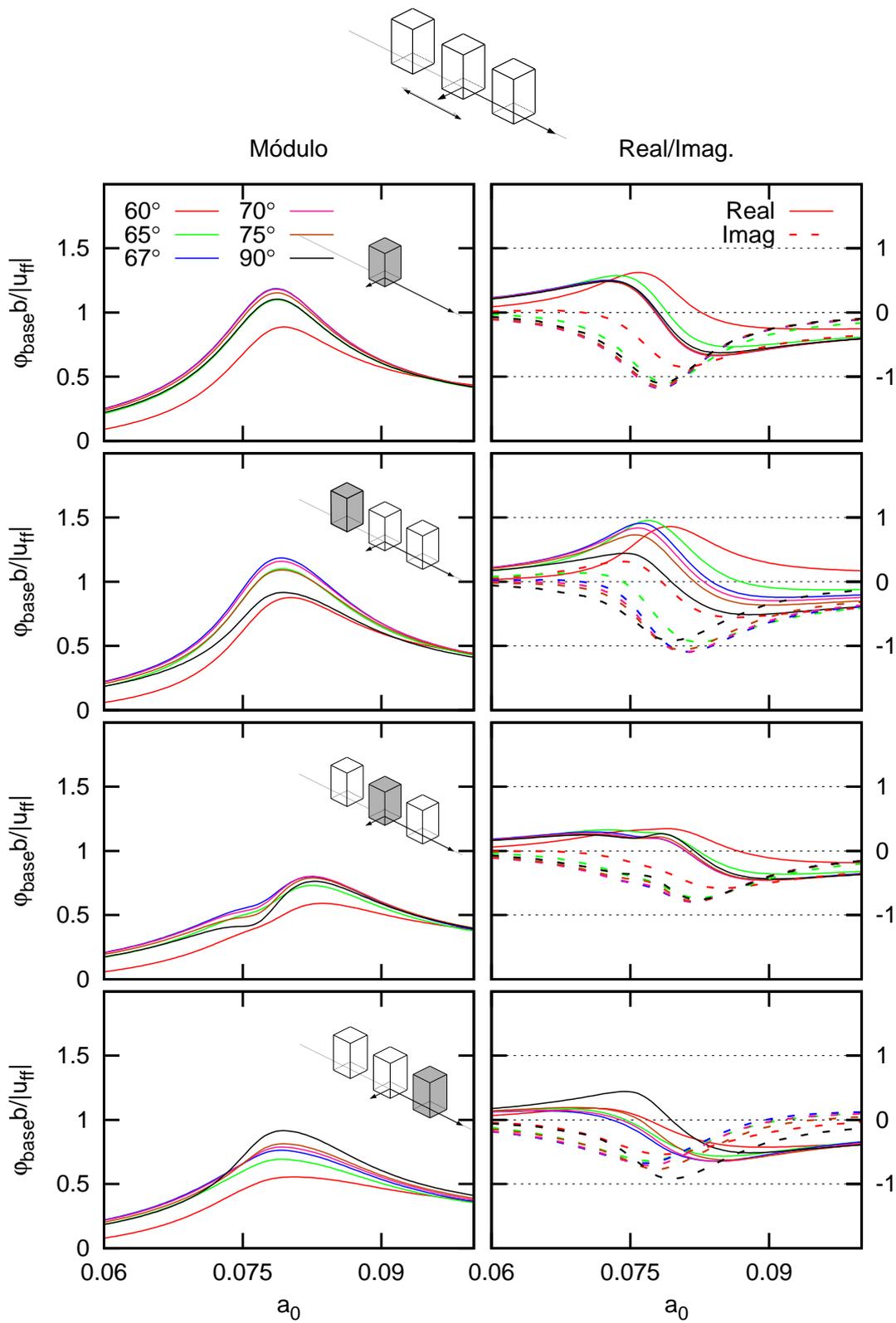


Figura C.5: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

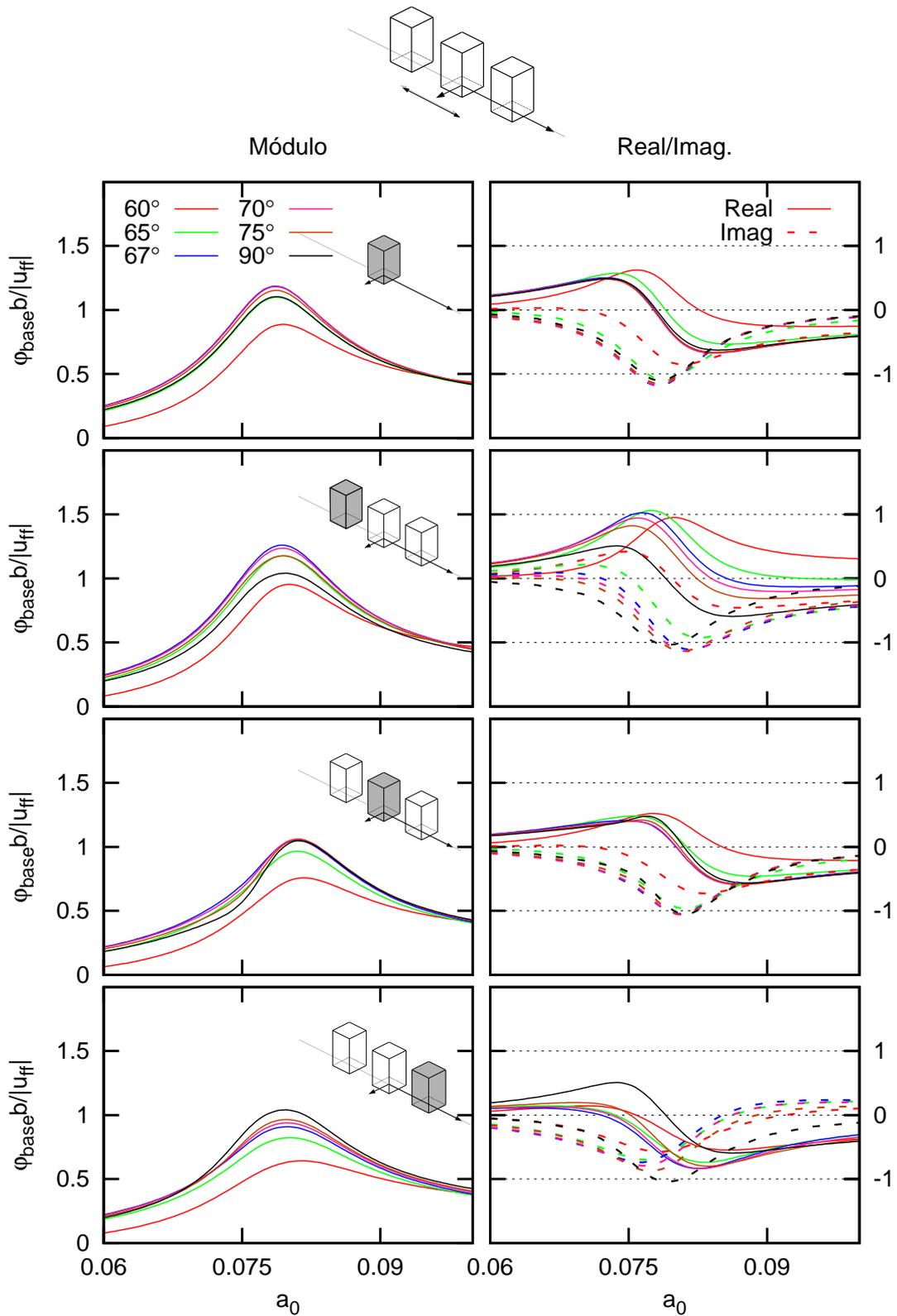


Figura C.6: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

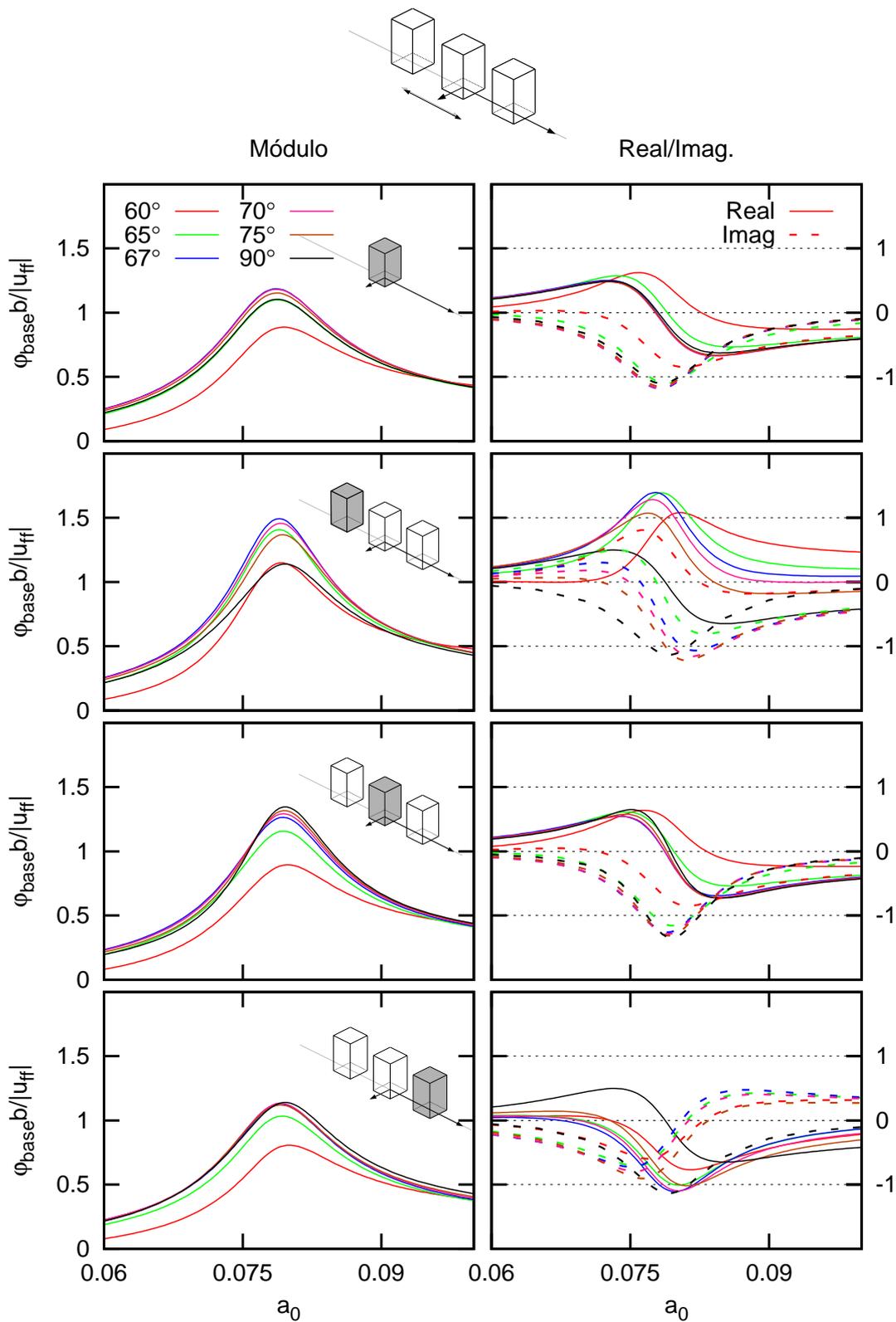


Figura C.7: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

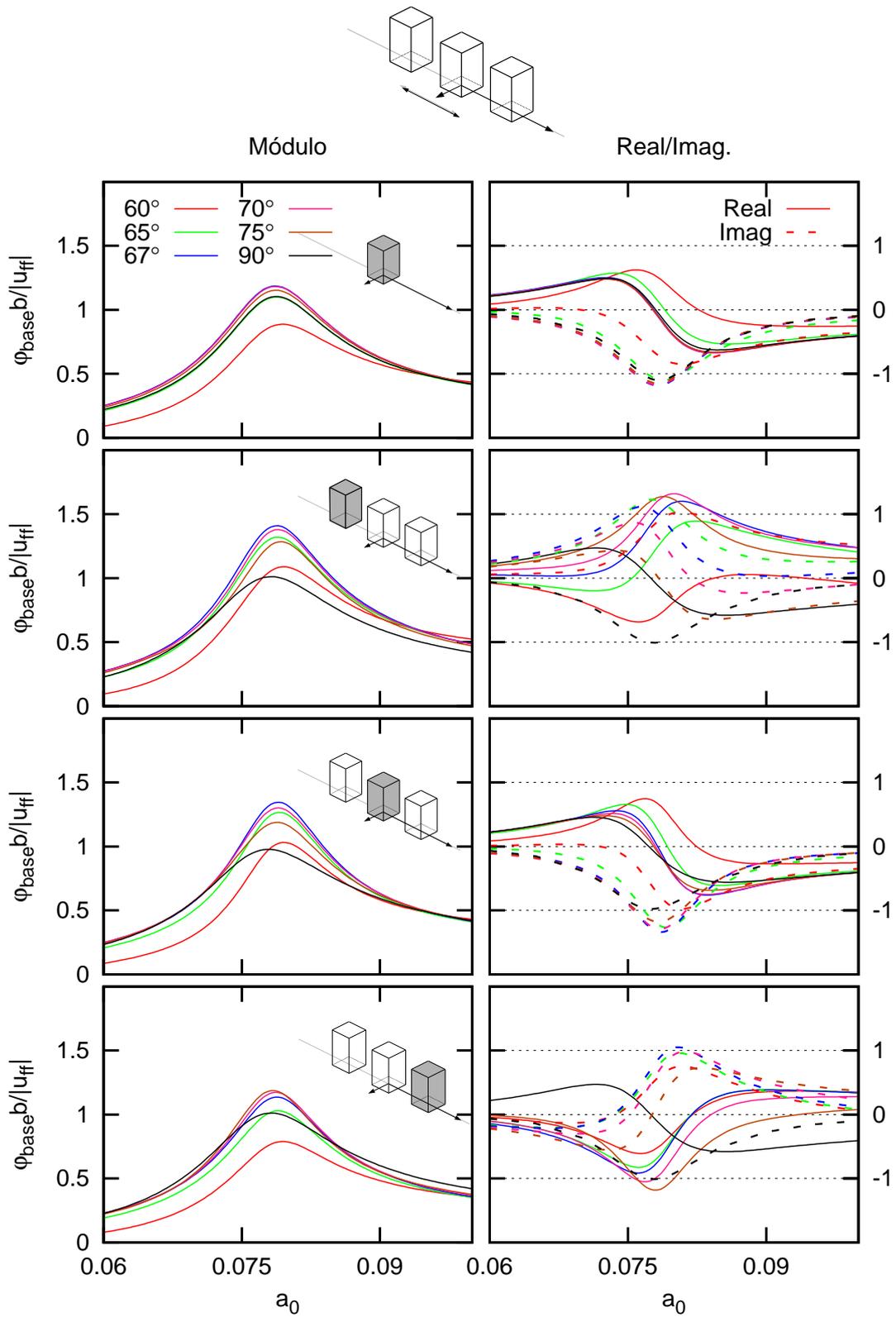


Figura C.8: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

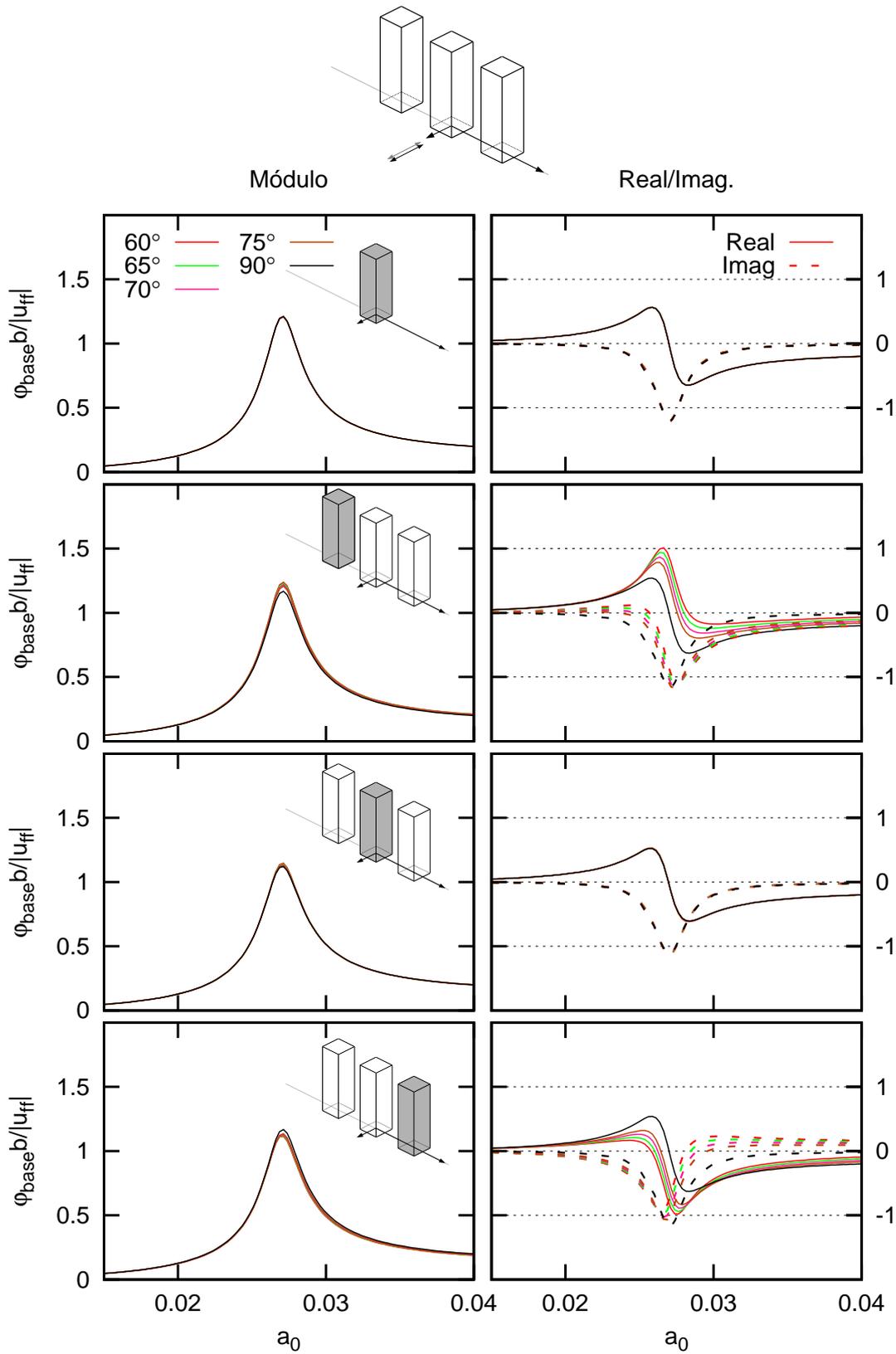


Figura C.9: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

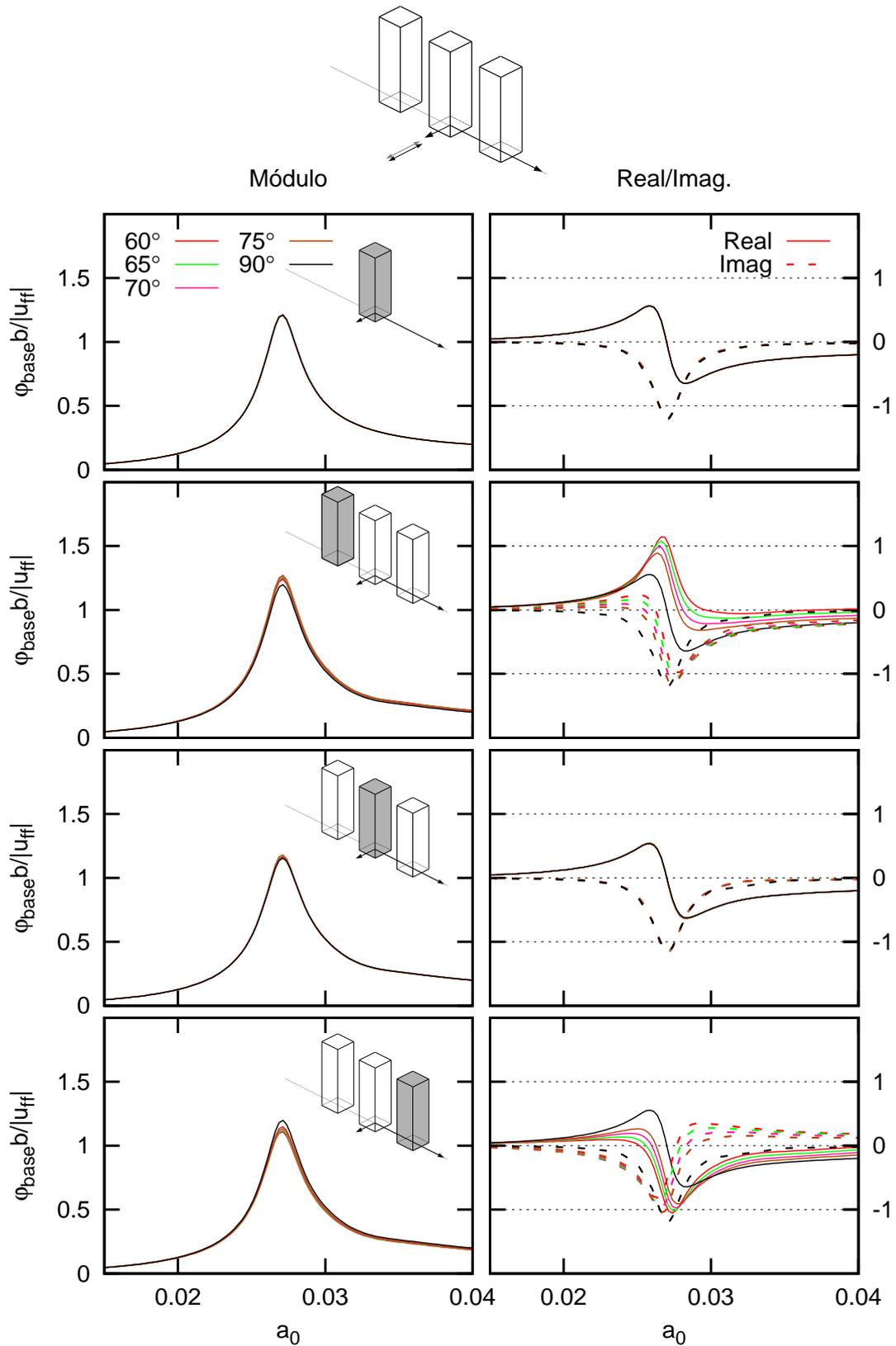


Figura C.10: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

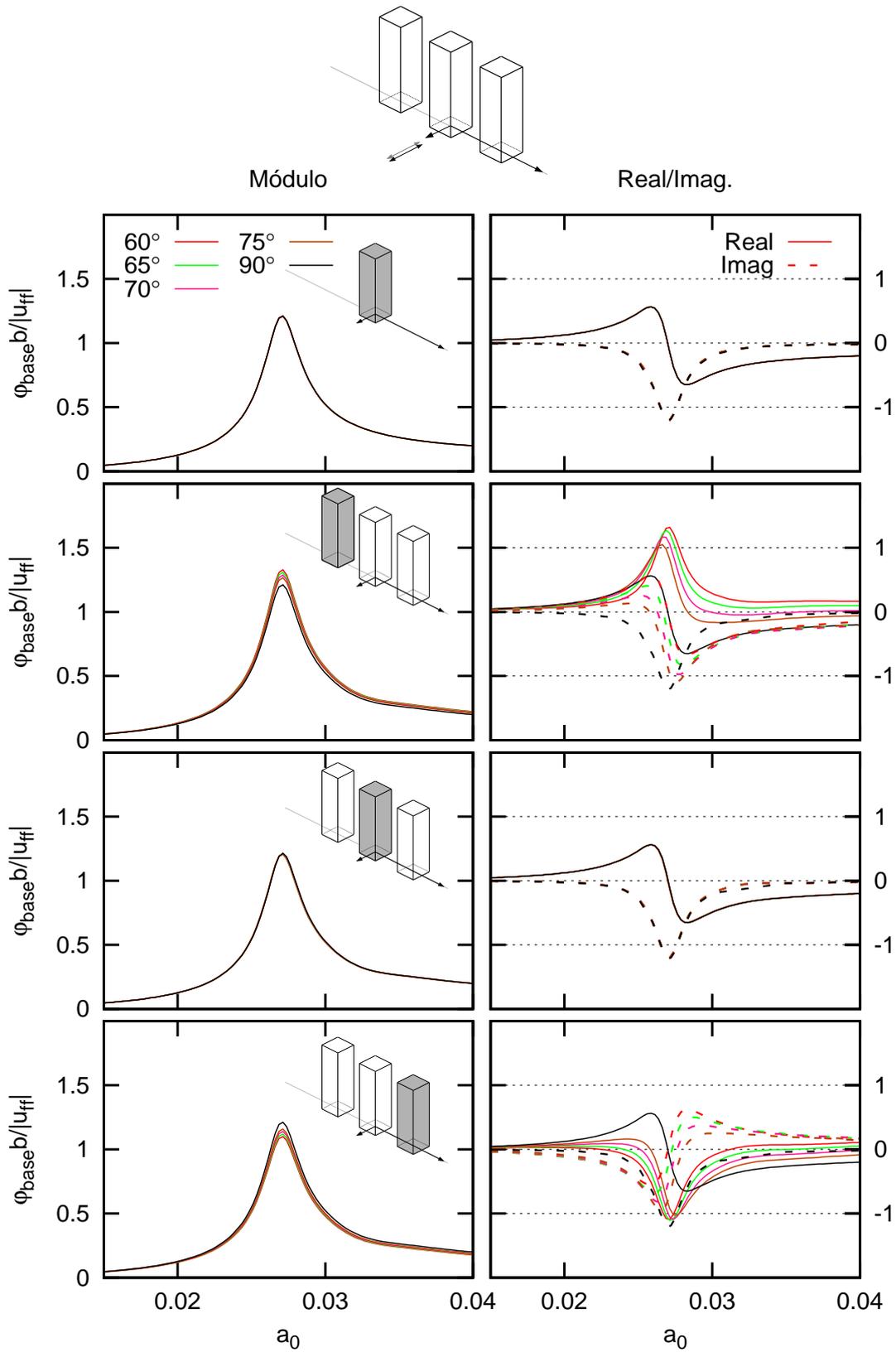


Figura C.11: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

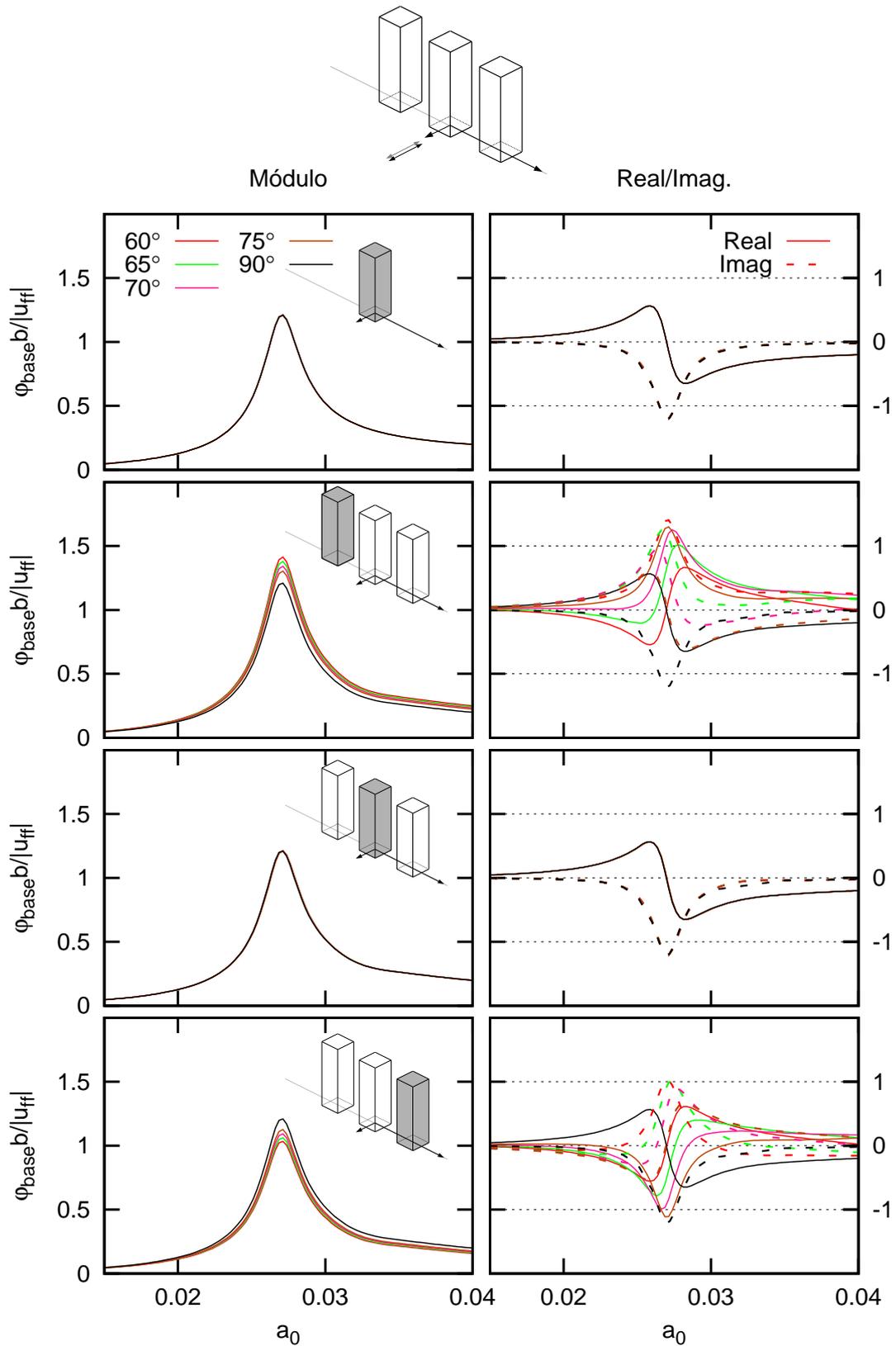


Figura C.12: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

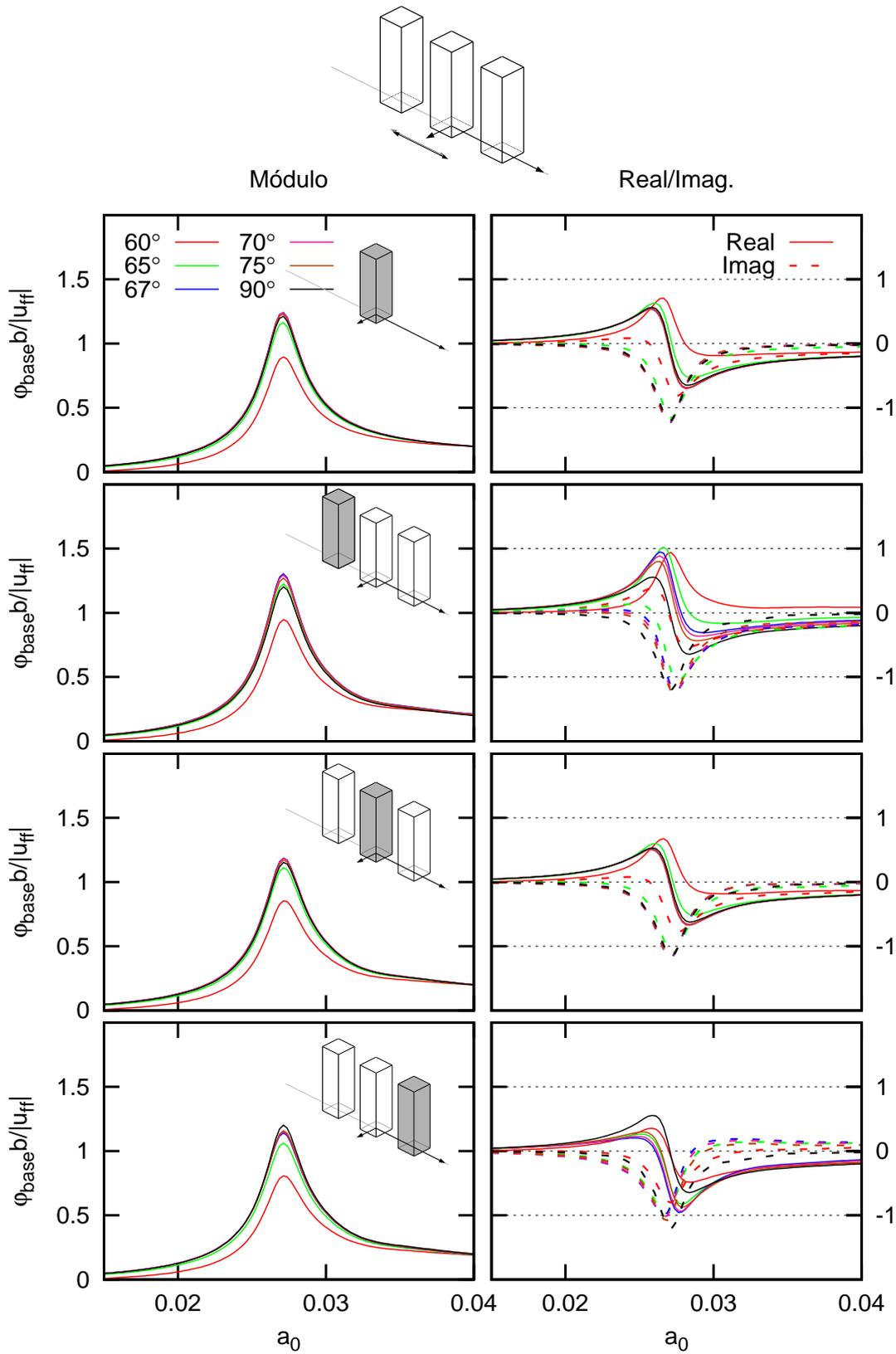


Figura C.13: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/4$

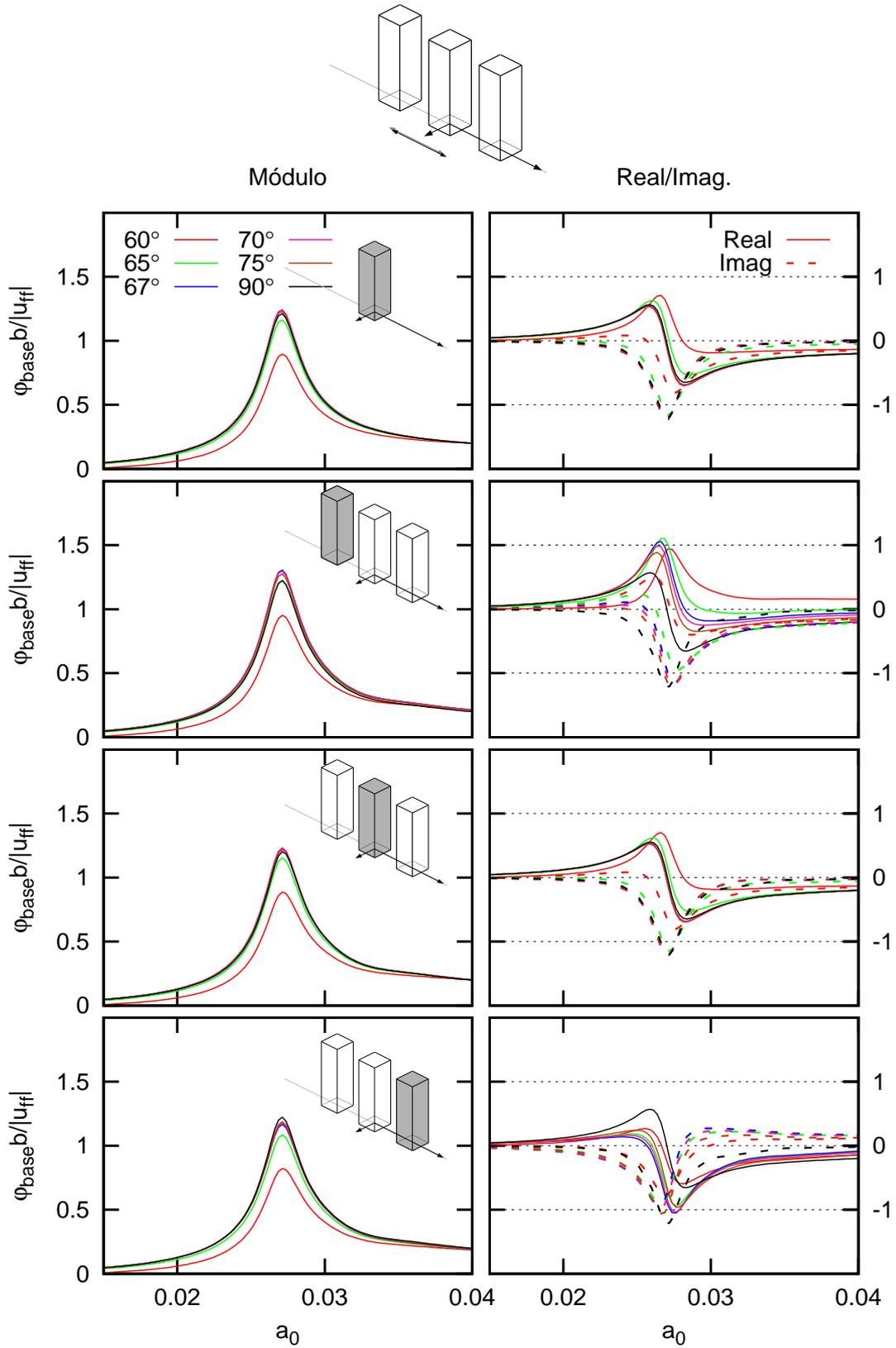


Figura C.14: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$

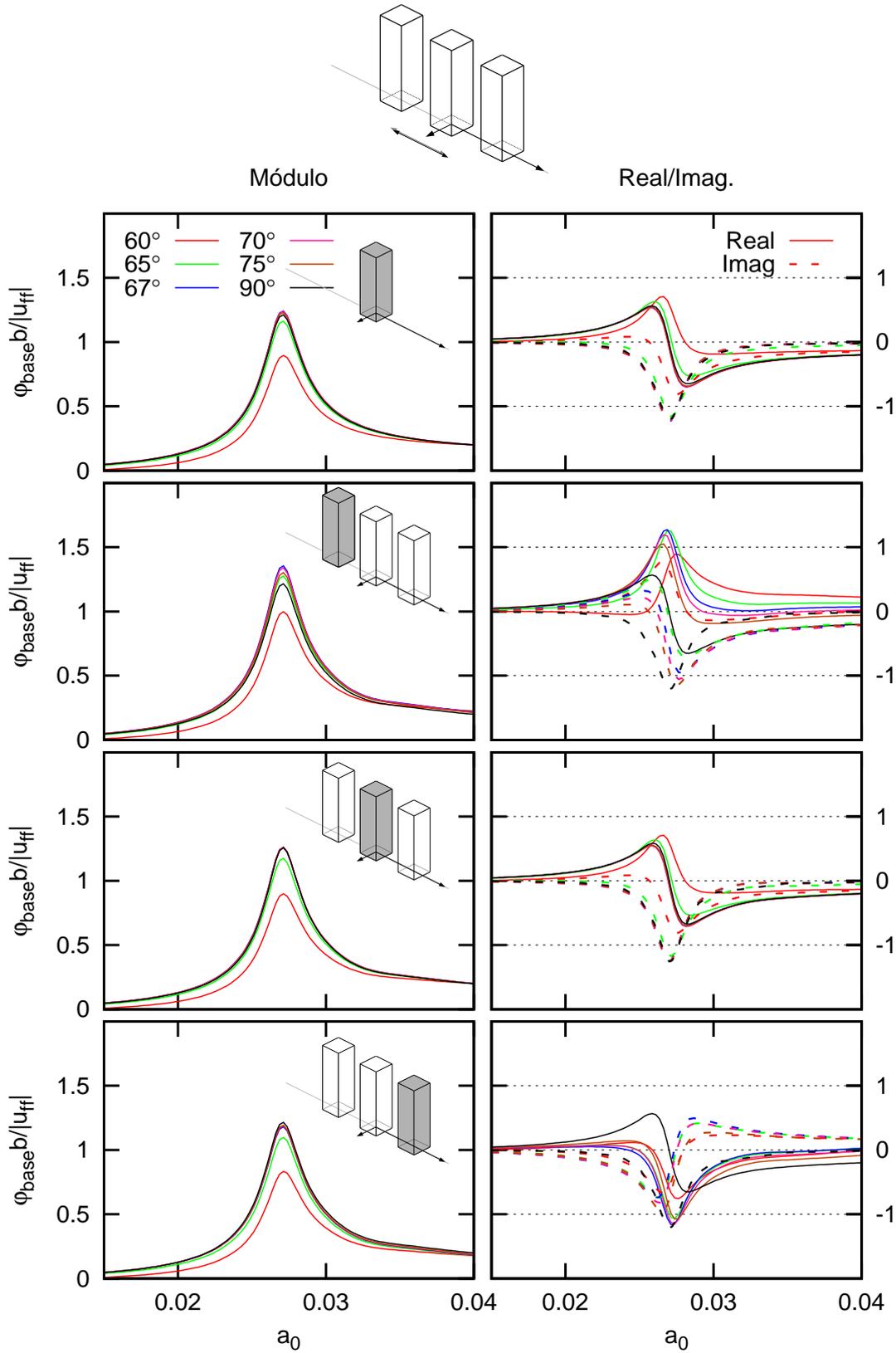


Figura C.15: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/2$

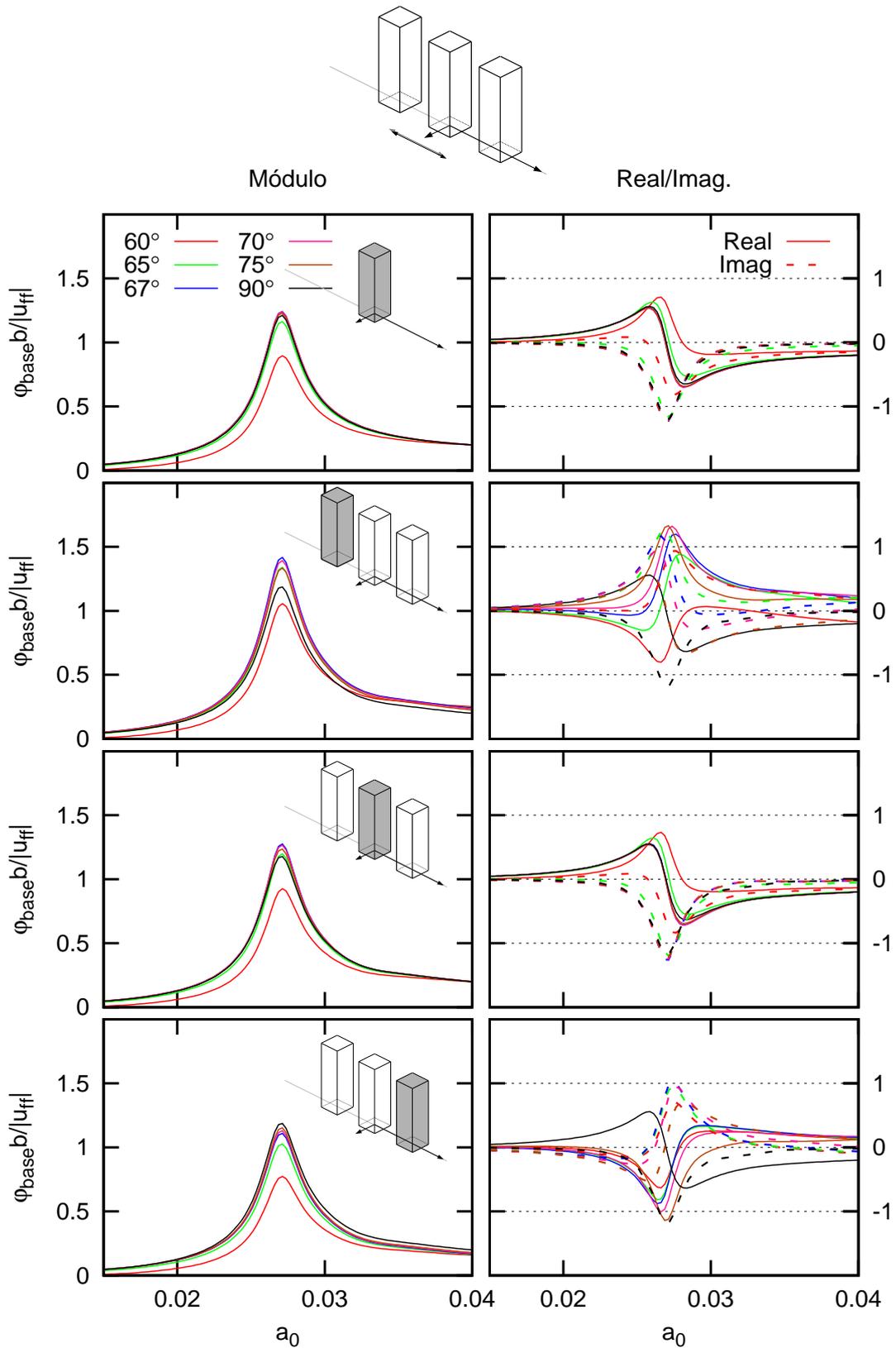


Figura C.16: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 5$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda$

Apéndice *D*

**Funciones de Respuesta en
Frecuencia para los casos de pilotes
inclinados**

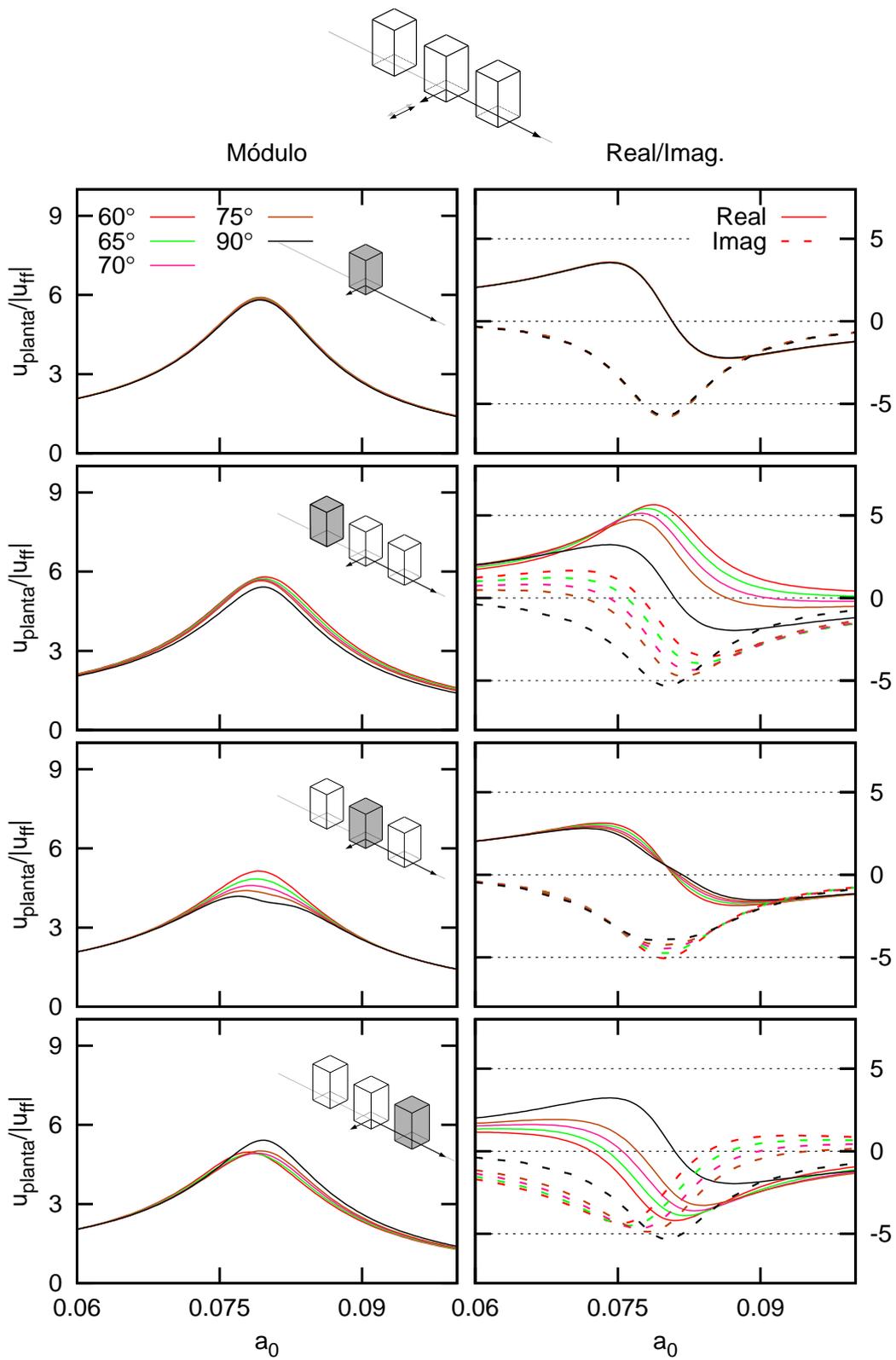


Figura D.1: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D=L/3$ con pilotes inclinados 10°

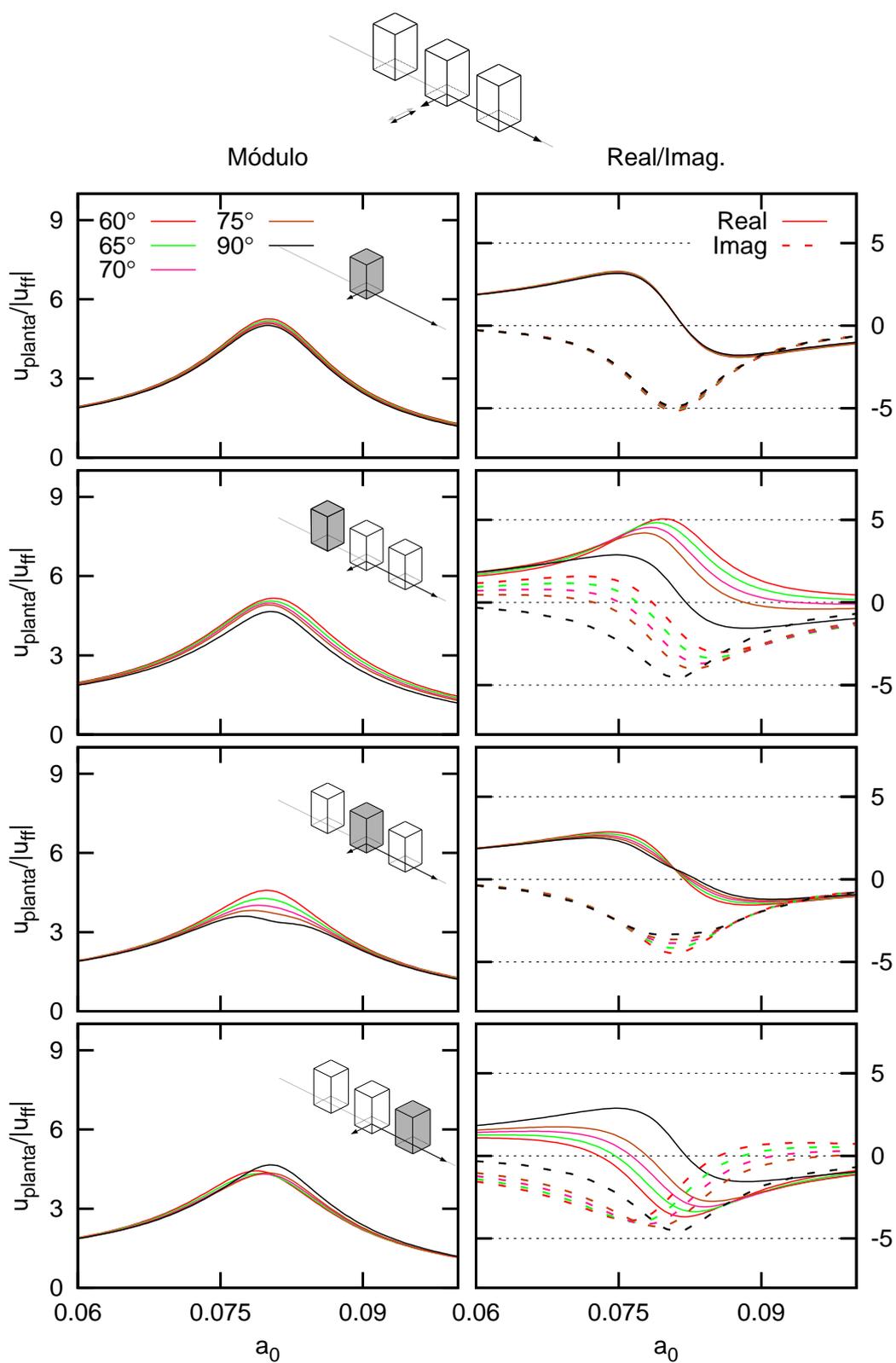


Figura D.2: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20°

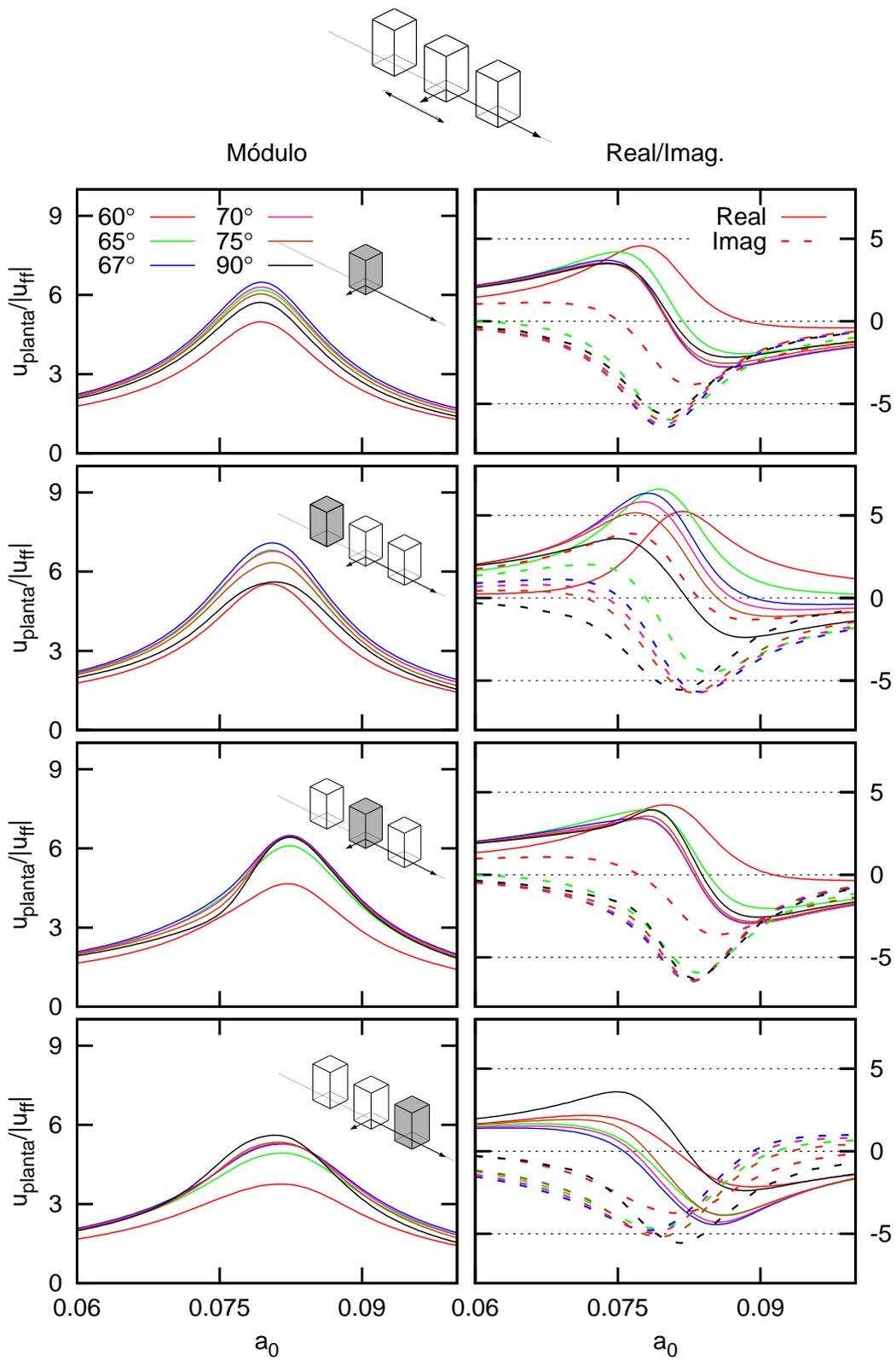


Figura D.3: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 10°

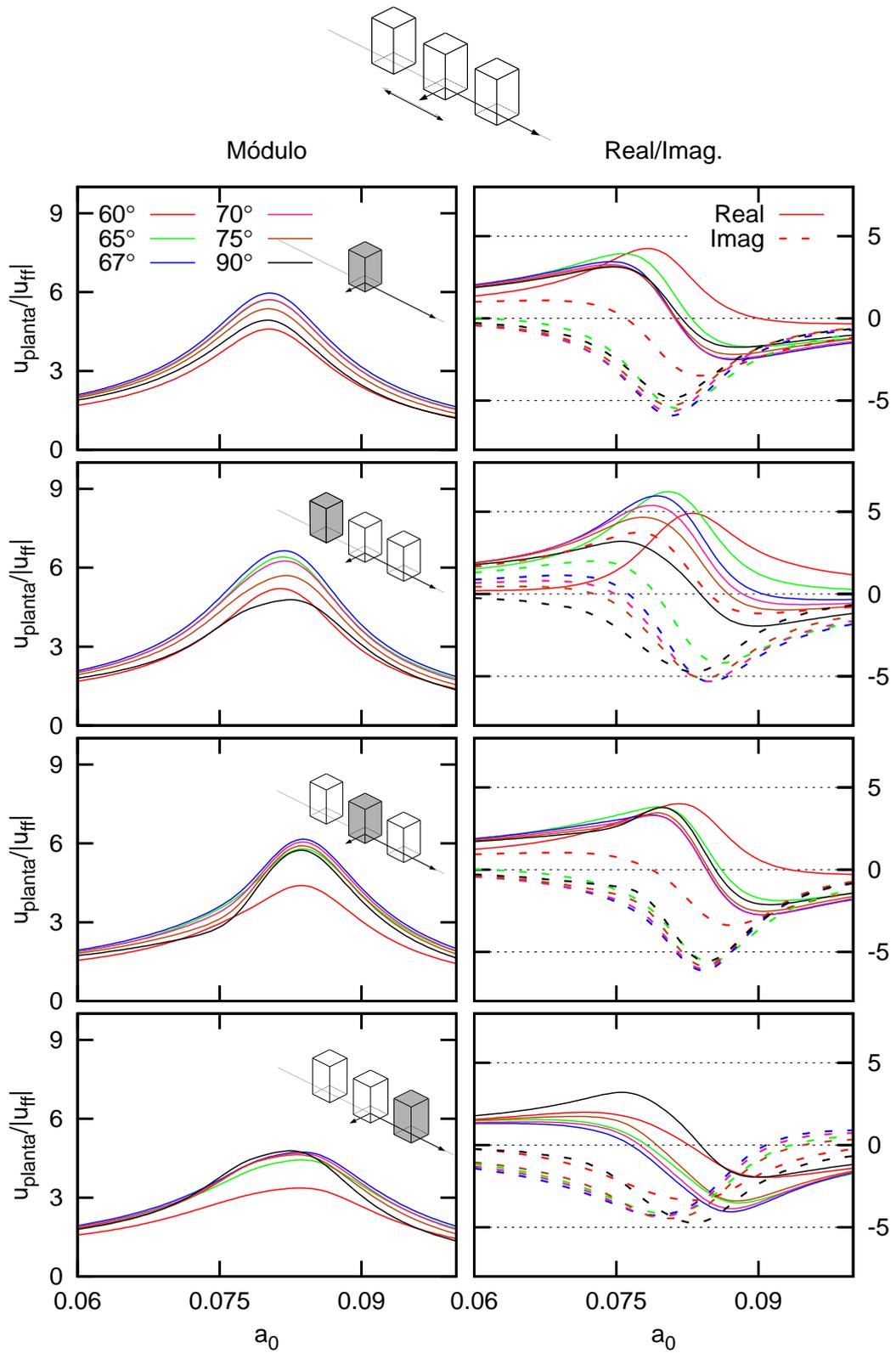


Figura D.4: Desplazamiento de la planta para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20°

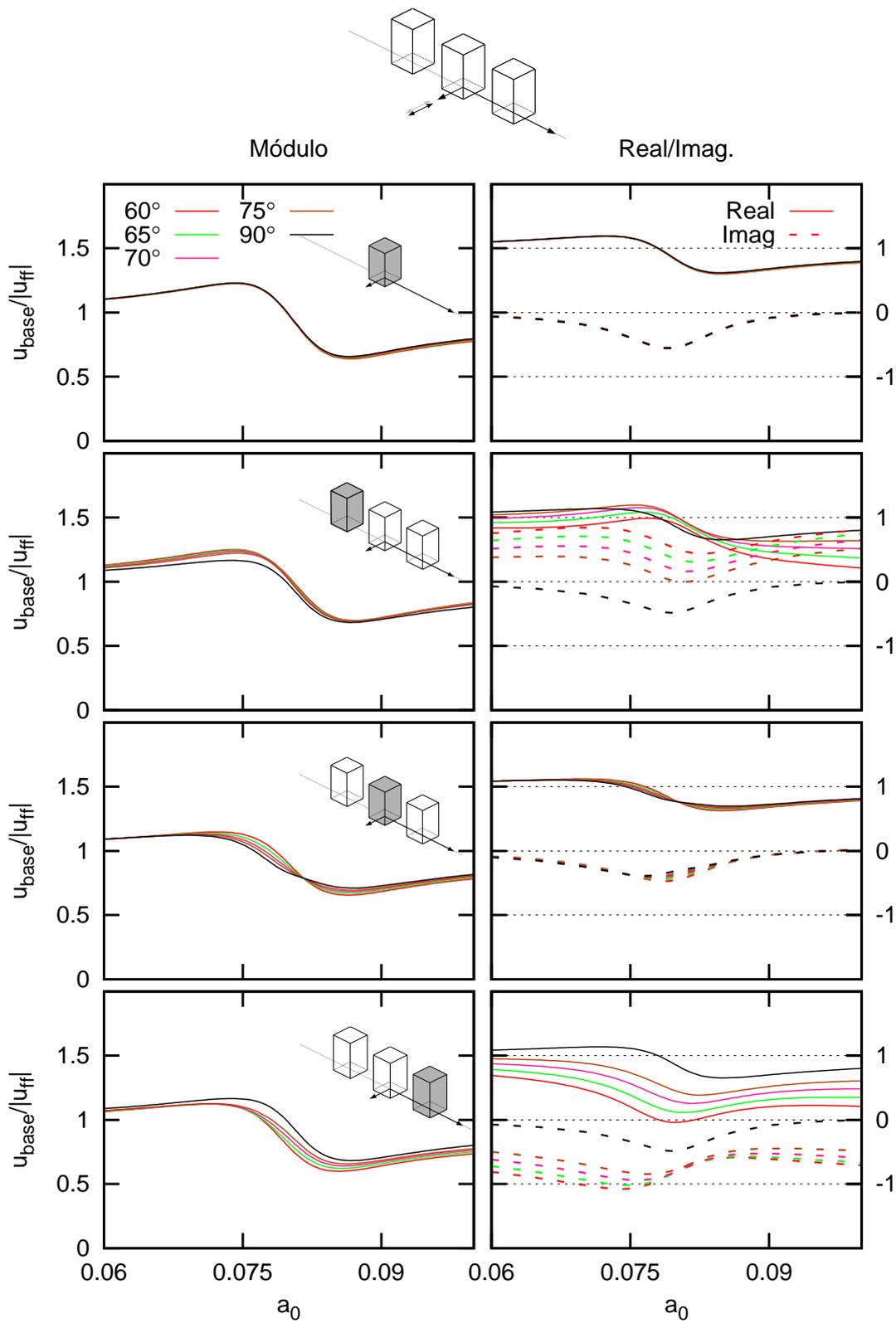


Figura D.5: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 10°

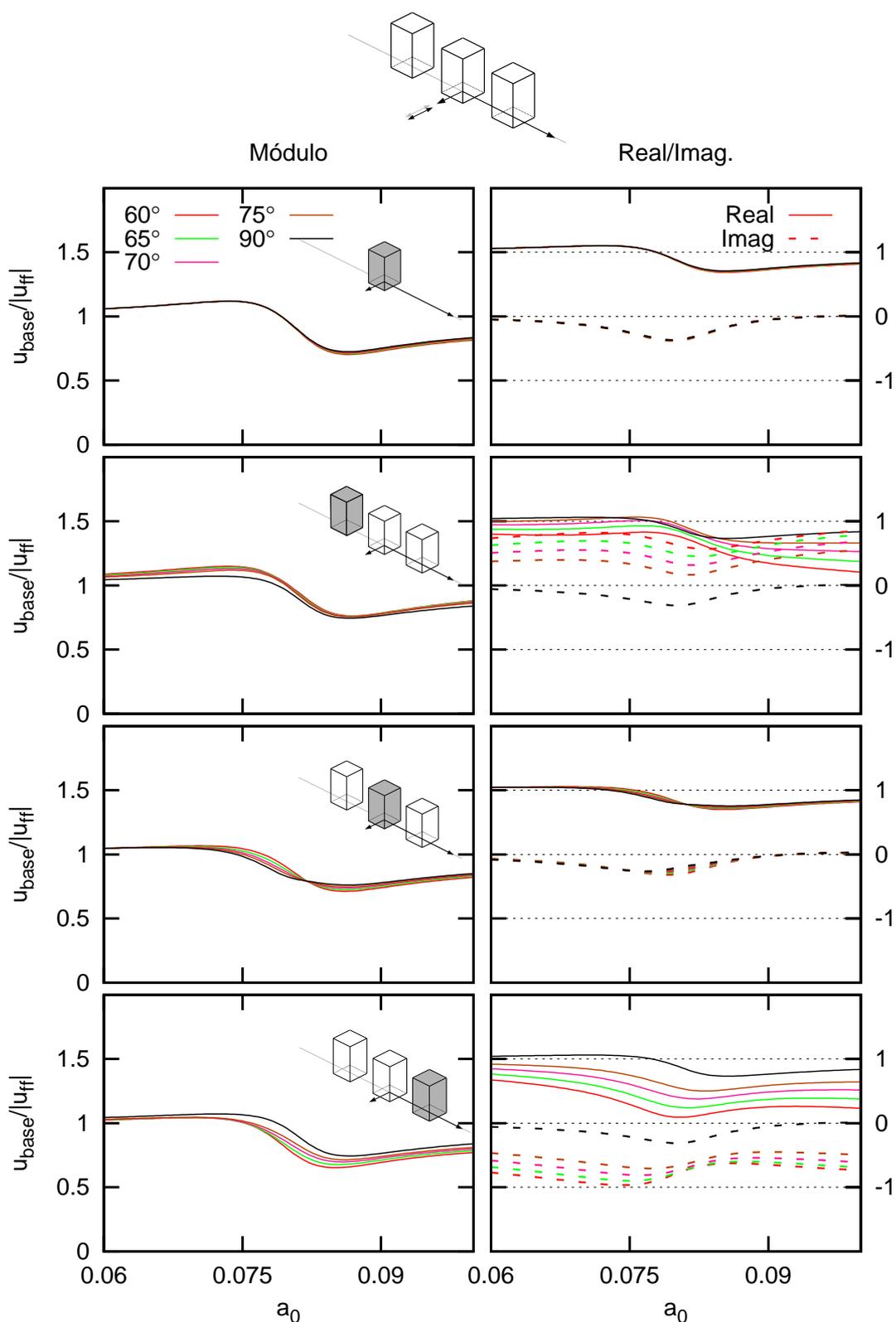


Figura D.6: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20°

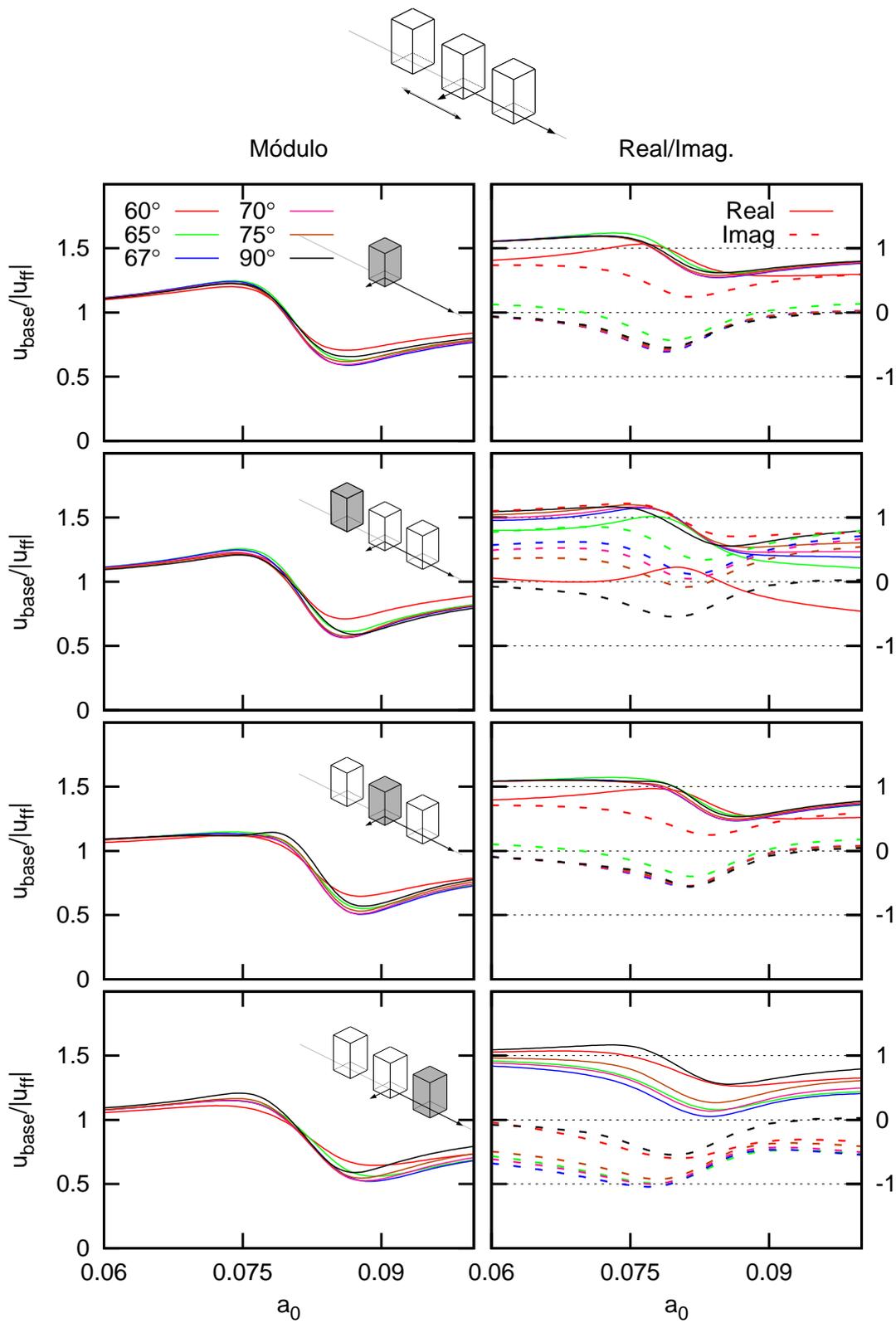


Figura D.7: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 10°

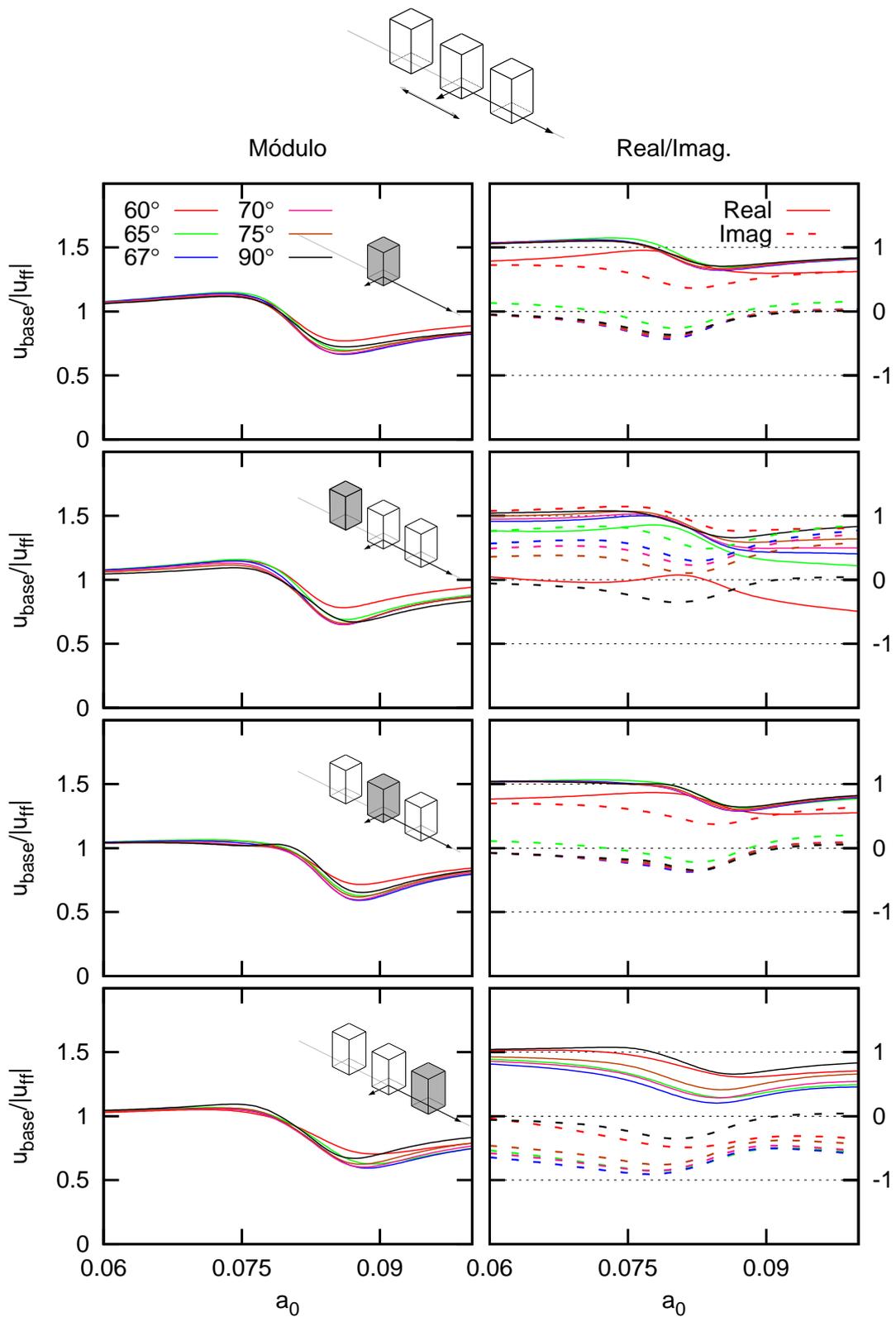


Figura D.8: Desplazamiento del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20°

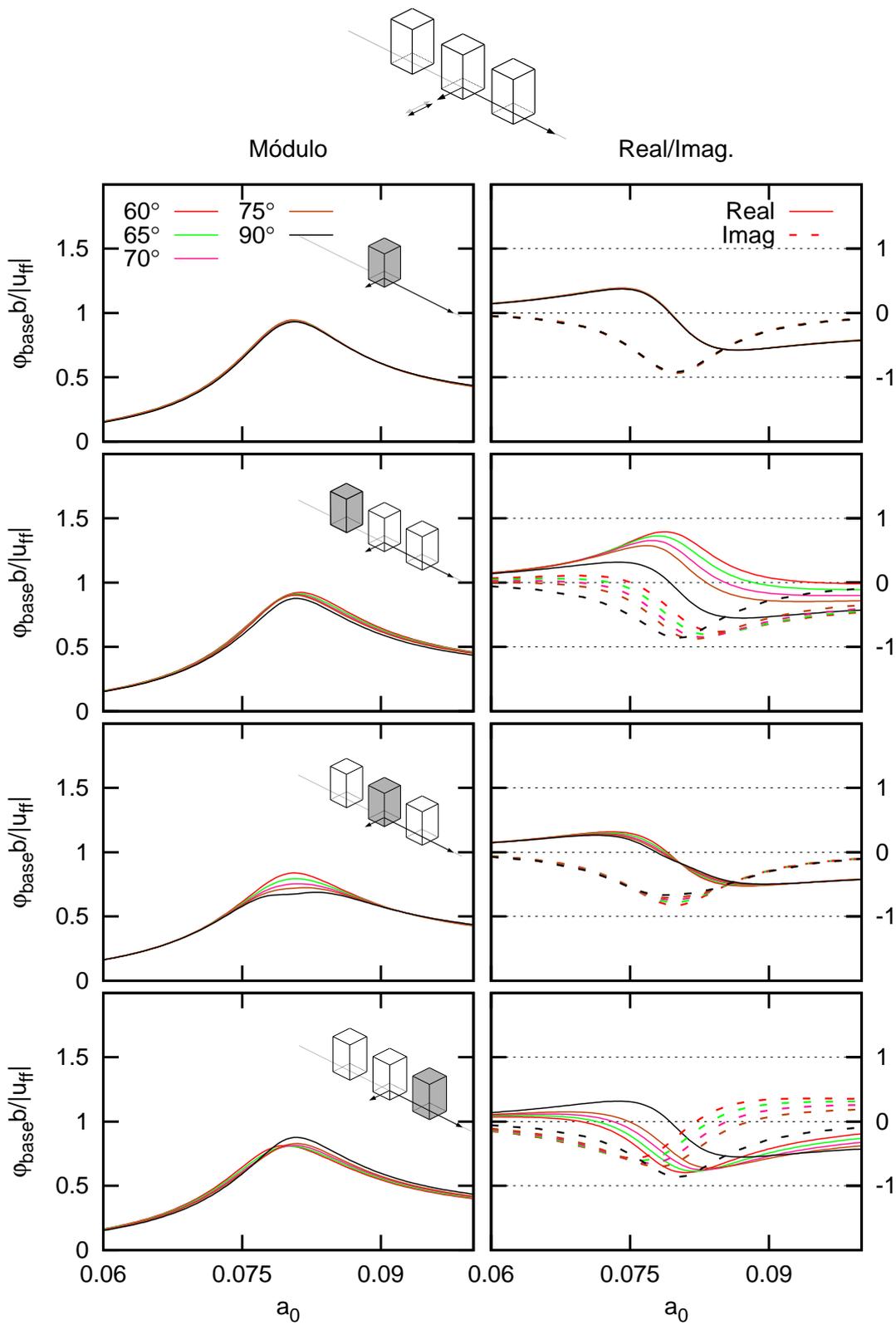


Figura D.9: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 10°

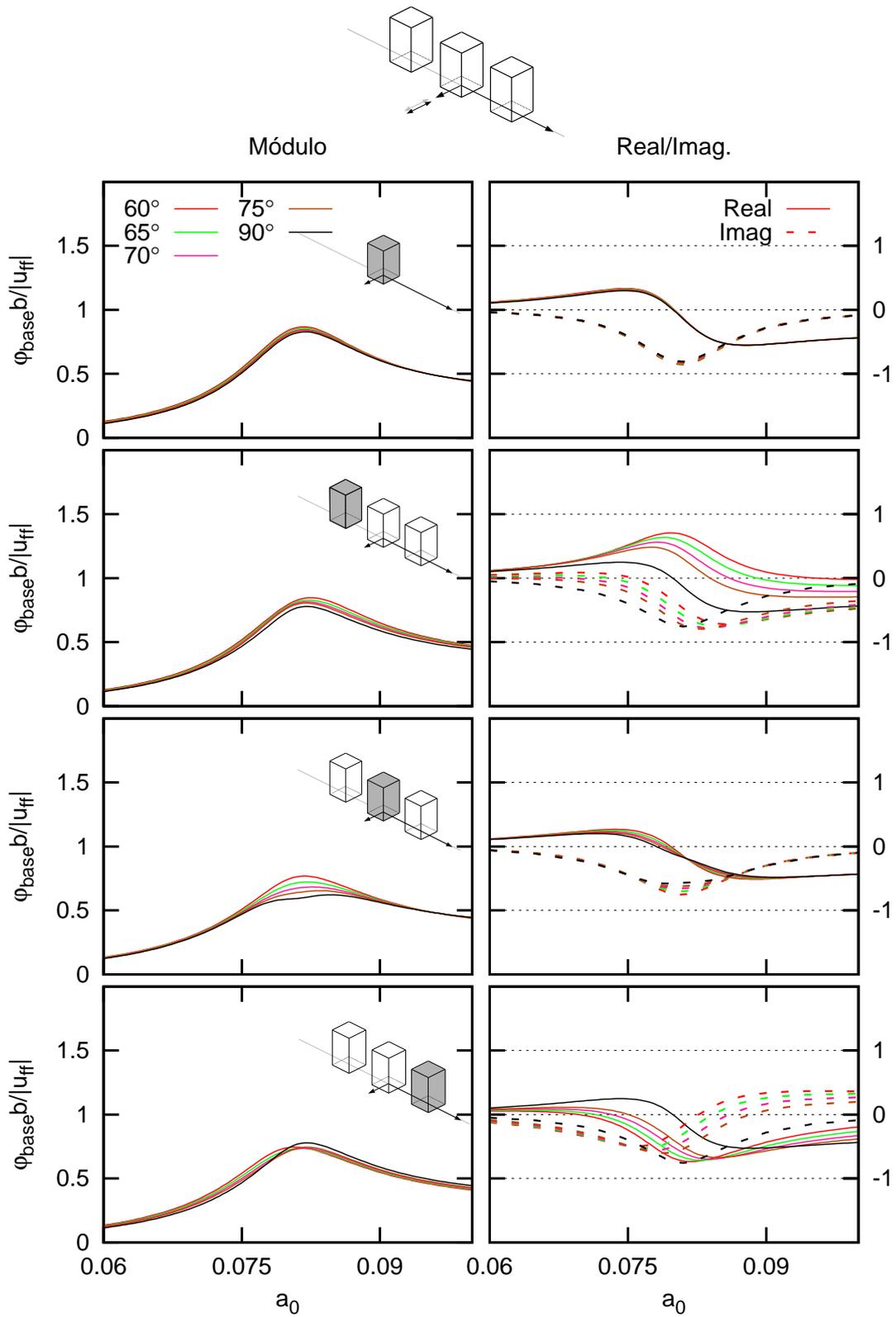


Figura D.10: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SH de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20°

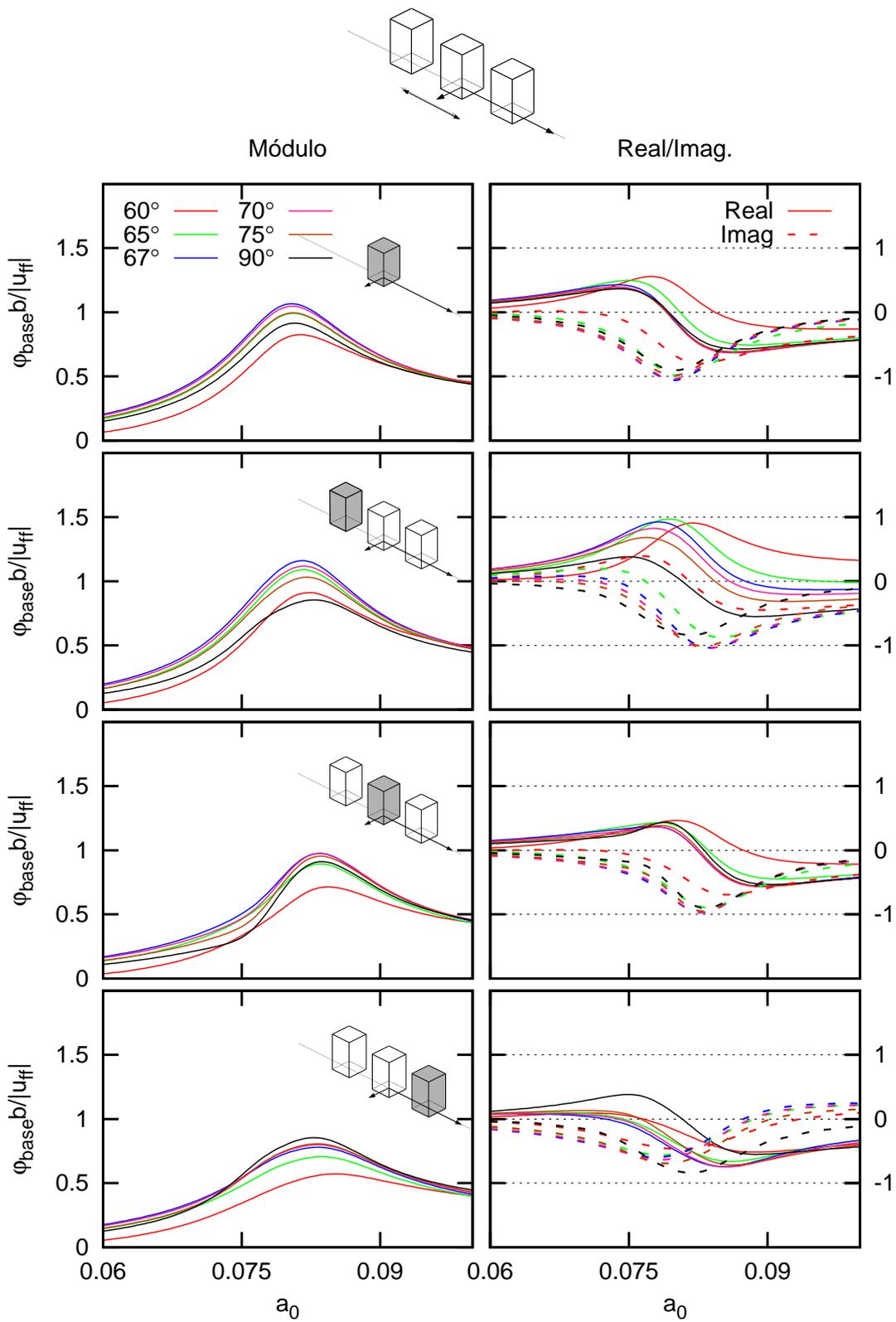


Figura D.11: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 10°

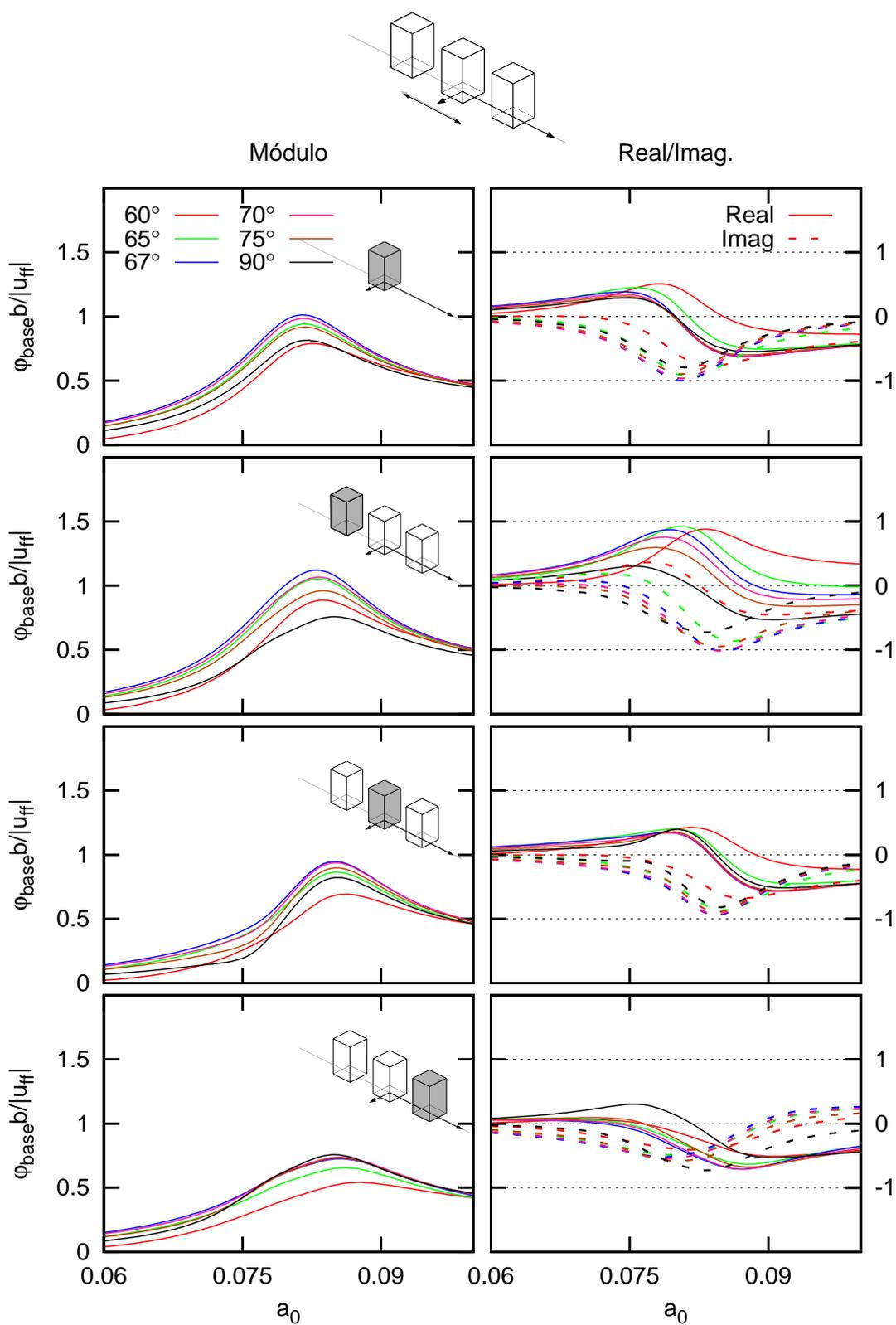


Figura D.12: Giro del encepado para edificios de altura $h/b = 2$ sometido a una onda SV de inclinación variable separados a una distancia $D = \lambda/3$ con pilotes inclinados 20°