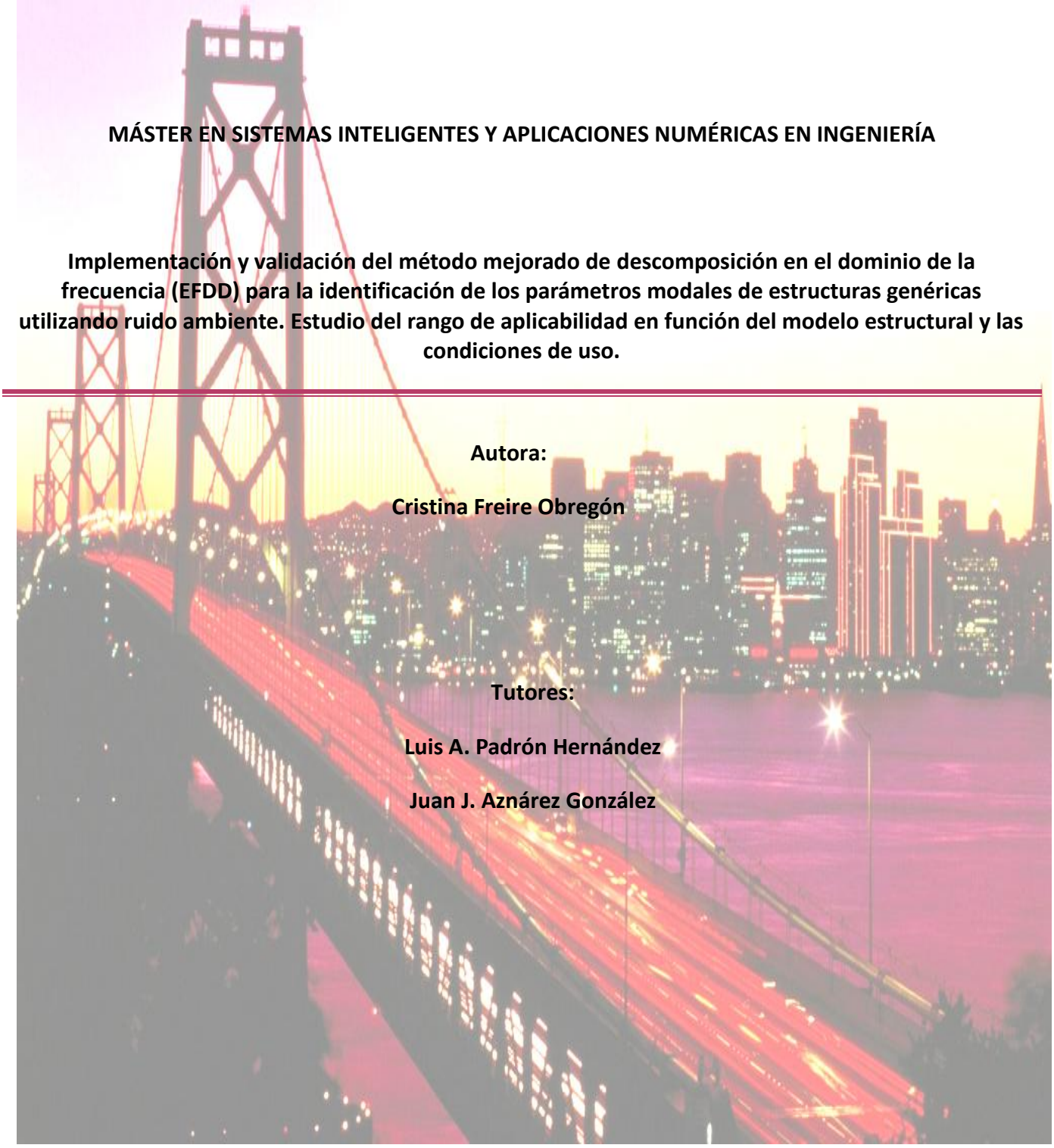
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

MÁSTER EN SISTEMAS INTELIGENTES Y APLICACIONES NUMÉRICAS EN INGENIERÍA

Implementación y validación del método mejorado de descomposición en el dominio de la frecuencia (EFDD) para la identificación de los parámetros modales de estructuras genéricas utilizando ruido ambiente. Estudio del rango de aplicabilidad en función del modelo estructural y las condiciones de uso.



Autora:

Cristina Freire Obregón

Tutores:

Luis A. Padrón Hernández

Juan J. Aznárez González

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

SIANI INSTITUTO UNIVERSITARIO

INDICE

1 CAPITULO I: INTRODUCCIÓN 5

1.1 ANTECEDENTES 5

2 CAPITULO II: RESPUESTA DINÁMICA DE SISTEMAS LINEALES DISCRETOS 7

2.1 EL SISTEMA DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD EN VIBRACIÓN LIBRE 7

2.1.1 Definición y características 7

2.1.2 Análisis de vibraciones libres no amortiguadas 9

2.1.3 Análisis de vibraciones libres amortiguadas 11

2.1.4 Análisis de vibraciones forzadas amortiguadas 14

2.1.4.1 Excitación armónica 14

2.1.4.2 Excitación arbitraria 17

2.1.4.2.1 Análisis en el dominio del tiempo. Integral de Duhamel. 17

2.2 RESPUESTA DEL SISTEMA DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD ANTE CARGAS DINÁMICAS A TRAVÉS DEL ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA 19

2.2.1 Función de respuesta en frecuencia de un sistema de un solo grado de libertad 19

2.2.1.2 Rigidez dinámica 20

2.2.1.3 Polos y residuos del sistema 22

2.2.1.3.2 Residuos 22

2.2.2 Relación entre la función de respuesta en frecuencias y la función de respuesta ante un impulso unidad 24

2.3 SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD 26

2.3.1 Configuración 26

2.3.2 Vibraciones no amortiguadas. Modos y frecuencias propias 27

2.3.3 Vibraciones amortiguadas. Amortiguamiento propio y frecuencia natural amortiguada 30

2.3.4 Análisis en el dominio de la frecuencia 31

2.3.5 Función respuesta en frecuencia (FRF) y respuesta a un impulso 33

2.3.6 Amortiguamiento proporcional 34

2.4 ANÁLISIS MODAL 35

2.4.1 Desacoplamiento de las ecuaciones de movimiento y superposición modal 35

2.5 RESPUESTA DE ESTRUCTURAS SOMETIDAS A ACCIONES ALEATORIAS ESTACIONARIAS 36

2.5.1 Procesos estacionarios y ergonómicos 36

2.5.2 Función de autocorrelación para procesos estacionarios 37

2.5.3 Función de densidad espectral de potencia para procesos estacionarios (power spectral density function) 38

2.5.4 Respuesta estructural de ruido blanco estacionario 41

3 CAPITULO III: ANÁLISIS MODAL OPERACIONAL MEDIANTE EL MÉTODO MEJORADO DE DESCOMPOSICIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA (EFDD) 43

3.1.1 Peak Picking 43

3.1.2 Algoritmo de identificación del EFDD 46

3.1.2.1 Descomposición en el dominio de la Frecuencia (FDD) 47

3.1.2.1.2 La formas Modales 51

3.1.2.1.3 Función de autocorrelación: INDICADOR MAC 52

3.1.2.1.4 Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad simétricas 56

3.1.2.2 Mejora del método EFDD 57

3.1.2.2.1 Estimación del coeficiente de amortiguamiento 57

4 CAPITULO IV: RESULTADOS 61

4.1 DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS SIMULADOS 61
4.2 PROCESO DE VALIDACIÓN Y AJUSTE DE LOS PARÁMETROS DE ENTRADA DEL ALGORITMO 65
4.2.1 Comparación del método con el PP 66
4.2.1.2 Conclusiones 69
4.2.2 Estudio del comportamiento con simetría 75
4.2.2.1 Conclusiones 83
4.2.3 Elección de la MAC_b óptima 84
4.2.3.1 $MAC_b \geq 0.6$ 84
4.2.3.2 $MAC_b \geq 0.7$ 86
4.2.3.3 $MAC_b \geq 0.8$ 88
4.2.3.4 $MAC_b \geq 0.9$ 90
4.2.3.5 Conclusiones 92
4.2.4 Selección de T_{high} y T_{low} para el cálculo del amortiguamiento 100
4.2.4.1 CASO 1: T_{low} = 0.1; t_{high} =0.9 100
4.2.4.2 CASO 2: T_{low} = 0.2; t_{high} =0.9 102
4.2.4.3 CASO 3: T_{low} = 0.3; t_{high} =0.9 104
4.2.4.4 CASO 4: T_{low} = 0.3; t_{high} =0.8 106
4.2.4.5 Conclusiones 108
4.3 APLICACIÓN DEL ALGORITMO EFDD A DISTINTOS EJEMPLOS Y CONFIGURACIONES 116
4.3.1 Sistema 1 116
4.3.1.1 Configuraciones del sistema 1 116
4.3.1.1.1 Amortiguamiento viscoso 117
4.3.1.1.2 Amortiguamiento viscoso + ruido 121
4.3.1.1.3 Amortiguamiento histerético 125
4.3.2 Sistema 2 127
4.3.2.1 Configuración del sistema 2 127
4.3.2.1.1 Estudio del amortiguamiento histerético 127

5 CAPÍTULO VI: RESUMEN Y CONCLUSIONES 133

6 CAPITULO VII: BIBLIOGRAFÍA 135

7 CAPÍTULO VIII: ANEXOS 137

7.1 SVD 137
7.1.2 Propiedades de las matrices U, S y V 138
7.1.3 Inversión de $H(\omega)$ utilizando el algoritmo SVD 139
7.2 FUNCIONES PRINCIPALES 140
7.3 TUTORIAL 142

1 CAPITULO I: INTRODUCCIÓN

El análisis del comportamiento dinámico de todo tipo de estructuras requiere, entre otras cosas, conocer una serie de características propias de la estructura tales como frecuencias naturales, modos y amortiguamientos propios de vibración. Durante el diseño, la estimación de estos parámetros se realiza de manera numérica o analítica, y es vital para garantizar un comportamiento aceptable de la estructura. Una vez construida, la estimación de estos parámetros ha de realizarse de manera experimental, y permite, entre otras cosas, controlar la calidad de la ejecución, calibrar los modelos estructurales para permitir un análisis más exacto, o detectar daños estructurales de diversa índole que pueda sufrir la estructura a lo largo de su vida útil.

Las técnicas experimentales de identificación modal más utilizadas se basan en una señal de entrada conocida. Sin embargo, en muchas ocasiones, excitar una estructura con una carga conocida resulta caro o impracticable. Por esta razón, se están desarrollando técnicas *output-only* basadas en la excitación de la estructura mediante un ruido ambiente con características de ruido blanco, y que permiten llevar a cabo lo que se denomina *Análisis Modal Operacional*.

En este Trabajo Fin de Máster se estudiará, implementará y validará un algoritmo propuesto recientemente para el análisis modal operacional de estructuras denominado *Enhanced Frequency Domain Decomposition method* (EFDD) [1,2]. La implementación se realizará en MATLAB. Se validarán y ajustará los parámetros de entrada del algoritmo para conseguir resultados óptimos con el apoyo de cálculos de modelos teóricos. También se variará la entrada del algoritmo, cambiando la configuración del sistema (variando el tipo de amortiguamiento, con distintas fuentes de ruido, variando el número de grados de libertad…).

1.1 ANTECEDENTES

En el análisis modal tradicional [3] los parámetros modales se obtienen de las funciones de respuesta en frecuencia (FRF), que relacionan la salida (respuesta) con la entrada (excitación). Para este tipo de análisis es necesario conocer la entrada y la salida del sistema

El análisis modal operacional se basa en la medida de la respuesta de la estructura usando sólo el ambiente y las fuerzas de servicio que actúan sobre la misma. Se usa para obtener una descripción modal de la estructura bajo sus condiciones de operación. En vez de cargar la estructura artificialmente y tratar la excitación ambiental como una fuente de ruido no deseado, la excitación natural se usa como fuente de excitación.

Como estas fuerzas de entrada al sistema no se miden, no se tendrá una medida de las FRF del sistema. La ventaja de emplear una excitación artificial es que hay muchos más procedimientos para identificar los parámetros y características de los sistemas, con mayor precisión en la identificación de ciertos parámetros como los coeficientes de amortiguamiento. En inconveniente es que se necesitan equipos muy precisos y en ocasiones, costosos.

En este trabajo se aborda una metodología para identificar los parámetros modales de una estructura. Para ello, en primer lugar se ha de tratar los registros de aceleraciones medidos en distintos puntos discretos de una estructura para, al final, estimar de manera precisa los parámetros modales de la misma, es decir frecuencias naturales, modos propios e incluso amortiguamiento modal.

Para ensayos con excitación ambiental se supone que las fuerzas desconocidas se aplican simultáneamente. Además se supone que la fuerza de entrada es un ruido blanco, es decir, no es una función de la frecuencia y tiene un espectro con un valor medio constante para cada frecuencia.

Se emplea cuando las estructuras que se desean estudiar no es conveniente excitarlas por medio de un martillo o un excitador. Algunas porque son difíciles de excitar artificialmente debido a su tamaño, forma o localización. Para muchas estructuras grandes puede ser complicado excitarlas artificialmente a un nivel tal que la respuesta debida a factores ambientales (no controlables) sea pequeña en comparación con la otra artificial. Hay otros casos en los que surgen problemas debido a no linealidades introducidas por un nivel de respuesta muy elevado por emplear métodos artificiales de excitación. Además, todas las estructuras suelen estar sometidas a acciones como las fuerzas ambientales, como por ejemplo el viento, las olas, el tráfico, y también su propia maquinaria puede generar vibraciones.

Las principales ventajas de este tipo de ensayos son:

1. Es necesario menor tiempo para realizar el ensayo, ya que sólo hay que colocar los equipos de medida.
2. Es más barato, puesto que no necesita la adquisición de equipos excitadores y puede realizarse in situ.
3. El ensayo no interfiere ni interrumpe el funcionamiento normal de la estructura, por lo que puede seguir estando en servicio mientras se realiza.
4. La respuesta medida es representativa de las condiciones reales de funcionamiento de la estructura.
5. Se evita la aplicación de cargas artificiales que conllevan un riesgo de dañar la estructura.

Sin embargo, el uso de este tipo de ensayos produce respuestas pequeñas y, a menudo, mezcladas con ruido. Como la excitación es desconocida, el análisis es más difícil que en el caso tradicional. Las principales desventajas son:

1. Se necesitan equipos muy sensibles.
2. Es necesario un análisis de datos cuidadoso.

Existen muchos métodos para realizar el análisis modal operacional [4]:

- Descomposición en el Dominio de la Frecuencia (FDD)
- NExT/ERA
- Identificación de Subespacios Estocásticos (SSI)

Aquí se describirán algunos de ellos, especialmente el EFDD (*Enhanced Frequency Domain Decomposition Method*) [1,2], se implementarán y se analizarán sus ventajas e inconvenientes.

2 CAPITULO II: RESPUESTA DINÁMICA DE SISTEMAS LINEALES DISCRETOS

2.1 EL SISTEMA DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD EN VIBRACIÓN LIBRE

2.1.1 DEFINICIÓN Y CARACTERÍSTICAS

Los grados de libertad o coordenadas generalizadas de un sistema mecánico son los parámetros independientes que definen la posición y la configuración deformada de dicho sistema. El número de grados de libertad coincide con el número de ecuaciones necesarias para describir el movimiento.

En este apartado se deduce la ecuación diferencial del movimiento y sus soluciones en ausencia de fuerzas de excitación, es decir vibraciones libres.

A continuación se puede apreciar la ilustración (1), en la que se representa un sistema mecánico constituido por una masa m que puede desplazarse longitudinalmente (aunque en la figura el movimiento sea horizontal, este modelo puede describir también oscilaciones verticales) y se encuentra unida a un sistema inicial mediante un muelle de constante k y un amortiguador viscoso de constante c conectados en paralelo.

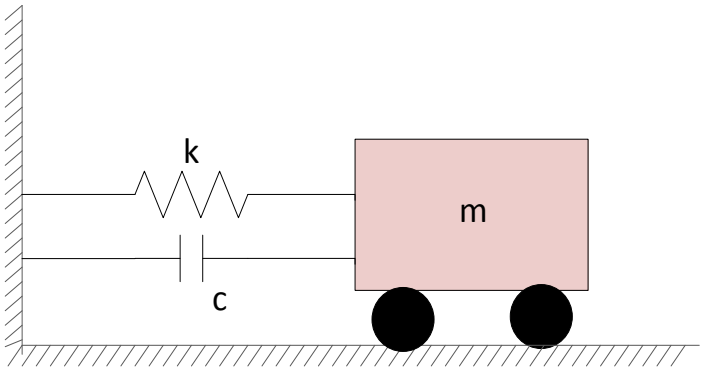


Ilustración 1: Componentes básicos del sistema

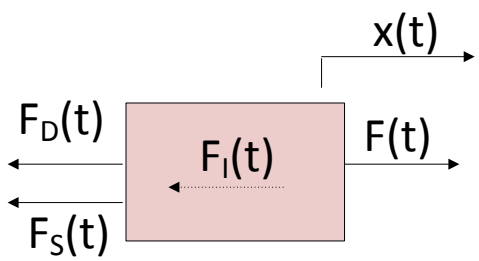


Ilustración 2: Fuerzas en equilibrio

El movimiento puede estar producido por la acción de una fuerza dinámica de excitación F(t) (en la dirección de x) o por un movimiento $x_g(t)$ del soporte en que descansa la estructura (también en dirección de x).

Siguiendo la ilustración (2), planteando el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre la masa m en un instante arbitrario incluyendo las fuerzas de inercia se obtiene la siguiente ecuación que rige el movimiento a favor del movimiento de la masa se encuentra la carga aplicada F(t) y en contra tres fuerzas resultantes del movimiento, que son la fuerza de inercia (F_I), la fuerza de amortiguación (F_D) y la del resorte (F_S) (ver ecuación (2.2))):

$$F_I(t) + F_D(t) + F_S(t) = F(t) \tag{2.1}$$

Dichas fuerzas representadas en el lado izquierdo de la ecuación son funciones del desplazamiento x(t) o una de sus derivadas en el tiempo. El criterio de signo adoptado, se basa en que las fuerzas negativas son las que se oponen al movimiento de la carga aplicada (f(t))

Teniendo en cuenta el principio de d'Alembert, la fuerza de inercia es el producto de la masa por la aceleración (ver ecuación (2.2)):

$$F_I(t) = m\ddot{x}(t) \tag{2.2}$$

Asumiendo un mecanismo viscoso amortiguado, la fuerza de amortiguación es el producto de la constante de amortiguación y la velocidad (ver ecuación (2.3)):

$$F_D(t) = c\dot{x}(t) \tag{2.3}$$

Finalmente, la fuerza elástica es el producto de la constante de rigidez del resorte y el desplazamiento (ver ecuación (2.4)):

$$F_S(t) = kx(t) \tag{2.4}$$

Tomando en cuenta las condiciones anteriores, se llega ecuación (2.5):

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \tag{2.5}$$

Cabe destacar que en oscilaciones verticales el valor de x responde al desplazamiento respecto de la posición de equilibrio dada por $x_e=(m\cdot g)/k$.

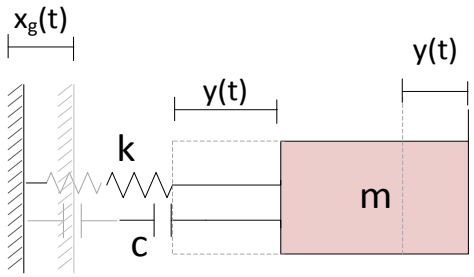


Ilustración 3: Sistema con oscilaciones verticales

En el esquema derecho de la Ilustración 3 (3) se muestra una masa unida a unos soportes que no constituyen un sistema inicial sino que experimentan un movimiento; este tipo de situaciones se dan en movimientos sísmicos o en oscilaciones transmitidas por el terreno. Si x_g e y son, respectivamente, los desplazamientos absolutos de los soportes y de la masa el desplazamiento relativo de la masa respecto del terreno es $x=y-x_g$ y la ecuación diferencial del movimiento es la ecuación (2.6),

$$m\ddot{y} + c\dot{x} + kx = m\left(\ddot{x}_g + \ddot{x}\right) + c\dot{x} + kx = 0 \tag{2.6}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\left(\ddot{x}_g\right) \tag{2.7}$$

La relación anterior (ecuación (2.7)) presenta la ventaja de depender de una única incógnita (x). Esta expresión muestra que el comportamiento dinámico de la masa m es el que resulta al aplicarle una fuerza igual y de signo contrario a la fuerza de inercia, proporcional a la masa, transmitida por el movimiento de los soportes.

2.1.2 ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES NO AMORTIGUADAS

Como se vio en el apartado anterior la ecuación del movimiento de un sistema dinámico se puede expresar como la ecuación (2.5).

Donde x(t) representa la respuesta dinámica(es decir, el desplazamiento desde la posición de equilibrio) y f(t) representa una carga actuando sobre el sistema aplicada directamente o resultante del sistema.

Una oscilación libre es aquel caso en que no existe excitación en el sistema estructural, ver ecuación (2.8)

$$\begin{gathered} f(t) = 0 \\ \text{ó} \\ -mx_g(t) = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

En estas condiciones la ecuación del sistema dinámico se transforma en, ver ecuación (2.9):

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{2.9}$$

Ya que no existe excitación, el movimiento tiene que estar generado por condiciones iniciales que se refieren ordinariamente al desplazamiento y a la velocidad en un instante $t_{0,}$ ver ecuación (2.9):

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

La relación es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes y homogéneos que admite soluciones de la forma, ver ecuación (2.11) :

$$Ce^{\lambda t} \tag{2.11}$$

siendo C una constante y λ una raíz de la ecuación característica, llegamos a la ecuación (2.12):

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \tag{2.12}$$

cuyas soluciones son, ver ecuación (2.13):

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \mp \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{2.13}$$

En sistemas mecánicos de 1 gdl, la frecuencia natural (frecuencia propia) es la frecuencia del movimiento armónico que resulta al introducir un desplazamiento y/o una velocidad inicial a un sistema de un grado de libertad, que está en posición de equilibrio, y dejarlo vibrar libremente sin amortiguamiento (problema de vibraciones libres no amortiguadas). Su valor es (ver ecuación (2.14)):

$$\omega = \frac{K}{m}\ (Hz) \tag{2.14}$$

Si no hay amortiguamiento, el sistema es un sistema conservatorio (c=0), las soluciones de la ecuación del movimiento son armónicas, como en la ecuación (2.15),

$$x(t) = (A * cos\omega_0 t + B * sen\omega_0 t) \tag{2.15}$$

en donde A y B son constantes que dependen de las condiciones iniciales y ω_0 es la frecuencia natural o propia del sistema no amortiguado, se define en la ecuación (2.16) :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{2.16}$$

De la expresión (2.15) se desprende que un sistema estructural rígido (elevada K) y de poca masa (m) tiende a vibrar con gran frecuencia o rápidamente, mientras que un sistema flexible y de poca masa tiende a oscilar con una frecuencia baja (lentamente).

En la gráfica de la ilustración (4) se muestra la respuesta libre de un sistema no amortiguado en la que se observa que la respuesta no se atenúa nunca, cosa no aplicable en la realidad y que responde exclusivamente a modelos teóricos.

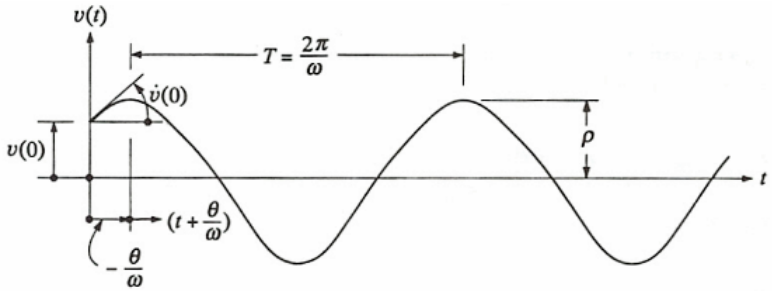


Ilustración 4: Respuesta de un sistema libre no amortiguado [5]

2.1.3 ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

Cuando 0<c<c_c, amortiguamiento inferior al crítico, la solución de la ecuación del movimiento es (ver ecuación (2.17))

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}(A * cos\omega_a t + B * sen\omega_a t) \tag{2.17}$$

en donde ξ es la fracción del amortiguamiento crítico y ω_a es la frecuencia natural del sistema amortiguado que vienen definidas por la ecuación (2.18):

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_0} \tag{2.18}$$

El valor del coeficiente c se denomina amortiguamiento crítico c_c, siendo su valor el de la ecuación (2.19):

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.19}$$

Y frecuencia amortiguada se relaciona con la natural de la siguiente manera, ver ecuación (2.21):

$$\omega_a = \omega_o\sqrt{1-\xi} \tag{2.20}$$

A la razón de amortiguamiento ξ, se la conoce como la relación (ver ecuación (2.21)):

$$\xi = \frac{c}{c_c} \tag{2.21}$$

Los valores del cociente ξ, permiten distinguir 4 casos distintos en la resolución de la ecuación del movimiento:

1. ξ =0 Sistema no amortiguado.
2. ξ < 1 Amortiguamiento débil.
3. ξ =1 Amortiguamiento crítico.
4. ξ > 1 Amortiguamiento sobreamortiguado.

La respuesta de un sistema amortiguado débil es una respuesta oscilatoria decreciente. EL caso del amortiguamiento crítico es el caso entre un sistema sobreamortiguado y uno amortiguado débil.

Tal como se aprecia en la ilustración (5), el amortiguamiento ralentiza ligeramente el movimiento libre de un sistema amortiguado respondiendo este a una onda armónica de frecuencia ω_a con amplitud decreciente exponencialmente.

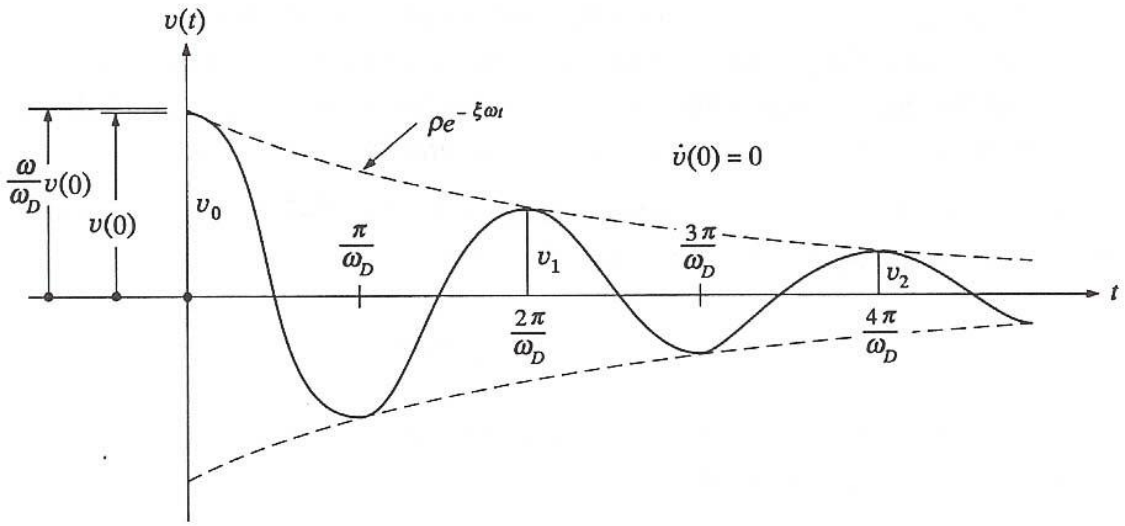


Ilustración 5: Respuesta de un sistema libre amortiguado [5]

Cuando $c=c_c$, amortiguamiento crítico, la solución general de la ecuación del movimiento es (ver ecuación (2.22)):

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}(A + Bt) \qquad (2.22)$$

en donde A y B son constantes. En esta situación, el movimiento del sistema estructural carece de periodicidad y si el sistema es separado inicialmente de su posición de equilibrio tiende a volver a esta sin efectuar oscilación alguna tal como se muestra en la figura (6):

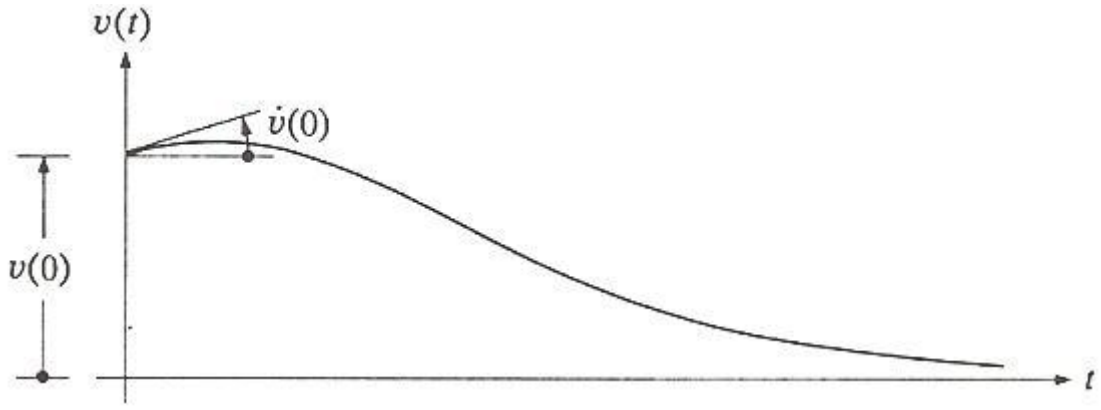


Ilustración 6: Respuesta de un sistema libre de un sistema sobreamortiguado [5]

El caso c>cc, amortiguamiento superior al crítico, la solución general a la ecuación del movimiento es la que se indica en la ecuación (2.23):

$$x(t) = e^{-\xi\omega t}(A * cos\omega t + B * sen\omega t) \tag{2.23}$$

en donde A y B son constantes y la frecuencia se obtiene aplicando las ecuaciones (2.24 y 2.25):

$$\lambda = -\frac{c}{2m}\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} = \xi\omega \pm \hat{\omega} \tag{2.24}$$

$$\hat{\omega} = \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{2.25}$$

El movimiento del sistema estructural es similar al caso de amortiguamiento crítico aunque con una atenuación tanto más lenta de la respuesta cuanto mayor es la fracción del amortiguamiento.

2.1.4 ANÁLISIS DE VIBRACIONES FORZADAS AMORTIGUADAS

Para el estudio de los distintos casos de sistemas estructurales que oscilan bajo el efecto de una fuerza actuante se considera la hipótesis de base de que el amortiguamiento es infracrítico.

2.1.4.1 EXCITACIÓN ARMÓNICA

Una fuerza actuante sobre un sistema estructural se considera armónica si se define de la siguiente forma (ver ecuación (2.26)):

$$f(t) = fe^{i\Omega t_0} \tag{2.26}$$

en donde Ω es la frecuencia y f_0 es la amplitud que toma valores complejos ya que $f(t)$ es real. Sustituyendo el valor de la fuerza de excitación armónica en la ecuación (2.1) se obtiene la ecuación a resolver,

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = fe^{i\Omega t_0} \tag{2.27}$$

La solución general de la ecuación (2.27) es suma de una particular y de la general de la ecuación homogénea obtenida previamente en el apartado de oscilaciones libres con amortiguamiento infracrítico. Esta última no se considera habitualmente debido a que tiende a atenuarse, se denomina respuesta transitoria, y a que depende de las condiciones iniciales y

de la variación temporal de la excitación hasta alcanzar el régimen permanente. En consecuencia se considera solamente la solución particular.

Ésta es de la forma,

$$x(t) = x_0 e^{i\Omega t} \tag{2.28}$$

debido a que (2.27) es lineal, es decir, que la respuesta permanente a una excitación armónica de amplitud f_0 es otra onda armónica de la misma frecuencia pero de amplitud x_0. Sustituyendo la ecuación (2.28) en (2.27) hallamos la relación existente entre ambas amplitudes, ecuación (2.29):

$$x_0 = \frac{f_0}{-m\Omega^2 + ic\Omega + k} \tag{2.29}$$

Estas expresiones pueden escribirse como:

$$x(t) = f(t)H(\Omega) \tag{2.30}$$

$$x_0(t) = f_0 H(\Omega) \tag{2.31}$$

en donde $H(\Omega)$se denomina función de transferencia del sistema y siguiendo la ecuación (2.32) es igual a:

$$H(\Omega) = \frac{1}{-m\Omega^2 + ic\Omega + k} = \frac{1}{m}\frac{1}{-\Omega^2 + i2\xi\omega_0\Omega + {\omega_0}^2} = \frac{1}{K}\frac{1}{1 - \beta^2 + i2\xi\beta} \tag{2.32}$$

siendo β el cociente entre la frecuencia de la excitación y la natural del sistema $\beta = \Omega/\omega_0$

El valor constante $x_{est} = \frac{|f_0|}{K}$ es la respuesta real y estática de la ecuación (2.28) para $\Omega = 0$, llegamos a la ecuación (2.33):

$$|x_0| = \frac{|f_0|}{K}|H(\Omega)|K \tag{2.33}$$

El módulo de H(Ω)·k se denomina factor de amplificación dinámica D y viene dado por la ecuación (2.34):

$$D = \frac{|x_0|}{x_{est}}|H(\Omega)|K = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \tag{2.34}$$

En la ilustración (7) se ha representado una familia de curvas o espectros de la amplificación dinámica (D) en función del cociente entre la frecuencia de la excitación y la natural del modelo estructural (β) para distintos valores del amortiguamiento (ξ).

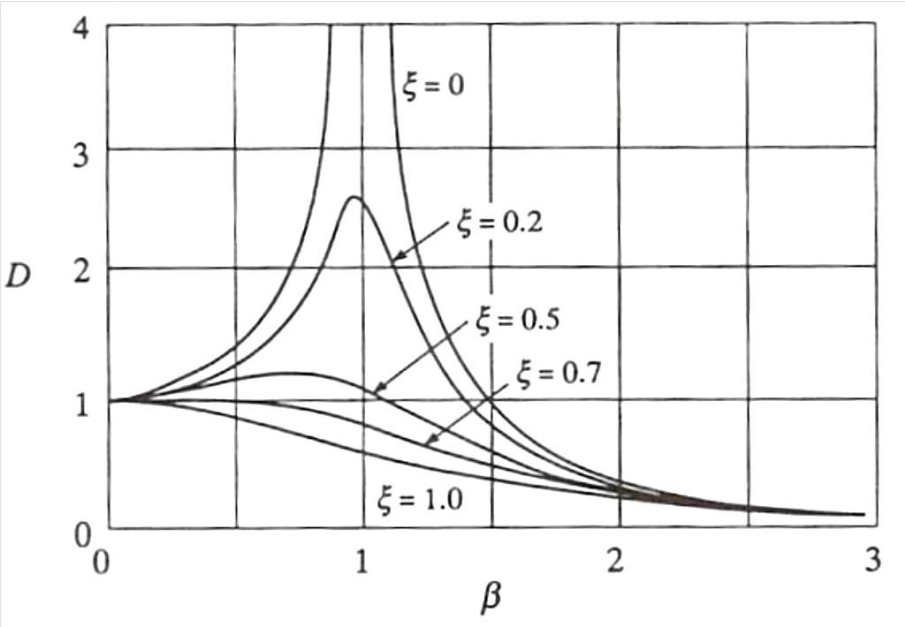


Ilustración 7: Variación del factor de amplificación dinámica con la frecuencia y el amortiguamiento [5].

Los espectros de la amplificación dinámica (D) presentan un máximo o pico en las proximidades de β=1 más pronunciado cuanto menor es el amortiguamiento (ξ).

En este apartado se ha considerado solamente la respuesta permanente del sistema estructural. Por lo que respeta a la respuesta transitoria de la estructura, conviene destacar que si la excitación armónica se inicia en un determinado instante, se precisan algunos ciclos de oscilación para que la respuesta alcance su amplitud máxima, es decir, para que la resonancia se manifieste en toda su magnitud debe existir una excitación de cierta duración. En la figura (8) se puede apreciar la respuesta en resonancia de un sistema amortiguado:

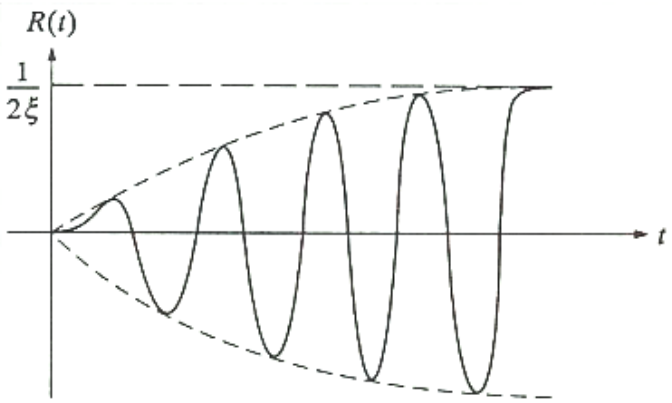


Ilustración 8: Respuesta en resonancia de un sistema amortiguado [5].

2.1.4.2 EXCITACIÓN ARBITRARIA

Cuando la fuerza de excitación que actúa en el sistema no responde a una expresión matemática conocida no es posible resolver analíticamente las ecuaciones y se necesita recurrir a métodos numéricos de resolución. En estos casos, la respuesta dinámica del sistema puede obtenerse mediante dos procedimientos: resolución numérica en el dominio del tiempo mediante las integrales de Duhamel y resolución en el dominio de la frecuencia mediante una doble transformación de Fourier.

2.1.4.2.1 ANÁLISIS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO. INTEGRAL DE DUHAMEL.

En un sistema elástico y lineal, la respuesta x(t) en cada instante t puede ser obtenida como suma de las respuestas en dicho instante a los impulsos elementales $f(\tau)d\tau$ correspondientes a los instantes anteriores a t ($t_0 \leq \tau \leq t$). Aplicando la relación entre el impulso y la cantidad de movimiento se obtiene que la velocidad instantánea $d\dot{x}(\tau)$ al cabo de $d\tau$ tiene por valor $\frac{f(\tau)d\tau}{m}$ mientras que el desplazamiento puede considerarse prácticamente nulo. Sustituyendo las condiciones iniciales para el instante τ en la expresión (2.6) se obtiene el valor del desplazamiento en el instante t ($dx(t)$) causado por el impulso elemental $f(\tau)d\tau$ en el instante τ (ver ecuaciones (2.35 y 2.36)):

$$\begin{aligned} dx(t) = e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \Bigg[& \frac{d\dot{x}(\tau) + dx(\tau)\xi\omega_0}{\omega_a} \, sen\, \omega_a(t-\tau) \\ & + dx(\tau) sen\, \omega_a(t-\tau) \Bigg] \\ = \; & e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \frac{f(\tau)d\tau}{m\omega_a} sen\, \omega_a(t-\tau) \end{aligned} \qquad (2.35)$$

$$t < \tau$$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} dx(t) = \frac{1}{m\omega_a} \int_{t_0}^{t} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} sen\, \omega_a(t-\tau) d\tau \qquad (2.36)$$

La expresión (2.36) es conocida como la Integral de Duhamel. El integrando:

$$h(t) = \; e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} sen\, \omega_a(t-\tau) \qquad (2.37)$$

es la respuesta en el instante t a un impulso unidad (delta de Dirac) en el instante τ. Analizando la expresión (2.37) se observa que el amortiguamiento indica la "memoria" del sistema; en excitaciones de tipo impulsivo, la repercusión del amortiguamiento en la respuesta máxima de la estructura es bastante baja mientras que en acciones continuadas su influencia puede llegar a ser determinante.

La expresión (2.36) es únicamente válida en presencia de una excitación continuada sobre el sistema; si además se parte de unas condiciones iniciales no nulas la expresión se convierte en la ecuación (2.38),

$$x(t) = \frac{e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}}{m\omega_a}[x(t_0)(\omega_a\, cos\omega_a t + \omega_0\xi sen\omega_a t) + \dot{x}(t_0)sen\omega_a t] + \frac{1}{m\omega_a}\int_{t_0}^{t} f(\tau)e^{-\xi\omega_0(t-\tau)}sen\ \omega_a(t-\tau)d\tau \qquad (2.38)$$

La Integral de Duhamel se puede resolver numéricamente discretizando el intervalo de integración y considerando un criterio de interpolación de la excitación f(t).La velocidad y la aceleración pueden obtenerse derivando bajo el signo integral en la expresión (2.36) o derivando numéricamente a partir de la solución discreta de la Integral de Duhamel.

2.2 RESPUESTA DEL SISTEMA DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD ANTE CARGAS DINÁMICAS A TRAVÉS DEL ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

2.2.1 FUNCIÓN DE RESPUESTA EN FRECUENCIA DE UN SISTEMA DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD

Si f(t) tiene un periodo T con lo que f(t + T) = f(t), la función puede descomponerse en una serie de Fourier (ver ecuación (2.39)):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_n e^{in\Omega t} \tag{2.39}$$

donde:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.40}$$

Y los coeficientes complejos f_n representan la intensidad con la que la frecuencia Ωn está contenida en $f(t)$ y vienen dados porla ecuación (2.41):

$$f_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{in\Omega t}\, dt \tag{2.41}$$

Si se sustituye la expresión (2.41) en las relaciones definidas en (2.39), la respuesta de un sistema estructural a una fuerza f(t) puede expresarse como la ecuación (2.42),

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} H(\Omega n) f_n e^{in\Omega t} \tag{2.42}$$

Esta expresión que resulta es aplicable exclusivamente a excitaciones periódicas. Si f(t) no cumple esta condición, puede hacerse tender T a infinito con lo que Ω tiende a un valor infinitesimal dω y la serie de valores discretos nΩ se convierten en una función continua ω. Las relaciones (2.39), (2.41) y (2.42) se transforman entonces respectivamente en la (2.43), (2.44) y (2.45):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \tag{2.43}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \tag{2.44}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{2.45}$$

Las igualdades (2.43) y (2.44) muestran que F(ω) es la transformada de Fourier de f(t) y que ésta es la transformada inversa de la primera. Dado que la transformada de Fourier es una operación biunívoca, F(ω) contiene la misma información que f(t) y pueden realizarse análisis en el dominio del tiempo o de la frecuencia. La obtención de la respuesta x(t) a partir de la excitación f(t) según la expresión (2.44), puede interpretarse que se efectúa en tres etapas: en primer lugar se realiza una transformada directa de Fourier (2.44) para halar $F(\omega)$, a continuación se determina la respuesta en el dominio de la frecuencia multiplicando por la función de transferencia $x(t) = H(\omega)F(\omega)$, y finalmente se obtiene la respuesta en el dominio del tiempo x(t) mediante una transformación inversa de Fourier (2.45).

Derivando la expresión (2.45) dos veces respecto del tiempo se observa que la repercusión de las frecuencias altas en la aceleración es mayor que en el desplazamiento, como en la ecuación (2.46):

$$\ddot{x}(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 H(\omega)F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{2.46}$$

La comparación de este resultado con la transformación de Fourier indicada en (2.45) muestra que la aceleración de la respuesta en el dominio de la frecuencia viene dada por,

$$\ddot{x}(\omega) = \omega^2 H(\omega)F(\omega) \tag{2.47}$$

2.2.1.2 RIGIDEZ DINÁMICA

Como en el capítulo (2.1) la ecuación (2.48)

$$(mp^2 + cp + k)\cdot X(p) = F(p) \tag{2.48}$$

Se puede escribir como la ecuación (2.49):

$$Z(p)\cdot X(p) = F(p) \tag{2.49}$$

donde

- $Z(p)$ se denomina rigidez dinámica

Invirtiendo la ecuación anterior se obtiene la función de transferencia, ver ecuación (2.52):

$$H(p) = Z(p)^{-1} \tag{2.50}$$

$$X(p) = F(p) \cdot H(p) \tag{2.51}$$

$$H(p) = \frac{1/m}{p^2 + \left(\frac{c}{m}\right)p + \left(\frac{k}{m}\right)} \tag{2.52}$$

A continuación se puede observar en la figura 9, la función de transferencia para un sistema de 1 g.d.l:

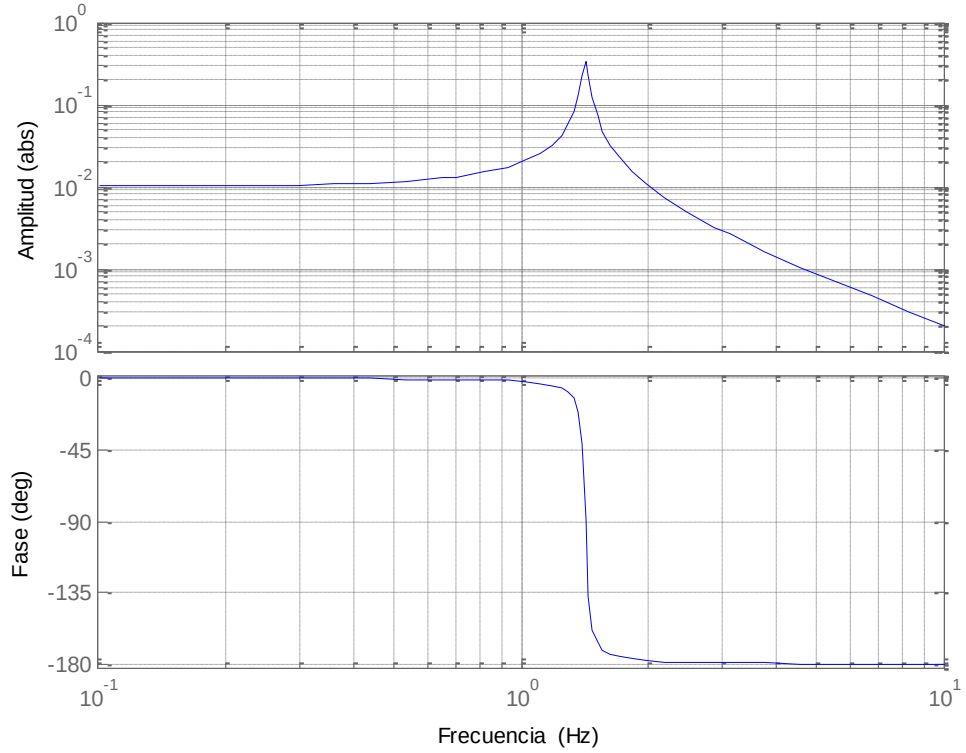


Ilustración 9: Función de transferencia de un grado de libertad

En la figura (9), se observa que el pico de la FRF se obtiene cuando $\omega=\omega_d$, a esta misma frecuencia la fase cambia en -180º.

2.2.1.3 POLOS Y RESIDUOS DEL SISTEMA

Las raíces presentadas en la ecuación (2.2), se pueden escribir como dos raíces complejas conjugadas, ecuación (2.53):

$$\lambda = \sigma + j\omega_d \tag{2.53}$$

$$\lambda^* = \sigma - j\omega_d \tag{2.54}$$

donde:

- σ es el factor de amortiguamiento,
- ω_d es la frecuencia natural del sistema amortiguado
- representa el complejo conjugado

A partir de aquí se pueden definir las siguientes relaciones (2.55), (2.56), (2.57) y (2.58):

$$\omega_n = \sqrt{\omega_d + \sigma^2} \tag{2.55}$$

$$\xi = -\frac{\sigma}{\sqrt{\omega_n^2 + \sigma^2}} \tag{2.56}$$

$$\sigma = -\xi \cdot \omega_n \tag{2.57}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \tag{2.58}$$

2.2.1.3.2 RESIDUOS

Conociendo las raíces de la ecuación, se puede escribir como la ecuación (2.59):

$$H(p) = \frac{1/m}{(p - \lambda) \cdot (p - \lambda^*)} \tag{2.59}$$

Ocupando fracciones parciales se tiene la ecuación (2.60):

$$H(p) = \frac{A}{(p - \lambda)} + \frac{A^*}{(p - \lambda^*)} \tag{2.60}$$

Siendo

$$A = \frac{1/m}{2j\omega} \qquad (2.61)$$

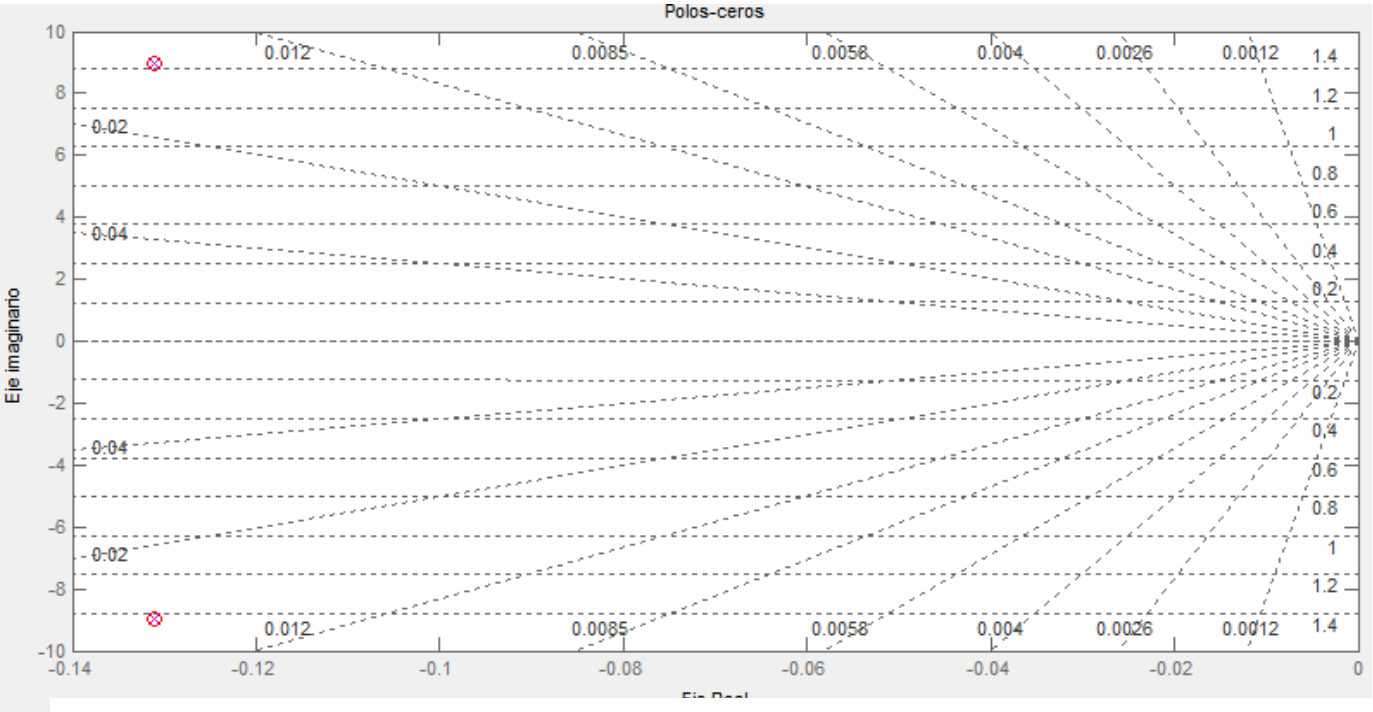


Ilustración 10: Polos y ceros para un sistema de 1 g.d.l.

En la ilustración (10), se puede apreciar el mapa de polos y ceros para un sistema de 1 g.d.l. en el lado derecho de la imagen se observan las frecuencias en Hz, coincidiendo el polo y el ceros del sistema con la frecuencia de 1.42 Hz.

2.2.2 RELACIÓN ENTRE LA FUNCIÓN DE RESPUESTA EN FRECUENCIAS Y LA FUNCIÓN DE RESPUESTA ANTE UN IMPULSO UNIDAD

En secciones anteriores se discute la relación entre la fuerza y la respuesta de un sistema de 1 g.d.l. en el dominio de Laplace. Esta relación también puede expresar en el dominio de frecuencias o en el tiempo.

La función de transferencia evaluada en el eje de frecuencias (jω) se denomina función respuesta en frecuencias (FRF) y viene dado por la ecuación(2.62):

$$H(p)_{p=j\omega} = H(\omega) = \frac{A}{(j\omega - \lambda)} + \frac{A^*}{(j\omega - \lambda^*)} \tag{2.62}$$

En general, la parte del complejo conjugado (p parte de frecuencia negativa) es despreciable cerca de la resonancia ω_d=ω, en consecuencia para función respuesta en frecuencia para 1 g.d.l. se aproxima a (ver ecuaciones (2.63) y (2.64)):

$$H(p)_{p=j\omega} = H(\omega) = \frac{A}{(j\omega - \lambda)} + \frac{A^*}{(j\omega - \lambda^*)} \tag{2.63}$$

$$H(\omega) \sim \frac{A}{(j\omega - \lambda)} \tag{2.64}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la expresión de función de transferencia se obtiene la función respuesta a un impulso. La respuesta a un impulso de un sistema corresponde a la respuesta de un delta de Dirac en t=0.

Para 1 g.d.l. la función de respuesta a un impulso es (ver ecuación (2.65)):

$$h(t) = e^{\sigma t}(Ae^{i\omega_d t} + A^* e^{-i\omega_d t}) \tag{2.65}$$

donde:

- A= amplitud inicial
- σ= tasa de decrecimiento
- ω_d=frecuencia de oscilación

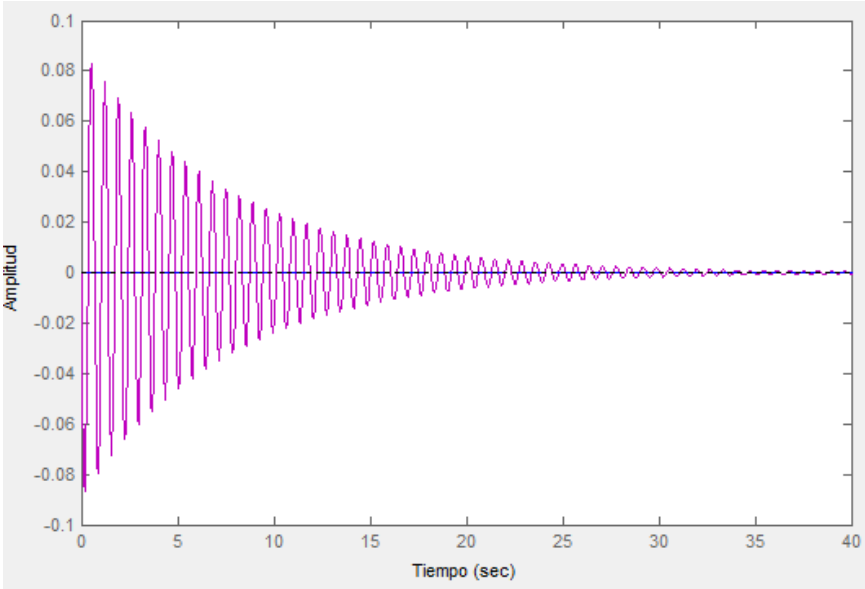


Ilustración 11: Respuesta ante un impulso de un sistema de 1 g.d.l.

En la figura (11) se puede apreciar la respuesta ante una excitación impulso de un sistema de 1 g.d.l. se caracteriza por el comportamiento dinámico del sistema.

2.3 SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

Los modelos anteriores estaban restringidos a un único grado de libertad, lo que sólo les permitía el movimiento en una dirección. Las estructuras reales poseen numerosos puntos que pueden moverse independientemente y con varios grados de libertad.

En este punto, vamos a ver los conceptos vistos en el punto anterior pero con múltiples grados de libertad.

2.3.1 CONFIGURACIÓN

En el caso de un sistema con más de un grado de libertad, la ecuación del movimiento equivale a la ecuación de 1 g.d.l., pero en forma matricial.

En el siguiente caso de 2 g.d.l:

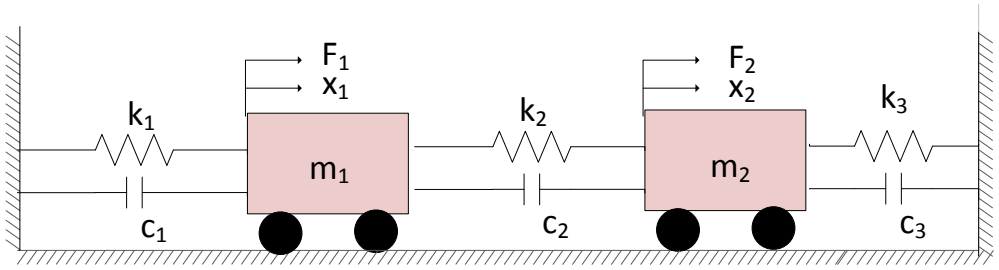


Ilustración 12: caso de 2.g.d.l.

Las ecuaciones de movimiento para este sistema son (ver ecuaciones (2.66) y (2.67)):

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1 \tag{2.66}$$

$$m_2\ddot{x}_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (k_3 + k_2)x_2 - k_2x_1 = f_2 \tag{2.67}$$

En notación matricial (ver ecuación (2.68)):

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 \\ -c_2 & (c_1 + c_3) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_1 + k_3) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ fp_2 \end{Bmatrix} \tag{2.68}$$

Se puede reducir la expresión, escribiéndola como en la ecuación (2.69):

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = \{f\} \tag{2.69}$$

donde

- M: matriz masa
- K: matriz de rigidez
- C: matriz de amortiguación
- $\{x\}$: vector respuesta
- $\{f\}$: vector fuerzas

Hay que tener en cuenta que la dimensión de las matrices aumentará con los grados de libertad.

2.3.2 VIBRACIONES NO AMORTIGUADAS. MODOS Y FRECUENCIAS PROPIAS

En el caso de N g.d.l. , los vectores propios introducen el concepto de vectores modales, ϕ. Estos, también aparecen en pares conjugados complejos. A cada vector propio se le relaciona un valor propio específico.

En general, para cada valor propio λ, se cumple la ecuación (2.70):

$$\left(M\lambda_i^2 + C\lambda_i + K\right)\phi_i = 0 \tag{2.70}$$

De manera similar al caso de 1 g.d.l., dado que λ_i y λ_i^*, son raíces de la ecuación característica del sistema, la ecuación se puede escribir como (ver ecuación (2.71)):

$$H(p) = \frac{adj(Z(q))}{\prod_{i=1}^{n} E(p-\lambda_i)(p-\lambda_i^*)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{[A]_i}{(p-\lambda_i)} + \frac{[A]_i^*}{\left(p-\lambda_i^*\right)}\right) \tag{2.71}$$

donde:

- E es una constante
- $[A]_i^*$ y $[A]_i$ se denominan residuos, donde
- $[A]_i = P_i adj(Z(\lambda_i))$
- Q_i es una constante que depende del polo.

Estudiando estos residuos, se logra establecer la relación entre la matriz función de transferencia y los vectores modales (ver ecuación (2.72))

$$Z(p)adj\big(Z(p)\big) = |Z(p)|[I], \underset{q=\lambda_i}{\Longrightarrow} Z(\lambda_i)adj\big(Z(\lambda_i)\big) = 0 \tag{2.72}$$

Si consideramos una columna arbitraria de $adj\big(Z(\lambda_i)\big)$ se cumple la ecuación (2.72):

$$Z(\lambda_i)\{adj\big(Z(\lambda_i)\big)\}_k = 0 \tag{2.73}$$

Esta ecuación quiere decir que las columnas de $adj\left(Z(\lambda_i)\right)$ son proporcionales al i-ésimo vector modal. Considerando que la matriz $adj\left(Z(\lambda_i)\right)$ es simétrica, entonces sus filas también son proporcionales al i-ésimo vector modal (ver ecuación (2.75)):

$$adj\left(Z(\lambda_i)\right) = R_i \Phi_i \Phi_i^T \tag{2.74}$$

Donde R_i es una constante asociada al vector Φ_i

A partir de aquí, se obtiene que cada residuo tiene la forma (ver ecuación (2.75)):

$$[A]_i = Q_i \Phi_i \Phi_i^T \tag{2.75}$$

Y se obtiene finalmente, la función de transferencia, (ver ecuación (2.75)):

$$H(p) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Q_i \Phi_i \Phi_i^T}{(p - \lambda_i)} + \frac{Q_i^* \Phi_i^* \Phi_i^{*T}}{\left(p - \lambda_i^*\right)} \right) \tag{2.76}$$

A continuación se puede ser la figuras (13) y (14) , en la que se muestra la función de transferencia, HH(1,1) y HH(1,2) respectivamente.Se trata de un caso de 2 g.d.l, donde se pueden apreciar dos frecuencias de resonancia (2 picos). En la figura(14), correspondiente a HH(1,2) se pueden observar los mismos picos de resonancia, se trata de la función de tranasferencia cruzada. Esto sucede porque los polos de HH son las raíces del determinante de m*s^2+c*s+k (2 pares de raices complejas conjugadas, por tanto dos frecuencias naturales).

Mientras que en la figura (15) se pueden observar los polos y los ceros del sistema de 2 g.d.l., correspondientes a los picos de la gráfica de HH(1,1) y HH(1,2).

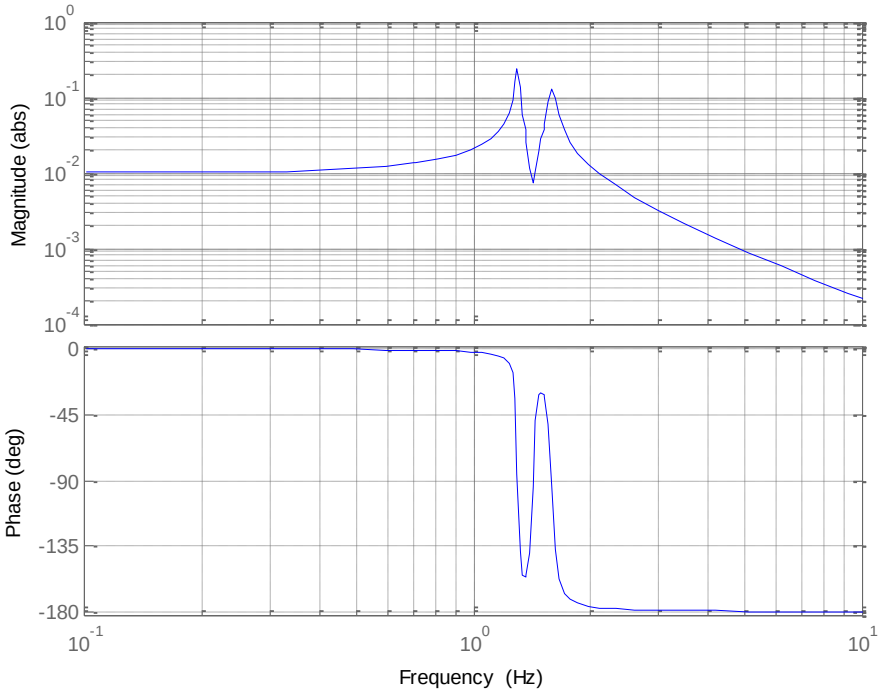


Ilustración 13: Función de transferencia H(1,1) o H(2,2)

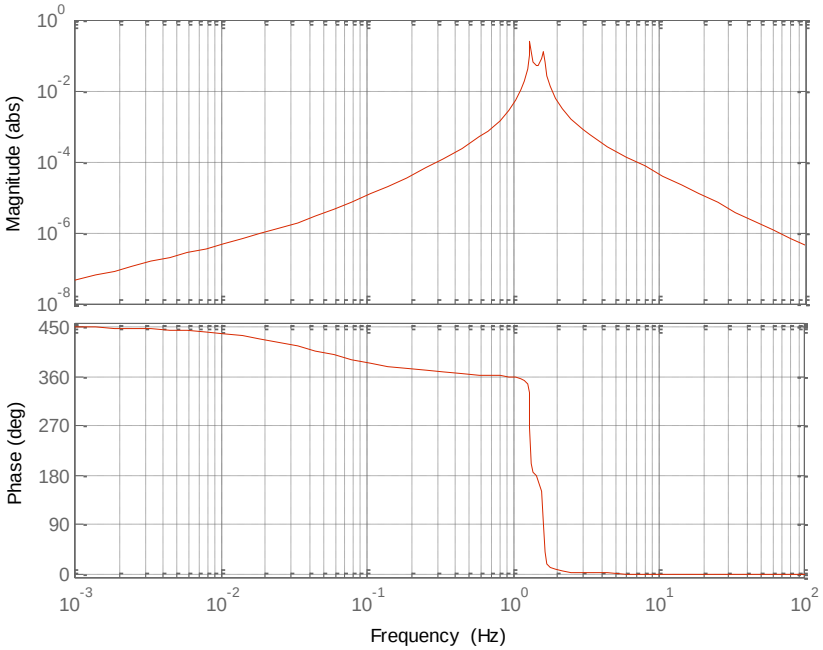


Ilustración 14:Función de transferencia cruzada H(1,2) o H(2,1)

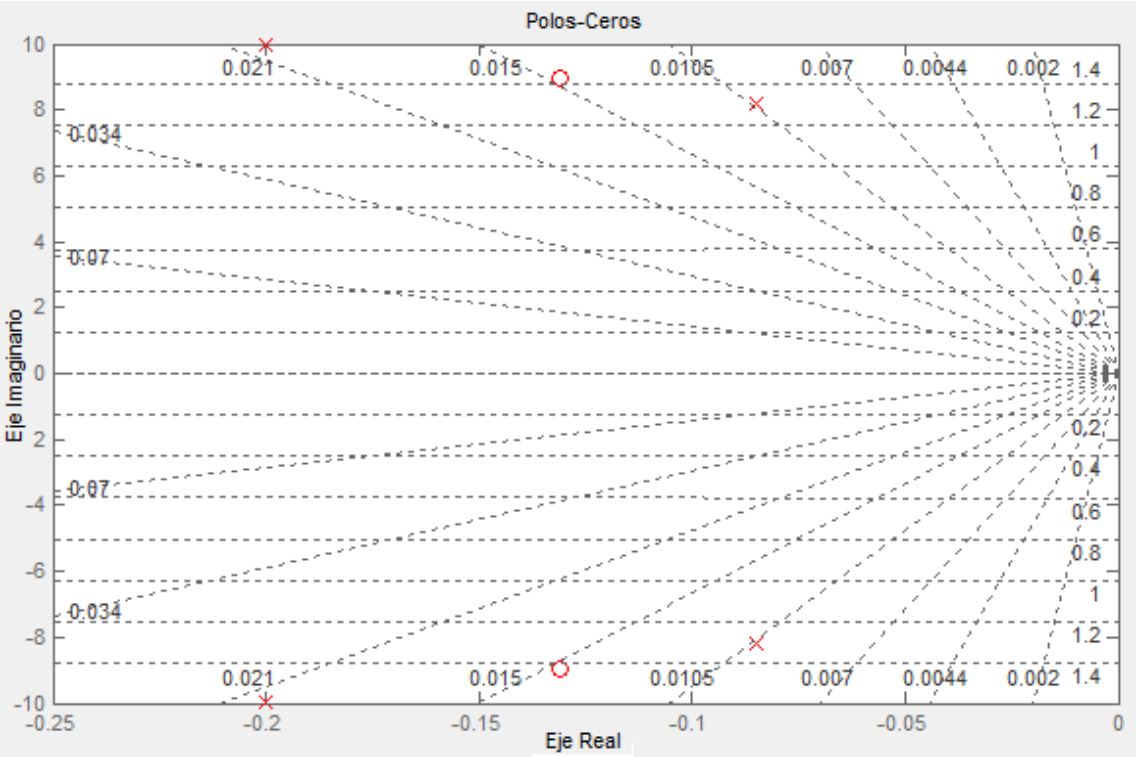


Ilustración 15: Diagrama de ceros y polos del sistema de 2 g.d.l.

2.3.3 VIBRACIONES AMORTIGUADAS. AMORTIGUAMIENTO PROPIO Y FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA

La ecuación del sistema viene dada por el determinante de Z(ω). Al igual que en el caso de 1.g.d.l, las raíces de esta ecuación o polos del sistema, definen las frecuencias naturales. Estas raíces pueden determinarse resolviendo un problema de valores propios:

Se tiene de la ecuación (2.69) despejando nos quedaría la ecuación característica siguiente (ver ecuaciones (2.77) y (2.78)):

$$(Mp^2 + Cp + K)X(p) = f(p) \tag{2.77}$$

$$(Mp - Mp)\{x\} = 0 \tag{2.78}$$

Combinando ambas ecuaciones anteriores, llegamos a la ecuación (2.79) :

$$(Aq + B)\{y\} = \{f'\} \tag{2.79}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}, \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} px \\ x \end{Bmatrix} \quad y \quad \{f'\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f \end{Bmatrix} \tag{2.80}$$

Por tanto, los polos son los valores de q que satisfacen la ecuación (2.81):

$$|pA + b| = 0 \tag{2.81}$$

Como en el caso de 1 g.d.l. la parte real del polo σ, es el factor de amortiguamiento y la parte imaginaria ω_d, es la frecuencia natural amortiguada.

2.3.4 ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

En el caso general de sistemas con N gdl, el sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento que hay integrar se reduce a la ecuación (2.69).

Análogamente a como se planteó el problema de vibraciones forzadas en sistemas de 1 g.d.l, supóngase una excitación armónica en la forma (ver ecuación (2.82)):

$$\{F(t)\} = \{F_o\} * e^{i\omega t} \tag{2.82}$$

Se van a buscar soluciones armónicas estacionarias en la forma (ver ecuación (2.82)):

$$\{x(t)\} = \{X_0\} * e^{i\omega t} \tag{2.83}$$

Introduciendo estas expresiones resulta(ver ecuación (2.82)):

$$(-\omega^2 * [M] + i * \omega * [C] + [K]) * \{X\} * e^{i\omega t} = \{F_0\} * e^{i\omega t} \tag{2.84}$$

Llamando matriz de rigidez dinámica a la ecuación (2.82):

$$Z(\omega) = (-\omega^2 * [M] + i * \omega * [C] + [K]) \tag{2.85}$$

y definiendo su inversa [H(ω)]=[Z(ω)]$^{-1}$,la solución de la ecuación diferencial será (ver ecuación (2.86)):

$$\{x(t)\} = \{X\} * e^{i\omega t} = [H(\omega)] * \{p_0\} * e^{i\omega t} \qquad (2.86)$$

La matriz [H(ω)] juega en los sistemas con N g.d.l el mismo papel que la función de transferencia jugaba en los sistemas con 1 grado de libertad. Por esto, a dicha matriz se le llama matriz de transferencia: la respuesta de un sistema con N grados de libertad ante una excitación armónica se obtiene multiplicando el vector de amplitudes de las fuerzas excitadoras por la matriz de transferencia [H(ω)].

2.3.5 FUNCIÓN RESPUESTA EN FRECUENCIA (FRF) Y RESPUESTA A UN IMPULSO

La función de transferencia es la función de respuesta en frecuencia evaluada en el eje de frecuencias, ver ecuación (2.75):

$$H(jw) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Q_i \Phi_i \Phi_i^T}{(j\omega - \lambda_i)} + \frac{Q_i^* \Phi_i^* \Phi_i^{*T}}{(j\omega - \lambda_i^*)} \right) \tag{2.87}$$

La función de respuesta impulso (IRF) viene dada por la transformada inversa de la función de respuesta en frecuencia (ver ecuación (2.75)):

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(Q_r \Phi_r \Phi_r^T e^{\lambda_r t} + Q_r^* \Phi_r^* \Phi_r^{*T} e^{\lambda^* r t} \right) \tag{2.88}$$

En el caso de más de un grado de libertad, para cada valor de ω, H(jω) es una matriz $H_{ik}(j\omega)$ corresponde a función de respuesta frecuencia, cuando se excita la estructura k y se mide la respuesta en i, o viceversa (H(jω) es simétrica, ver ecuación (2.75)):

$$H_{ik}(j\omega) = H_{ki}(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Fk} \tag{2.89}$$

. Los máximos (peaks) de las curvas se corresponden con las frecuencias de resonancia, tienen el mismo valor para todas las FRF, ya que son propiedades globales de la estructura. A diferencia de las antiresonancias (donde se decrece), varían para cada FRF ya que son propiedades locales de la estructura.

La función respuesta en frecuencia como es de suponer, posee valores complejos. La figura (16) muestra la respuesta ante una excitación impulso de un sistema de 2 g.d.l.

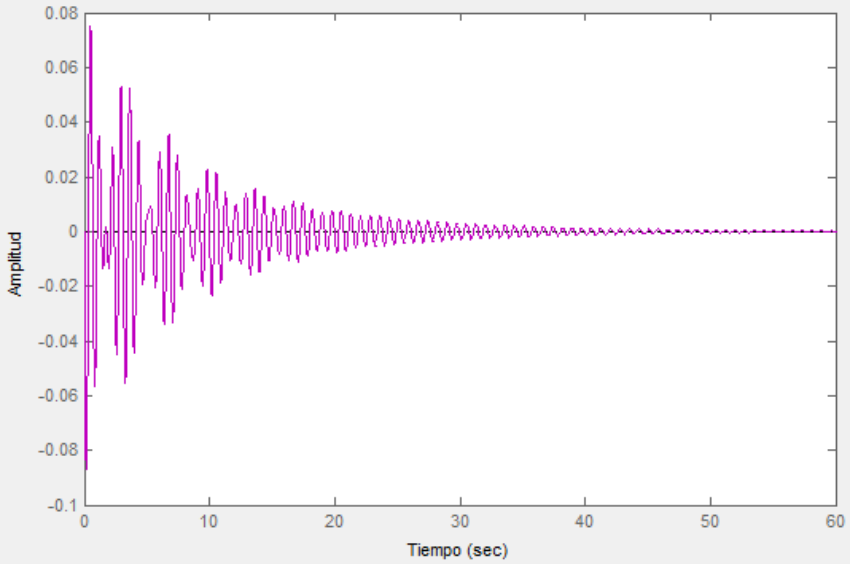


Ilustración 16: Función respuesta ante un impulso de un sistema de 2 g.d.l.

2.3.6 AMORTIGUAMIENTO PROPORCIONAL

El caso de amortiguamiento proporcional es una forma hipotética de amortiguamiento. En su forma más sencilla, la matriz C, toma la forma de la ecuación (2.90):

$$C = \alpha M + \beta K \tag{2.90}$$

donde

- α y β Son constantes reales

En este caso el sistema de ecuaciones son, ver ecuaciones (2.91) y (2.92):

$$(p^2 M + p(\alpha M + \beta K) + K) \cdot \{x\} = \{f\} \tag{2.91}$$

$$\big((p^2 + p\alpha)M + (p\beta + 1)K\big) \cdot \{x\} = \{f\} \tag{2.92}$$

Esta ecuación es similar al caso de sin amortiguamiento. Los sistemas con amortiguamiento proporcional tienen polos complejos, λ_i, que cumplen la ecuación (2.93):

$$\frac{\lambda_i^2 + \alpha\lambda_i}{\beta\lambda_i + 1} = -\omega_i \tag{2.93}$$

Y modos normales, iguales a los del caso sin amortiguamiento. La complejidad de los cálculos para el caso de amortiguamiento proporcional es menor al caso de amortiguamiento general. El amortiguamiento proporcional entrega un intermedio entre el caso sin amortiguamiento y el caso de amortiguamiento viscoso general, ver ecuación (2.93):

$$H(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} 2j\omega_i \, Q_i \Phi_i \Phi_i^T \cdot \frac{1}{\big(\sigma_i^2 + \omega_i^2 - \omega^2\big) - 2j\omega\sigma_i} \tag{2.94}$$

2.4 ANÁLISIS MODAL

Es el proceso de determinación de las características dinámicas inherentes a un sistema mecánico y necesario para la posterior formulación de un modelo matemático del comportamiento dinámico de dicho sistema.

Esta modelización dinámica se lleva a cabo en base a los parámetros modales (frecuencias naturales, modos naturales de vibración y relaciones de amortiguamiento) propios del sistema, y que dependen de la distribución de sus características de masa, rigidez y amortiguamiento.

El grado de participación de cada modo natural de vibración es determinado por las propiedades de excitación y por las formas modales del sistema.

2.4.1 DESACOPLAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y SUPERPOSICIÓN MODAL

En los métodos de integración directa se deben realizar muchas operaciones en cada paso de tiempo. Si se debe integrar en un número alto de pasos en el tiempo, puede ser mas convenientes transformar las ecuaciones de movimiento en una forma que requiera de menos operaciones para cada paso de tiempo.

Aprovechando las propiedades ortogonales de los modos propios se puede definir la transformación (ver ecuaciones (2.97)):

$$x(t) = \phi y(t) \tag{2.95}$$

donde la pieza oscila de acuerdo con la función armónica y(t) siguiendo una determinada configuración ϕ

Se obtiene la siguiente ecuación de movimiento (ver ecuaciones (2.97)):

$$\phi^T M\phi\ddot{y} + \phi^T C\phi\dot{y} + \phi^T K\phi y = \phi^T F \tag{2.96}$$

Las matrices $\phi^T M\phi$, $\phi^T C\phi$ y $\phi^T K\phi$ son matrices diagonales, por lo que el sistema de ecuaciones anterior es un sistema desacoplado. En consecuencia, se tienen n ecuaciones individuales de la forma (ver ecuaciones (2.97) y (2.98)):

$$m_i\ddot{y}_i + c_i\dot{y}_i + k_i y_i = r_i \tag{2.97}$$

$$r_i = \phi_i^T F(t) \tag{2.98}$$

donde

$$i = 1,2,3 \dots n$$

La solución para cada una de las ecuaciones se puede obtener utilizando los algoritmos de integración directa como:

- Método de diferencias centrales
- Método de Wilson
- Método de Newmark

Una vez calculada la solución para cada una de las ecuaciones. La solución general se obtiene al superponer las soluciones modales (ver ecuación (2.99)):

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i y_i(t) \qquad (2.99)$$

2.5 RESPUESTA DE ESTRUCTURAS SOMETIDAS A ACCIONES ALEATORIAS ESTACIONARIAS

En general las señales estacionarias son aquellas cuyas propiedades promedio no varían con el tiempo, pueden ser deterministicas o aleatorias.

2.5.1 PROCESOS ESTACIONARIOS Y ERGONÓMICOS

Considerando un proceso aleatorio:

$$x_r(t) = Asen(\bar{\omega}_0 t + \theta_r) \qquad r = 1,2, \dots, \infty \qquad (2.100)$$

Donde

- X_r rth miembro del grupo
- A amplitud fija para esa forma de onda harmónica
- $\bar{\omega}_0$ Frecuencia circular fija
- θ_r rth valor de de una fase aleatoria que tiene un ángulo θ con una función de probabilidad de densidad uniforme en el rango $0 < \theta < 2\pi$ con una intensidad de $1/2\pi$

Este proceso demuestra que la forma de la onda debe ser irregular, esto quiere decir, que contendrá muchas componentes de frecuencias, clasificado como un proceso aleatorio.

Para establecer la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria $x_1(t) \equiv x(t_1)$ se realiza la siguiente trasformación:

$$p(x_1) = 2p(\theta)\frac{d\theta}{dx_1} \tag{2.101}$$

Donde la variable aleatoria θ , puede cambiar en todo su rango $0 < \theta < 2\pi$, la variable aleatoria x_1 cambiará cada dos veces sobre el rango $-A < x_1 < A$, esto explica porqué aparece el factor 2 en la formula. Sustituyendo en la ecuación (2.101)

$$p(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi & 0 < \theta < 2\pi \\ 0 & \theta < 0; 0 > 2\pi \end{cases} \tag{2.102}$$

Utilizando esto en la función de densidad de probabilidad p(x1), quedaría como la ecuación (2.103):

$$p(x_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x_1^2}} & -A < \theta < A \\ 0 & x_1 < -A; x_1 > A \end{cases} \tag{2.103}$$

2.5.2 FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN PARA PROCESOS ESTACIONARIOS

Considerando de nuevo un proceso aleatorio, tal como el de la ecuación (2.100), la función covarianza $E[x(t)x(t+\tau)]$ en este caso, será independiente del tiempo t, y solamente dependerá de τ. Esto define la función de autocorrelacion de la siguiente manera (ver ecuación (2.104)):

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \tag{2.104}$$

La correlación indica la fuerza y la dirección de una relación lineal entre dos variables aleatorias. Se considera que dos variables cuantitativas están correlacionadas cuando los valores de una de ellas varían sistemáticamente con respecto a los valores homónimos de la otra: si tenemos dos variables (A y B) existe correlación si al aumentar los valores de A lo hacen también los de B y viceversa.

Algunas propiedades importantes de ésta función son:

$$R_x(0) = \sigma_x^2$$

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$$

De esta manera, un proceso aleatorio de tiempo continuo *x*(*t*) que sea estacionario en sentido amplio tiene las siguientes restricciones sobre su función media (2.105):

$$E\{x(t)\} = \mu_x(t) = \mu_x(t+\tau) \qquad \forall\tau \in R \tag{2.105}$$

y función de correlación (2.110):

$$E\{x(t_1)\,x(t_2)\} = S_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 + \tau, t_2 + \tau) \\ = R_x(t_1 - t_2, 0) \qquad \forall \tau \in R \qquad (2.106)$$

La primera propiedad implica que su función media $\mu_x(t)$ debe ser constante. Las segunda propiedad implica que la función de correlación depende solo de la diferencia entre t_1 y t_2, y sólo necesita ser indexada por una única variable en lugar de dos.

Así, en lugar de escribir:

$$R_x(t_1 - t_2, 0) \qquad (2.107)$$

normalmente se abrevia notando de la siguiente manera:

$$R_x(\tau) \quad con \quad \tau = (t_1 - t_2) \qquad (2.108)$$

2.5.3 FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA PARA PROCESOS ESTACIONARIOS (POWER SPECTRAL DENSITY FUNCTION)

Tal como se indica en [5], cualquier forma de onda $x_r(t)$ obtenida de un proceso estacionario aleatorio real que tenga como media 0, es decir, E[x(t)]=0, puede ser separada en sus componentes de frecuencia utilizando el análisis estándar de Fourier. Si esta onda, está representada en un intervalo finito -s/2<t<+s/2, la representación de las series de Fourier pueden ser usadas como en la ecuación (2.109):

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{nr} e^{in\hat{\omega}_0 t} \qquad (2.109)$$

donde

$$C_{nr} = \frac{1}{s} \int_{-s/2}^{s/2} x_r(t) e^{in\hat{\omega}_0 t}\, dt \qquad (2.110)$$

$$\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi}{s}$$

$x_r(t)$ es periódica. La ecuación (2.109) muestra una representación de la forma de onda completa siempre y cuando el intervalo de integración s sea escogido como un periodo completo. Este tipo de formas de ondas consisten en harmónicos discretos que tienen frecuencias circulares $\hat{\omega}_0, 2\hat{\omega}_0, 3\hat{\omega}_0, \ldots$, con sus correspondientes amplitudes finitas $A_{1r} = 2|C_{1r}|$, $A_{2r} = 2|C_{2r}|, A_{3r} = 2|C_{3r}|, \ldots$, siempre, las correspondientes componentes de frecuencia positiva y negativa combinadas

Normalmente los casos más interesantes de procesos estacionarios aleatorios son los de valor eficaz de $x_r(t)$ en el intervalo –s/2<t<s/2., que pueden ser obtenidos sustituyenfo en la ecuación (2.109) llegamos a la ecuación (2.111):

$$\langle x_r(t)^2 \rangle = \frac{1}{s}\int_{-s/2}^{s/2} x_r(t)^2\, dt \tag{2.111}$$

Para obtener la ecuación (2.112)

$$\langle x_r(t)^2 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_{nr}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{nr}^2}{2} \tag{2.112}$$

$\Delta\bar{\omega}$ representa la frecuencia de harmónicos discretos

$$\Delta\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 = \frac{2\pi}{s}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.103) la (2.101) se llega a la (2.113)

$$\langle x_r(t)^2 \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\left|\frac{1}{s}\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} x_r(t)e^{in\hat{\omega}_0 t}\, dt\right|^2}{2\pi s}\Delta\bar{\omega} \tag{2.113}$$

Si aproximamos $\Delta\bar{\omega}\ a\ d\bar{\omega}, n\hat{\omega}_0\ a\ \hat{\omega}$, la sumatoria se convierte en una integral

$$\langle x_r(t)^2 \rangle = \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{\infty} S_{x_r}(\bar{\omega})\, d\bar{\omega} \tag{2.114}$$

donde la función

$$S_{x_r}(\bar{\omega}) = \lim_{s\to\infty} \frac{\left|\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} x_r(t)e^{in\bar{\omega}t}\, dt\right|^2}{2\pi s} \tag{2.115}$$

Definido como la función de densidad espectral de potencia (PSD, siglas en inglés de *power spectral density*) de una forma de onda $x_r(t)$ siempre que tenga un limite existente. De acuerdo con esta definición, la función de potencia de densidad espectral será siempre una función si $x_r(t)$ es una función real, y es positiva y finita para todos los valores de $\bar{\omega}$, y los rendimientos de la media de los cuadrados de $x_r(t)$ en la integral sobre el intervalo $-\infty < \bar{\omega} < +\infty$.

La función de densidad espectral de potencia de un proceso estacionario completo x(t) es la obtenida con un promedio sencillo de las funciones de potencia de densidad espectral de todas las partes individuales del conjunto, de la siguiente forma (ver ecuación (2.116)):

$$S_{x_r}(\bar{\omega}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} S_{x_r}(\bar{\omega}) \tag{2.116}$$

Dicho promedio se obtiene integrando la $S_{x_r}(\bar{\omega})$ en el intervalo $-\infty < \bar{\omega} < +\infty$.

En un proceso estacionario ergódico, existe una relación estrecha entre la función de autocorrelación y la de densidad espectral de potencia a través de la transformada de Fourier (ver ecuaciones (2.117) y (2.118)):

$$S_x(\bar{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\bar{\omega}t}\, d\tau \tag{2.117}$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\tau) e^{i\bar{\omega}t}\, d\bar{\omega} \tag{2.118}$$

Con lo que se puede deducir que, la función de densidad espectral de potencia puede ser calculada a partir de la transformación de Fourier de la función de autocorrelación.

2.5.4 RESPUESTA ESTRUCTURAL DE RUIDO BLANCO ESTACIONARIO

El ruido blanco es una señal aleatoria (proceso estocástico) que se caracteriza por el hecho de que sus valores de señal en dos tiempos diferentes no guardan correlación estadística. Como consecuencia de ello, su densidad espectral de potencia es una constante, es decir, su gráfica es plana. Esto significa que la señal contiene todas las frecuencias y todas ellas muestran la misma potencia. Igual fenómeno ocurre con la luz blanca, de allí la denominación.

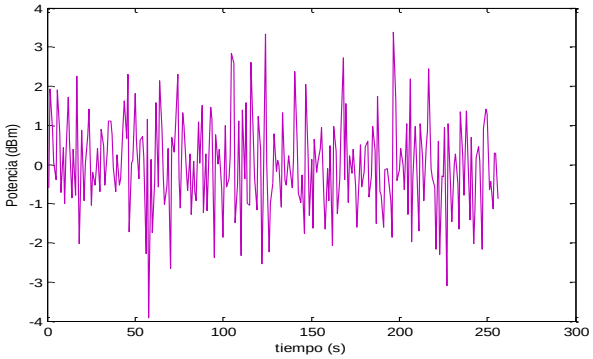


Ilustración 17: Ruido blanco

Si la PSD no es plana, entonces se dice que el ruido está "coloreado" (correlacionado). Según la forma que tenga la gráfica de la PSD del ruido, se definen diferentes colores.

Considerando un proceso estacionario aleatorio como en [5]:

$$x_r = \lim_{n\to\infty} a_{kr}\eta(t - k\,\Delta t - \varepsilon_r) \qquad r = 1,2,\ldots \tag{2.119}$$

donde:

- a_{kr} : Coeficientes independientes aleatorios, con una media de 0, con una probabilidad arbitraria.
- Δt: Intervalo constante de tiempo
- ε_r: Variables estadísticamente con una fase independiente, que tienes una función de densidad de probabilidad uniforme

La función de densidad espectral de x_r queda de la siguiente forma:

$$S_{x_r}(\hat{\omega}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|Q_{x_r}(i\bar{\omega})\right|^2}{4\pi N\Delta t} \tag{2.120}$$

donde

$$Q_{x_r}(i\bar{\omega}) = \int_{-N\,\Delta t+\varepsilon_r}^{N\,\Delta t+\varepsilon_r} \left[\sum_{k=-N}^{N-1} a_{kr}\eta(t - k\Delta t - \varepsilon_r)e^{-i\bar{\omega}t}dt \right] \qquad (2.121)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.108)

$$S_{x_r}(\hat{\omega}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left[\sum_{k=-N}^{N-1} a_{kr}\eta(t - k\Delta t - \varepsilon_r)e^{-i\bar{\omega}t}dt\right]\right|^2}{4\pi N\Delta t} \qquad (2.122)$$

Si el proceso es no ergódico y estacionario, siempre se calculará la función de densidad espectral de potencia.

3 CAPITULO III: ANÁLISIS MODAL OPERACIONAL MEDIANTE EL MÉTODO MEJORADO DE DESCOMPOSICIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA (EFDD)

El método mejorado de descomposición de frecuencia es mucho más fiable que los anteriormente mencionados. Ya que aparte de obtener las frecuencias naturales, también obtiene los modos propios y el coeficiente de amortiguamiento sin ningún problema.

El algoritmo desarrollado en el trabajo, el EFDD, básicamente engloba dos partes, la primera es la correspondiente a todo el proceso FDD, y la segunda se corresponde con la función de autocorrelación de los modos, es decir, una transformada inversa de Fourier de las campanas del sistema equivalente de un grado de libertad obtenidas anteriormente, para así estimar de forma más precisa las frecuencias naturales y los coeficientes de amortiguamiento.

Pero en primer lugar se va a explicar el método tradicional Peak Picking, ya que sirve de apoyo para la comprensión del método FDD [2].

3.1.1 PEAK PICKING

Se basa en que la función de respuesta en frecuencia alcanza valores extremos en torno a las frecuencias naturales. Dichas frecuencias se obtienen simplemente observando la gráfica de la función de densidad espectral promediada y normalizada.

Es una técnica que se desarrolla en el dominio de la frecuencia. Los algoritmos en el dominio de la frecuencia son más usados debido a su simplicidad y su velocidad de realización.

A pesar de que las fuerzas de entrada no se miden, esto se resuelve adoptando una técnica de identificación de parámetros modales derivada de la tradicional, en la que las funciones de respuesta en frecuencia y la función de coherencia se calculan para cada punto de medida con respecto a la medida de referencia. Por tanto, la señal del sensor de referencia se usa como entrada. Nótese que en el contexto de análisis modal operacional la función de transferencia no significa la relación entre la respuesta y la fuerza aplicada, sino que representa la relación entre la respuesta medida por un sensor cualquiera y el de referencia. Por lo que todas las funciones de transferencia están relacionadas en este tipo de análisis con la respuesta medida por el sensor de referencia.

Esto ayuda en la identificación de las resonancias. La función de coherencia para dos registros simultáneos de señales de respuesta tienen valores próximos a uno en las frecuencias de resonancia debido a la alta relación señal-ruido a estas frecuencias. Consecuentemente, la inspección de la función de coherencia puede ayudar a la elección de dichas frecuencias.

Las frecuencias naturales se determinan como los picos de la función densidad espectral promediada y normalizada. Esta función se obtiene básicamente convirtiendo las medidas de aceleraciones al dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier discreta

(DFT). La función de coherencia obtenida para dos registros simultáneos de las señales de salida tiene valores próximos a la unidad para las frecuencias naturales de la estructura. Este hecho ayuda a decidir qué frecuencias se consideran como naturales.

En la ilustración (20) se muestra la gráfica de la que este método obtiene las frecuencias naturales, que son los picos de dicha curva.

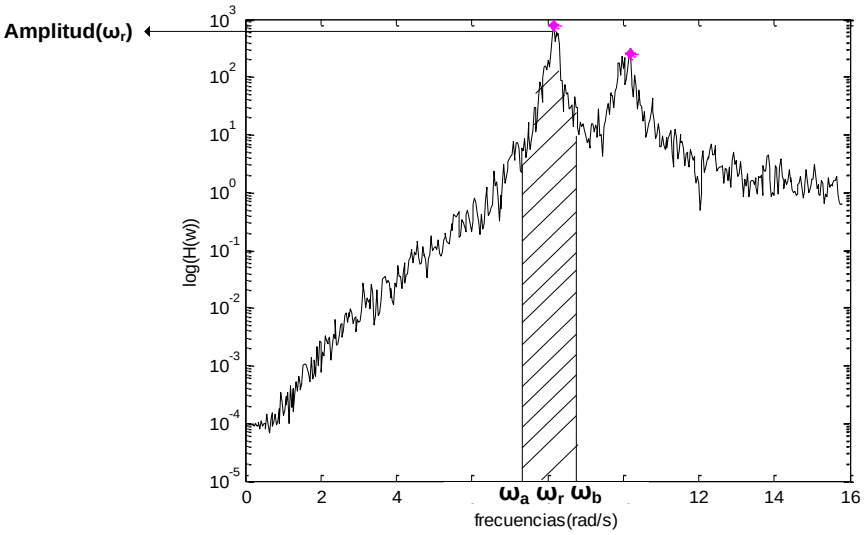


Ilustración 18: Método PP

Se hace la suposición de que la respuesta dinámica en los picos de resonancia viene determinada sólo por un modo. La validez de esta suposición aumenta cuanto más separados están los modos y menor es el amortiguamiento de la estructura.

Los errores cometidos dependen, entre otros factores, del amortiguamiento de la estructura, de la ventana que se emplee para realizar el análisis, del número de promedios que se realicen, del ancho del pico de la frecuencia en relación con la resolución utilizada y de la proximidad entre frecuencias naturales.

Algunos inconvenientes de este método son:

- Elegir las frecuencias naturales es una tarea subjetiva, especialmente si los picos no están demasiado claros.
- Al aumentar el amortiguamiento, los picos se desplazan de las frecuencias naturales.
- No se obtienen los modos de vibración, se calculan las formas de deformación que pueden servir como aproximación.
- Sólo los modos reales o las estructuras con amortiguamiento proporcional pueden ser calculadas por este método. no se emplea para las estimaciones de amortiguamientos, ya que no proporciona buenos valores.

A pesar de los inconvenientes, es un método muy fácil de implementar y los errores son relativamente pequeños para estructuras débilmente amortiguadas y con las frecuencias naturales bien separadas. Se recomienda hacer un análisis *Peak Picking* en el mismo sitio que se realizan las medidas para hacer un control de calidad de los datos que se han tomado y para juzgar de forma general las características dinámicas de la estructura. Y posteriormente en la oficina aplicar otro método más avanzado como el SSI o la Descomposición en el Dominio de la Frecuencia, para obtener los resultados con mayor detalle y corroborar los obtenidos con el método *Peak Picking*.

3.1.2 ALGORITMO DE IDENTIFICACIÓN DEL EFDD

El algoritmo de identificación se define mediante el siguiente diagrama:

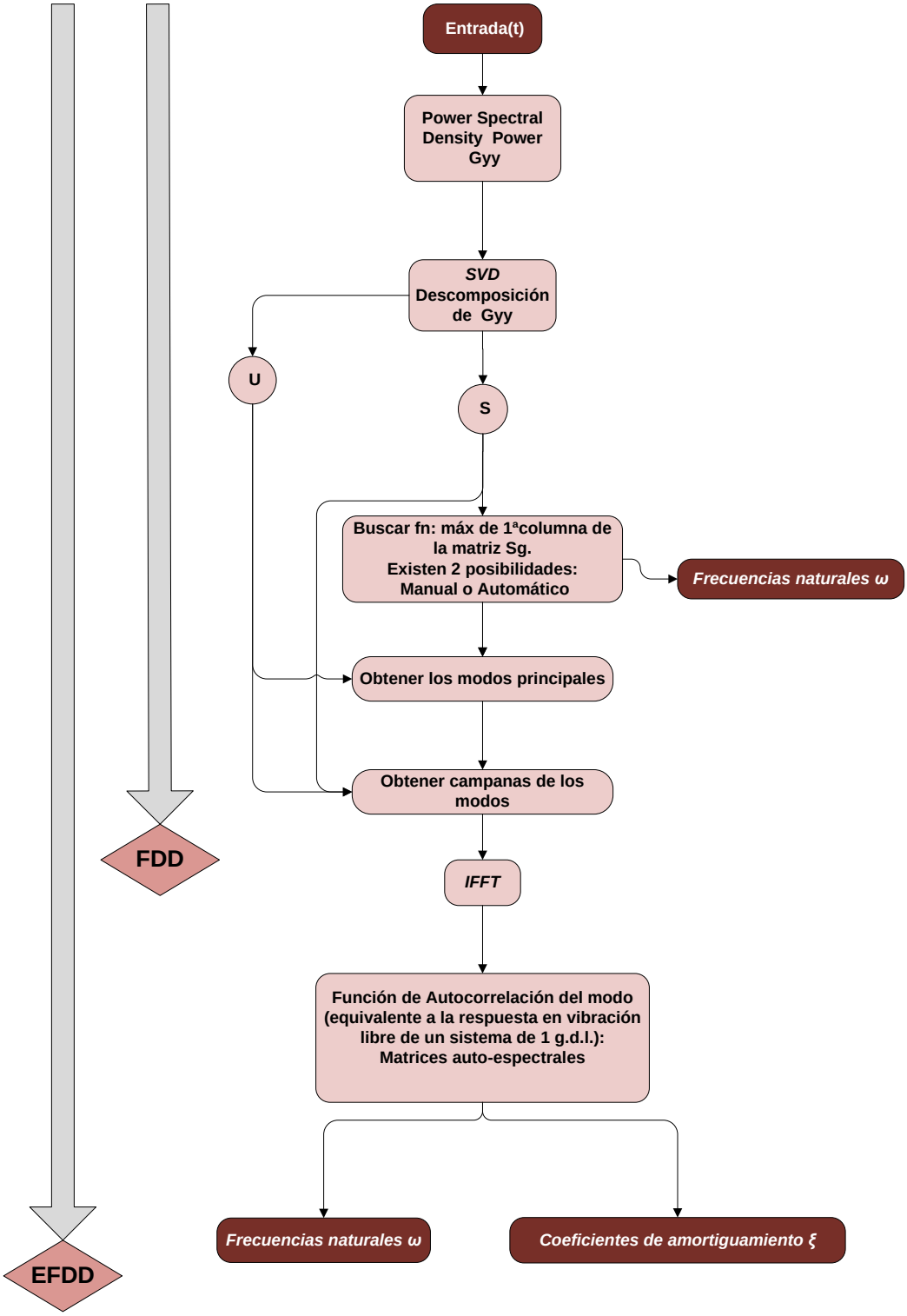


Ilustración 19: Algoritmo EFDD

3.1.2.1 DESCOMPOSICIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA (FDD)

La densidad espectral de potencia es en teoría, también usado con el nombre de la densidad espectral que se define en la ecuación siguiente:

$$G_{yi,xj}(\tau) = \left(y_i(\omega)\, y_j(\omega)^*\right),$$
$$y_i(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} y_i(t)\, e^{-i\omega t} dt \qquad (3.1)$$

donde

- $\mathrm{y}(\omega)$ es la transformada de Fourier del tiempo de respuesta $\mathrm{y}(t)$.
- $\mathrm{y}(\omega)^*$ Denota complejo conjugado.

En forma de matriz de la densidad espectral de potencia de la matriz $G_{yy}(\omega)$ viene dada por

$$G_{yy}(\omega) = y_i(\omega)\, y_j(\omega)^H \qquad (3.2)$$

donde

- H denota la transpuesta conjugada compleja.
- $y_i(\omega)$ es un vector m × 1, donde m es el número de canales de medición. Y es el vector respuesta a la transformada de Fourier.
- Los elementos de la diagonal de $G_{yy}(\omega)$ son estimaciones de las densidades espectrales. Mientras que los elementos fuera de la diagonal son estimaciones de la densidad espectral cruzada.

$$G_{yy}(\omega) = \begin{bmatrix} \hat{S}_{y1,y1}(\omega) & \hat{S}_{y1,y2}(\omega) & \dots & \hat{S}_{y1,ym}(\omega) \\ \hat{S}_{y2,y1}(\omega) & \hat{S}_{y2,y2}(\omega) & \dots & \hat{S}_{y2,ym}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{S}_{ym,y1}(\omega) & \hat{S}_{ym,y2}(\omega) & \dots & \hat{S}_{ym,ym}(\omega) \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

La relación entre las desconocidas entradas x(t) y las respuestas medidas y(t) también se puede expresar de la siguiente manera definiendo la matriz de densidad espectral:

$$G_{yy}(j\omega) = \bar{H}(j\omega)G_{xx}(j\omega)H(j\omega)^T \quad (3.4)$$

donde:

- $G_{xx}(j\omega)$ es la matriz (de orden *r* x *r*) de densidad espectral de la entrada
- *r* es el número de entradas
- $G_{yy}(j\omega)$ es la matriz (de orden *m* x *m*) de densidades espectrales de las salidas
- *m* es el número de salidas
- $H(j\omega)$ es la matriz (de orden *m* x *r*) conocida como función de respuesta en frecuencia
- los superíndices "$\bar{H}(j\omega)$" y "$H(j\omega)^T$" indican matriz compleja conjugada y matriz sólo transpuesta respectivamente.

Es conveniente recordar que las densidades espectrales representan como se distribuye la energía para todas las frecuencias.

Por ello, en primer lugar, se estima la matriz de densidades espectrales ($\hat{G}_{yy}$), mediante el método de Welch.

Una vez que se tienen los valores de $\hat{G}_{yy}(j\omega)$ para frecuencias discretas $w=w_i$ se descompone por medio de la Descomposición en Valores Singulares (SVD) (ver ecuación 3.5):

$$\hat{G}_{yy}(j\omega_i) = U_i S_i \bar{U}_i^T \quad (3.5)$$

donde:

- $U_i=[u_{i1},u_{i2},\ldots,u_{im}]$ *es una matriz que* contiene los vectores singulares
- S_i es una matriz diagonal que contiene los valores singulares.

Los valores singulares se interpretan como una combinación lineal de densidades autoespectrales de un conjunto de sistemas de un grado de libertad. La figura (24) se trata de un ejemplo de 2 grados de libertad (por ello posee dos picos), cerca del pico k_i , el modo k_i será el que predomine en la respuesta, obteniendo los modos de vibración a partir de los picos en la representación de los valores singulares (k_1 y k_2). El mayor valor singular representa la fuerza del modo de vibración dominante para cada frecuencia *i*. Los otros valores singulares contienen ruido u otros modos escondidos detrás del dominante.

Cerca del pico k_i sólo existirá un modo en el conjunto $Sub(\omega_i)$, el primer vector singular u_{i1} será una estimación del modo de vibración $\widehat{\Phi} = u_{i1}$, y el correspondiente valor singular será la función de densidad espectral del sistema representado en la figura (21). Los vectores singulares contienen las distintas maneras de las que se deforma la estructura.

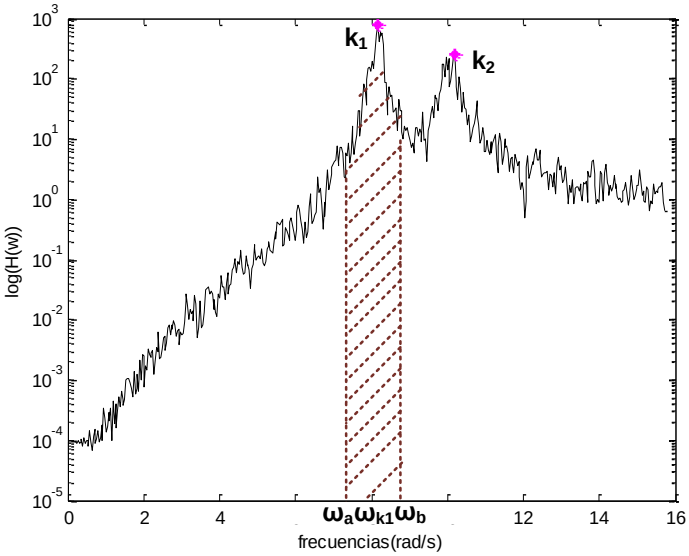


Ilustración 20: Conjunto Sub(ω)

Una ventaja de este modo es que se pueden identificar fácilmente modos de vibración muy próximos, examinando no sólo el mayor valor singular, sino también los siguientes. Una vez que se ha identificado el modo de vibración se ajusta la curva alrededor del pico seleccionado para obtener la frecuencia natural, tal como se realiza en el método PP.

De esta manera se intenta aislar la respuesta de un modo determinado. Por ejemplo en el caso de un sistema de un solo grado de libertad, la función de transferencia sería la de la figura (22). Lo importante de dicha función respecto a la respuesta en vibración libre es el entorno a la frecuencia natural.

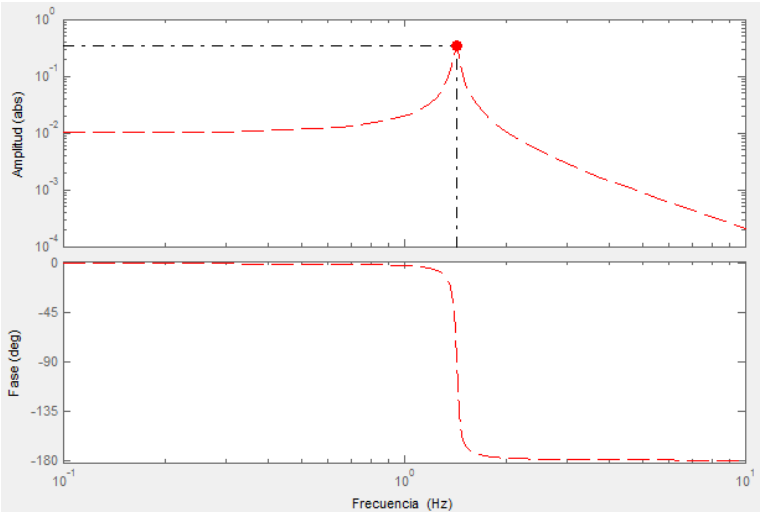


Ilustración 21: Función de transferencia de un grado de libertad

La tarea de identificación de los picos de la matriz de densidad espectral se puede realizar de forma manual, como en la ilustración (23) y o de manera automática como en la (24)

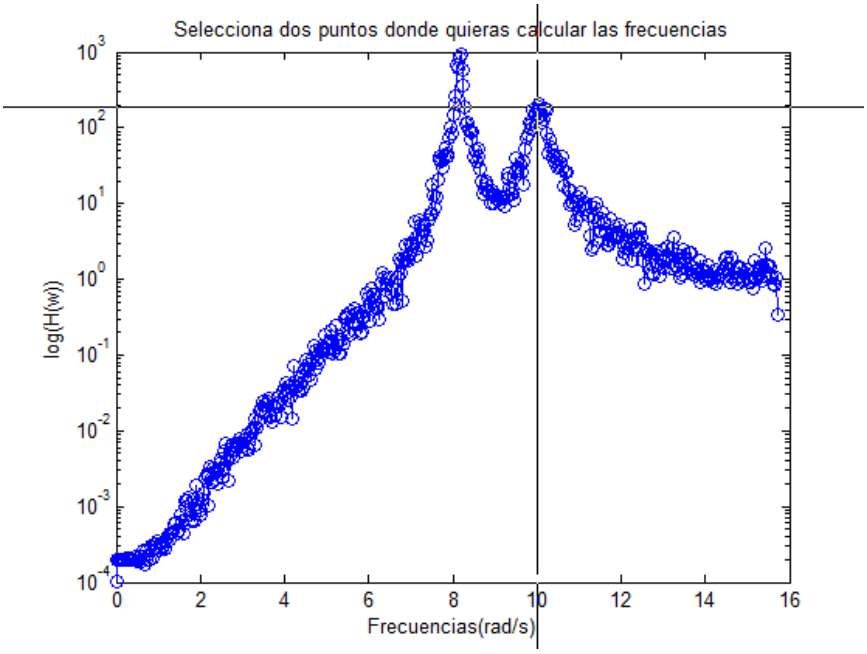


Ilustración 22: Modo manual

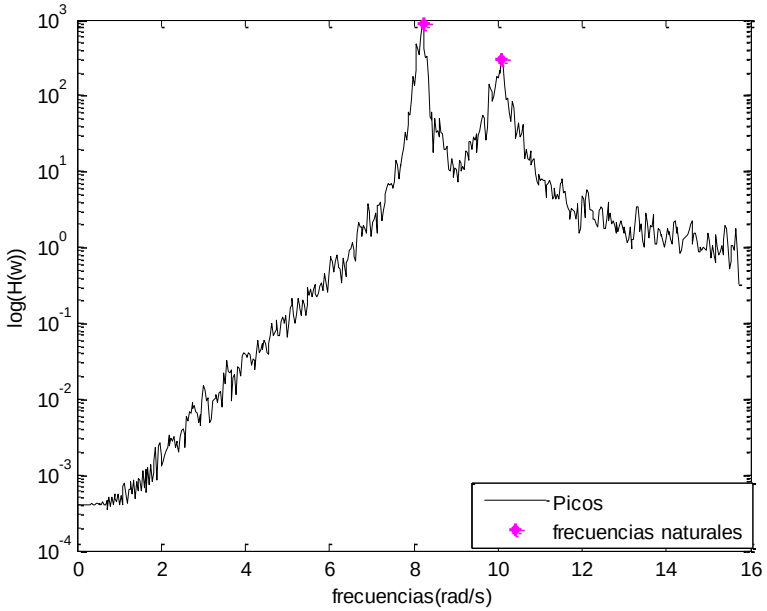


Ilustración 23: Modo automático

En la forma manual, el usuario obtiene la gráfica (26), y debe indicar el número de picos que desea marcar y posteriormente los marca con el puntero. Sin embargo en la forma automática, gráfica (27), los picos se marcan automáticamente, sin necesidad de que el usuario introduzca nada por teclado.

3.1.2.1.2 LA FORMAS MODALES

Las formas modales que se corresponden con las frecuencias propias del sistema se estiman por el uso del algoritmo de descomposición de valor singular.

La matriz S de valor singular, y otras dos matrices, U y V que se obtienen con el algoritmo de SVD. U y V son matrices que componen un conjunto de vectores ortonormales.

Algunas similitudes en el método de salida de estimación en formas modales se pueden encontrar las de un sistema no amortiguado con masa y matrices de rigidez conocidas:

$$[K - \lambda M]\phi = 0 \tag{3.6}$$

donde

- K es la matriz de rigidez
- λ_i es un valor propio
- M es la matriz de masas
- ϕ_i es el vector propio (o vector de forma modal) correspondiente a λ_i.

Encontrar vectores propios del sistema de salida con el uso del algoritmo de SVD viene dado por este problema de autovalores :

$$\left[G_{yy}(\omega) - \lambda I\right]V = 0 \tag{3.7}$$

donde

- $G_{yy}(\omega)$ es la matriz de densidad espectral de potencia para determinar los vectores propios correspondientes V de.
- ϕ_i es un valor propio
- I es una matriz de identidad.

Los valores propios, o mejor dicho, frecuencias propias, ya han sido determinadas por recoger los picos máximos, como se describe en el PP, y por lo tanto sólo los vectores propios se quedan por determinar.

3.1.2.1.3 FUNCIÓN AUTOCORRELACIÓN: INDICADOR MAC

El indicador MAC (*Modal Asurance Criterion*) [2,6,7], se define como la ecuación:

$$MAC = \frac{\left|{\phi_0}^H * \phi_i\right|^2}{{\phi_0}^H * \phi_i * {\phi_i}^H * \phi_0} \tag{3.8}$$

donde:

- MAC es un factor que mide la correlación entre dos modos. Un valor 0 indica que no hay correlación, mientras que un valor 1 indica que los modos están perfectamente correlacionados.
- ϕ_0 es el vector modal de referencia
- ϕ_i es el vector modal i-ésimo.
- H denota la transpuesta conjugada compleja.

Si se calcula la correlación para todos los modos (del vector de los todos los modos, U, y los modos principales) se puede construir una matriz de valores, a la se le llamará matriz MAC. Si los modos son 100% independientes, los valores fuera de la diagonal de la matriz son todos ceros, y la diagonal son 1.

Las ilustraciones (25) y (26) muestran los valores de la matriz MAC cada para índice de la matriz de densidad espectral. Al ser un sistema de 2 g.d.l. la ilustración (25) se observan dos colores, en color rojo está la primera columna y de color azúl la segunda columna de la matriz. Mientras que en la ilustración (26), al ser 4 g.d.l. se observan cuatro colores: azúl la primera columna, cian la segunda, amarilla la tercera y roja la cuarta.

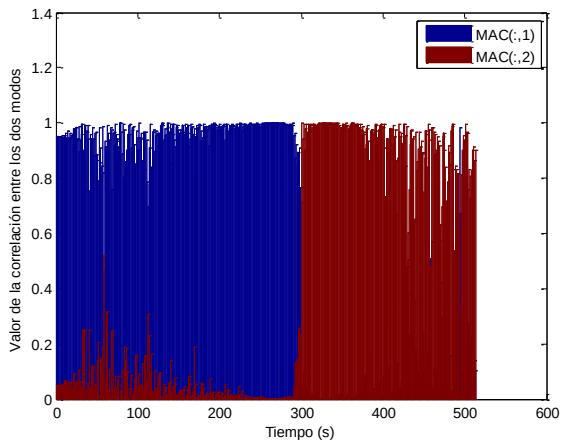


Ilustración 24: Matriz MAC para 2 g.d.l.

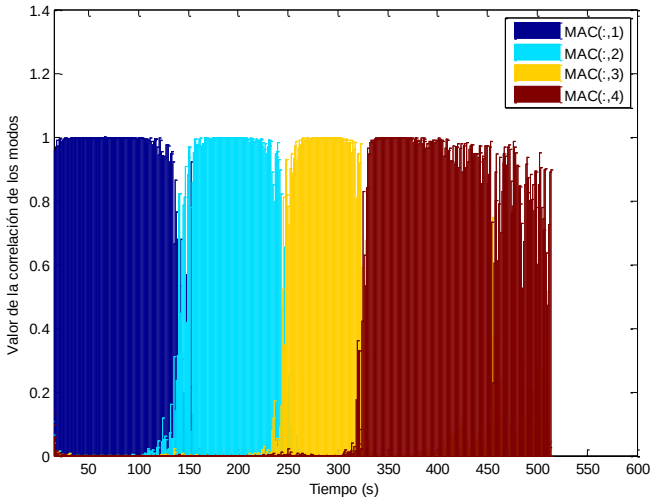


Ilustración 25. Matriz MAC para 4 g.d.l.

Tras obtener la matriz MAC, se seleccionan los primeros índices (ver figura 27) que sean inferiores a cierto parámetro, MAC_b, impuesto por el usuario, para cada columna de U.

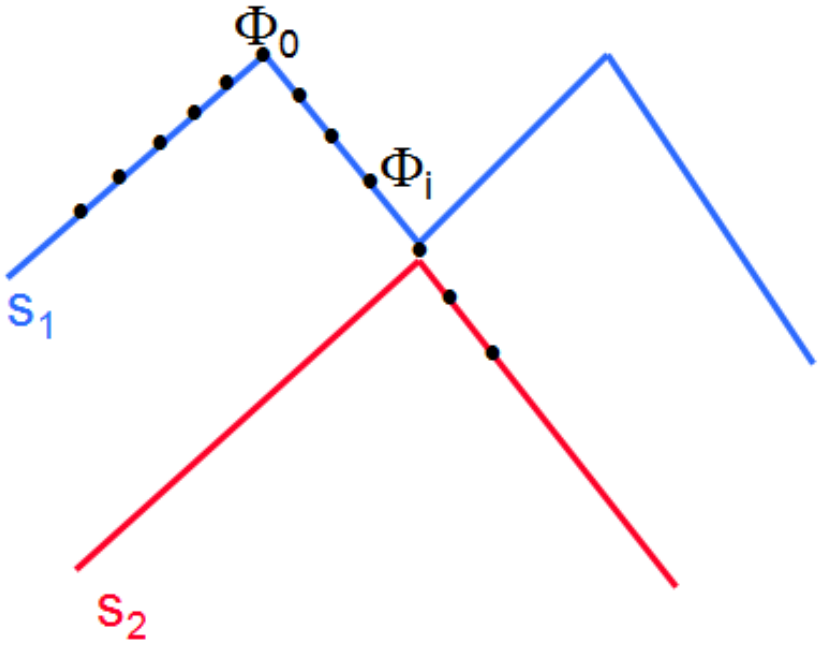


Ilustración 26: Correlación de los modos, U, ejemplo de dos grados de libertad

Y posteriormente dichos índices establecen el rango de valores singulares que se escogen de la matriz de densidad espectral, S, y que se representan en las figuras (28) y (29), para 2 g.d.l. y (30) y (31) para 4 g.d.l, forman las campanas del sistema equivalente de un grado de libertad cuyos picos representan las frecuencias naturales del sistema.

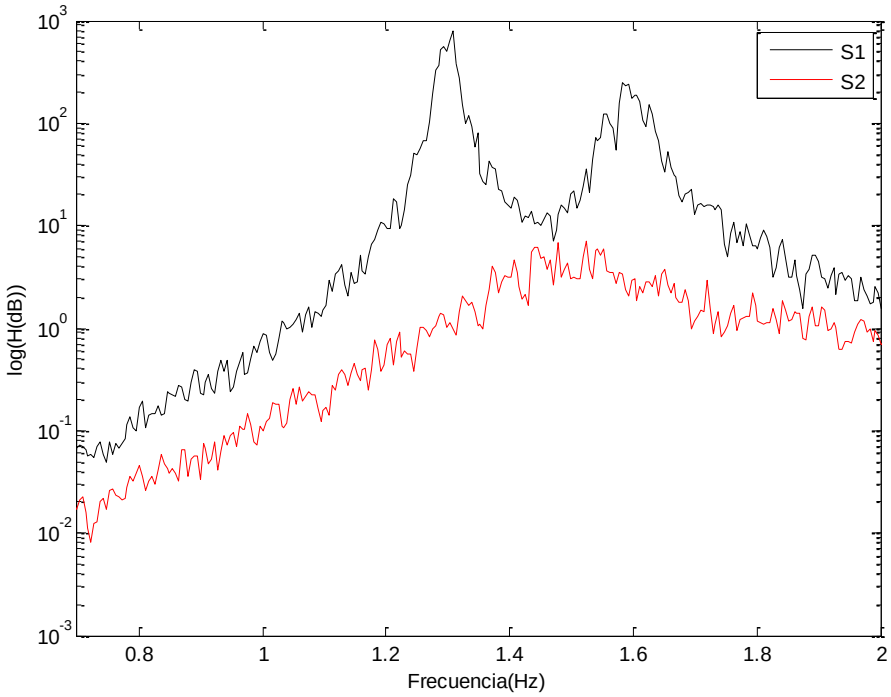


Ilustración 27: Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad sin unir, caso de 2 g.d.l., son los valores de la matriz diagonal S

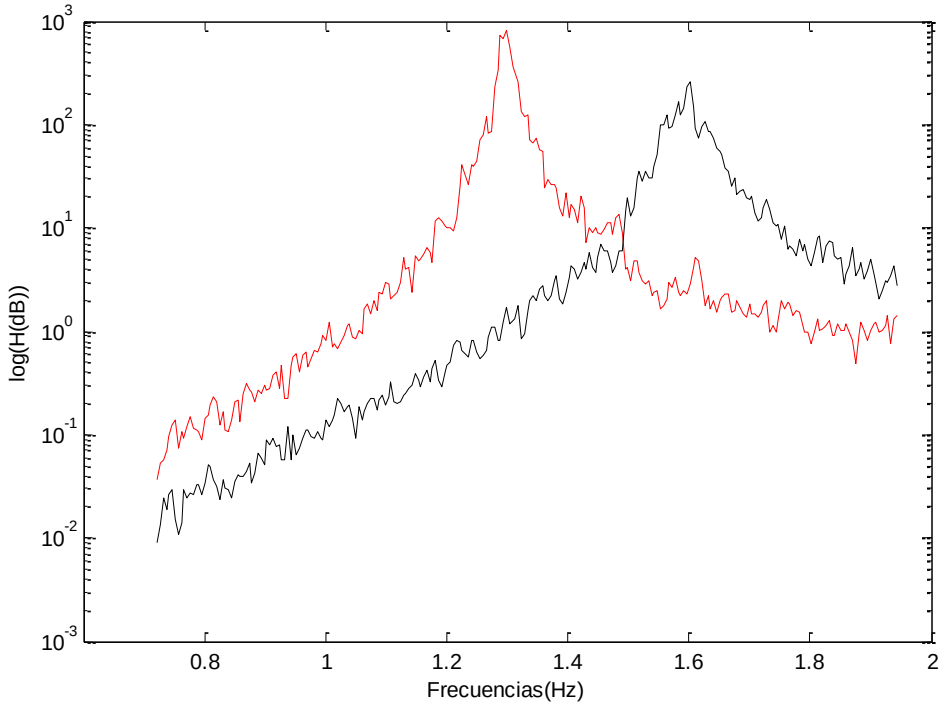


Ilustración 28: Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad unidas, caso de 2 g.d.l. (tras el proceso del indicador MAC)

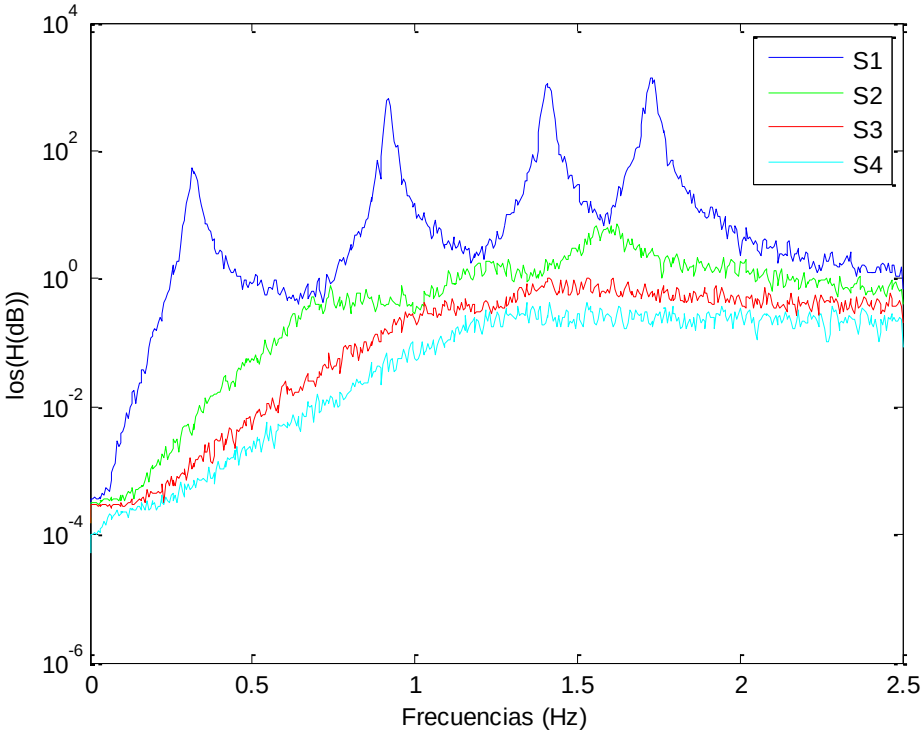


Ilustración 29: Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad sin unir, caso de 4 g.d.l.,

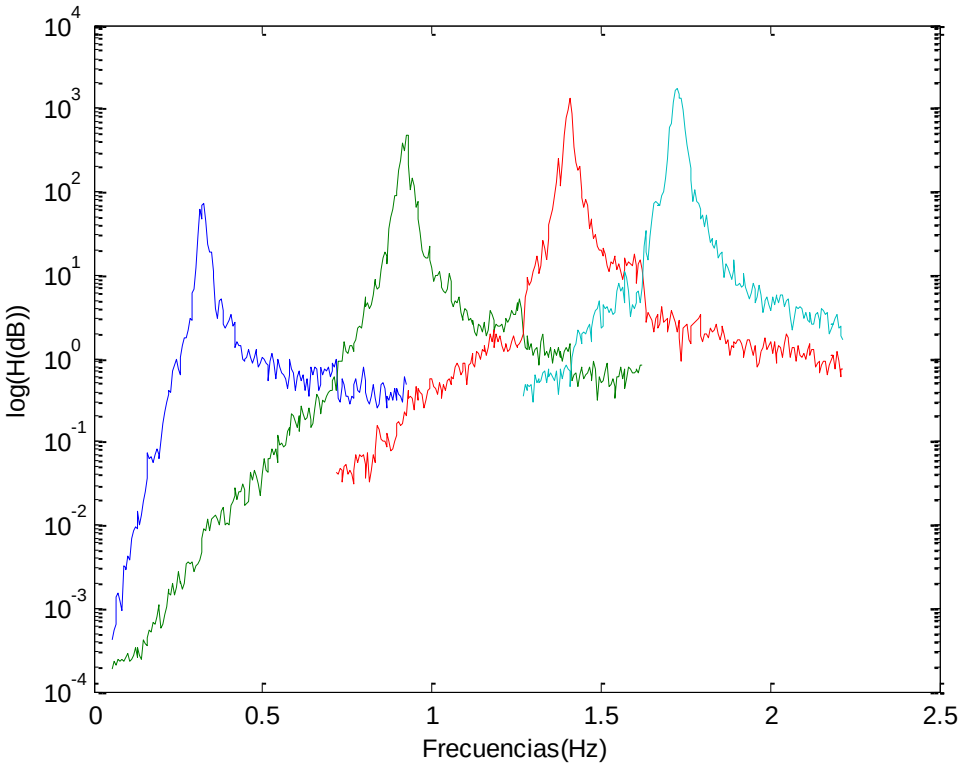


Ilustración 30: Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad unidas, caso de 4.d.g. (tras el proceso del indicador MAC)

3.1.2.1.4 CAMPANAS DEL SISTEMA EQUIVALENTE DE UN GRADO DE LIBERTAD SIMÉTRICAS

Las campanas equivalentes suelen tener muchos más elementos no nulos a un lado del pico que al otro. Una posible medida para tratar de mejorar los datos estimados es hacerlas simétricas respecto al pico, ello se consigue igualando el número de puntos a ambos lados del pico.

El programa también permite estimar los parámetros modales para campanas simétricas.

A continuación obtenemos las mismas gráficas para este caso:

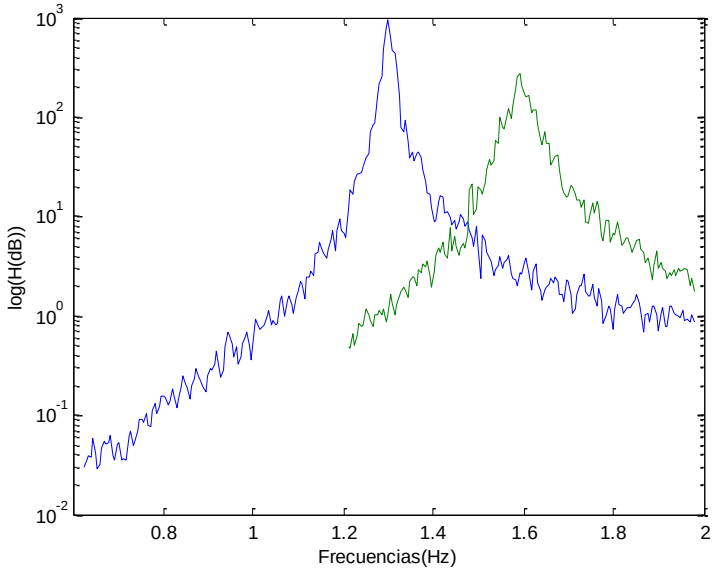


Ilustración 31: Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad simétricas, caso de 2 g.d.l.

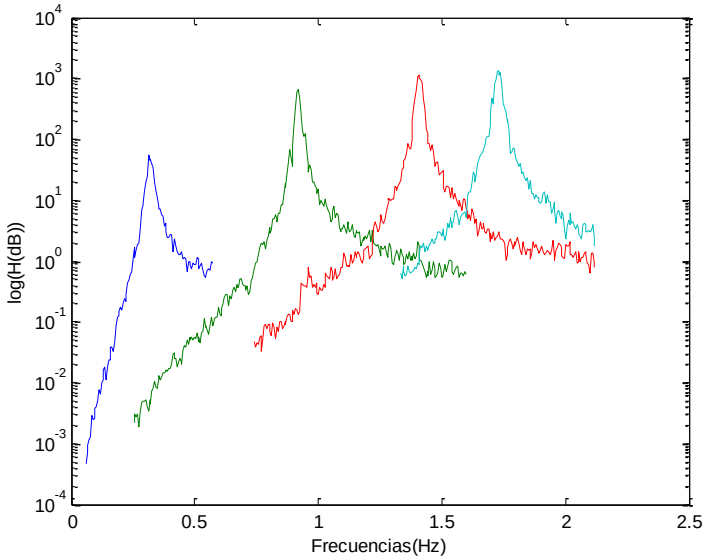


Ilustración 32: Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad simétricas, caso de 4 g.d.l.

3.1.2.2 MEJORA DEL MÉTODO EFDD

3.1.2.2.1 ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO

Una vez que se tienen las frecuencias que proporcionan estos modos se realiza la antitransformada de Fourier de la matriz de densidad espectral. Con dicha señal en el dominio del tiempo se pueden calcular los coeficientes de amortiguamiento y las frecuencias naturales.

El coeficiente de amortiguamiento tiene la forma exponencial como se muestra en la figura (34):

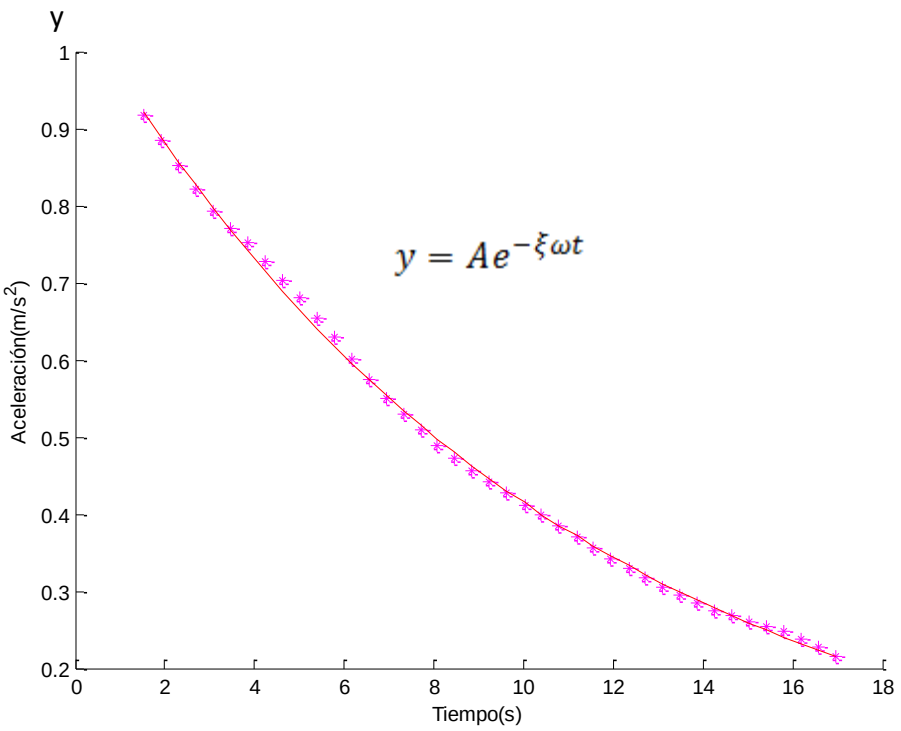


Ilustración 33: Forma del coeficiente de amortiguamiento

y se calcula despejando ξ del exponente de las ecuación (3.9):

$$y = Ae^{-\xi\omega t} \tag{3.9}$$

El despeje de manera teórica, se puede realizar aplicando logaritmo neperiano a ambos lados de la ecuación y haciendo una semejanza a la ecuación de una recta, se despeja la pendiente m, y queda la ecuación siguiente:

$$\begin{cases} \ln(y) = \ln(A) - \xi\omega t \\ \ln(\mathrm{y}) = \mathrm{n} - m\mathrm{t} \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{m = -\xi\omega \rightarrow \xi = -\frac{m}{\omega}} \tag{3.11}$$

En la práctica, el parámetro ξ se ha estimado mediante el método de mínimos cuadrados. Para ello ha sido necesario ajustar los puntos comprendidos en un rango delimitado por un porcentaje máximo de amplitud y un porcentaje mínimo de amplitud, de esta forma, se logra escoger la zona central de la curva exponencial.

Asi pues, dado que las campanas del sistema equivalente de un grado de libertad se obtienen como estimación de la función de respuesta en frecuencias del sistema equivalente de un grado de libertad, dichas campanas no son, obviamente, perfectas, y la función de auto correlación obtenida a través de su transformada inversa de Fourier difiere de la respuesta temporal del sistema en vibración libre principalmente en los primeros ciclos y en los ciclos con menor amplitud. Por ello, el ajuste debe realizarse excluyendo dichos extremos relativos y utilizando, tan sólo, los extremos con amplitud intermedia. Esta amplitud se medirá en términos relativos al pico máximo, en términos porcentuales, y así, las amplitudes máximas y mínimas que definirán los picos de la función de autocorrelación a utilizar en el ajuste, serán parámetros a definir por el usuario. En este trabajo, entonces, la porción de la función $R_x(\tau)$ de autocorrelación a utilizar para el ajuste vendrá definida por el intervalo:

$$T_{low} = \frac{\min(\tau)}{\mathrm{R_x}(\tau)} \geq T_{low} max(\mathrm{R_x}(\tau))$$

$$T_{high} = \frac{\max(\tau)}{\mathrm{R_x}(\tau)} \geq T_{high} max(\mathrm{R_x}(\tau))$$

donde

$$0 < T_{low} < 1$$

$$0 < T_{high} < 1$$

$$T_{low} < T_{high}$$

representan el tanto por 1 inferior y superior respectivamente, entre los que se realiza el ajuste.

En la figura (38) se pueden apreciar dichos parámetros (Thigh y Tlow) en líneas discontinuas de color rosa, sobre la función de autocorrelación en color turquesa, y los puntos correspondientes a sus máximos y mínimos en valores absolutos en asteriscos de color magenta:

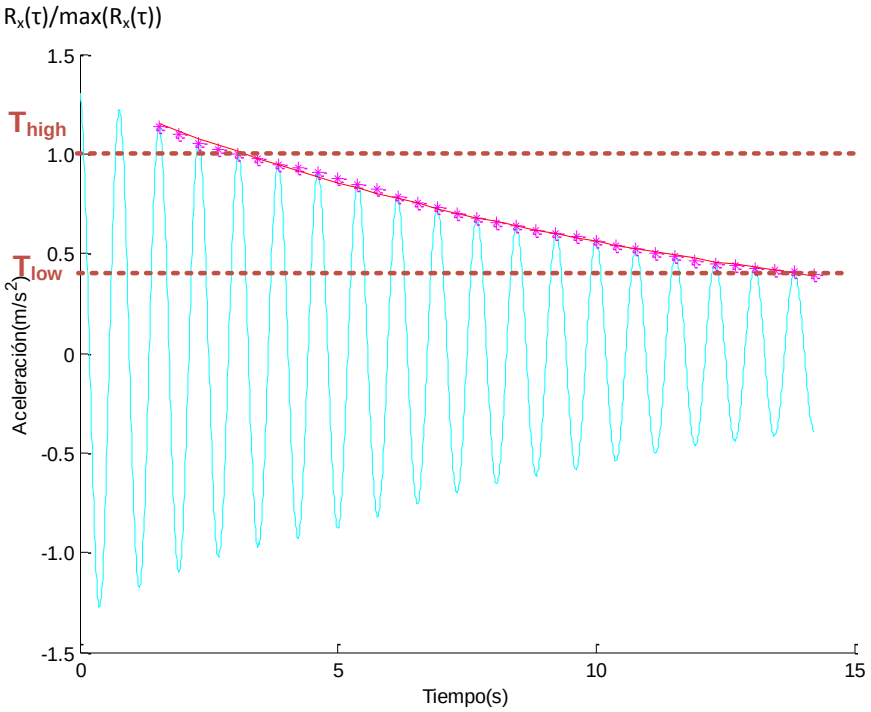


Ilustración 34: Ajuste por mínimo cuadrados y spline cúbica

Así pues se aprecia en las gráfica (36) la función de autocorrelación que daría el algoritmo.

Para obtener la frecuencia, se calculan el número de cortes de la gráfica del segmento que comprende del tiempo de las amplitudes establecidas previamente y se divide entre el tiempo.

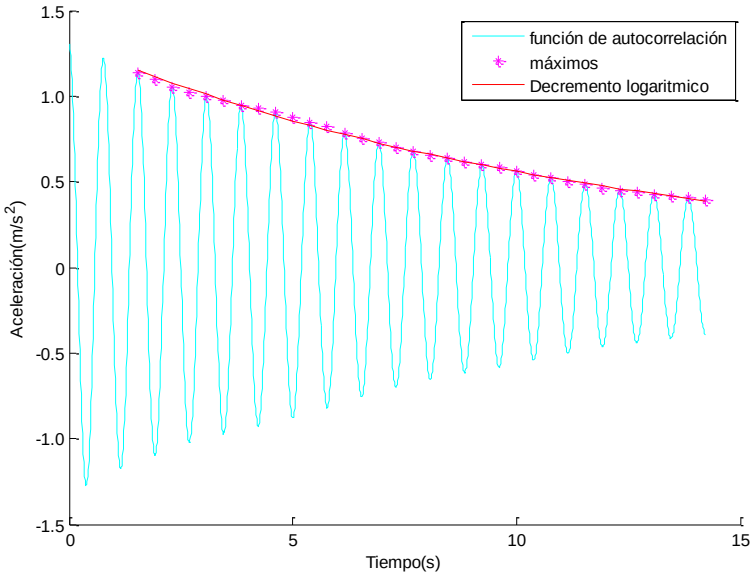


Ilustración 35: Autocorrelación del modo

4 CAPITULO IV: RESULTADOS

4.1 DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS SIMULADOS

Con la finalidad de comprobar y mejorar la eficiencia del algoritmo desarrollado, se han llevado a cabo una serie de modificaciones en los parámetros de entrada del programa, para posteriormente calcular los parámetros de salida y contrastarlos con los resultados

El esquema que se ha seguido es el siguiente:

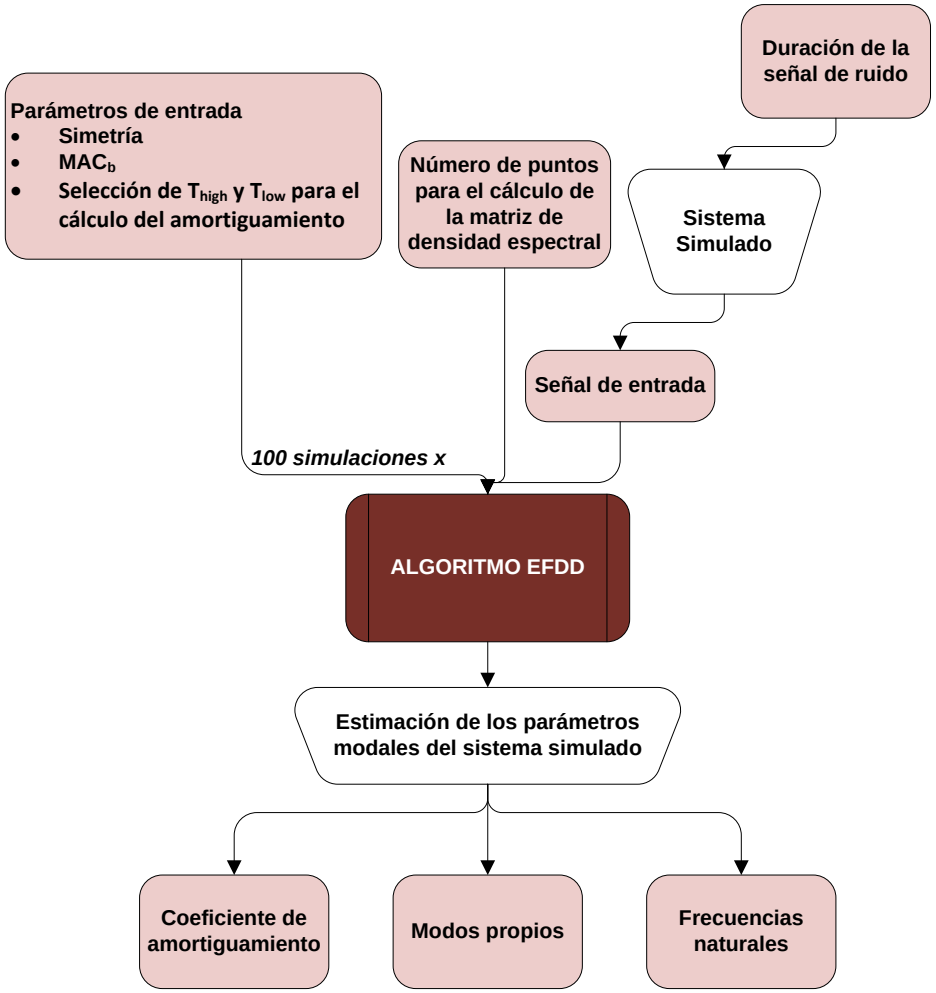


Ilustración 36: Esquema del proceso

En cuanto a los parámetros de entrada tenemos dos, uno es el número de puntos para el cálculo de la matriz de densidad espectral, y otro es la duración de la señal de ruido blanco que entra en el sistema.

Al número de puntos para el cálculo de la matriz de densidad espectral (mediante el método de Welch) se le identifica con las siglas nfft, y tiene cuatro casos distintos:

- 2^8=256 puntos
- 2^9=512 puntos
- 2^10=1024 puntos
- 2^11=2048 puntos

Éste parámetro tiene una influencia muy grande en la variación de la respuesta del algoritmo, como se verá a lo largo de este capítulo.

En cuanto a la duración de la señal de ruido blanco, se tienen 8 casos:

- 1 min
- 2 min
- 5 min
- 10 min
- 20 min
- 40 min
- 60 min
- 80 min

Se estudiará el comportamiento del algoritmo a lo largo de cada intervalo.

Para concluir el proceso, son necesarios otros parámetros de entrada, como son:

- La elección de las campanas del sistema equivalente de un grado de libertad: con simétricas o sin ella

- El parámetro MAC_b: El MAC_b es un parámetro que establece el usuario, e indica un valor límite a partir del cual se mide la correlación modal (medido con el criterio MAC) entre los las formas modales principales (las correspondientes a las frecuencias naturales) y las restantes.
- El rango de la señal de tiempo para el cálculo del amortiguamiento

Estos últimos parámetros de entrada, se elegirán teniendo en cuenta una serie de comparaciones con el teórico, como se muestra a continuación:

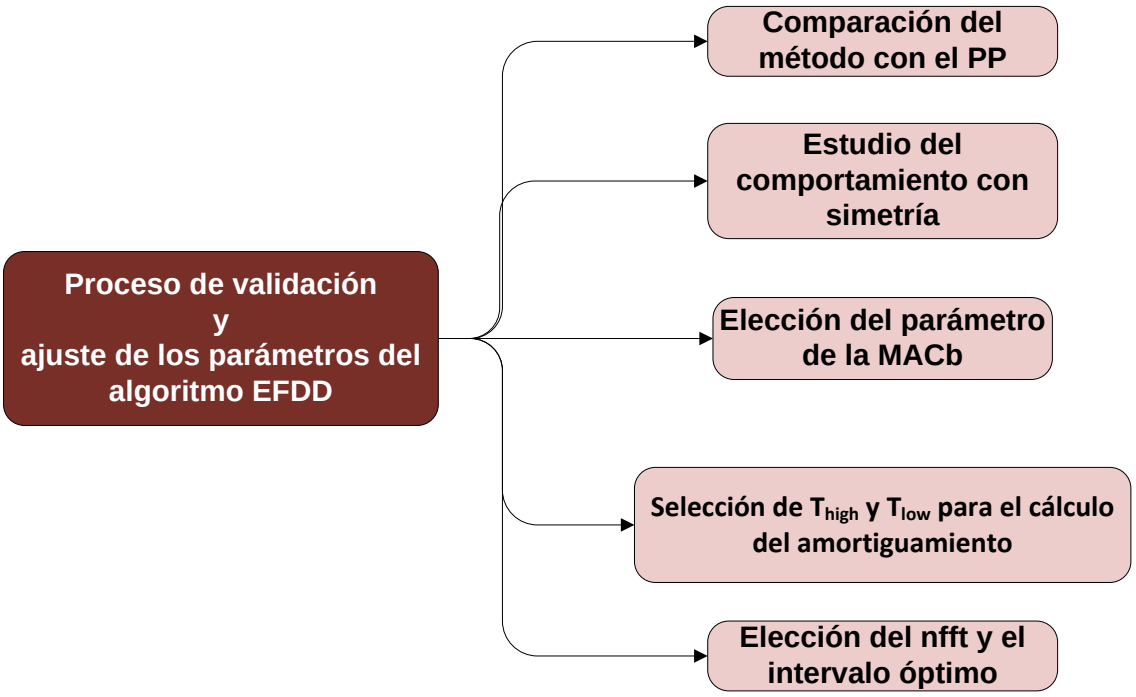


Ilustración 37: Proceso de validación y ajuste de los parámetros de entrada del algoritmo

donde :

- La elección de la MAC_b óptima se hará teniendo en cuenta los siguientes casos:
  - $MAC_b \geq 0.6$
  - $MAC_b \geq 0.7$
  - $MAC_b \geq 0.8$
  - $MAC_b \geq 0.9$

- El rango de la señal de tiempo para el cálculo del amortiguamiento se elegirá teniendo en cuenta 4 casos:
  - Caso 1: $T_{low} = 0.1$; $T_{high} = 0.9$
  - Caso 2: $T_{low} = 0.2$; $T_{high} = 0.9$
  - Caso 3: $T_{low} = 0.3$; $T_{high} = 0.9$
  - Caso 4: $T_{low} = 0.3$; $T_{high} = 0.8$

- La elección del nfft ha de ser uno de los 4 casos del número de puntos para el cálculo de la matriz de densidad espectral, Y el intervalo óptimo se corresponde con el más adecuado de los ocho casos de la de la duración de la señal de ruido blanco.

El Proceso de validación y ajuste de los parámetros de entrada del algoritmo se construye a partir de una serie de modificaciones en los parámetros de entrada del algoritmo, de esta manera, se obtienen los parámetros modales, se contrastan con los del sistema teórico, y permanece la modificación que aporte resultamos más aproximados.

A continuación se muestra la aplicación del algoritmo EFDD a distintos ejemplos (distintos tipos de coeficientes de amortiguamiento) y configuraciones (con 2 grados de libertad y con 4 grados de libertad):

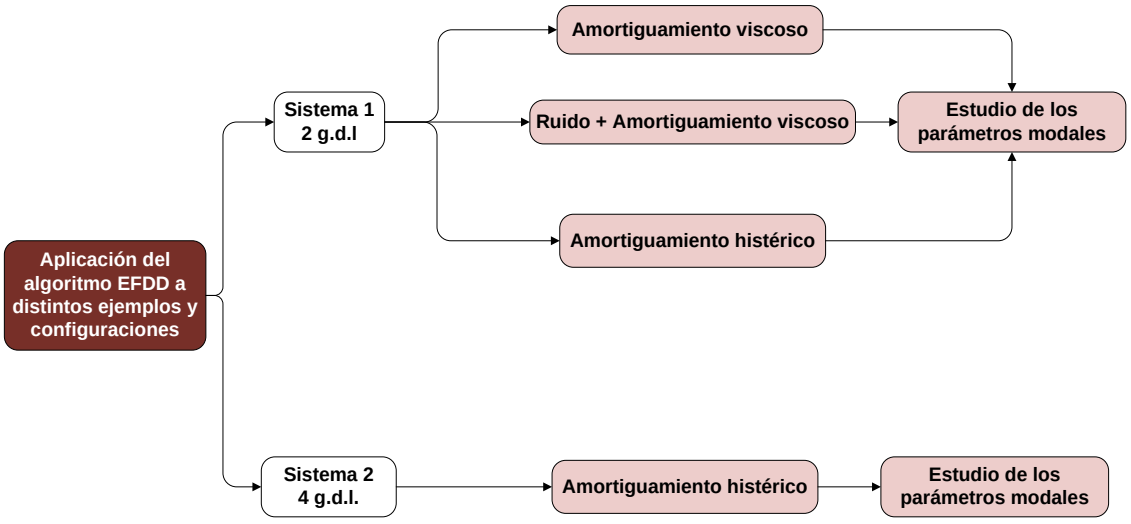


Ilustración 38: Aplicación del algoritmo EFDD a distintos ejemplos y configuraciones

En primer lugar, se obtienen los resultados para un amortiguamiento viscoso (proporcional a la velocidad) y se obtienen los parámetros modales.

En segundo lugar a el amortiguamiento anterior se le suma ruido, y se estudiante de nuevo los parámetros modales

Y en tercer lugar se define el sistema simulado utilizando un modelo de amortiguamiento histerético (independiente de la frecuencia) en lugar de viscoso. Esta diferencia tiene una influencia notable en las características de las formas modales de vibración, que serán reales en un primer momento (amortiguamiento viscoso), y podrían llegar a ser imaginarias en la segunda prueba (la complejidad aumenta con la proximidad de la frecuencia natural de dos modos muy separados).

Finalmente se ha de repetir del proceso del amortiguamiento histerético, cambiando la configuración del algoritmo EFDD, ya que tendrá el doble de grados de libertad, o sea 4.

El test de vibración ambiental se ha simulado tomando como entrada ruido blanco (valores aleatorios).Todas los cálculos se han realizado con una frecuencia de muestreo de 5 Hz en el caso del sistema de 2 g.d.l. y de 0.25 Hz en el caso de 4 g.d.l.. Sin embargo a la hora de calcular el coeficiente de amortiguamiento, se ha hecho uso del comando spline de matlab, y se le ha introducido una frecuencia de muestreo menor o igual a la trivial del sistema, con el fin de obtener mejor resolución de las gráficas.

4.2 PROCESO DE VALIDACIÓN Y AJUSTE DE LOS PARÁMETROS DE ENTRADA DEL ALGORITMO

A continuación se realizará el proceso de validación y ajuste de los parámetros de entrada del algoritmo. En el sistema 1, se trata de un sistema de 2 grados de libertad que obtenido del artículo [8].Se ha escogido dicho sistema, ya que en el artículo de muestran los valores teóricos y experimentales que se obtuvieron. Así pues, sirve de sistema estudio para el trabajo final de máster a desarrollado.

A continuación se muestras las ecuaciones características y los parámetros modales del sistema 1:

donde M es la matriz de masas, K la matriz de rigidez y C la matriz de amortiguamiento.

Ecuación de movimiento: $M \cdot \ddot{x} + C \cdot \dot{x} + K \cdot x = f(t)$

$$K = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \left(\frac{kN}{m}\right)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.25 \\ 0.25 & 1.25 \end{bmatrix} (ton)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.3275 & -0.0725 \\ -0.0725 & 0.3275 \end{bmatrix} \left(\frac{kN \cdot s}{m}\right)$$

Parámetros modales teóricos:

$$f_1 = 1.2995\ Hz \qquad f_2 = 1.5915\ Hz$$

$$\xi_1 = 1.0410\% \qquad \xi_2 = 2.0000\%$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix} \qquad \Phi_2 = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

Sistema1: Características del sistema base

4.2.1 COMPARACIÓN DEL MÉTODO CON EL PP

En primer lugar, se va a realizar una comparación de ambos métodos, el *Peak Picking* y el *Enhanced Frequency Domain Decomposition Method* .

A continuación se muestran los resultados de las frecuencias medias, así como sus desviaciones típicas obtenidas para los dos modos de vibración.

- Sobre lo que no entendías de la fórmula que te comentaba y que tienes que explicar:

Las frecuencias han sido calculadas en el método PP de la siguiente forma (ver ecuación (4.1)):

$$f(i) = \Delta f \cdot i \tag{4.1}$$

$$i = 0,1,2,\dots,\frac{nfft}{2}$$

donde:

$$\Delta f = \frac{\left(2 \cdot f_{nyquist}\right)}{nfft} \tag{4.2}$$

$$f_{nyquist} = \frac{f_{muestreo}}{2} \tag{4.3}$$

Primero es necesario calcular el gradiente de frecuencias (tabla 1), para posteriormente poder estimar un rango de frecuencias naturales para el método PP.

Como se observa en la tabla 2, los resultados son muy exactos para el segundo modo, y un poco más variantes en el caso del primer modo. Esto se debe, a que uno de los puntos discretos es igual a una de las frecuencias naturales del sistema (la del segundo modo), por ello da resultados muy cercanos al teórico

Para los distintos nfft tendríamos los siguientes gradientes de frecuencias:

nfft	Δf(Hz)
256	$19.5312 \cdot 10^{-3}$
512	$9.7656 \cdot 10^{-3}$
1024	$4.8828 \cdot 10^{-3}$
2048	$2.4414 \cdot 10^{-3}$

Tabla 1: Gradientes de frecuencias obtenidos con el método PP

nfft	$f_1(Hz)$	$f_2(Hz)$
256	1,2695	1,5625
	1,2891	1,5820
	1,3086	1,6016
	1,3281	1,6211
512	1,2891	1,5723
	1,2988	1,5820
	1,3086	1,5918
	1,3184	1,6016
1024	1,2939	1,5820
	1,2988	1,5869
	1,3037	1,5918
	1,3086	1,5967
2048	1,2964	1,5869
	1,2988	1,5894
	1,3013	1,5918
	1,3037	1,5942

Tabla 2: Frecuencias obtenidas con el método PP

Los valores de las tablas posteriores no se corresponden exactamente con estos calculados porque los valores de las tablas son medias entre 100 experimentos. Sin embargo, en estas medias se observa una tendencia a las frecuencias de 1.5917 y 1.5918 Hz para el método PP.

Parámetros de entrada para obtener los resultados siguientes:

- MAC_b=0.7
- T_{low}=0.2; T_{high}=0.9
- f_{sample}=0.2 Hz
- f_{sample}(spline)=0.02 Hz
-
- Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría
-

Duración de la señal de entrada (min)	**nfft=256**		**nfft=512**		**nfft=1024**		**nfft=2048**	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,2989	1,5892	1,2988	1,5905	1,2197	1,3887	0,7961	0,9587
2	1,2996	1,5891	1,2988	1,5881	1,2857	1,5826	1,2055	1,5408
5	1,2997	1,5876	1,2992	1,5875	1,2993	1,5878	1,2992	1,5886
10	1,2997	1,5872	1,2991	1,5880	1,2988	1,5877	1,2990	1,5877
20	1,2994	1,5874	1,2990	1,5871	1,2993	1,5874	1,2993	1,5875

40	1,2997	1,5873	1,2988	1,5865	1,2994	1,5867	1,2994	1,5868
60	1,2996	1,5877	1,2989	1,5861	1,2994	1,5860	1,2994	1,5864
80	1,2997	1,5873	1,2989	1,5862	1,2995	1,5863	1,2995	1,5862
MEDIA	**1,2995**	**1,5879**	**1,2990**	**1,5875**	**1,2874**	**1,5602**	**1,2107**	**1,4847**

Tabla 3: Frecuencias Medias con el Método EFDD

Duración de la señal de entrada (min)	**nfft=256**		**nfft=512**		**nfft=1024**		**nfft=2048**	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,2994	1,5914	1,2998	1,5925	1,2994	1,5917	1,3011	1,5908
2	1,3031	1,5924	1,2988	1,5930	1,2996	1,5924	1,2987	1,5924
5	1,3041	1,5930	1,2993	1,5921	1,2999	1,5918	1,2994	1,5920
10	1,3068	1,5938	1,2988	1,5932	1,2995	1,5913	1,2992	1,5927
20	1,3066	1,5947	1,2988	1,5922	1,2999	1,5928	1,2997	1,5929
40	1,3084	1,5963	1,2988	1,5920	1,2997	1,5923	1,3000	1,5921
60	1,3084	1,5959	1,2988	1,5919	1,2997	1,5917	1,3000	1,5928
80	1,3086	1,5957	1,2988	1,5918	1,2992	1,5925	1,2994	1,5927
MEDIA	**1,3057**	**1,5941**	**1,2990**	**1,5923**	**1,2996**	**1,5921**	**1,2997**	**1,5923**

Tabla 4: Frecuencias Medias con el Método PP

Duración de la señal de entrada (min)	**nfft=256**		**nfft=512**		**nfft=1024**		**nfft=2048**	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$
1	0,0036	0,0072	0,0047	0,0070	0,1887	0,3991	0,3290	0,3639
2	0,0026	0,0055	0,0027	0,0144	0,0814	0,0540	0,2495	0,2066
5	0,0019	0,0034	0,0020	0,0035	0,0021	0,0039	0,0022	0,0038
10	0,0012	0,0031	0,0014	0,0027	0,0017	0,0029	0,0016	0,0032
20	0,0010	0,0027	0,0010	0,0022	0,0011	0,0022	0,0010	0,0025
40	0,0007	0,0019	0,0009	0,0020	0,0009	0,0020	0,0008	0,0018
60	0,0007	0,0015	0,0009	0,0018	0,0008	0,0015	0,0007	0,0018
80	0,0005	0,0017	0,0009	0,0017	0,0007	0,0017	0,0007	0,0017
MEDIA	**0,0012**	**0,0029**	**0,0015**	**0,0033**	**0,0036**	**0,0064**	**0,0043**	**0,0077**

Tabla 5: Desviación típica de las frecuencias con el Método EFDD

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$
1	0,0098	0,0102	0,0063	0,0110	0,0058	0,0125	0,0087	0,0139
2	0,0088	0,0098	0,0039	0,0102	0,0057	0,0110	0,0069	0,0108
5	0,0083	0,0097	0,0029	0,0085	0,0040	0,0071	0,0042	0,0091
10	0,0056	0,0096	0,0000	0,0071	0,0031	0,0082	0,0031	0,0074
20	0,0059	0,0094	0,0000	0,0048	0,0028	0,0061	0,0027	0,0065
40	0,0020	0,0087	0,0000	0,0028	0,0021	0,0045	0,0026	0,0054
60	0,0020	0,0089	0,0000	0,0026	0,0020	0,0042	0,0025	0,0048
80	0,0000	0,0090	0,0000	0,0014	0,0013	0,0038	0,0023	0,0046
MEDIA	**0,0053**	**0,0094**	**0,0016**	**0,0049**	**0,0030**	**0,0066**	**0,0037**	**0,0073**

Tabla 6: Desviación típica de las frecuencias con el Método EFDD

4.2.1.2 CONCLUSIONES

A pesar de tener resultados muy similares, se ha elaborado a la siguiente tabla calculando la eficiencia según las tablas anteriores en comparación con el valor teórico de la frecuencia:

$$\frac{f_i - f_t}{f_t} \cdot 100 \qquad (4.4)$$

Donde:

- f_t Es la frecuencia teórica
- f_i Es la frecuencia calculada con el método PP, o con el EFDD, para cada caso

A la hora de elaborar las conclusiones, se han considerado todos los valores calculados, pero para construir las tablas "resumen" se han escogido la duración de la señal de entrada de 40 min y de 80 min, ya que son los valores con una desviación típica menor, así pues, son los más representativos para cada caso.

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
40	1,2997	1,5873	1,2988	1,5865	1,2994	1,5867	1,2994	1,5868
(%)	0,0154	-0,2639	-0,0539	-0,3142	-0,0077	-0,3016	-0,0077	-0,2953
80	1,2997	1,5873	1,2989	1,5862	1,2995	1,5863	1,2995	1,5862
(%)	0,0154	-0,2639	-0,0462	-0,3330	0,0000	-0,3267	0,0000	-0,3330

Tabla 7: Resultados del cálculo de las frecuencias para la elección del método EFDD

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
40	1,3084	1,5963	1,2988	1,592	1,2997	1,5923	1,3	1,5921
(%)	0,6849	0,3016	-0,0539	0,0314	0,0154	0,0503	0,0385	0,0377
80	1,3086	1,5957	1,2988	1,5918	1,2992	1,5925	1,2994	1,5927
(%)	0,7003	0,2639	-0,0539	0,0189	-0,0231	0,0628	-0,0077	0,0754

Tabla 8: Resultados del cálculo de las frecuencias para la elección del método PP

Como se observa en las tablas anteriores, los resultados del método EFDD son más exactos para los tiempos escogidos, 40 min y 80 min.

Sin embargo para tiempos inferiores y nfft de más bajos, dicho método empeora notablemente, sobre todo para el segundo modo.

A continuación, se observan los valores representados, los gráficos de color negro son los resultados del método PP, los de color rojo son los de EFDD y la línea verde discontinua representa el valor teórico citado anteriormente en el sistema base.

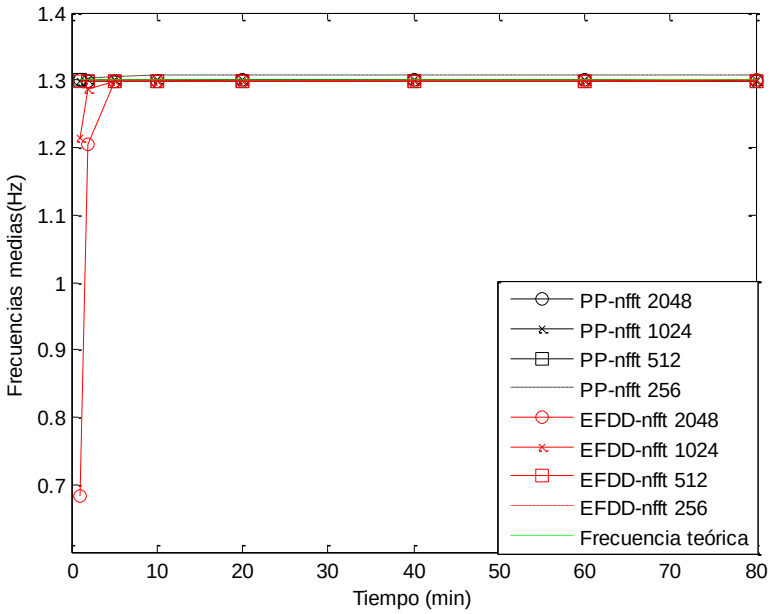


Ilustración 39: Gráfica de frecuencias medias para el primer modo

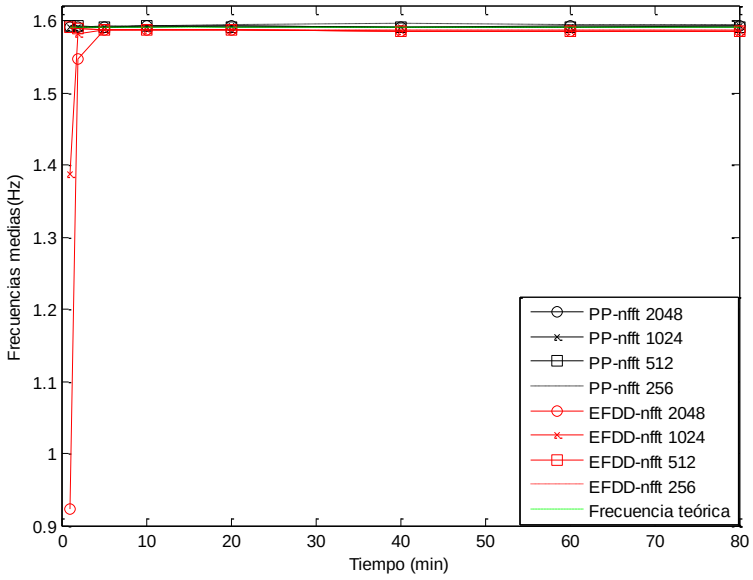


Ilustración 40: Gráfica de frecuencias medias para el segundo modo

Con el fin de observar mejor los resultados, se ha ampliado la imagen en el intervalo del eje y:

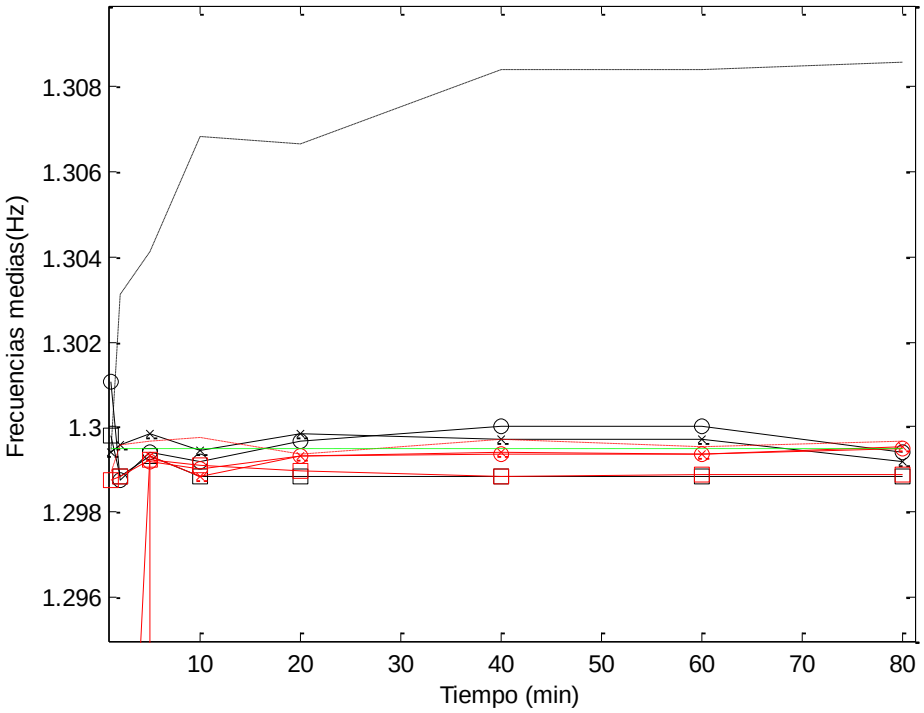


Ilustración 41: Detalle del primer modo

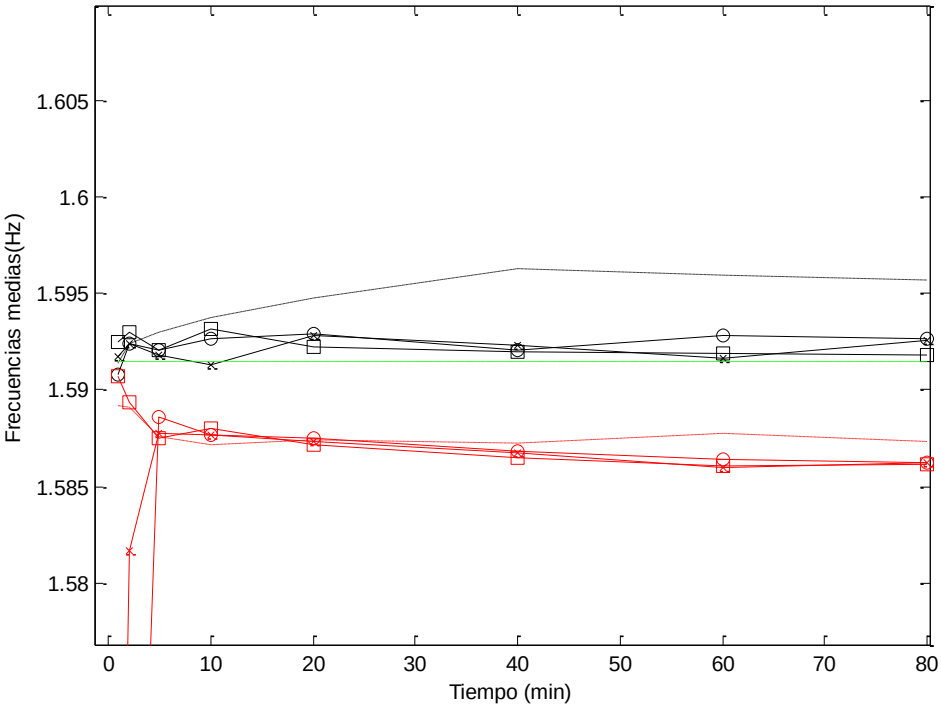


Ilustración 42: Detalle del segundo modo

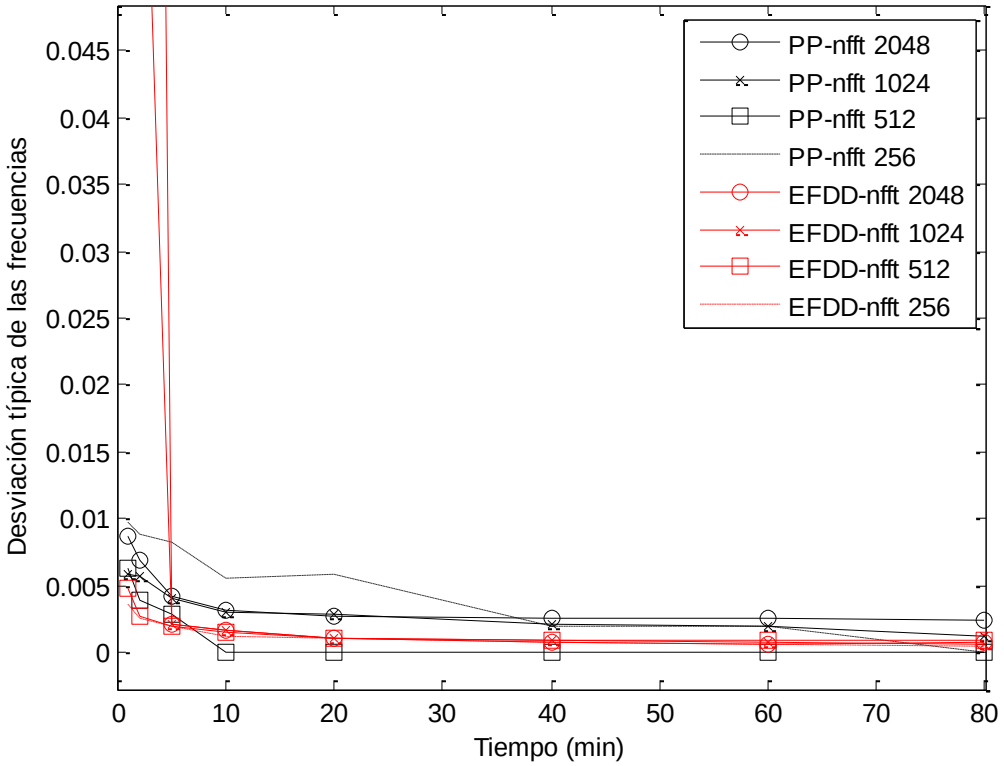


Ilustración 43: Desviación típica comparación de métodos (modo1)

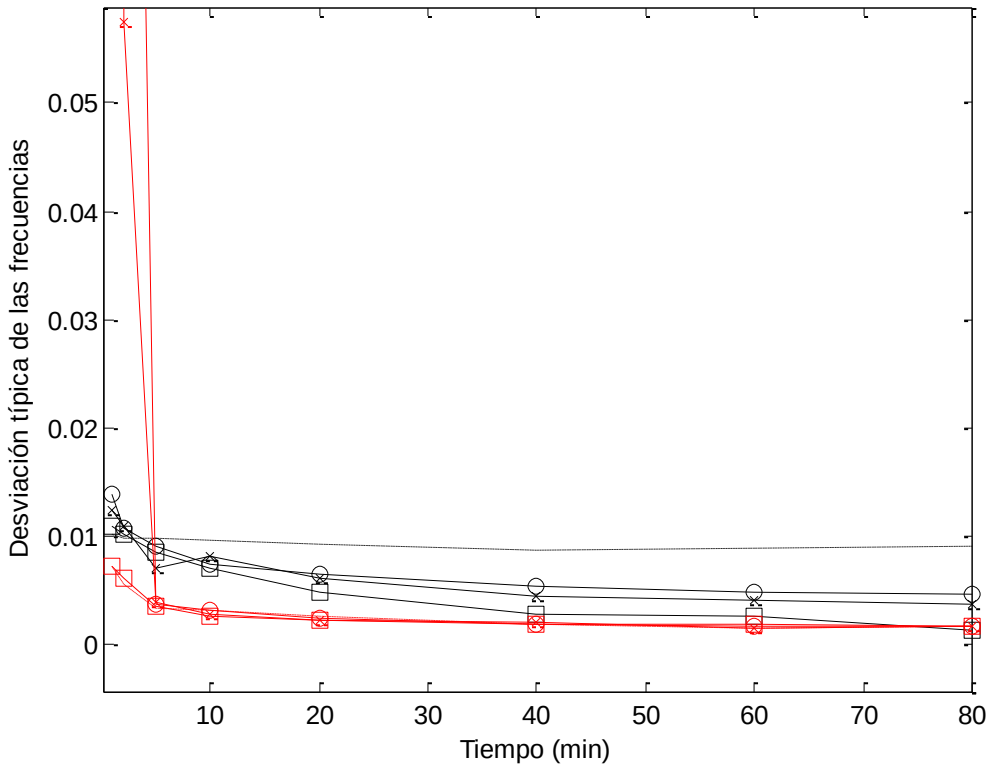


Ilustración 44: Desviación típica comparación de métodos (modo2

- ✓ Los valores posibles del PP están determinados por el nfft y son discretos, a diferencia de los obtenidos del EFDD que no tiene esta restricción. Esto, en función del caso, puede favorecer o perjudicar.

    a. Para el primer modo, el EFDD es notablemente mejor para cualquiera de los 4 casos del número de puntos para el cálculo de la matriz de densidad espectral (nfft) (Ilustración 41).
    b. Sin embargo, para el segundo modo los resultados obtenidos con éste método tienen una eficiencia muy inferior a los obtenidos con el método alternativo (Ilustración 42)

- ✓ De ahora en adelante, continuaremos realizando simulaciones con el método EFDD, ya que aporta resultados óptimos para el primer modo, y da un cálculo más aproximado de la frecuencia de la señal que se utiliza también para estimar el amortiguamiento.

- ✓ No obstante, conviene puntualizar, que para duraciones pequeñas de tiempo (hasta 30 min) el algoritmo funciona especialmente mal para nfft grandes (1024 y 2048), ello indica que el número de puntos considerados en tiempo para el cálculo de la matriz de densidad espectral (Método de Welch) debe ajustarse a la longitud de la señal a tratar.

4.2.2 ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO CON SIMETRÍA

A continuación se muestran tanto las medias como las desviaciones típicas de las frecuencias y los coeficientes de amortiguamiento para los casos de simetría y no simetría. Con el fin de establecer un criterio de elección.

Parámetros de entrada para obtener los resultados siguientes:

- MAC_b=0.8
- T_{low}=0.2; T_{high}=0.9
- f_{sample}=0.2 Hz
- f_{sample}(spline)=0.02 Hz

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,2990	1,5892	1,2987	1,5898	1,2136	1,3864	0,6891	0,8766
2	1,2996	1,5892	1,2989	1,5895	1,2791	1,5818	1,1984	1,5666
5	1,2997	1,5876	1,2992	1,5876	1,2993	1,5878	1,2992	1,5886
10	1,2997	1,5872	1,2991	1,5880	1,2988	1,5877	1,2990	1,5877
20	1,2994	1,5874	1,2990	1,5871	1,2993	1,5874	1,2993	1,5875
40	1,2997	1,5873	1,2988	1,5865	1,2994	1,5867	1,2994	1,5869
60	1,2996	1,5877	1,2989	1,5861	1,2994	1,5860	1,2994	1,5864
80	1,2997	1,5873	1,2989	1,5862	1,2995	1,5863	1,2995	1,5862
MEDIA	**1,2995**	**1,5879**	**1,2989**	**1,5876**	**1,2857**	**1,5598**	**1,1882**	**1,4713**

Tabla 9: Frecuencias Medias para campanas del sistema equivalente de un grado de libertad sin simetría

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,2990	1,5892	1,2987	1,5897	1,2202	1,3854	0,7600	0,9191
2	1,2996	1,5891	1,2989	1,5895	1,2785	1,5827	1,1975	1,5604
5	1,2997	1,5876	1,2992	1,5876	1,2993	1,5878	1,2992	1,5886
10	1,2997	1,5872	1,2991	1,5880	1,2988	1,5877	1,2990	1,5877
20	1,2994	1,5874	1,2990	1,5871	1,2993	1,5874	1,2993	1,5875
40	1,2997	1,5873	1,2988	1,5865	1,2994	1,5867	1,2994	1,5869
60	1,2996	1,5877	1,2989	1,5861	1,2994	1,5860	1,2994	1,5864
80	1,2997	1,5873	1,2989	1,5862	1,2995	1,5863	1,2995	1,5862
MEDIA	**1,2995**	**1,5879**	**1,2989**	**1,5876**	**1,2865**	**1,5597**	**1,2027**	**1,4793**

Tabla 10: Frecuencias Medias para campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$
1	0,0036	0,0073	0,0048	0,0116	0,1977	0,4023	0,3235	0,3760
2	0,0026	0,0055	0,0028	0,0061	0,0992	0,0575	0,2584	0,1297
5	0,0019	0,0034	0,0020	0,0036	0,0021	0,0038	0,0021	0,0037
10	0,0012	0,0031	0,0014	0,0027	0,0017	0,0030	0,0017	0,0030
20	0,0010	0,0027	0,0010	0,0022	0,0011	0,0022	0,0010	0,0024
40	0,0007	0,0019	0,0009	0,0020	0,0009	0,0020	0,0008	0,0019
60	0,0007	0,0015	0,0009	0,0018	0,0008	0,0015	0,0007	0,0018
80	0,0005	0,0017	0,0009	0,0017	0,0007	0,0017	0,0007	0,0017
MEDIA	**0,0012**	**0,0029**	**0,0015**	**0,0031**	**0,0037**	**0,0065**	**0,0043**	**0,0072**

Tabla 11: Desviación típica de las frecuencias (campanas del sistema equivalente de un grado de libertad sin simetría)

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$
1	0,0036	0,0073	0,0048	0,0115	0,1881	0,4055	0,3222	0,3707
2	0,0026	0,0055	0,0028	0,0061	0,1012	0,0540	0,2597	0,1444
5	0,0019	0,0034	0,0020	0,0036	0,0021	0,0038	0,0022	0,0037
10	0,0012	0,0031	0,0014	0,0027	0,0017	0,0030	0,0017	0,0030
20	0,0010	0,0027	0,0010	0,0022	0,0011	0,0022	0,0010	0,0024
40	0,0007	0,0019	0,0009	0,0020	0,0009	0,0020	0,0008	0,0019
60	0,0007	0,0015	0,0009	0,0018	0,0008	0,0015	0,0007	0,0018
80	0,0005	0,0017	0,0009	0,0017	0,0007	0,0017	0,0007	0,0017
MEDIA	**0,0012**	**0,0029**	**0,0015**	**0,0031**	**0,0037**	**0,0064**	**0,0043**	**0,0073**

Tabla 12: Desviación típica de las frecuencias (campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría)

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
1	1,4282	2,0970	1,1338	1,9194	0,9704	1,6762	0,3968	0,2216
2	1,4641	2,1297	1,1269	1,9692	1,0733	1,9613	1,0677	1,8564
5	1,4381	2,1578	1,1677	2,0281	1,0501	1,9606	0,9968	1,9582
10	1,4553	2,1855	1,1671	2,0580	1,0569	2,0058	1,0367	1,9717
20	1,4444	2,1835	1,1524	2,0423	1,0673	2,0041	1,0505	1,9797
40	1,4471	2,1753	1,1579	2,0463	1,0794	2,0079	1,0455	2,0069
60	1,4452	2,1874	1,1575	2,0389	1,0803	2,0157	1,0447	1,9982
80	1,4483	2,1796	1,1503	2,0463	1,0706	2,0117	1,0570	2,0047
MEDIA	**1,4463**	**2,1618**	**1,1516**	**2,0180**	**1,0555**	**1,9522**	**0,9239**	**1,4974**

Tabla 13: Amortiguamiento Medio para campanas del sistema equivalente de un grado de libertad sin simetría

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
1	1,4284	2,0951	1,1335	1,9186	0,9403	1,6749	0,2883	0,2051
2	1,4641	2,1289	1,1269	1,9677	1,0732	1,9596	1,0579	1,8519
5	1,4381	2,1578	1,1677	2,0273	1,0500	1,9579	0,9968	1,9582
10	1,4553	2,1852	1,1671	2,0580	1,0569	2,0046	1,0367	1,9694
20	1,4444	2,1835	1,1524	2,0423	1,0673	2,0041	1,0505	1,9778
40	1,4471	2,1752	1,1579	2,0463	1,0794	2,0079	1,0455	2,0065
60	1,4452	2,1874	1,1575	2,0389	1,0803	2,0157	1,0447	1,9982
80	1,4483	2,1795	1,1503	2,0463	1,0706	2,0116	1,0570	2,0046
MEDIA	**1,4463**	**2,1614**	**1,1516**	**2,0176**	**1,0513**	**1,9513**	**0,8867**	**1,4821**

Tabla 14: Amortiguamiento Medio para campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$
1	0,2252	0,3318	0,2961	0,4874	0,5542	0,6436	0,6496	0,2359
2	0,1628	0,2267	0,1825	0,3032	0,2578	0,3064	0,6656	0,4372
5	0,0969	0,1723	0,1152	0,1766	0,1257	0,1762	0,1269	0,1657
10	0,0619	0,1030	0,0869	0,1369	0,1030	0,1327	0,0877	0,1402
20	0,0426	0,0907	0,0657	0,0880	0,0699	0,0994	0,0644	0,0987
40	0,0339	0,0526	0,0410	0,0715	0,0471	0,0665	0,0472	0,0722
60	0,0253	0,0441	0,0318	0,0536	0,0359	0,0607	0,0447	0,0527
80	0,0234	0,0406	0,0261	0,0464	0,0302	0,0559	0,0347	0,0480
MEDIA	**0,0609**	**0,1017**	**0,0768**	**0,1240**	**0,0949**	**0,1339**	**0,1107**	**0,1201**

Tabla 15: Desviación típica de coeficientes de amortiguamiento

(campanas del sistema equivalente de un grado de libertad sin simetría)

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$
1	0,2251	0,3300	0,2957	0,4857	0,4954	0,6508	0,5280	0,2205
2	0,1628	0,2261	0,1825	0,3013	0,2586	0,3079	0,6710	0,4605
5	0,0969	0,1723	0,1152	0,1764	0,1257	0,1752	0,1270	0,1652
10	0,0619	0,1029	0,0869	0,1369	0,1030	0,1333	0,0877	0,1386
20	0,0426	0,0907	0,0657	0,0880	0,0699	0,0994	0,0643	0,0984
40	0,0339	0,0526	0,0410	0,0715	0,0471	0,0665	0,0472	0,0721
60	0,0253	0,0441	0,0318	0,0536	0,0359	0,0607	0,0447	0,0527
80	0,0234	0,0406	0,0261	0,0464	0,0302	0,0559	0,0347	0,0480
MEDIA	**0,0608**	**0,1016**	**0,0768**	**0,1238**	**0,0936**	**0,1341**	**0,1080**	**0,1196**

Tabla 16: Desviación típica de coeficientes de amortiguamiento

(campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría)

A continuación se muestran los valores de las tablas anteriores representados, sólo para nfft=1024, se representa con color negro las gráficas de las campanas del sistema equivalente de un grado de libertad sin simetría y de color azul las que tienen simetría.

Leyenda de las figuras:

Sin simetría

Con simetría

Valores teóricos

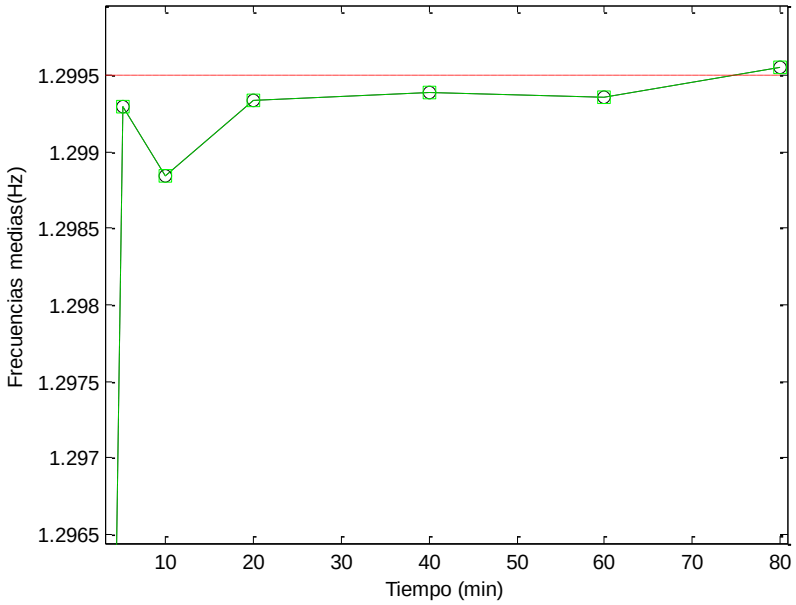


Ilustración 45: Frecuencias Medias 1er Modo en caso de campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría y en caso de no simetría

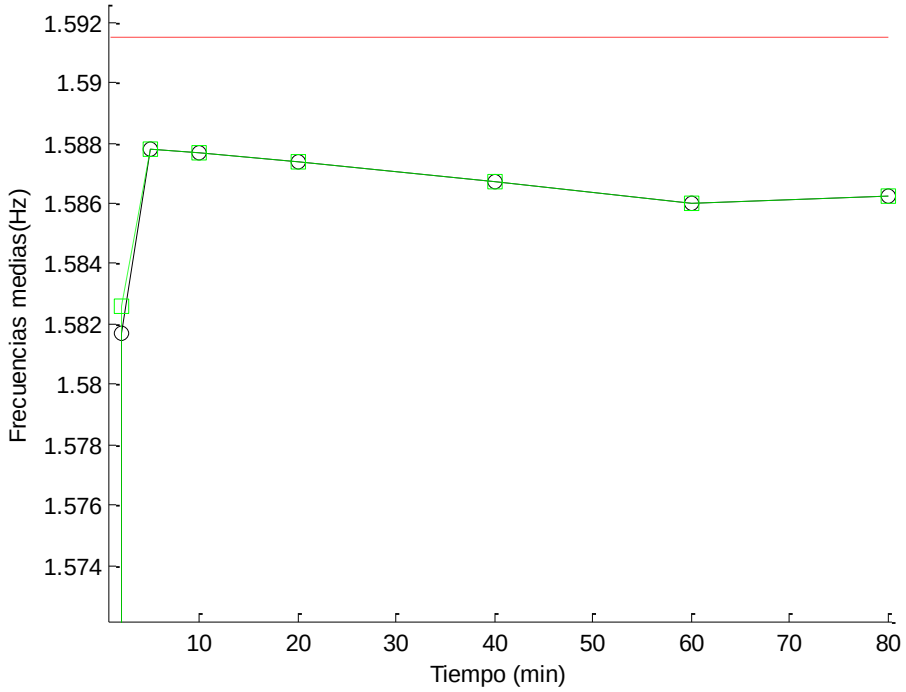


Ilustración 46: Frecuencias Medias 2do modo en caso de campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría y en caso de no simetría

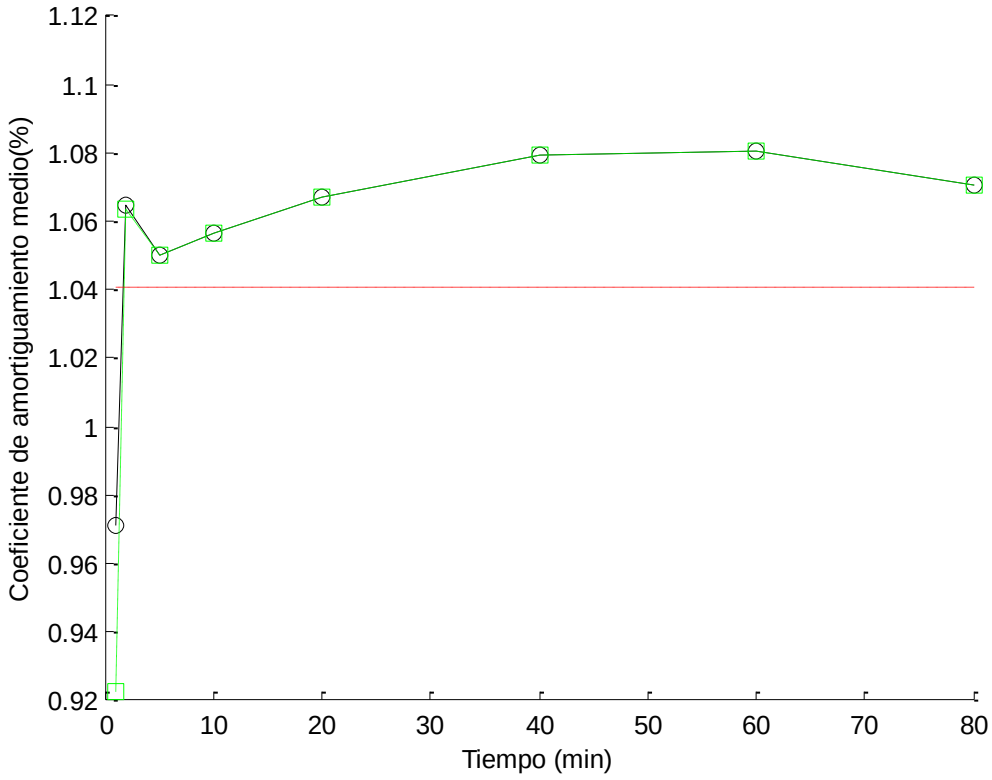


Ilustración 47: Coeficiente de Coeficientes de amortiguamiento Medios, 1er Modo,en caso de campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría y de no simetría

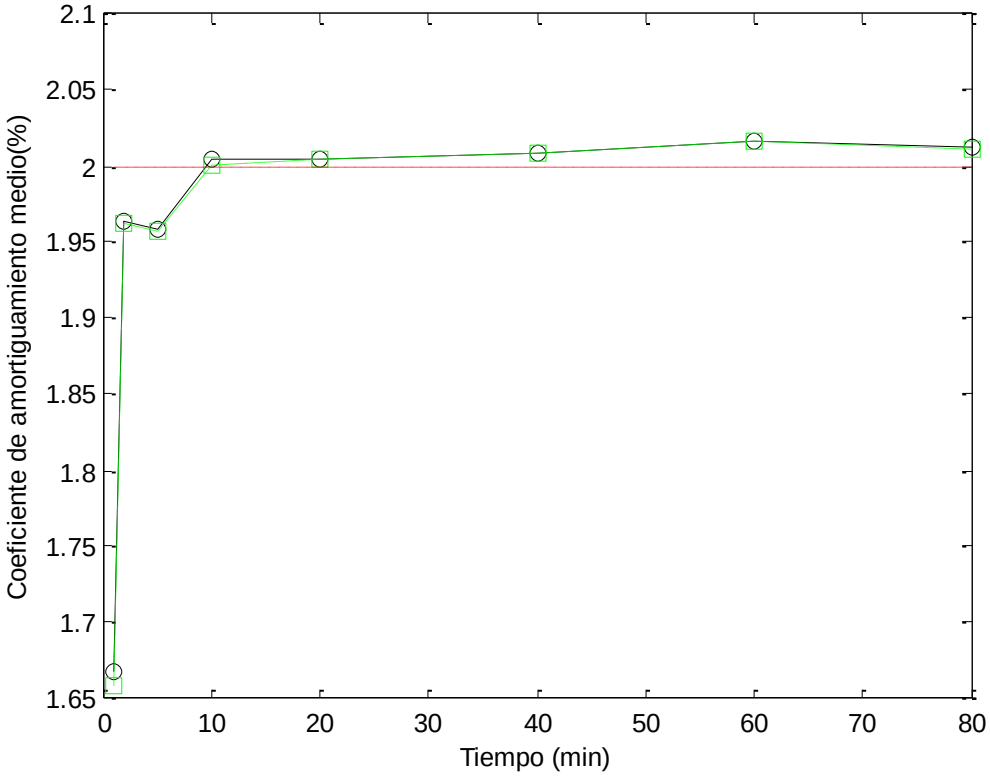


Ilustración 48: Coeficiente de Coeficientes de amortiguamiento Medios, 2do Modo, en caso de campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría y de no simetría

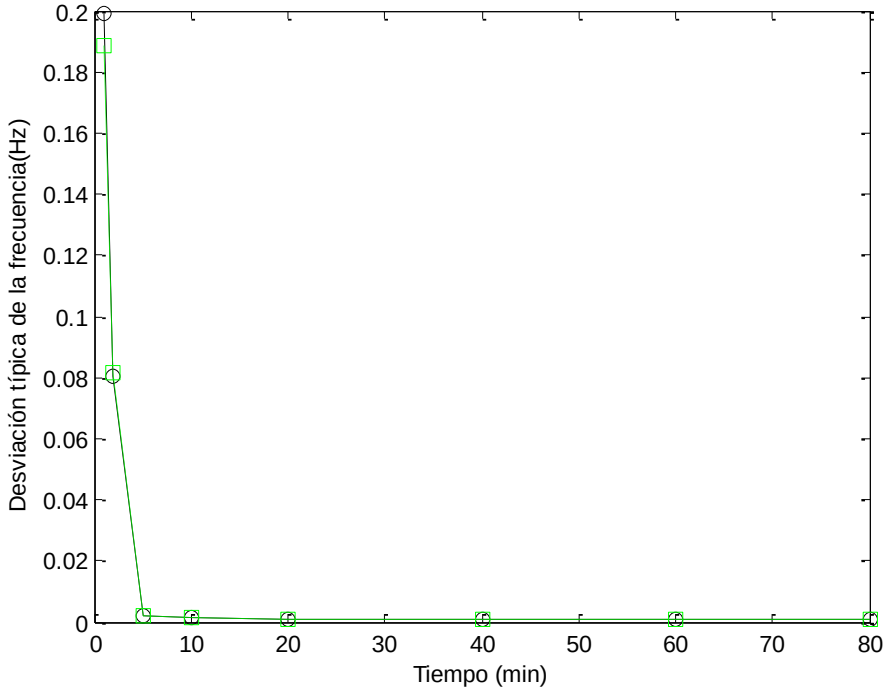


Ilustración 49: Desviación típica de las frecuencias, 1er Modo, caso de campanas del sistema equivalente de un grado de libertadcon simetría y no simetría.

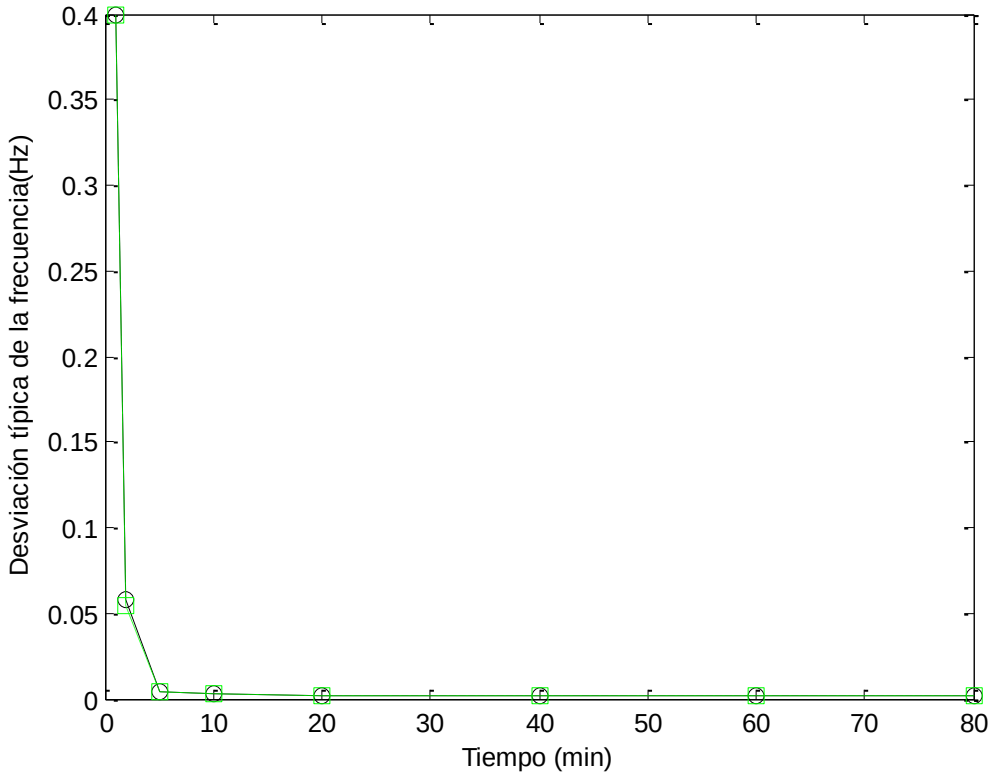


Ilustración 50: Desviación típica de las frecuencias, 2do Modo, caso de campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría y sin simetría.

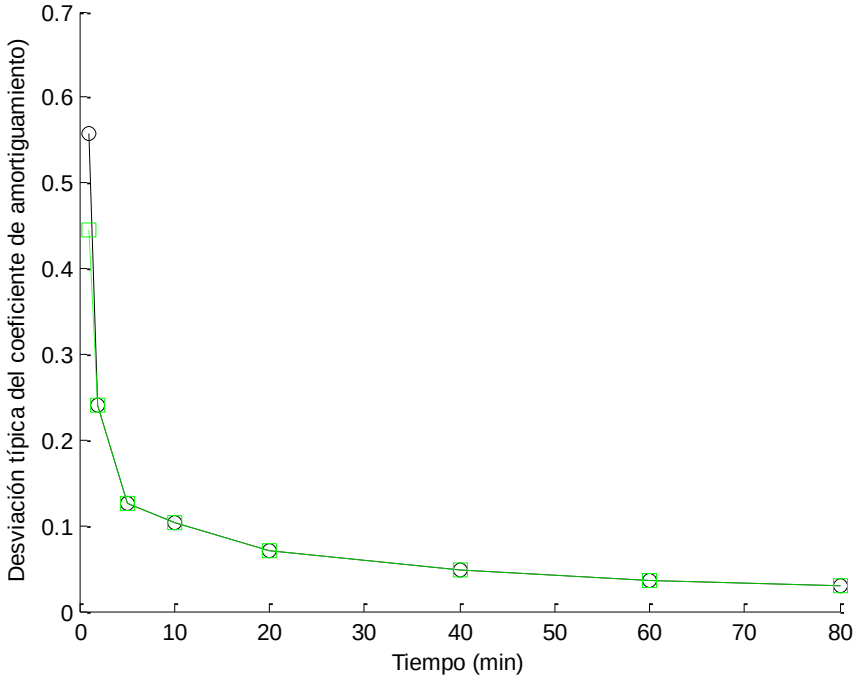


Ilustración 51: Desviación típica del coeficiente de amortiguamiento, 1er Modo, caso de campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría y sin simetría.

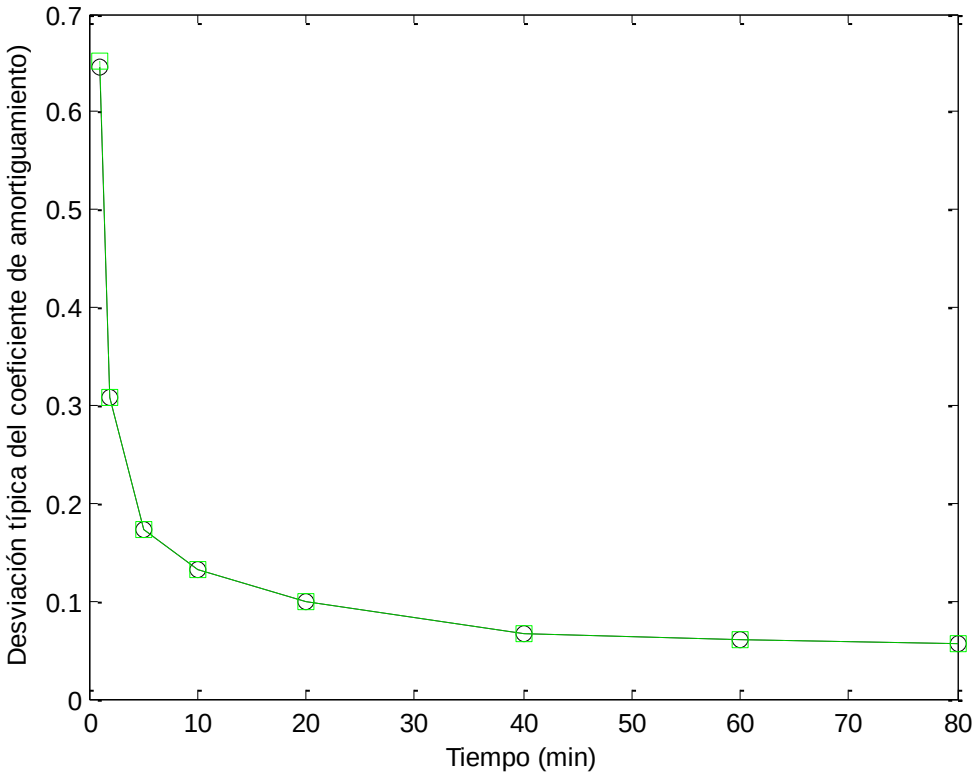


Ilustración 52: Desviación típica del coeficiente de amortiguamiento, 1er Modo, caso de campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría y sin simetría.

4.2.2.1 CONCLUSIÓN

Tanto en el caso de frecuencias, como en el caso de coeficientes de amortiguamiento, las diferencias para ambos parámetros son muy poco significativas. Se ha optado por establecer el criterio de campanas del sistema equivalente de un grado de libertad con simetría para todos los casos posteriores.

4.2.3 ELECCIÓN DE LA MAC_b ÓPTIMA

A continuación se muestra el estudio realizado para cuatro diferentes valores del parámetro MAC_b, con el objetivo de fijar el más óptimo.

Teniendo en cuenta los parámetros de entrada del algoritmo:

- T_{low}=0.2; T_{high}=0.9
- Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad simétricas
- f_{sample}=0.2
- f_{sample}(spline)=0.02

4.2.3.1 $MAC_b \geq 0.6$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,2990	1,5892	1,2987	1,5898	1,2136	1,3864	0,6891	0,8766
2	1,2996	1,5892	1,2989	1,5895	1,2791	1,5818	1,1984	1,5666
5	1,2997	1,5876	1,2992	1,5876	1,2993	1,5878	1,2992	1,5886
10	1,2997	1,5872	1,2991	1,5880	1,2988	1,5877	1,2990	1,5877
20	1,2994	1,5874	1,2990	1,5871	1,2993	1,5874	1,2993	1,5875
40	1,2997	1,5873	1,2988	1,5865	1,2994	1,5867	1,2994	1,5869
60	1,2996	1,5877	1,2989	1,5861	1,2994	1,5860	1,2994	1,5864
80	1,2997	1,5873	1,2989	1,5862	1,2995	1,5863	1,2995	1,5862
MEDIA	**1,2995**	**1,5879**	**1,2989**	**1,5876**	**1,2857**	**1,5598**	**1,1882**	**1,4713**

Tabla 17: Frecuencias Medias para $MAC_b \geq 0.6$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$
1	0,0036	0,0073	0,0048	0,0115	0,1881	0,4055	0,3222	0,3707
2	0,0026	0,0055	0,0028	0,0061	0,1012	0,0540	0,2597	0,1444
5	0,0019	0,0034	0,0020	0,0036	0,0021	0,0038	0,0022	0,0037
10	0,0012	0,0031	0,0014	0,0027	0,0017	0,0030	0,0017	0,0030
20	0,0010	0,0027	0,0010	0,0022	0,0011	0,0022	0,0010	0,0024
40	0,0007	0,0019	0,0009	0,0020	0,0009	0,0020	0,0008	0,0019
60	0,0007	0,0015	0,0009	0,0018	0,0008	0,0015	0,0007	0,0018
80	0,0005	0,0017	0,0009	0,0017	0,0007	0,0017	0,0007	0,0017
MEDIA	**0,0012**	**0,0029**	**0,0015**	**0,0031**	**0,0037**	**0,0064**	**0,0043**	**0,0073**

Tabla 18: Desviación típica de las frecuencias para $MAC_b \geq 0.6$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
1	1,4284	2,0951	1,1335	1,9186	0,9403	1,6749	0,2883	0,2051
2	1,4641	2,1289	1,1269	1,9677	1,0732	1,9596	1,0579	1,8519
5	1,4381	2,1578	1,1677	2,0273	1,0500	1,9579	0,9968	1,9582
10	1,4553	2,1852	1,1671	2,0580	1,0569	2,0046	1,0367	1,9694
20	1,4444	2,1835	1,1524	2,0423	1,0673	2,0041	1,0505	1,9778
40	1,4471	2,1752	1,1579	2,0463	1,0794	2,0079	1,0455	2,0065
60	1,4452	2,1874	1,1575	2,0389	1,0803	2,0157	1,0447	1,9982
80	1,4483	2,1795	1,1503	2,0463	1,0706	2,0116	1,0570	2,0046
MEDIA	**1,4463**	**2,1614**	**1,1516**	**2,0176**	**1,0513**	**1,9513**	**0,8867**	**1,4821**

Tabla 19: Amortiguamiento Medio para $MAC_b \geq 0.6$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$
1	0,2251	0,3300	0,2957	0,4857	0,4954	0,6508	0,5280	0,2205
2	0,1628	0,2261	0,1825	0,3013	0,2586	0,3079	0,6710	0,4605
5	0,0969	0,1723	0,1152	0,1764	0,1257	0,1752	0,1270	0,1652
10	0,0619	0,1029	0,0869	0,1369	0,1030	0,1333	0,0877	0,1386
20	0,0426	0,0907	0,0657	0,0880	0,0699	0,0994	0,0643	0,0984
40	0,0339	0,0526	0,0410	0,0715	0,0471	0,0665	0,0472	0,0721
60	0,0253	0,0441	0,0318	0,0536	0,0359	0,0607	0,0447	0,0527
80	0,0234	0,0406	0,0261	0,0464	0,0302	0,0559	0,0347	0,0480
MEDIA	**0,0608**	**0,1016**	**0,0768**	**0,1238**	**0,0936**	**0,1341**	**0,1080**	**0,1196**

Tabla 20: Desviación típica de coeficientes de amortiguamiento para $MAC_b \geq 0.6$

4.2.3.2 $MAC_b \geq 0.7$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,2989	1,5892	1,2988	1,5905	1,2197	1,3887	0,7961	0,9587
2	1,2996	1,5891	1,2988	1,5881	1,2857	1,5826	1,2055	1,5408
5	1,2997	1,5876	1,2992	1,5875	1,2993	1,5878	1,2992	1,5886
10	1,2997	1,5872	1,2991	1,5880	1,2988	1,5877	1,2990	1,5877
20	1,2994	1,5874	1,2990	1,5871	1,2993	1,5874	1,2993	1,5875
40	1,2997	1,5873	1,2988	1,5865	1,2994	1,5867	1,2994	1,5868
60	1,2996	1,5877	1,2989	1,5861	1,2994	1,5860	1,2994	1,5864
80	1,2997	1,5873	1,2989	1,5862	1,2995	1,5863	1,2995	1,5862
MEDIA	**1,2995**	**1,5879**	**1,2990**	**1,5875**	**1,2874**	**1,5602**	**1,2107**	**1,4847**

Tabla 21: Frecuencias Medias para campanas del sistema equivalente de un grado de libertad para $MAC_b \geq 0.7$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$
1	0,0036	0,0072	0,0047	0,0070	0,1887	0,3991	0,3290	0,3639
2	0,0026	0,0055	0,0027	0,0144	0,0814	0,0540	0,2495	0,2066
5	0,0019	0,0034	0,0020	0,0035	0,0021	0,0039	0,0022	0,0038
10	0,0012	0,0031	0,0014	0,0027	0,0017	0,0029	0,0016	0,0032
20	0,0010	0,0027	0,0010	0,0022	0,0011	0,0022	0,0010	0,0025
40	0,0007	0,0019	0,0009	0,0020	0,0009	0,0020	0,0008	0,0018
60	0,0007	0,0015	0,0009	0,0018	0,0008	0,0015	0,0007	0,0018
80	0,0005	0,0017	0,0009	0,0017	0,0007	0,0017	0,0007	0,0017
MEDIA	**0,0012**	**0,0029**	**0,0015**	**0,0033**	**0,0036**	**0,0064**	**0,0043**	**0,0077**

Tabla 22: Desviación típica de las frecuencias para $MAC_b \geq 0.7$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
1	1,4276	2,0881	1,1332	1,9175	0,9227	1,6585	0,2629	0,1821
2	1,4634	2,1272	1,1264	1,9668	1,0636	1,9622	1,0481	1,8477
5	1,4380	2,1571	1,1676	2,0242	1,0501	1,9573	0,9962	1,9634
10	1,4553	2,1852	1,1671	2,0581	1,0568	2,0003	1,0367	1,9721
20	1,4444	2,1835	1,1524	2,0431	1,0674	2,0051	1,0502	1,9698
40	1,4471	2,1752	1,1579	2,0466	1,0794	2,0083	1,0454	2,0060
60	1,4452	2,1874	1,1574	2,0392	1,0803	2,0160	1,0446	1,9991
80	1,4483	2,1795	1,1503	2,0465	1,0706	2,0118	1,0570	2,0052
MEDIA	**1,4461**	**2,1601**	**1,1514**	**2,0172**	**1,0477**	**1,9489**	**0,8754**	**1,4599**

Tabla 23: Amortiguamiento Medio para $MAC_b \geq 0.7$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$
1	0,2240	0,3274	0,2959	0,4838	0,5578	0,6458	0,6977	0,2068
2	0,1634	0,2238	0,1822	0,2939	0,2396	0,3075	0,6446	0,4468
5	0,0969	0,1729	0,1151	0,1746	0,1260	0,1722	0,1268	0,1629
10	0,0619	0,1029	0,0869	0,1370	0,1031	0,1325	0,0876	0,1371
20	0,0426	0,0907	0,0657	0,0879	0,0700	0,0993	0,0645	0,0962
40	0,0339	0,0526	0,0410	0,0715	0,0471	0,0664	0,0472	0,0726
60	0,0253	0,0441	0,0317	0,0536	0,0359	0,0607	0,0447	0,0527
80	0,0234	0,0406	0,0261	0,0464	0,0302	0,0559	0,0347	0,0479
MEDIA	**0,0608**	**0,1014**	**0,0767**	**0,1232**	**0,0942**	**0,1336**	**0,1113**	**0,1175**

Tabla 24: Desviación típica de coeficientes de amortiguamiento para $MAC_b \geq 0.7$

4.2.3.3 $MAC_b \geq 0.8$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,2986	1,5900	1,2988	1,5822	1,2870	1,5816	0,9207	1,0089
2	1,2991	1,5912	1,2985	1,5904	1,2992	1,5903	1,2989	1,5846
5	1,2985	1,5905	1,2992	1,5907	1,2992	1,5906	1,2991	1,5899
10	1,2981	1,5909	1,2994	1,5913	1,2990	1,5912	1,2990	1,5913
20	1,2980	1,5911	1,2995	1,5913	1,2995	1,5910	1,2992	1,5912
40	1,2979	1,5909	1,2994	1,5910	1,2993	1,5910	1,2992	1,5913
60	1,2980	1,5909	1,2994	1,5911	1,2995	1,5911	1,2992	1,5915
80	1,2979	1,5909	1,2994	1,5910	1,2994	1,5912	1,2991	1,5912
MEDIA	**1,2983**	**1,5908**	**1,2992**	**1,5899**	**1,2978**	**1,5898**	**1,2444**	**1,5022**

Tabla 25: Frecuencias Medias para campanas del sistema equivalente de un grado de libertad para $MAC_b \geq 0.8$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$
1	0,0034	0,0069	0,0046	0,0569	0,0868	0,0464	0,3918	0,4421
2	0,0026	0,0041	0,0027	0,0051	0,0030	0,0052	0,0028	0,0141
5	0,0020	0,0027	0,0018	0,0032	0,0017	0,0031	0,0018	0,0035
10	0,0015	0,0020	0,0016	0,0019	0,0014	0,0021	0,0014	0,0020
20	0,0011	0,0010	0,0012	0,0015	0,0010	0,0018	0,0010	0,0017
40	0,0011	0,0000	0,0010	0,0012	0,0010	0,0016	0,0008	0,0015
60	0,0010	0,0000	0,0009	0,0010	0,0008	0,0014	0,0009	0,0014
80	0,0009	0,0000	0,0008	0,0007	0,0007	0,0014	0,0007	0,0011
MEDIA	**0,0015**	**0,0000**	**0,0015**	**0,0026**	**0,0021**	**0,0031**	**0,0025**	**0,0045**

Tabla 26: Desviación típica de las frecuencias para $MAC_b \geq 0.8$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
1	1,3507	2,0315	1,1383	1,9164	1,0804	1,8330	0,6516	0,3111
2	1,3747	2,0783	1,1189	1,9440	1,0911	1,9419	1,0313	1,7854
5	1,3495	2,1114	1,1443	1,9897	1,0432	1,9163	1,0000	1,9052
10	1,3564	2,1348	1,1399	2,0325	1,0518	1,9470	1,0355	1,9230
20	1,3470	2,1330	1,1297	2,0091	1,0604	1,9779	1,0487	1,9179
40	1,3503	2,1207	1,1349	2,0162	1,0709	1,9834	1,0441	1,9718
60	1,3468	2,1333	1,1342	2,0079	1,0732	1,9846	1,0430	1,9731
80	1,3502	2,1256	1,1288	2,0143	1,0633	1,9817	1,0523	1,9787
MEDIA	**1,3532**	**2,1083**	**1,1336**	**1,9909**	**1,0667**	**1,9451**	**0,9779**	**1,5301**

Tabla 27: Amortiguamiento Medio para $MAC_b \geq 0.8$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$
1	0,2059	0,2742	0,2561	0,3577	0,3837	0,4005	1,0128	0,3105
2	0,1536	0,1946	0,1586	0,2118	0,1894	0,2158	0,1994	0,3039
5	0,0920	0,1503	0,0950	0,1480	0,1129	0,1275	0,1076	0,1187
10	0,0590	0,0965	0,0712	0,1210	0,0796	0,1060	0,0691	0,1076
20	0,0404	0,0811	0,0578	0,0777	0,0606	0,0801	0,0567	0,0659
40	0,0319	0,0529	0,0341	0,0613	0,0443	0,0528	0,0415	0,0612
60	0,0229	0,0466	0,0280	0,0494	0,0330	0,0526	0,0391	0,0447
80	0,0222	0,0399	0,0232	0,0417	0,0280	0,0464	0,0298	0,0411
MEDIA	**0,0571**	**0,0942**	**0,0658**	**0,1037**	**0,0796**	**0,1024**	**0,0895**	**0,0986**

Tabla 28: Desviación típica de coeficientes de amortiguamiento para $MAC_b \geq 0.8$

4.2.3.4 $MAC_b \geq 0.9$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,2990	1,5866	1,2987	1,5807	1,2091	1,2629	0,8112	1,1331
2	1,2997	1,5891	1,2981	1,5894	1,2848	1,5821	1,1763	1,4037
5	1,2997	1,5876	1,2992	1,5872	1,2994	1,5874	1,2985	1,5867
10	1,2997	1,5872	1,2991	1,5881	1,2989	1,5876	1,2993	1,5873
20	1,2994	1,5874	1,2990	1,5872	1,2993	1,5872	1,2990	1,5874
40	1,2997	1,5873	1,2988	1,5865	1,2994	1,5867	1,2994	1,5866
60	1,2996	1,5877	1,2989	1,5861	1,2994	1,5860	1,2993	1,5863
80	1,2997	1,5873	1,2989	1,5862	1,2995	1,5863	1,2994	1,5865
MEDIA	**1,2996**	**1,5875**	**1,2989**	**1,5864**	**1,2859**	**1,5416**	**1,2098**	**1,4983**

Tabla 29: Frecuencias Medias para $MAC_b \geq 0.9$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$
1	0,0036	0,0278	0,0048	0,0661	0,2040	0,4675	0,8112	1,1331
2	0,0026	0,0056	0,0088	0,0061	0,0861	0,0457	1,1763	1,4037
5	0,0019	0,0034	0,0020	0,0037	0,0021	0,0040	1,2985	1,5867
10	0,0012	0,0032	0,0014	0,0028	0,0017	0,0031	1,2993	1,5873
20	0,0010	0,0027	0,0010	0,0022	0,0011	0,0022	1,2990	1,5874
40	0,0007	0,0019	0,0009	0,0020	0,0009	0,0020	1,2994	1,5866
60	0,0007	0,0015	0,0009	0,0018	0,0008	0,0016	1,2993	1,5863
80	0,0005	0,0017	0,0009	0,0017	0,0007	0,0017	1,2994	1,5865
MEDIA	**0,0012**	**0,0035**	**0,0017**	**0,0039**	**0,0037**	**0,0065**	**1,2098**	**1,4983**

Tabla 30: Desviación típica de las frecuencias para $MAC_b \geq 0.9$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
1	1,4238	2,0852	1,1299	1,9112	0,9377	1,3886	0,1854	0,1329
2	1,4598	2,1031	1,1260	1,9708	1,0629	1,9610	0,9101	1,5834
5	1,4370	2,1516	1,1673	2,0056	1,0492	1,9696	1,0135	1,9631
10	1,4545	2,1841	1,1667	2,0440	1,0565	1,9849	1,0581	2,0062
20	1,4444	2,1836	1,1524	2,0417	1,0674	1,9883	1,0414	1,9975
40	1,4471	2,1752	1,1580	2,0478	1,0793	2,0077	1,0442	1,9712
60	1,4452	2,1874	1,1575	2,0399	1,0803	2,0175	1,0437	2,0030
80	1,4483	2,1795	1,1504	2,0472	1,0706	2,0133	1,0452	1,9917
MEDIA	**1,4450**	**2,1559**	**1,1509**	**2,0130**	**1,0495**	**1,9039**	**0,8250**	**1,3782**

Tabla 31: Amortiguamiento Medio para $MAC_b \geq 0.9$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$
1	0,2223	0,3022	0,2980	0,4742	0,5145	0,6379	0,1884	0,0884
2	0,1606	0,2022	0,1816	0,2869	0,2433	0,3259	0,4305	0,5823
5	0,0970	0,1679	0,1150	0,1618	0,1261	0,1660	0,1654	0,1686
10	0,0619	0,1030	0,0866	0,1346	0,1028	0,1202	0,0940	0,1186
20	0,0426	0,0908	0,0658	0,0854	0,0699	0,0981	0,0694	0,1025
40	0,0339	0,0526	0,0410	0,0715	0,0472	0,0652	0,0498	0,0588
60	0,0253	0,0441	0,0317	0,0538	0,0360	0,0604	0,0406	0,0556
80	0,0234	0,0406	0,0261	0,0465	0,0302	0,0561	0,0355	0,0505
MEDIA	**0,0607**	**0,0988**	**0,0767**	**0,1208**	**0,0935**	**0,1316**	**0,0944**	**0,1072**

Tabla 32: Desviación típica de coeficientes de amortiguamiento para $MAC_b \geq 0.9$

4.2.3.5 CONCLUSIONES

A pesar de tener resultados muy similares, se ha elaborado a la siguiente tabla de eficiencia según las tablas anteriores en comparación con el valor teórico de la frecuencia y del amortiguamiento.

En el caso de la frecuencia, se hará de forma análoga a como se calculó en el apartado anterior, en la comparación con el método PP (ver ecuación (4.4)). Mientras que en el caso del coeficiente de amortiguamiento, se evaluará de forma similar, pero con su el valor calculado y el teórico (ver ecuación (4.5)).

$$\frac{\xi_i - \xi_t}{\xi_t} \cdot 100 \qquad (4.5)$$

donde:

- f_t o ξ_t Es la frecuencia o el amortiguamiento teórica según el modo
- f_i o ξ_i Es la frecuencia o el amortiguamiento calculado

A continuación se procede a evaluar los la duración de señal de entrada más significativa para cada MAC_b y el cálculo de su eficiencia, en la columna de la duración de la señal de entrada, se indica también la diferencia en tanto por ciento respecto al valor teórico.

$$\boldsymbol{MAC_b \geq 0.6}$$

Duración de la señal de entrada (min)	**nfft=256**		**nfft=512**		**nfft=1024**		**nfft=2048**	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	fco_2	f_1	f_2
40(%)	0,0157	-0,2668	-0,0508	-0,3148	-0,0086	-0,3003	-0,0115	-0,2888
60(%)	0,0142	-0,2613	-0,0448	-0,3342	0,0038	-0,3284	-0,0023	-0,3327

Tabla 33: Resumen de la frecuencia media para $MAC_b \geq 0.6$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
40(%)	39,0143	8,7622	11,2291	2,3143	3,6887	0,3948	0,4333	0,3231
60(%)	39,1256	8,9771	10,4991	2,3134	2,8465	0,5816	1,5379	0,2322

Tabla 34: Resumen del amortiguamiento medio para $MAC_b \geq 0.6$

$$MAC_b \geq 0.7$$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
40(%)	0,0157	-0,2668	-0,0508	-0,3148	-0,0086	-0,3003	-0,0104	-0,2946
60(%)	0,0142	-0,2613	-0,0461	-0,3342	0,0038	-0,3284	-0,0017	-0,3327

Tabla 35: Resumen de la frecuencia media para $MAC_b \geq 0.7$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
40(%)	39,0143	8,7622	11,2282	2,3295	3,6892	0,4138	0,4242	0,3019
60(%)	39,1256	8,9771	10,5024	2,3256	2,8470	0,5915	1,5371	0,2615

Tabla 36: Resumen del amortiguamiento medio para $MAC_b \geq 0.7$

$$MAC_b \geq 0.8$$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
40(%)	-0,1243	-0,0371	-0,0070	-0,0297	-0,0166	-0,0325	-0,0234	-0,0149
60(%)	-0,1263	-0,0371	-0,0073	-0,0309	-0,0065	-0,0200	-0,0292	-0,0217

Tabla 37: Resumen de la frecuencia media para $MAC_b \geq 0.8$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
40(%)	29,7161	6,0337	9,0204	0,8086	2,8749	-0,8281	0,3003	-1,4123
60(%)	29,7035	6,2792	8,4308	0,7168	2,1421	-0,9155	1,0817	-1,0650

Tabla 38: Resumen del amortiguamiento medio para $MAC_b \geq 0.8$

$$MAC_b \geq 0.9$$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
40(%)	0,0157	-0,2668	-0,0522	-0,3148	-0,0098	-0,3043	-0,0108	-0,3077
60(%)	0,0142	-0,2613	-0,0461	-0,3342	0,0038	-0,3270	-0,0059	-0,3131

Tabla 39: Resumen de la frecuencia media para $MAC_b \geq 0.9$

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
40(%)	39,0143	8,7622	11,2376	2,3900	3,6781	0,3852	0,3089	-1,4391
60(%)	39,1256	8,9771	10,5081	2,3607	2,8424	0,6625	0,4007	-0,4160

Tabla 40: Resumen del amortiguamiento medio para $MAC_b \geq 0.9$

Tras contrastar diferentes parámetros estadísticos como frecuencias medias y coeficientes de amortiguamiento medios, la MAC que da resultados con menor porcentaje de error es la de 0.8 para una duración de 40 min.

MAC_b	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
(%)	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
$MAC_b \geq 0.6$	0,0157	-0,2668	-0,0508	-0,3148	-0,0086	-0,3003	-0,0115	-0,2888
$MAC_b \geq 0.7$	0,0157	-0,2668	-0,0508	-0,3148	-0,0086	-0,3003	-0,0104	-0,2946
$MAC_b \geq 0.8$	-0,1243	-0,0371	-0,0070	-0,0297	-0,0166	-0,0325	-0,0234	-0,0149
$MAC_b \geq 0.9$	0,0157	-0,2668	-0,0522	-0,3148	-0,0098	-0,3043	-0,0108	-0,3077

Tabla 41: Resultados para elección de la MAC_b óptima (frecuencias)

MAC_b	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
(%)	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
$MAC_b \geq 0.6$	39,0143	8,7622	11,2291	2,3143	3,6887	0,3948	0,4333	0,3231
$MAC_b \geq 0.7$	39,0143	8,7622	11,2282	2,3295	3,6892	0,4138	0,4242	0,3019
$MAC_b \geq 0.8$	29,7161	6,0337	9,0204	0,8086	2,8749	-0,8281	0,3003	-1,4123
$MAC_b \geq 0.9$	39,1256	8,9771	10,5081	2,3607	2,8424	0,6625	0,4007	-0,4160

Tabla 42: Resultados para elección de la MAC_b óptima (coeficientes de amortiguamiento)

A continuación se muestran las gráficas de la frecuencia media, y el coeficiente de amortiguamiento medio, para un nfft de 1024 puntos, para los diferentes casos de MAC_b, calculados anteriormente:

- = $\boldsymbol{MAC_b \geq 0.9}$
- = $\boldsymbol{MAC_b \geq 0.8}$
- = $\boldsymbol{MAC_b \geq 0.7}$
- =$\boldsymbol{MAC_b \geq 0.6}$
- ***valor teórico***

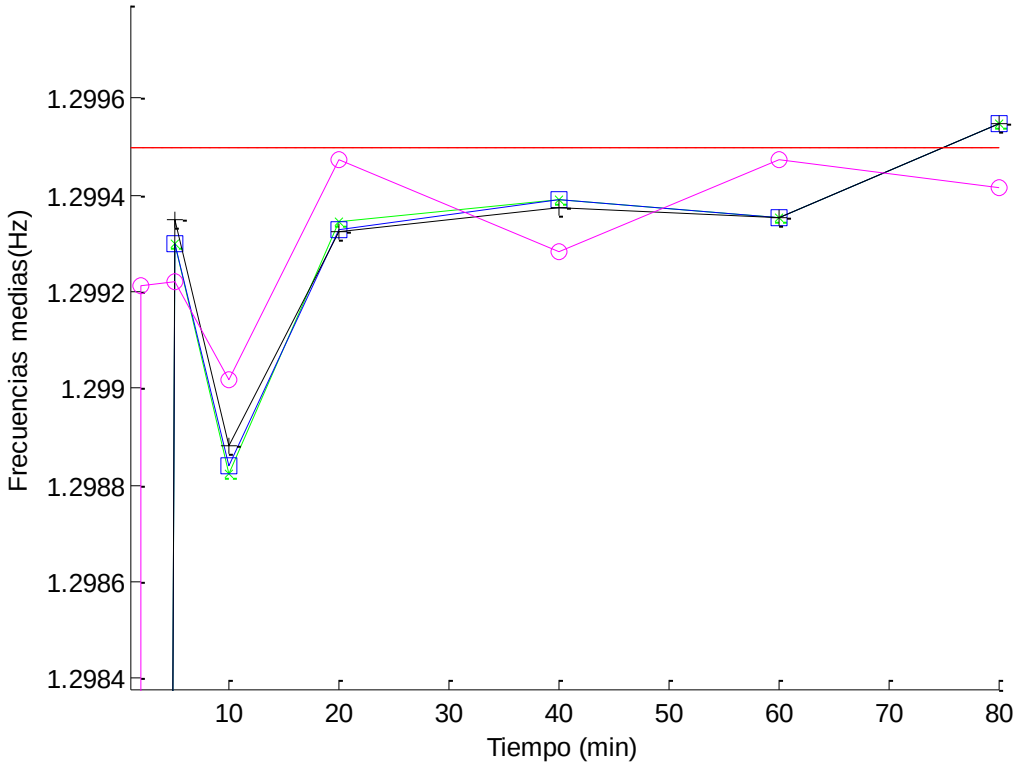


Ilustración 53: Comparación de las frecuencias medias del primer modo para distintos MAC

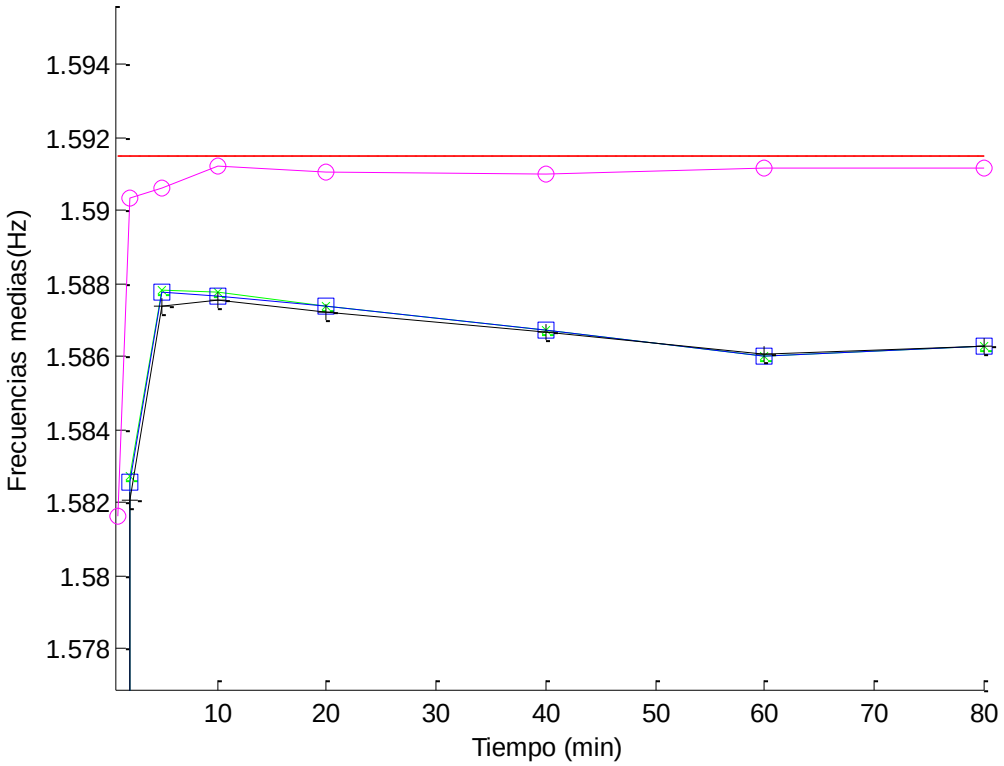


Ilustración 54: Comparación de las frecuencias medias del segundo modo para distintos MAC_b

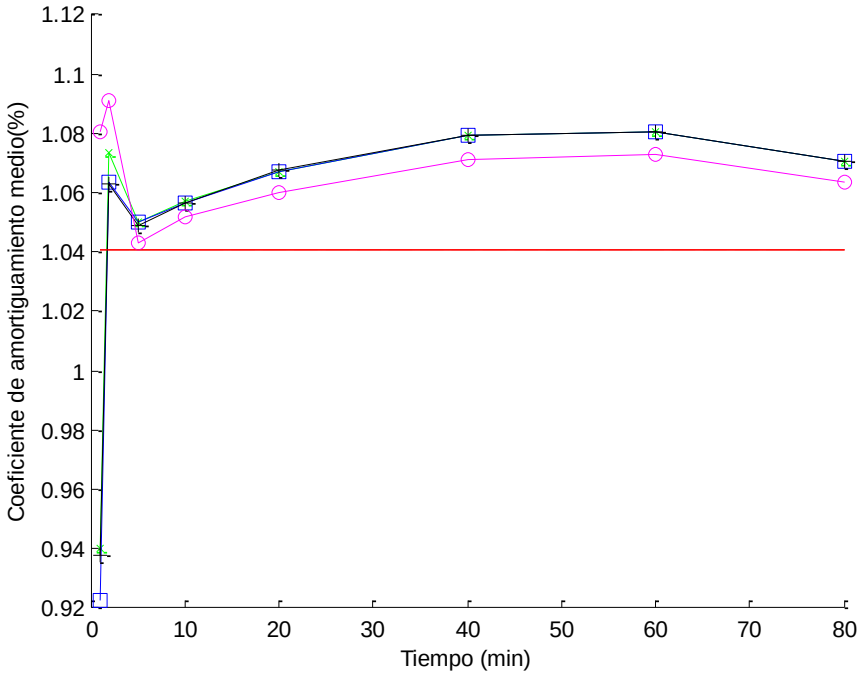


Ilustración 55: Comparación de los coeficientes de coeficientes de amortiguamiento medios del primer modo para distintos MAC_b

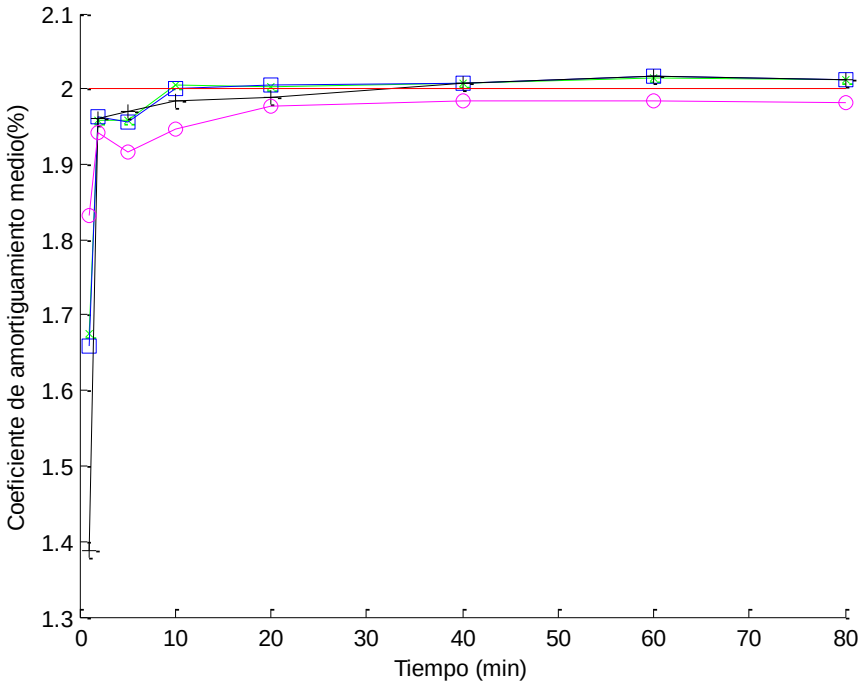


Ilustración 56: Comparación de los coeficientes de amortiguamiento medios del segundo modo para distintos MAC_b

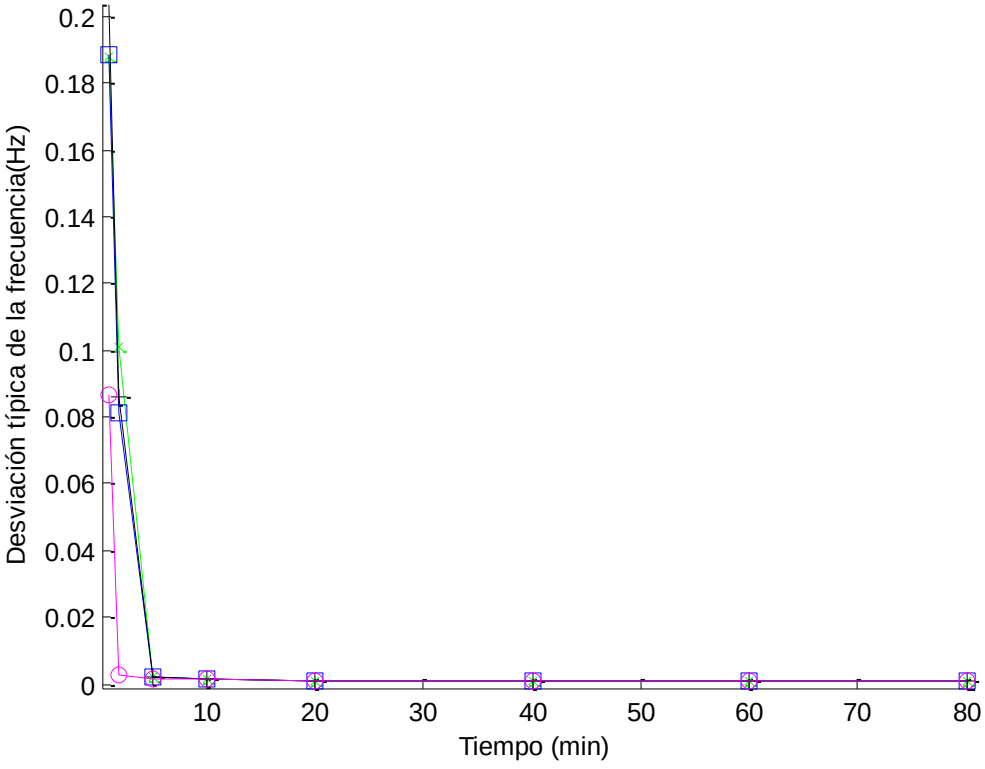


Ilustración 57: Comparación de a desviación típica de las frecuencias del primer modo para distintos MAC_b

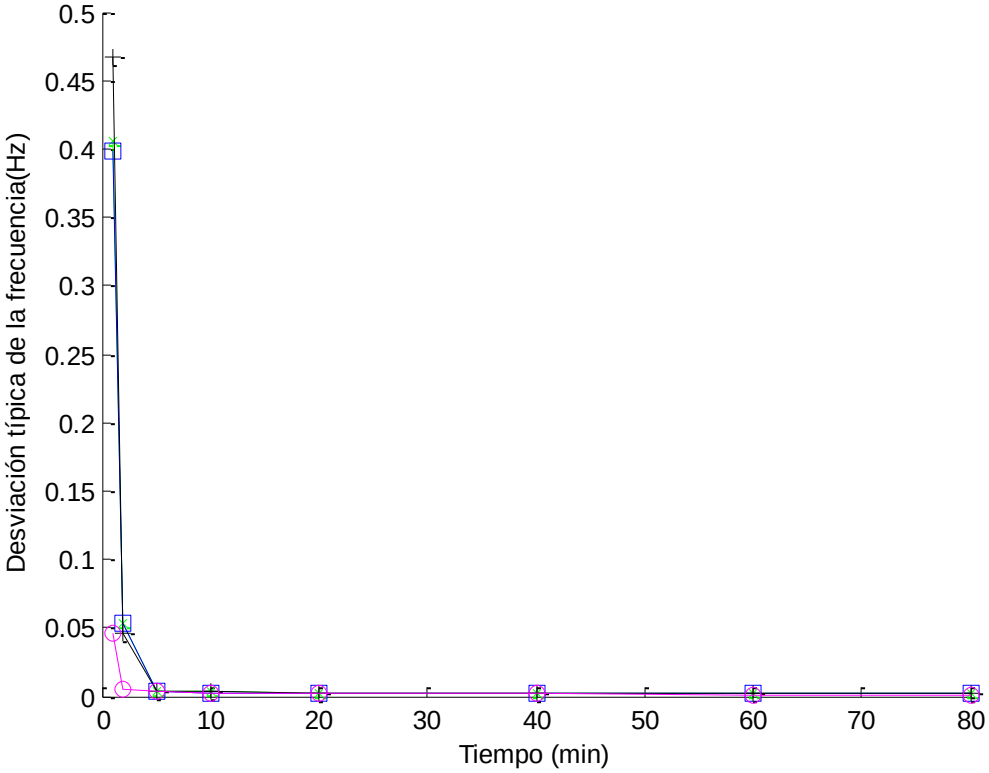


Ilustración 58: Comparación de a desviación típica de las frecuencias del segundo modo para distintos MAC_b

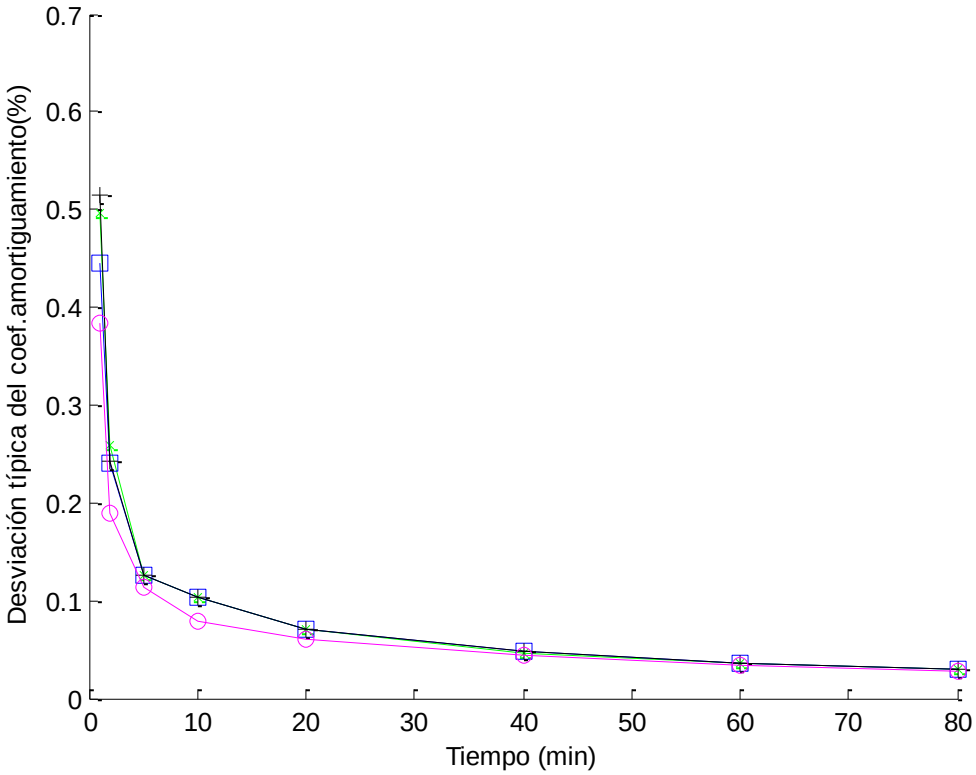


Ilustración 59: Comparación de a desviación típica de los coeficientes de amortiguamiento del primer modo para distintos MAC_b

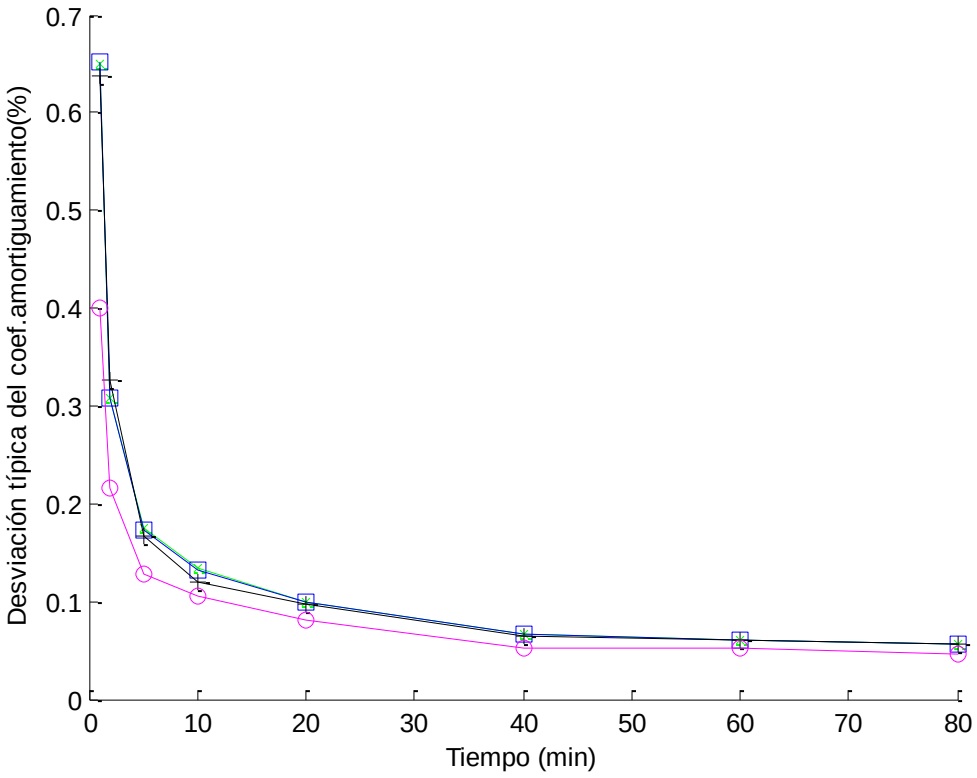


Ilustración 60: Comparación de a desviación típica de los amortiguamientos del segundo modo para distintos MAC_b

4.2.4 SELECCIÓN DE T_{HIGH} Y T_{LOW} PARA EL CÁLCULO DEL AMORTIGUAMIENTO

En este apartado, se ha ajustado los parámetros T_{high} y T_{low} para el cálculo del amortiguamiento, para ello se han simulado cuatro casos diferentes.

Teniendo en cuenta los parámetros de entrada del algoritmo:

- MAC_b=0.8
- Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad simétricas
- f_{sample}=0.2 Hz
- f_{sample}(spline)=0.02 Hz

4.2.4.1 CASO 1: T_{LOW} = 0.1; T_{HIGH} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,2988	1,5825	1,2580	1,3619	1,0200	0,9226	1,0390	1,2978
2	1,2978	1,5910	1,2852	1,5455	1,1673	1,2623	0,7715	0,7289
5	1,2997	1,5905	1,2995	1,5844	1,2939	1,5883	1,1767	1,4979
10	1,2997	1,5911	1,2993	1,5887	1,2989	1,5901	1,2903	1,5903
20	1,2994	1,5914	1,2992	1,5908	1,2992	1,5900	1,2992	1,5902
40	1,2997	1,5913	1,2992	1,5901	1,2994	1,5900	1,2992	1,5896
60	1,2996	1,5914	1,2994	1,5900	1,2992	1,5893	1,2992	1,5897
80	1,2996	1,5913	1,2994	1,5905	1,2991	1,5899	1,2989	1,5896
MEDIA	**1,2993**	**1,5901**	**1,2923**	**1,5533**	**1,2431**	**1,4429**	**1,1681**	**1,3956**

Tabla 43: Frecuencias Medias para el caso 1: T_{low} = 0.1; T_{high} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$
1	0,0045	0,0460	0,1205	0,3268	0,2686	0,2983	0,1911	0,2228
2	0,0149	0,0071	0,0735	0,1492	0,2134	0,4400	0,2710	0,3684
5	0,0023	0,0045	0,0023	0,0370	0,0401	0,0145	0,2524	0,2969
10	0,0018	0,0030	0,0017	0,0185	0,0021	0,0034	0,0766	0,0034

20	0,0014	0,0025	0,0011	0,0030	0,0013	0,0028	0,0014	0,0031
40	0,0010	0,0017	0,0009	0,0024	0,0010	0,0023	0,0010	0,0022
60	0,0009	0,0014	0,0009	0,0021	0,0009	0,0022	0,0009	0,0019
80	0,0008	0,0014	0,0008	0,0020	0,0008	0,0021	0,0008	0,0020
MEDIA	**0,0020**	**0,0037**	**0,0035**	**0,0134**	**0,0069**	**0,0108**	**0,0133**	**0,0147**

Tabla 44: Desviación típica para el caso 1: T_{low} = 0.1; T_{high} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	**nfft=256**		**nfft=512**		**nfft=1024**		**nfft=2048**	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
1	1,5492	2,0676	1,0758	1,3712	0,5754	0,4890	0,0944	0,0912
2	1,5887	2,1134	1,1162	1,8624	0,8571	1,5971	0,4273	0,5861
5	1,5614	2,2073	1,1932	1,9817	1,0087	1,9173	0,9017	1,7690
10	1,5840	2,2333	1,2073	2,0468	1,0620	1,9846	1,0159	1,9669
20	1,5707	2,2377	1,1923	2,0616	1,0814	1,9966	1,0416	1,9502
40	1,5738	2,2331	1,2042	2,0572	1,0884	2,0097	1,0464	2,0047
60	1,5724	2,2449	1,2040	2,0473	1,0882	2,0218	1,0440	1,9959
80	1,5754	2,2333	1,1949	2,0592	1,0818	2,0204	1,0607	2,0044
MEDIA	**1,5719**	**2,1954**	**1,1725**	**1,9207**	**0,9804**	**1,6254**	**0,6779**	**1,1428**

Tabla 45: Amortiguamiento Medio para el caso 1: T_{low} = 0.1; T_{high} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	**nfft=256**		**nfft=512**		**nfft=1024**		**nfft=2048**	
	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$
1	0,2383	0,4556	0,3899	0,5776	0,5667	0,3398	0,0452	0,0507
2	0,1725	0,3340	0,2403	0,4844	0,3715	0,6428	0,8381	0,5319
5	0,1080	0,2318	0,1565	0,2676	0,1832	0,2441	0,2665	0,4341
10	0,0649	0,1488	0,1178	0,1782	0,1514	0,1649	0,1430	0,1938
20	0,0453	0,1215	0,0884	0,1203	0,0891	0,1389	0,0933	0,1349
40	0,0344	0,0744	0,0556	0,0909	0,0642	0,0893	0,0673	0,0843
60	0,0257	0,0582	0,0410	0,0681	0,0493	0,0704	0,0629	0,0684
80	0,0236	0,0614	0,0334	0,0602	0,0432	0,0694	0,0511	0,0644
MEDIA	**0,0637**	**0,1424**	**0,1019**	**0,1668**	**0,1278**	**0,1644**	**0,1143**	**0,1355**

Tabla 46: Desviación típica de coeficientes de amortiguamiento para el caso 1: T_{low} = 0.1; T_{high} =0.9

4.2.4.2 CASO 2: T_{LOW} = 0.2; T_{HIGH} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,2989	1,5892	1,2989	1,5845	1,2134	1,3913	0,8093	1,0695
2	1,2996	1,5891	1,2988	1,5868	1,2850	1,5815	1,1978	1,5058
5	1,2997	1,5876	1,2992	1,5874	1,2993	1,5876	1,2992	1,5883
10	1,2997	1,5872	1,2991	1,5880	1,2988	1,5876	1,2990	1,5877
20	1,2994	1,5874	1,2990	1,5871	1,2993	1,5874	1,2994	1,5873
40	1,2997	1,5873	1,2988	1,5865	1,2994	1,5867	1,2994	1,5868
60	1,2996	1,5877	1,2989	1,5861	1,2994	1,5860	1,2994	1,5864
80	1,2997	1,5873	1,2989	1,5862	1,2995	1,5863	1,2995	1,5862
MEDIA	**1,2995**	**1,5879**	**1,2990**	**1,5866**	**1,2865**	**1,5604**	**1,2122**	**1,5008**

Tabla 47: Frecuencias Medias para el caso 2: T_{low} = 0.2; T_{high} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$
1	0,0036	0,0072	0,0048	0,0583	0,2001	0,3849	0,3329	0,3228
2	0,0026	0,0058	0,0027	0,0249	0,0843	0,0575	0,2582	0,2643
5	0,0019	0,0034	0,0020	0,0036	0,0021	0,0038	0,0021	0,0039
10	0,0012	0,0031	0,0014	0,0027	0,0017	0,0031	0,0017	0,0031
20	0,0010	0,0027	0,0010	0,0022	0,0011	0,0022	0,0010	0,0024
40	0,0007	0,0019	0,0009	0,0020	0,0009	0,0020	0,0008	0,0019
60	0,0007	0,0015	0,0009	0,0018	0,0008	0,0015	0,0007	0,0018
80	0,0005	0,0017	0,0009	0,0017	0,0007	0,0017	0,0007	0,0017
MEDIA	**0,0012**	**0,0029**	**0,0015**	**0,0046**	**0,0036**	**0,0065**	**0,0043**	**0,0079**

Tabla 48: Desviación típica para el caso 2: T_{low} = 0.2; T_{high} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
1	1,4263	2,0828	1,1319	1,9143	0,9412	1,5841	0,2331	0,1464
2	1,4622	2,1222	1,1262	1,9681	1,0627	1,9687	0,9707	1,7988
5	1,4379	2,1573	1,1675	2,0167	1,0501	1,9601	0,9955	1,9710
10	1,4549	2,1855	1,1669	2,0582	1,0567	1,9888	1,0364	1,9784
20	1,4444	2,1835	1,1524	2,0437	1,0673	2,0035	1,0501	1,9634
40	1,4471	2,1752	1,1579	2,0469	1,0794	2,0093	1,0453	2,0025
60	1,4452	2,1874	1,1575	2,0394	1,0803	2,0165	1,0446	2,0004
80	1,4483	2,1795	1,1504	2,0469	1,0706	2,0123	1,0569	2,0063
MEDIA	**1,4458**	**2,1589**	**1,1512**	**2,0162**	**1,0501**	**1.9429**	**0,8540**	**1.7334**

Tabla 49: Amortiguamiento Medio para el caso 2: T_{low} = 0.2; T_{high} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$
1	0,2229	0,3160	0,2953	0,4757	0,5084	0,6668	0,4224	0,1451
2	0,1629	0,2192	0,1821	0,2891	0,2396	0,3037	0,4129	0,5129
5	0,0969	0,1723	0,1151	0,1722	0,1260	0,1702	0,1265	0,1655
10	0,0619	0,1020	0,0867	0,1374	0,1028	0,1268	0,0876	0,1341
20	0,0426	0,0907	0,0657	0,0878	0,0701	0,1009	0,0647	0,0897
40	0,0339	0,0526	0,0410	0,0716	0,0471	0,0663	0,0472	0,0714
60	0,0253	0,0441	0,0317	0,0537	0,0359	0,0605	0,0447	0,0523
80	0,0234	0,0406	0,0261	0,0463	0,0302	0,0559	0,0347	0,0476
MEDIA	**0,0608**	**0,1005**	**0,0767**	**0,1225**	**0,0931**	**0,1332**	**0,0989**	**0,1129**

Tabla 50: Desviación típica de coeficientes de amortiguamiento para el caso 2: T_{low} = 0.2; T_{high} =0.9

4.2.4.3 CASO 3: T_{LOW} = 0.3; T_{HIGH} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,2986	1,5900	1,2988	1,5822	1,2870	1,5816	0,9207	1,0089
2	1,2991	1,5912	1,2985	1,5904	1,2992	1,5903	1,2989	1,5846
5	1,2985	1,5905	1,2992	1,5907	1,2992	1,5906	1,2991	1,5899
10	1,2981	1,5909	1,2994	1,5913	1,2990	1,5912	1,2990	1,5913
20	1,2980	1,5911	1,2995	1,5913	1,2995	1,5910	1,2992	1,5912
40	1,2979	1,5909	1,2994	1,5910	1,2993	1,5910	1,2992	1,5913
60	1,2980	1,5909	1,2994	1,5911	1,2995	1,5911	1,2992	1,5915
80	1,2979	1,5909	1,2994	1,5910	1,2994	1,5912	1,2991	1,5912
MEDIA	**1,2983**	**1,5908**	**1,2992**	**1,5899**	**1,2978**	**1,5898**	**1.2518**	**1.5175**

Tabla 51: Frecuencias Medias para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$
1	0,0034	0,0069	0,0046	0,0569	0,0868	0,0464	0,3918	0,4421
2	0,0026	0,0041	0,0027	0,0051	0,0030	0,0052	0,0028	0,0141
5	0,0020	0,0027	0,0018	0,0032	0,0017	0,0031	0,0018	0,0035
10	0,0015	0,0020	0,0016	0,0019	0,0014	0,0021	0,0014	0,0020
20	0,0011	0,0010	0,0012	0,0015	0,0010	0,0018	0,0010	0,0017
40	0,0011	0,0000	0,0010	0,0012	0,0010	0,0016	0,0008	0,0015
60	0,0010	0,0000	0,0009	0,0010	0,0008	0,0014	0,0009	0,0014
80	0,0009	0,0000	0,0008	0,0007	0,0007	0,0014	0,0007	0,0011
MEDIA	**0,0015**	**0,0000**	**0,0015**	**0,0026**	**0,0021**	**0,0031**	**0,0025**	**0,0045**

Tabla 52: Desviación típica de las frecuencias el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
1	1,3507	2,0315	1,1383	1,9164	1,0804	1,8330	0,6516	0,3111
2	1,3747	2,0783	1,1189	1,9440	1,0911	1,9419	1,0313	1,7854
5	1,3495	2,1114	1,1443	1,9897	1,0432	1,9163	1,0000	1,9052
10	1,3564	2,1348	1,1399	2,0325	1,0518	1,9470	1,0355	1,9230
20	1,3470	2,1330	1,1297	2,0091	1,0604	1,9779	1,0487	1,9179
40	1,3503	2,1207	1,1349	2,0162	1,0709	1,9834	1,0441	1,9718
60	1,3468	2,1333	1,1342	2,0079	1,0732	1,9846	1,0430	1,9731
80	1,3502	2,1256	1,1288	2,0143	1,0633	1,9817	1,0523	1,9787
MEDIA	**1,3532**	**2,1083**	**1,1336**	**1,9909**	**1,0667**	**1,9457**	**0.9883**	**1.7208**

Tabla 53: Amortiguamiento Medio para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$
1	0,2059	0,2742	0,2561	0,3577	0,3837	0,4005	1,0128	0,3105
2	0,1536	0,1946	0,1586	0,2118	0,1894	0,2158	0,1994	0,3039
5	0,0920	0,1503	0,0950	0,1480	0,1129	0,1275	0,1076	0,1187
10	0,0590	0,0965	0,0712	0,1210	0,0796	0,1060	0,0691	0,1076
20	0,0404	0,0811	0,0578	0,0777	0,0606	0,0801	0,0567	0,0659
40	0,0319	0,0529	0,0341	0,0613	0,0443	0,0528	0,0415	0,0612
60	0,0229	0,0466	0,0280	0,0494	0,0330	0,0526	0,0391	0,0447
80	0,0222	0,0399	0,0232	0,0417	0,0280	0,0464	0,0298	0,0411
MEDIA	**0,0571**	**0,0942**	**0,0658**	**0,1037**	**0,0796**	**0,1024**	**0,0895**	**0,0986**

Tabla 54: Desviación típica de coeficientes de amortiguamiento para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

4.2.4.4 CASO 4: T_{LOW} = 0.3; T_{HIGH} =0.8

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
1	1,2977	1,5898	1,2979	1,5796	1,2862	1,5814	0,9091	0,9984
2	1,2985	1,5903	1,2982	1,5902	1,2987	1,5878	1,2985	1,5867
5	1,2976	1,5897	1,2990	1,5902	1,2990	1,5904	1,2987	1,5869
10	1,2971	1,5896	1,2991	1,5893	1,2989	1,5905	1,2989	1,5903
20	1,2968	1,5890	1,2993	1,5893	1,2995	1,5891	1,2992	1,5902
40	1,2964	1,5881	1,2994	1,5882	1,2993	1,5885	1,2993	1,5883
60	1,2964	1,5879	1,2994	1,5880	1,2996	1,5888	1,2993	1,5885
80	1,2962	1,5878	1,2994	1,5878	1,2995	1,5882	1,2992	1,5879
MEDIA	**1,2971**	**1,5890**	**1,2990**	**1,5878**	**1,2976**	**1,5881**	**1,2503**	**1,5147**

Tabla 55: Frecuencias Medias para el caso 4: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.8

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(f_1)$	$\sigma(f_2)$
1	0,0032	0,0069	0,0047	0,0619	0,0898	0,0502	0,4027	0,4724
2	0,0027	0,0051	0,0028	0,0053	0,0030	0,0058	0,0029	0,0134
5	0,0022	0,0039	0,0022	0,0044	0,0019	0,0041	0,0018	0,0036
10	0,0017	0,0040	0,0018	0,0034	0,0016	0,0040	0,0016	0,0039
20	0,0015	0,0034	0,0015	0,0030	0,0013	0,0031	0,0011	0,0040
40	0,0014	0,0025	0,0013	0,0024	0,0012	0,0030	0,0009	0,0025
60	0,0011	0,0022	0,0012	0,0020	0,0009	0,0027	0,0010	0,0024
80	0,0010	0,0020	0,0011	0,0019	0,0009	0,0024	0,0008	0,0018
MEDIA	**0,0017**	**0,0035**	**0,0018**	**0,0044**	**0,0023**	**0,0048**	**0,0027**	**0,0067**

Tabla 56: Desviación típica de las frecuencias el caso 4: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.8

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
1	1,3892	2,1190	1,1519	1,9773	1,0817	2,0271	0,6601	0,3182
2	1,4143	2,1356	1,1299	2,0079	1,0985	2,0029	1,0293	2,0318
5	1,3852	2,1300	1,1607	2,0347	1,0508	1,9761	1,0051	1,9570
10	1,3946	2,1535	1,1564	2,0402	1,0606	1,9992	1,0414	1,9804
20	1,3849	2,1487	1,1457	2,0055	1,0699	1,9776	1,0555	1,9820
40	1,3885	2,1335	1,1509	2,0111	1,0811	1,9745	1,0511	1,9831
60	1,3852	2,1488	1,1497	2,0006	1,0828	1,9731	1,0501	1,9615
80	1,3890	2,1391	1,1437	2,0080	1,0725	1,9713	1,0596	1,9672
MEDIA	**1,3913**	**2,1385**	**1,1486**	**2,0106**	**1,0747**	**1,9876**	**0,9940**	**1,7727**

Tabla 57: Amortiguamiento Medio para el caso 4: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.8

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(\xi_2)$
1	0,2159	0,3203	0,2688	0,4336	0,3982	0,5748	1,2470	0,3882
2	0,1598	0,2157	0,1649	0,2516	0,1983	0,2711	0,2055	0,4591
5	0,0953	0,1748	0,1016	0,1625	0,1180	0,1547	0,1143	0,1444
10	0,0626	0,1116	0,0763	0,1378	0,0857	0,1225	0,0733	0,1266
20	0,0433	0,0978	0,0598	0,0912	0,0646	0,0902	0,0602	0,0807
40	0,0342	0,0647	0,0362	0,0733	0,0469	0,0618	0,0441	0,0682
60	0,0246	0,0579	0,0294	0,0568	0,0351	0,0612	0,0416	0,0524
80	0,0240	0,0494	0,0248	0,0492	0,0294	0,0525	0,0317	0,0475
MEDIA	**0,0605**	**0,1118**	**0,0694**	**0,1209**	**0,0841**	**0,1231**	**0,0965**	**0,1206**

Tabla 58: Desviación típica de coeficientes de amortiguamiento para el caso 4: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.8

4.2.4.5 CONCLUSIONES

De forma análoga al apartado anterior, se evaluarán los casos de T_{high} y T_{low} vistos previamente para los casos de duración de señal de entrada de 40 min y 60 min.

CASO 1

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
40(%)	0,0138	-0,0098	-0,0204	-0,0877	-0,0081	-0,0961	-0,0221	-0,1200
60(%)	0,0046	-0,0137	-0,0093	-0,0608	-0,0281	-0,1028	-0,0425	-0,1213

Tabla 59: Resumen de la frecuencia media para el caso 1: T_{low} = 0.1; T_{high} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
40(%)	51,1845	11,6530	15,6746	2,8607	4,5576	0,4859	0,5155	0,2374
60(%)	51,3340	11,6645	14,7831	2,9617	3,9160	1,0222	1,8970	0,2201

Tabla 60: Resumen de los coeficientes de amortiguamiento medios para el caso 1: T_{low} = 0.1; T_{high} =0.9

CASO 2

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
40(%)	0,0157	-0,2668	-0,0508	-0,3148	-0,0092	-0,3003	-0,0111	-0,2975
60(%)	0,0142	-0,2613	-0,0461	-0,3342	0,0038	-0,3284	-0,0017	-0,3342

Tabla 61: Resumen de la frecuencia media para el caso 2: T_{low} = 0.2; T_{high} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
40(%)	39,0143	8,7622	11,2303	2,3443	3,6910	0,4641	0,4150	0,1242
60(%)	39,1256	8,9771	10,5056	2,3448	2,8450	0,6155	1,5321	0,3168

Tabla 62: Resumen de los coeficientes de amortiguamiento medios para el caso 2: T_{low} = 0.2; T_{high} =0.9

CASO 3

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
40(%)	-0,1243	-0,0371	-0,0070	-0,0297	-0,0166	-0,0325	-0,0234	-0,0149
60(%)	-0,1263	-0,0371	-0,0073	-0,0309	-0,0065	-0,0200	-0,0292	-0,0217

Tabla 63: Resumen de la frecuencia media para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
40(%)	29,3965	6,6524	8,5160	0,4565	1,8588	-1,1034	0,7417	-4,1059
60(%)	29,7035	6,2792	8,4308	0,7168	2,1421	-0,9155	1,0817	-1,0650

Tabla 64: Resumen de los coeficientes de amortiguamiento medios para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

CASO 4

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
40(%)	-0,2364	-0,2108	-0,0109	-0,2093	-0,0137	-0,1895	-0,0188	-0,2032
60(%)	-0,2576	-0,2320	-0,0056	-0,2335	0,0017	-0,2070	-0,0243	-0,2260

Tabla 65: Resumen de la frecuencia media para el caso 4: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.8

Duración de la señal de entrada (min)	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
40(%)	33,3814	6,6759	10,5602	0,5539	3,8511	-1,2766	0,9654	-0,8456
60(%)	33,4291	6,9575	9,8661	0,4002	3,0267	-1,4337	1,7824	-1,6402

Tabla 66: Resumen de los coeficientes de amortiguamiento medios para el caso 4: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.8

En la siguiente tabla, se muestra la eficiencia del algoritmo para cada rango de la señal de tiempo para el cálculo del amortiguamiento, para una señal de 40 min:

Rango de tiempo	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
(%)	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
0.1 < t < 0.9	0,0138	-0,0098	-0,0204	-0,0877	-0,0081	-0,0961	-0,0221	-0,1200
0.2 < t < 0.9	0,0157	-0,2668	-0,0508	-0,3148	-0,0092	-0,3003	-0,0111	-0,2975
0.3 < t < 0.9	-0,1243	-0,0371	-0,0070	-0,0297	-0,0166	-0,0325	-0,0234	-0,0149
0.3 < t < 0.8	-0,2364	-0,2108	-0,0109	-0,2093	-0,0137	-0,1895	-0,0188	-0,2032

Tabla 67: Resultados de las frecuencias para elección del T_{high} y T_{low} óptimo

Rango de tiempo	nfft=256		nfft=512		nfft=1024		nfft=2048	
(%)	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2	ξ_1	ξ_2
T_{low} = 0.1; T_{high} =0.9	51,1845	11,6530	15,6746	2,8607	4,5576	0,4859	0,5155	0,2374
T_{low} = 0.2; T_{high} =0.9	39,0143	8,7622	11,2303	2,3443	3,6910	0,4641	0,4150	0,1242
T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9	**29,3965**	**6,6524**	**8,5160**	**0,4565**	**1,8588**	**-1,1034**	**0,7417**	**-4,1059**
T_{low} = 0.3; T_{high} =0.8	33,3814	6,6759	10,5602	0,5539	3,8511	-1,2766	0,9654	-0,8456

Tabla 68: Resultados del amortiguamiento para elección del T_{high} y T_{low} óptimo

Finalmente, el T_{high} y el T_{low} que presentan mayor exactitud es el de 0.3 y 0.9 ,respectivamente.

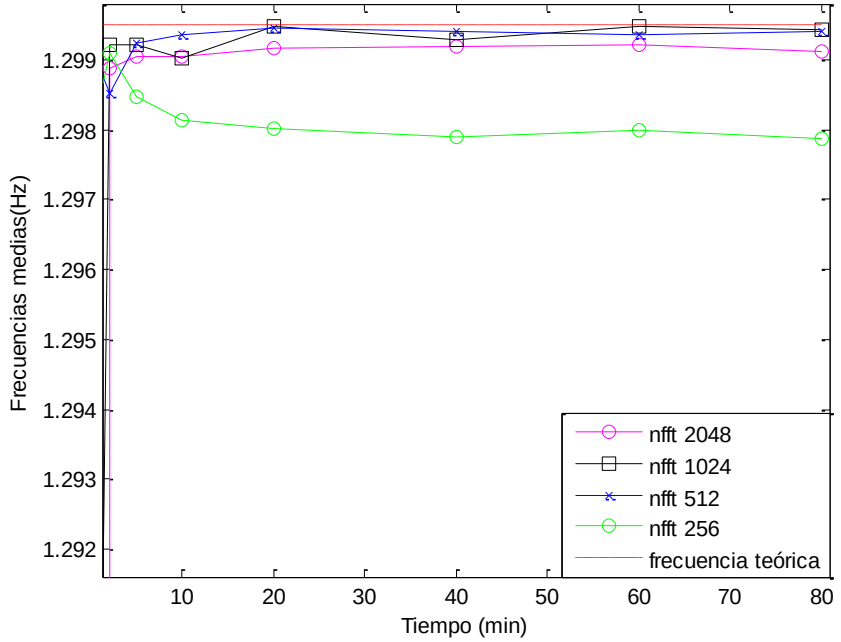


Ilustración 61: Frecuencias medias del primer modo para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

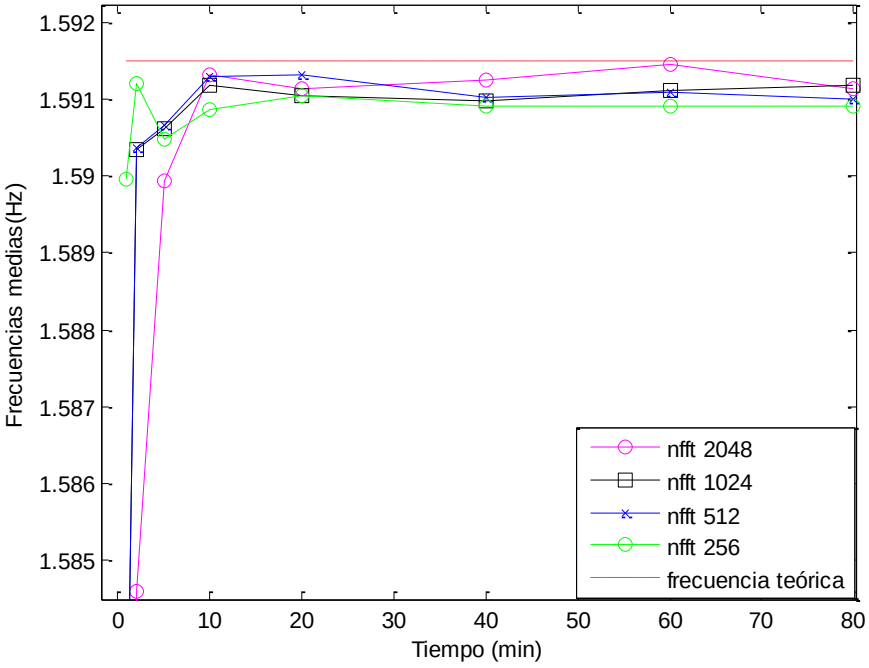


Ilustración 62: Frecuencias medias del segundo modo para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

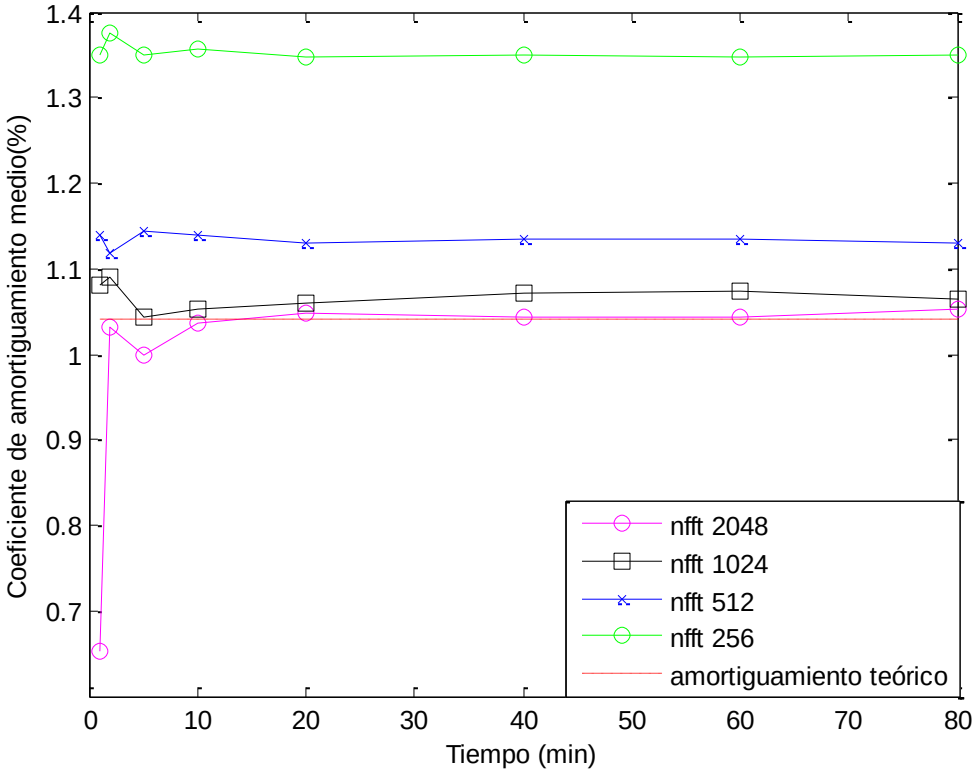


Ilustración 63: Coeficientes de amortiguamiento medios del primer modo para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

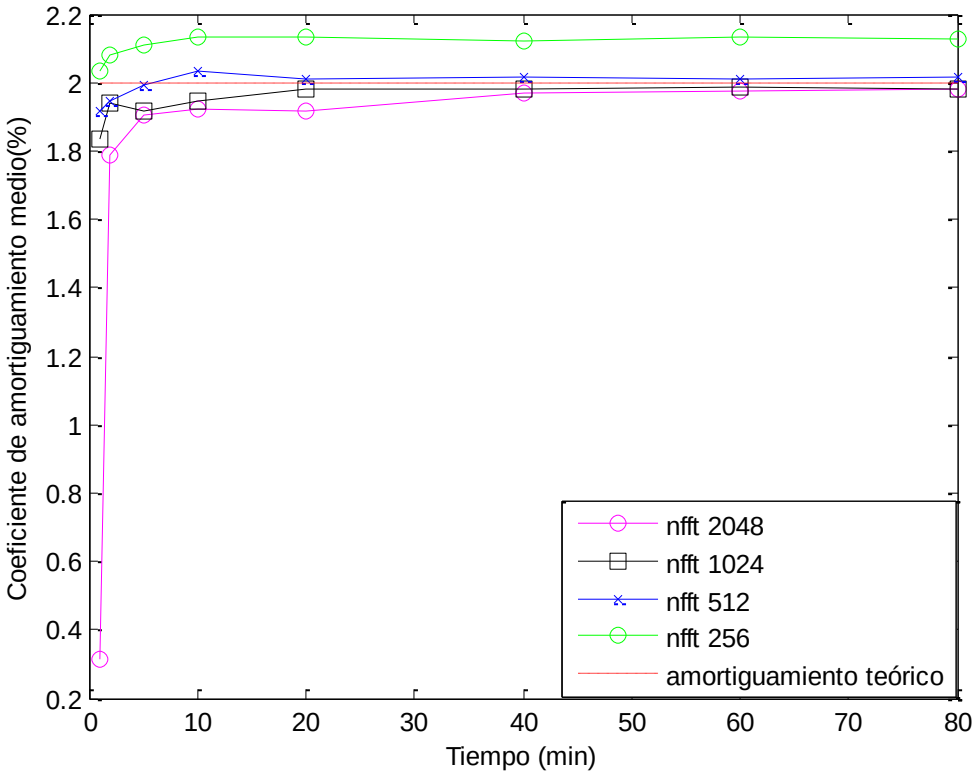


Ilustración 64: Coeficientes de amortiguamiento medios del segundo modo para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

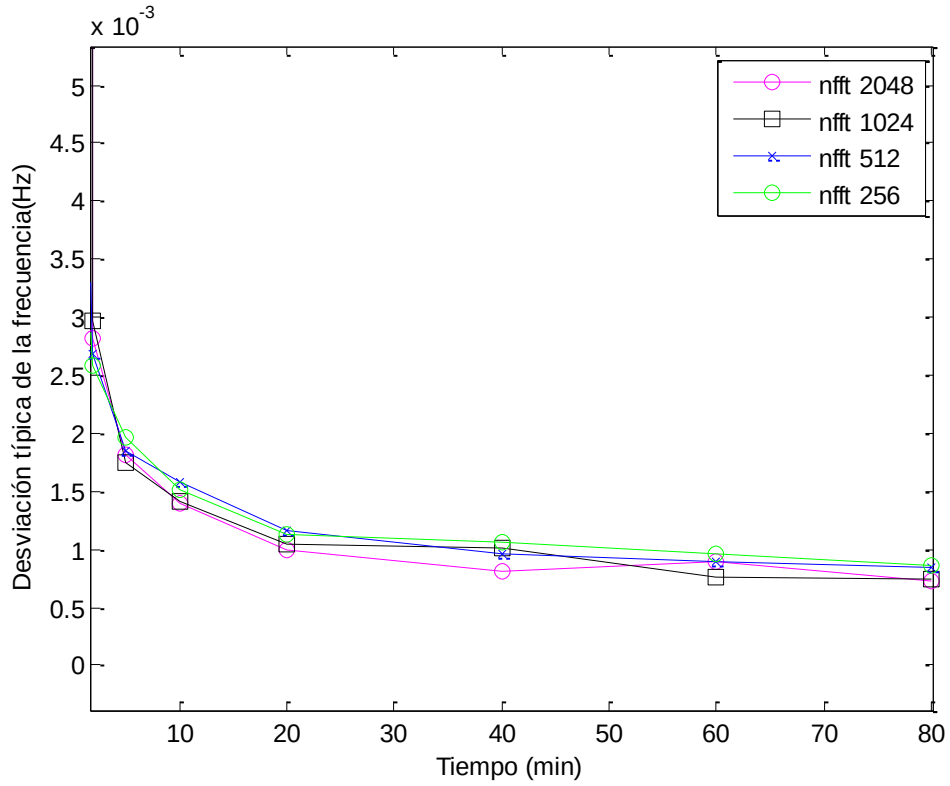


Ilustración 65: Desviación típica de las frecuencias para el primer modo para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

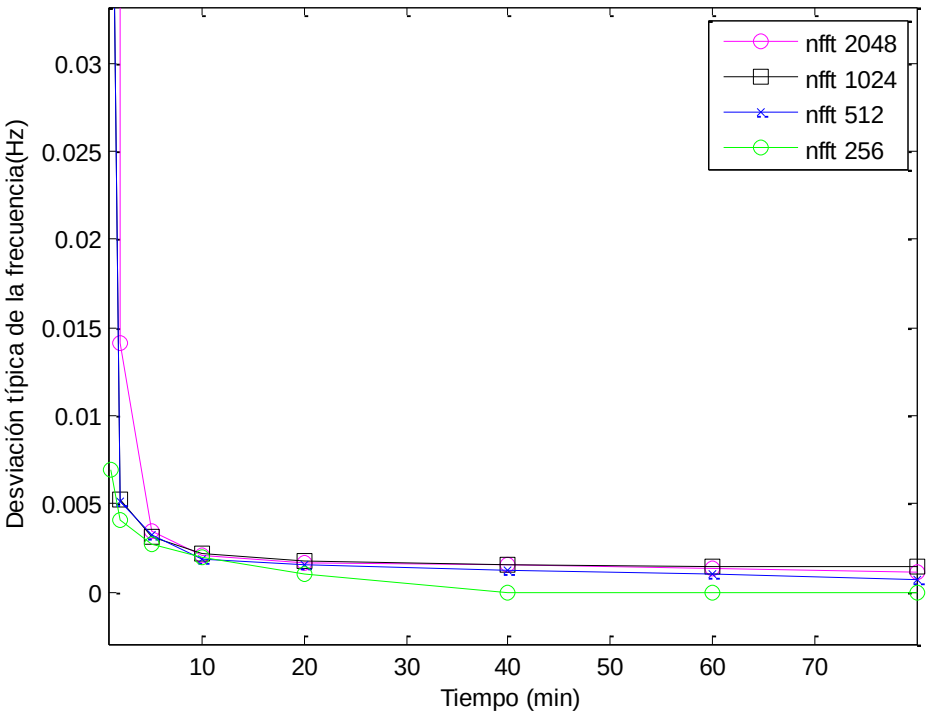


Ilustración 66: típica de las frecuencias para el segundo modo para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

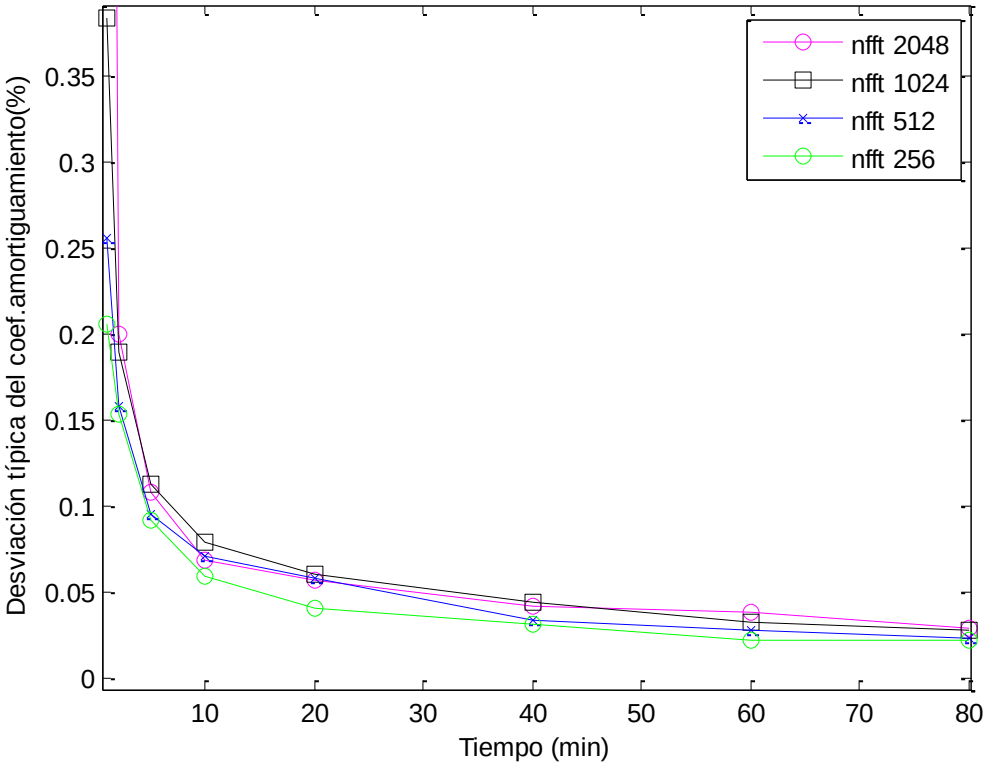


Ilustración 67: Desviación típica de los amortiguamiento para el primer modo para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

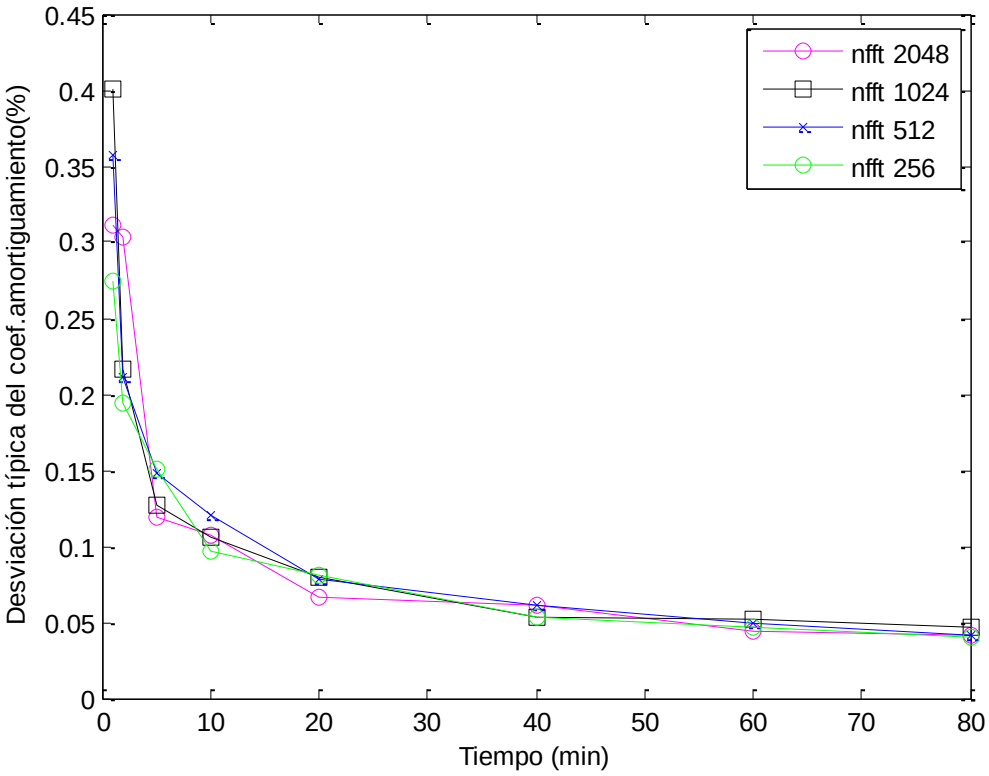


Ilustración 68: Desviación típica de los amortiguamiento para el segundo modo para el caso 3: T_{low} = 0.3; T_{high} =0.9

Como se puede apreciar en las gráficas anteriores, cuando número de puntos para el cálculo de la matriz de densidad espectral (nfft) es inferior, el resultado se dispersa bastante del resultado teórico, sobre todo en los casos del cálculo del amortiguamiento medio. Es por ello, que a partir de este punto, se representarán solamente los nfft de 1024, ya que para nfft=2048 también se ha presentado algunos errores en el cálculo de los parámetros modales que se han mostrado en los primeros minutos sobre todo en las desviaciones típicas de las frecuencias y coeficientes de amortiguamiento.

4.3 APLICACIÓN DEL ALGORITMO EFDD A DISTINTOS EJEMPLOS Y CONFIGURACIONES

A continuación se identifican el conjunto de parámetros óptimos del algoritmo.

4.3.1 SISTEMA 1

En primer lugar, se ha estudiado detenidamente el método PP y el EFDD, comparando cada uno para diferentes duraciones de la señal de entrada tiempo, observándose la restricción de los valores del primer método, al estar determinados por el número de puntos considerados en tiempo para el cálculo de la matriz de densidad espectral (nfft), y ser discretos. Ello hace que se haya escogido el método EFDD, ya que es mejor para el primer modo. Sin embargo para el caso del segundo modo, se observa una tendencia a alejarse del valor teórico respecto al método PP.

En cuanto al tema de las campanas del sistema equivalente de un grado de libertad, se han escogido con simetría. Ya que tanto en el caso de frecuencias, como en el caso de coeficientes de amortiguamiento, las diferencias para ambos parámetros son muy poco significativas. Se ha optado por establecer este criterio para todos los casos posteriores, ya que a la hora de hacer modificaciones en las matrices del sistema, se obtienen mejores resultados con dicha configuración.

El parámetro MAC_b escogido es el de 0.8, ya que para todos los casos considerados, tanto para los distintos valores de el número de puntos considerados en tiempo para el cálculo de la matriz de densidad espectral (nfft), como para los de la señal de tiempo de entrada, es el parámetro que consigue mejores aproximaciones a los valores teóricos.

En el caso de la elección de T_{high} y T_{low} para posteriormente proceder al cálculo del coeficiente de amortiguamiento, los valores que mejor satisfacen al sistema, son las de 0.3 y 0.9, respectivamente.

En el caso de los nfft, el número de puntos considerados en tiempo para el cálculo de la matriz de densidad espectral (Método de Welch), tras estudiaste 4 casos (256, 512, 1024, y 2048), se ha escogido el número de puntos igual a 1024. Para valores inferiores y superiores a 1024, existe una tendencia a dispersarse mucho, sobre todo para valores inferiores, tanto en el cálculo de medias, como en el de desviaciones. Y en 1024 aparentemente se observa una estabilidad más definida.

4.3.1.1 CONFIGURACIONES DEL SISTEMA 1

En las secciones anteriores se ha visto el caso más general, donde, el amortiguamiento es aproximado como un amortiguamiento viscoso general. Estos sistemas entregan polos de

valores complejos, vectores modales de valores complejos con fases distintas para cada vector y funciones de respuesta en frecuencia complejas.

A continuación se estudiaran dos casos, con amortiguamiento proporcional y sin amortiguamiento proporcional (histerético)

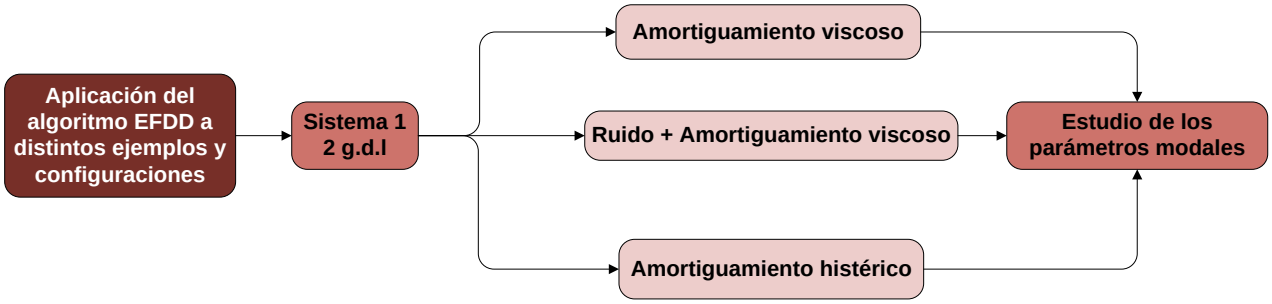


Ilustración 69: Aplicación del algoritmo EFDD a distintos ejemplos y configuraciones

Se calcularán los parámetros modales para una señal de tiempo de 20, 40 ,60 y 80 min, y se observará como varían para cada configuración del sistema.

4.3.1.1.1 AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

Es el tipo de amortiguamiento utilizado hasta ahora en este trabajo. Se trata de un amortiguamiento proporcional a la frecuencia (la fuerza de amortiguamiento en proporcional a la velocidad).

A continuación se muestras unas gráficas de la correlación de los modos de vibración con los modos teóricos para el caso de un amortiguamiento viscoso, con los siguientes parámetros de entrada:

- MAC_b=0.8
- nfft=1024
- T_{high} = 0.9; T_{low}=0.3
- f_{sample}=0.02 Hz
- f_{sample}(spline)=0.02 Hz
- Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad simétricas

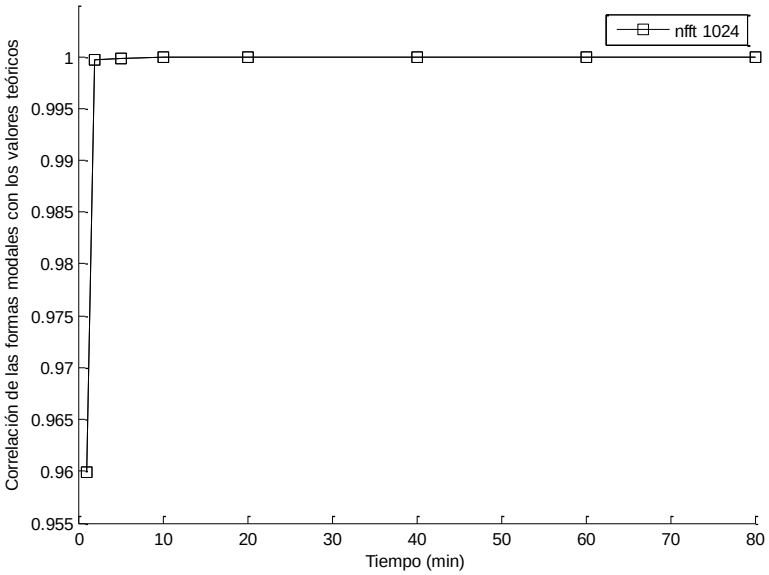


Ilustración 70: Medias del primer modo

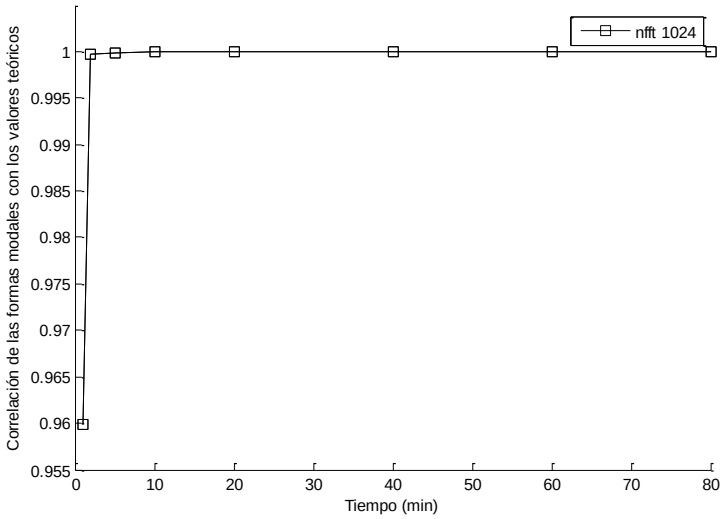


Ilustración 71: Medias del segundo modo

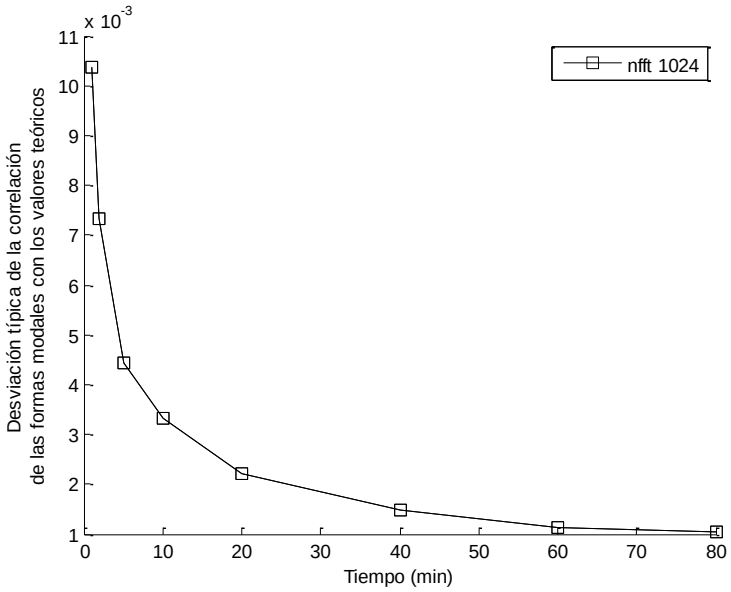


Ilustración 72: Desviación típica del primer modo

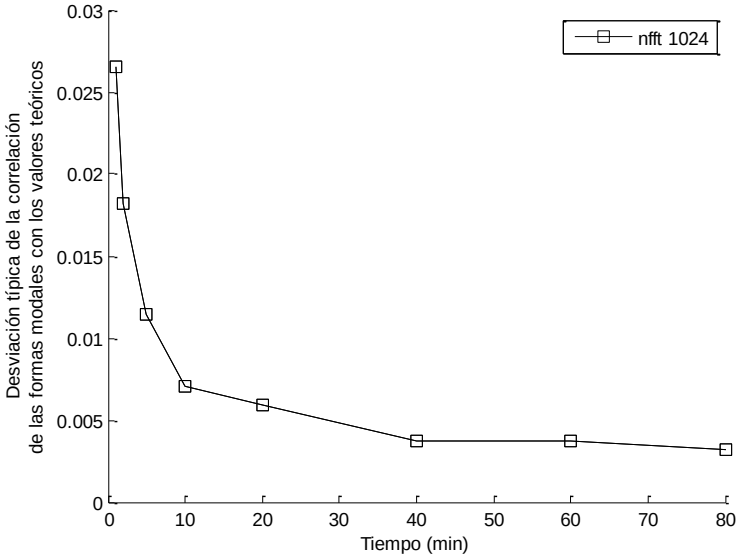


Ilustración 73: Desviación típica del segundo modo

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		Modo 2	
	f_1	ξ_1	f_2	ξ_2
20	1,2995	1,0604	1,5910	1,9779
40	1,2993	1,0709	1,5910	1,9834
60	1,2995	1,0732	1,5911	1,9846
80	1,2994	1,0633	1,5912	1,9817

Tabla 69: Frecuencias y amortiguamientos (Amort.viscoso)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		Modo 2	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(\xi_2)$
20	0,0010	0,0606	0,0018	0,0801
40	0,0010	0,0443	0,0016	0,0528
60	0,0008	0,0330	0,0014	0,0526
80	0,0007	0,0280	0,0014	0,0464

Tabla 70: Desviaciones típicas de Frecuencias y amortiguamientos (Amort.viscoso)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		MAC
20	-0,706953759739226	-0,707241393119585	0,999974
40	-0,707035573038679	-0,707167375607911	0,999985
60	-0,707099727097730	-0,707107745484058	0,999991
80	-0,706923498551834	-0,707285807742117	0,999994

Tabla 71: Modo 1 (Amort.viscoso)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 2		MAC
20	-0,706873600675925	0,707218200953617	0,99982844
40	-0,707371322314906	0,706762872391115	0,99988795
60	-0,707125408553708	0,707035960511316	0,99992619
80	-0,706657146677964	0,707517240127414	0,99994469

Tabla 72: Modo 2 (Amort.viscoso)

Como se puede apreciar en las gráficas, la media de los modos tienden a estabilizarse en 1 (módulo de los modos), así mismo se continúa viendo como para los nfft elevados, dicha estabilización se consigue a partir de los 30 primeros minutos.

La desviación típica o estándar que tiende a 0, nos indica que los valores de los modos tienden a alejarse muy poco del promedio de la distribución.

Cómo se puede observar en las tablas, en los modos, la MAC es muy elevada, ello indica que los modos están muy bien correlacionados con los modos teóricos en el sistema 1. Tanto las frecuencias naturales como los coeficientes de amortiguamiento tienen unos valores muy cercanos a os valores teóricos estudiados.

También se puede observar que las desviaciones típicas, tanto para frecuencias naturales como para coeficientes de amortiguamiento tienden a decrecer con el paso del tiempo, logrando mayor estabilidad en 80 min.

4.3.1.1.2 AMORTIGUAMIENTO VISCOSO + RUIDO

El SNR (Signal-to-noise ratio) está definido como la siguiente relación:

$$SNR = \frac{P(ruido)}{P(señal)} \tag{4.6}$$

donde

P es la relación entre los picos de una señal y la otra. (es decir, entre máximos de valor absoluto)

Así pues en el sistema 2, al agregar ruido tendremos que utilizar la siguiente expresión, para definir la entrada al sistema:

$$Entrada = Entrada(original) + SNR * ruido * \frac{max|Entrada(original)|}{\max|ruido|} \tag{4.7}$$

donde el parámetro SNR tomará los siguientes valores

$$SNR \begin{cases} = 0.02 \\ = 0.04 \\ = 0.06 \end{cases}$$

Ecuación 1: Valores de SNR

SNR= 0.02

A continuación se muestran las tablas para SNR=0.02 de las frecuencias naturales y los coeficientes de amortiguamiento para los distintos modos. Teniendo en cuenta los parámetros de entrada del algoritmo:

- MAC_b=0.8
- nfft=1024
- T_{high} = 0.9; T_{low}=0.3
- Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad simétricas
- f_{sample}=0.02 Hz
- f_{sample}(spline)=0.02 Hz

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		Modo 2	
	f_1	ξ_1	f_2	ξ_2
20	1,3002	1,0586	1,5906	1,9558
40	1,2890	1,0344	1,5900	1,8729
60	1,2989	1,0697	1,5912	1,9437
80	1,2993	1,0516	1,5910	1,9436

Tabla 73: Frecuencias y amortiguamientos (Amort.viscoso+SNR 0.02)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		Modo 2	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(\xi_2)$
20	0,0011	0,0639	0,0029	0,2168
40	0,1001	0,1989	0,0135	0,2861
60	0,0018	0,1213	0,0032	0,1643
80	0,0017	0,0872	0,0023	0,1453

Tabla 74: Desviaciones típicas de Frecuencias y amortiguamientos (Amort.viscoso+SNR 0.02)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		MAC
20	-0,707430984040185	-0,706738232814556	0,99993736
40	-0,709858106557952	-0,701496117783210	0,99596187
60	-0,706682205590060	-0,707417013924396	0,99983858
80	-0,707666931152718	-0,706503280442717	0,99993878

Tabla 75: Modo 1 (Amort.viscoso+SNR 0.02)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 2		MAC
20	-0,707504868236365	0,706562650864123	0,9997936
40	-0,704007207108988	0,699315002490830	0,9846760
60	-0,707217941019922	0,706285188401773	0,9989972
80	-0,707723555026281	0,706196448978949	0,9995851

Tabla 76: Modo 2 (Amort.viscoso+SNR 0.02)

SNR=0.04

A continuación se muestran las tablas para SNR=0.04 de las frecuencias naturales y los coeficientes de amortiguamiento para los distintos modos. Teniendo en cuenta los parámetros de entrada del algoritmo igual al caso de SNR=0.02

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		Modo 2	
	f_1	ξ_1	f_2	ξ_2
20	1,3002	1,0720	1,5910	1,9398
40	1,3003	1,0891	1,5913	1,9194
60	1,3003	1,0613	1,5911	1,9398
80	1,3001	1,0765	1,5861	1,9778

Tabla 77: Frecuencias y amortiguamientos (Amort.viscoso+SNR 0.04)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		Modo 2	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(\xi_2)$
20	0,0011	0,1248	0,0021	0,1294
40	0,0009	0,1729	0,0016	0,0910
60	0,0007	0,0349	0,0020	0,1535
80	0,0006	0,0864	0,0534	0,3232

Tabla 78: Desviaciones típicas de Frecuencias y amortiguamientos (Amort.viscoso+SNR 0.04)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		MAC
20	-0,707538630316356	-0,706573000223562	0,99985586
40	-0,707010088120066	-0,707145544958125	0,99991843
60	-0,707105930597928	-0,707101332558342	0,99999113
80	-0,706897719457057	-0,707299620434715	0,99997706

Tabla 79: Modo 1 (Amort.viscoso+SNR 0.04)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 2		MAC
20	-0,707622359101463	0,706406857623141	0,99973959
40	-0,706924748095899	0,706334153967982	0,99865782
60	-0,707239695033640	0,706914895884600	0,99991699
80	-0,707487624619988	0,706605283787091	0,99982945

Tabla 80: Modo 2 (Amort.viscoso+SNR 0.04)

SNR=0.06

A continuación se muestran las tablas para SNR=0.06 de las frecuencias naturales y los coeficientes de amortiguamiento para los distintos modos. Teniendo en cuenta los parámetros de entrada del algoritmo igual al caso de SNR=0.02.

Rango De t	Modo 1		Modo 2	
	f_1	ξ_1	f_2	ξ_2
20	1,2995	1,0701	1,5910	1,9647
40	1,2939	1,0575	1,5882	1,9723
60	1,2993	1,1201	1,5908	2,0373
80	1,2995	1,0701	1,5910	1,9647

Tabla 81: Frecuencias y amortiguamientos (Amort.histerético)

Rango De t	Modo 1		Modo 2	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(\xi_2)$
20	0,0019	0,0822	0,0019	0,0736
40	0,0015	0,0527	0,0015	0,0480
60	0,0007	0,0389	0,0014	0,0413
80	0,0002	0,0374	0,0013	0,0332

Tabla 82: Desviaciones típicas de Frecuencias y amortiguamientos (Amort.histerético)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		MAC
20	-0,707634644005193	-0,706396319039835	0,99974179
40	-0,706958224218983	-0,707100543136717	0,9997822
60	-0,707126669750733	-0,707079626201492	0,99998974
80	-0,707174360819753	-0,707020789759839	0,99997397

Tabla 83: Modo 1 (Amort.viscoso+SNR 0.06)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 2		MAC
20	-0,708067122326038	0,705881254524103	0,99962572
40	-0,694863522392562	0,689266920243549	0,95792484
60	-0,707243929563968	0,706906462171462	0,99991119
80	-0,707607404474023	0,706394222911017	0,99970076

Tabla 84: Modo 2 (Amort.viscoso+SNR 0.06)

Se puede observar que las desviaciones típicas, tanto para frecuencias naturales como para coeficientes de amortiguamiento permanecen inestables, con variaciones a media que transcurre el tiempo, obteniendo un efecto más destacado a medida que SNR se incrementa, como era de esperar.

Cómo se puede observar en los modos, la MAC está muy próxima a la unidad, ello indica que los modos están muy bien correlacionados con los modos teóricos al introducir ruido al amortiguamiento viscoso del sistema 1. Tanto las frecuencias naturales como los coeficientes de amortiguamiento continúan estando muy próximos a los deseados.

4.3.1.1.3 AMORTIGUAMIENTO HISTERÉTICO

A continuación se va a ver cómo responde el algoritmo cuando el sistema tiene amortiguamiento histerético, entendido como un amortiguamiento independiente de la frecuencia y que se define mediante una rigidez compleja del tipo:

$$k = k(1 + 2\gamma i) \tag{4.8}$$

donde

- γ es el factor de amortiguamiento
- i la partícula imaginaria.

Este modelo, denominado histerético ideal, sólo se puede definir en el dominio de la frecuencia, y no en el dominio del tiempo.

A continuación se muestran las tablas, para el caso de amortiguamiento histerético, de las frecuencias naturales y los coeficientes de amortiguamiento para los distintos modos. Teniendo en cuenta los parámetros de entrada del algoritmo:

- MAC_b=0.8
- nfft=1024

- T_{high} = 0.9; T_{low}=0.3
- Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad simétricas
- f_{sample}=0.02 Hz
- f_{sample}(spline)=0.02 Hz

Rango De t	Modo 1		Modo 2	
	f_1	ξ_1	f_2	ξ_2
20	1,3025	1,9957	1,5916	1,9355
40	1,3025	1,9995	1,5920	1,9181
60	1,3028	2,0017	1,5915	1,9318
80	1,3030	1,9939	1,5918	1,9256

Tabla 85:Frecuencias y amortiguamientos (Amort.histerético)

Rango De t	Modo 1		Modo 2	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(\xi_2)$
20	0,0019	0,0822	0,0019	0,0736
40	0,0015	0,0527	0,0015	0,0480
60	0,0007	0,0389	0,0014	0,0413
80	0,0002	0,0374	0,0013	0,0332

Tabla 86: Desviaciones típicas de Frecuencias y amortiguamientos (Amort.histerético)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		MAC
20	-0,707459205158295	-0,706691426739709	0,99991112
40	-0,706658171640730 +	-0,707522550474836	0,99995356
60	-0,707239522183105	-0,706950396964811	0,99996659
80	-0,706754906200783	-0,707441993409575	0,99997644

Tabla 87: Modo 1 (Amort.histerético)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		MAC
20	-0,707311753063778	0,706774927517421	0,99982068
40	-0,706912919511788	0,707235490825566	0,99990793
60	-0,707269850119709	0,706892310786024	0,99992731
80	-0,706660133776981	0,707513301133126	0,99994328

Tabla 88: Modo 2 (Amort.histerético)

Cómo se puede observar en los modos, la MAC empeora notablemente al introducir amortiguamiento histerético en el sistema, ya que tiene valores muy pequeños. Sin embargo tanto las frecuencias naturales como los coeficientes de amortiguamiento continúan estando muy próximos a los deseados.

En cuanto a las desviaciones típicas, como ocurría en el caso del amortiguamiento viscoso, tiende a decrecer con el paso del tiempo, logrando mayor estabilidad en 80 min

4.3.2 SISTEMA 2

4.3.2.1 CONFIGURACIÓN DEL SISTEMA 2

4.3.2.1.1 ESTUDIO DEL AMORTIGUAMIENTO HISTERÉTICO

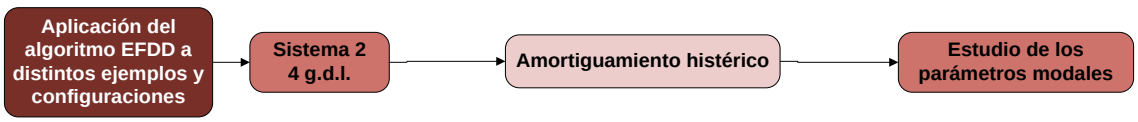


Ilustración 74: Aplicación del algoritmo EFDD a distintas configuraciones

La configuración de sistema se ha cambiado, en vez de dos, ahora tiene cuatro grados de libertad. El modelo teórico calculado sería el siguiente:

Donde:

M es la matriz de masas, K la matriz de rigidez

$$M = 175126.73 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (Kg)$$

$$K = 105076038 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \left(\frac{N}{m}\right)$$

Parámetros modales.

$$f_1 = 1.3539\ Hz \qquad f_2 = 3.9004\ Hz$$

$$f_3 = 5.9728\ Hz \qquad f_4 = 7.3303\ Hz$$

$$\xi_1 = 2.0000\% \qquad \xi_2 = 2.0000\%$$

$$\xi_3 = 2.0000\% \qquad \xi_4 = 2.0000\%$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.8793 \\ 0.6527 \\ 0.3472 \end{bmatrix} \qquad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -0.0000 \\ -1.0000 \\ -0.9999 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_3 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.3472 \\ -0.5320 \\ 1.5320 \end{bmatrix} \qquad \Phi_4 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -2.5320 \\ 2.8793 \\ 1.8793 \end{bmatrix}$$

Sistema2: Características del sistema 2

La figura (76) muestra las campanas del sistema equivalente de un grado de libertad para el sistema considerado:

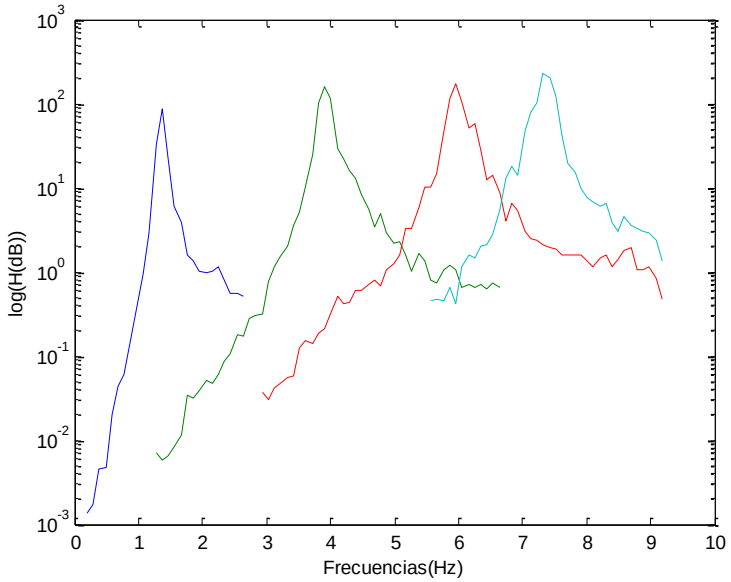


Ilustración 75: campanas del sistema equivalente de un grado de libertad para el sistema 2

A continuación se muestran las tablas, para el caso de amortiguamiento histerético en el sistema de 4 g.d.l., de las frecuencias naturales y los coeficientes de amortiguamiento para los distintos modos. Teniendo en cuenta los parámetros de entrada del algoritmo:

- MAC_b=0.8
- nfft=1024
- T_{high} = 0.9; T_{low}=0.3
- Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad simétricas
- f_{sample}=0.01 Hz
- f_{sample}(spline)=0.001 Hz

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		Modo 2	
	f_1	ξ_1	f_2	ξ_2
20	1,3598	4,6363	3,8982	2,5390
40	1,3604	4,6129	3,8997	2,4987
60	1,3605	4,6193	3,8999	2,5386
80	1,3605	4,6254	3,8998	2,5074

Tabla 89: Frecuencias y amortiguamientos (Amort.histerético)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1		Modo 2	
	$\sigma(f_1)$	$\sigma(\xi_1)$	$\sigma(f_2)$	$\sigma(\xi_2)$
20	0,0034	0,2506	0,0089	0,1643
40	0,0020	0,1680	0,0065	0,1357

60	0,0017	0,1480	0,0048	0,0933
80	0,0017	0,1139	0,0043	0,0843

Tabla 90: Desviaciones típicas de Frecuencias y amortiguamientos (Amort.histerético)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 3		Modo 4	
	f_3	ξ_3	f_4	ξ_4
20	5,9746	2,2329	7,3284	2,1927
40	5,9748	2,2382	7,3287	2,1579
60	5,9749	2,2478	7,3286	2,1722
80	5,9753	2,2413	7,3275	2,1613

Tabla 91: Frecuencias y amortiguamientos (Amort.histerético)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 3		Modo 4	
	$\sigma(f_3)$	$\sigma(\xi_3)$	$\sigma(f_4)$	$\sigma(\xi_4)$
20	0,0127	0,1600	0,0121	0,1403
40	0,0086	0,1097	0,0096	0,1057
60	0,0063	0,0966	0,0081	0,0841
80	0,0057	0,0800	0,0062	0,0718

Tabla 92: Desviaciones típicas de Frecuencias y amortiguamientos (Amort.histerético)

Como se puede apreciar en los resultados posteriores, pasados los primeros 20 min, el algoritmo comienza a dar resultados óptimos para frecuencia y amortiguamiento. Sin embargo, en este caso, para el primer modo los coeficientes de amortiguamiento dan bastante más alejados del valor teórico. Para conseguir resultados más aproximados, se podría incrementar el T_{high} y decrementar el T_{low}, a la vez que das un mayor número de puntos (disminuyendo f_{sample}(spline)) al ajuste de la spline para el cálculo del amortiguamiento. En el resto de los modos, se dan unos resultados muy cercanos a los teóricos, son mayor precisión.

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 1				MAC
20	1	0,879977	0,653769	0,348072	0,99998812
40	1	0,877893	0,651768	0,347717	0,99995356
60	1	0,879028	0,651916	0,347934	0,99999959
80	1	0,879174	0,65109	0,346683	0,99999944

Tabla 93: Modo 1 (Amort.histerético)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 2	MAC

20	1	-0,00315	-1,00946	-1,00529	0,99983356
40	1	-3,5E-05	-0,99687	-0,99906	0,99999996
60	1	0,000494	-0,99667	-0,99369	0,99999959
80	1	-0,00148	-1,00347	-1,00391	0,99999944

Tabla 94: Modo 2 (Amort.histerético)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 3				MAC
20	1	-1,33725	-0,53422	1,557661	0,99983356
40	1	-1,36205	-0,52338	1,541484	0,99999996
60	1	-1,34984	-0,53861	1,528954	0,99999959
80	1	-1,35414	-0,53065	1,545749	0,99999944

Tabla 95: Modo 3 (Amort.histerético)

Duración de la señal de entrada (min)	Modo 4				MAC
20	1	-2,49181	2,875557	-1,9092	0,99999352
40	1	-2,47567	2,851629	-1,86902	0,99999976
60	1	-2,53545	2,881857	-1,90806	0,99999999
80	1	-2,56432	2,899548	-1,86963	0,99999844

Tabla 96: Modo 4 (Amort.histerético)

En cuanto a los modos, se observa que para el todos los modos, la correlación es bastante alta. También se puede apreciar, que a medida que trascurre el tiempo, es decir, para una señal de entrada de 60min, la MAC llega a valores más óptimos.

5 CAPÍTULO VI: RESUMEN Y CONCLUSIONES

El trabajo realizado ha sido la implementación del algoritmo mejorado de descomposición en el dominio de la frecuencia (EFDD) utilizando ruido ambiente para la identificación de los parámetros modales de estructuras genéricas.

Tras realizar los ajustes de los parámetros de entrada del algoritmo (f_{sample} , nfft, MAC_b, T_{high} y T_{low} , tipo de campanas del sistema equivalente de un grado de libertad…) , se ha comprobado la precisión de éste a la hora de calcular las frecuencias naturales, los modos y los coeficientes de amortiguamiento ante diferentes situaciones del sistema (con amortiguamiento viscoso, con amortiguamiento viscoso y ruido, con amortiguamiento histerético) resultando un algoritmo muy eficiente y con una tasa de error muy reducida.

También se ha comprobado su eficacia ante distintos tipos de configuraciones, en concreto, para el doble de grados de libertad, donde el algoritmo ha seguido en su misma línea, dando resultados totalmente satisfactorios.

6 CAPITULO VII: BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Brincker, L. Zhang, P. Andersen "Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition", Smart materials and structures, 10, pp. 441-445, 2001.

[2] R. Brincker, L. Zhang, P. Andersen, “Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition”, in Proceedings of the IMAC 18, International Modal Analysis Conference, San Antonio, USA, 2000.

[3] D.J. Ewins, Modal Testing: Theory and Practice, Research Studies Press, UK, 2000.

[4] F. Magalhaes, A. Cunha "Explaining operational modal analysis with data from an arch bridge", Mechanical Systems and Signal Processing, 25, pp. 1431-1450, 2011.

[5] R. W Clough and J. Penzien, “Dynamics of structures”, 2nd ed. 1993,, Editorial McGraw-Hill.

[6] R.J. Allemang, D.L. Brown, A correlation coefficient for modal vector analysis, Proceedings of the First International Modal Analysis Conference, Orlando, November 1982, pp. 110–116.

[7] R.J Allemang "The modal assurance Criterion (MAC): 20 years of use and abuse", Proc. of the 20th Int Modal Analysis conference, Los Angeles, California, 2002.

[8] F. Magalhães, Á. Cunha, E. Caetano, and R. Brincker, “Damping estimation using free decays and ambient vibration tests,” Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 24, no. 5, pp. 1274-1290, Jul. 2010.

7 CAPÍTULO VIII: ANEXOS

7.1 SVD

En muchos casos, es necesario la inversa de una matriz. En este proyecto la inversa de la función de respuesta en frecuencia H (ω) es necesaria para estimar la carga x (ω) de la dinámica y las respuestas (ω).
El algoritmo básico de inversión de una matriz A de 2 x 2, conocidos en álgebra lineal básica, está dada por:

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & 1 \end{bmatrix}}{\det(A)} \tag{7.1}$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

Y

$$\det(A) = a \cdot d - b \cdot c \tag{7.3}$$

La matriz A no puede ser invertida si el det(A) es igual a 0. Entonces se dice que es una matriz singular.

Existen muchos métodos para resolver este problema. Pero en este trabajo se ha abordado el algoritmo de descomposición en valores singulares, denominado SVD, utilizado durante el trabajo para invertir la función de respuesta en frecuencia, H(ω).

El algoritmo SVD descompone la matriz A en tres matrices: U, S y V:

$$A = U \cdot S \cdot V^T \tag{7.4}$$

Donde el subíndice ^{T} se refiere a la transpuesta de V. Para matrices complejas ^{T} se sustituye por ^{H}, que se refiere a la conjugada transpuesta de la matriz.

En teoría A puede ser una matriz de dimensiones m x n. El algoritmo SVD creará una matriz m x m U, una m x n S y una n x n V. Siempre que la respuesta en frecuencia H(ω) sea de dimensiones n x n , tanto U, como S o V son también de dimensiones n x n .

La matriz S es la matriz diagonal, que contiene los valores singulares en orden decreciente- S puede obtenerse directamente de A resolviendo un problema de autovalores.

$$\det(B - \lambda I) = 0 \tag{7.5}$$

Donde

- $B = A^T A$
- λ son los autovalores de B
- I es la matriz identidad

Los valores singulares S_i son iguales a la raíz cuadrada de los autovalores λ_i ,respectivamente.

Para una matriz A de 2 x 2 , cuya matriz S tiene la siguiente forma:

$$S = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_1 \end{bmatrix}, \quad S_2 > S_1 \tag{7.6}$$

Donde la matriz V contiene una serie de vectores ortonormales, por ejemplo n ortogonales, n vectores propios de longitud igual a la unidad.

$$V^T V = I \tag{7.7}$$

Para una matriz A, de dimensiones 2 x 2, el algoritmo SVD produce una matriz cuadrada de V con la siguiente forma:

$$V_{2x2} = [v_{1_{2x1}} \quad v_{2_{2x1}}] \tag{7.8}$$

Las columnas de la matriz U son vectores normalizados, calculados de:

$$u_i = \frac{A \cdot V_i}{S_i} \tag{7.9}$$

De nuevo, de una matriz A de dimensiones 2 x 2, la matriz U resultante es igual al:

$$U_{2x2} = [u_{1_{2x1}} \quad u_{2_{2x1}}] \tag{7.10}$$

7.1.2 PROPIEDADES DE LAS MATRICES U, S Y V

Las matrices ortogonales U y V y la diagonal S tienen propiedades importantes relacionadas con la inversión de la matriz H(ω).

Una matriz cuadrada orgotonal A tiene la propiedad:

$$A^{-1} = A^T \tag{7.11}$$

Una matriz diagonal A tiene la propiedad:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

Estas propiedades son utilizadas para invertir la función de respuesta en frecuencia H(ω).

7.1.3 INVERSIÓN DE H(ω) UTILIZANDO EL ALGORITMO SVD

En primer lugar la función respuesta en frecuencia se descompone por medio del algoritmo SVD en:

$$H(\omega) = U \cdot S \cdot V^T \tag{7.14}$$

Donde la inversa de $H(\omega)$ es igual a:

$$H(\omega)^{-1} = U^{-1} \cdot S^{-1} \cdot (V^T)^{-1} \tag{7.15}$$

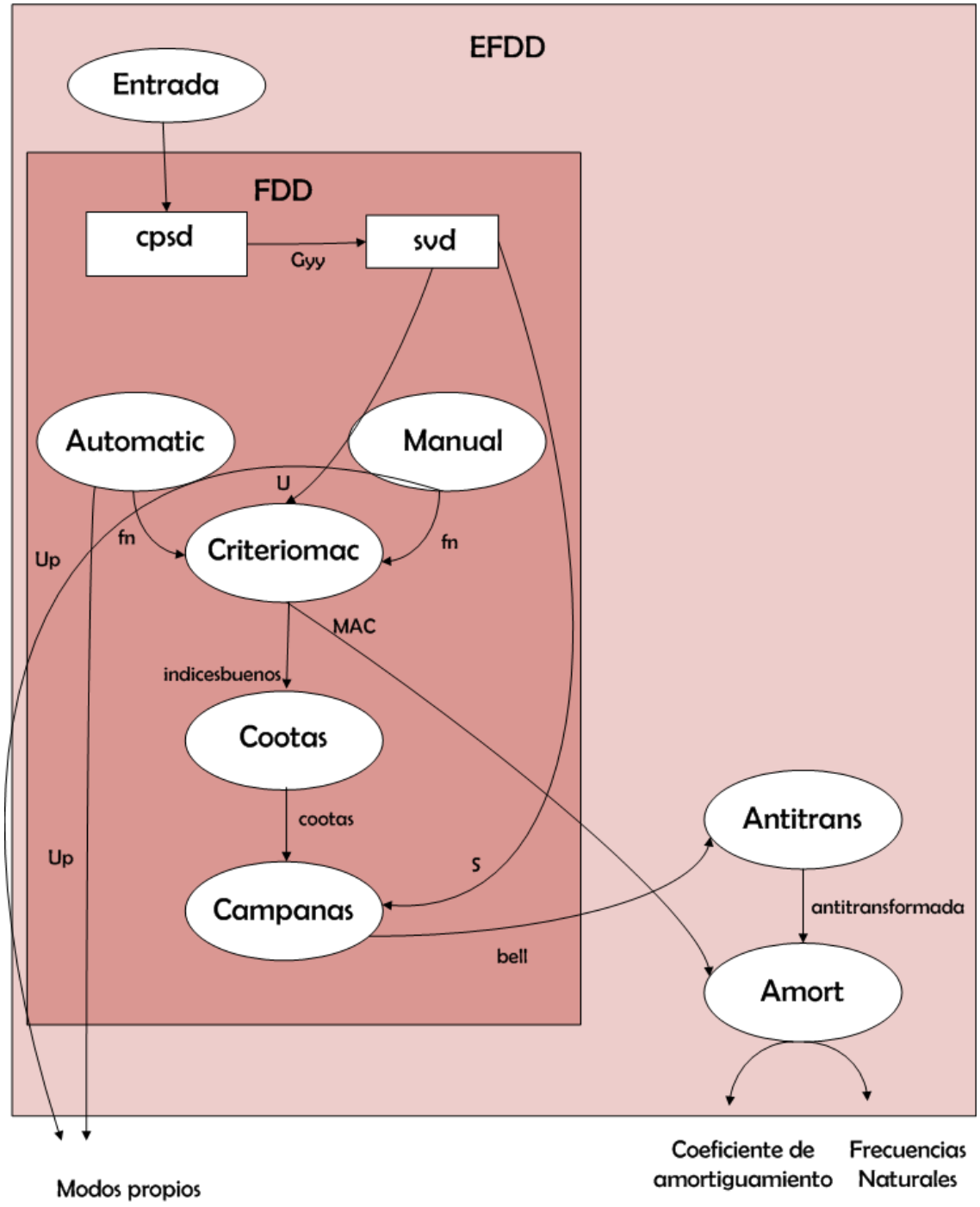
Utilizando las propiedades de las matrices inversas:

$$H(\omega)^{-1} = U^T \cdot S^{-1} \cdot (V^T)^T$$
$$H(\omega)^{-1} = U^T \cdot S^{-1} \cdot V \tag{7.16}$$

Sabiendo que ninguno de los valores singulares en S es igual a cero. La inversa de la matriz H(ω) puede determinarse sin utilizar el algoritmo básico visto en la sección 8.1.

7.2 FUNCIONES PRINCIPALES

Las funciones principales implementadas para el algoritmo EFDD siguen el siguiente diagrama:



Las funciones en elipses blancas, son las principales que se han elaborado para programa, mientras que las que están en rectángulos blancos son funciones propias de matlab. A continuación se esxplicarán las elaboradas para el desarrollo del algoritmo EFDD:

ENTRADA=Función que hace la simulación de la respuesta entrada del sistema. Dando como resultado la matriz de transferencia del sistema.

FDD= Función que se identifica con el método de descomposición en el dominio de la frecuencia tradicional. Engloba las siguientes funciones:

- ✓ automatic: es una función que ejecuta de forma automática la búsqueda de las frecuencias naturales mediante el método PP. Para ello, selecciona automáticamente los picos de la función de densidad espectral.
  - Variables de entrada: la matriz de densidad espectral S, y los modos U.
  - Variables de salida: las frecuencias naturales, fn.
- ✓ manual: es una función que ejecuta de forma manual la búsqueda de las frecuencias naturales mediante el método PP. Para ello, el usuario selecciona los picos sobre la gráfica de la función de densidad espectral.
  - Variables de entrada: la matriz de densidad espectral S
  - Variables de salida: las frecuencias naturales, fn
- ✓ Criteriomac: es una función que establece la formula matemática del indicador MAC (*Modal Asurance Criterion*), de la correlación entre los modos.
  - Variables de entrada: todos los modos U, y los modos propios calculados(correspondientes al índice de las frecuencias naturales).
  - Variables de salida: la matriz MAC
- ✓ Cootas: Es una función que establece los límites de las campanas del sistema equivalente de un grado de libertad.
  - Variables de entrada: matriz MAC, indicesbuenos (índices correspondientes a las frecuencias naturales)
  - Variables de salida: cootas (los límites de cada campana del sistema equivalente de un grado de libertad)
- ✓ Campana: Es una función que con las cotas calculadas previamente, se encarga de almacenar los datos de cada campana del sistema equivalente de un grado de libertad, y representarlas. Dentro de esta función hay otra, la función de simetríc, la cual da campanas con simetría si el usuario lo indica.
  - Variables de entrada: la matriz de densidad espectral S, las cotas calculadas en la función anterior .
  - Variables de salida: bell (una matriz que contiene los datos de las campanas del sistema equivalente de un grado de libertad)

Antitrans: Es una función que realiza la transformada inversa de Fourier de las campanas del sistema equivalente de un grado de libertad, para llevarlas al dominio del tiempo

- Variables de entrada: bell (las campanas del sistema equivalente de un grado de libertad)
- Variables de salida: antitransformada (campanas en el dominio del tiempo)

Amort: Es una función que calcula los coeficientes de amortiguamiento y la frecuencia naturales del sistema mediante el algoritmo desarrollado EFDD.

- Variables de entrada: antitransformada, matriz MAC
- Variables de salida: amortiguamiento (vector de coeficientes de amortiguamiento), frecu(vector de frecuencias naturales)

7.3 TUTORIAL

Para explicar el funcionamiento del programa, vamos a ejecutarlo para un ejemplo de un sistema de 2 g.d.l. (el mismo que el sistema1 de la memoria).

Lo primero que nos pide el programa es:

- El paso de tiempo dt, la frecuencia, en este caso es 0.2 (5Hz)
- El tiempo de la señal de tiempo de entrada, que es ruido blanco, se especifica en la longitud del vector que le demos, en este caso 9000 puntos que son 3 min.
- Y el número de puntos para la realizar la matriz de potencia de densidad espectral, nfft, que en este caso lo hemos ajustado a 2^{10}.

```
Bienvenido al programa del método mejorado de descomposición en el dominio de la frecuencia (EFDD)
para la identificación de los parámetros modales de estructuras genéricas utilizando ruido ambiente
================================================================================================
Cristina Freire Obregón


Indique el valor del diferencial de tiempo(dt)-> 0.2

Indique la longitud del vector de ruido blanco-> 9000

Indique el valor de nfft-> 2^10
```

Una vez se ha calculado la matriz de densidad espectral de potencia cruzada del sistema, sale la siguiente gráfica:

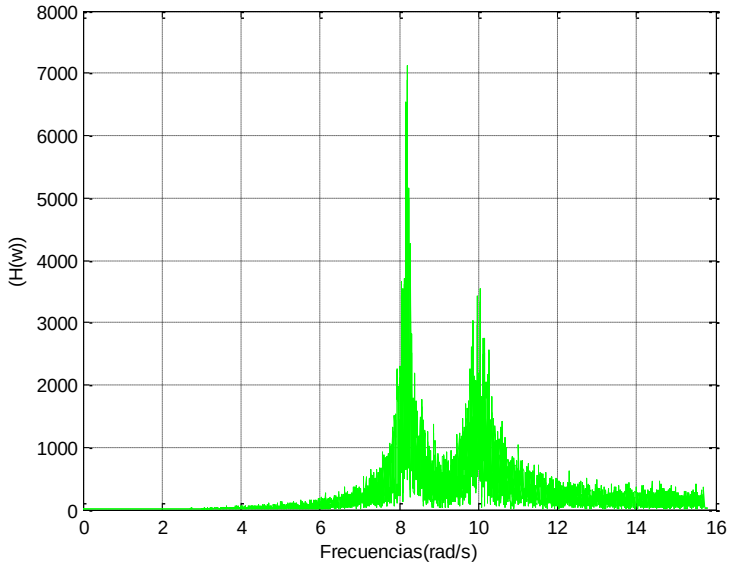


Ilustración 76: Función de transferencia (tutorial)

En segundo lugar, el programa nos pedirá que indiquemos de que manera deseamos encontrar las frecuencias naturales del sistema. Existen dos formas, la manual y la automática.

Como se observa a continuación en la manera automática los picos se seleccionan automáticamente en la gráfica de la matriz de densidad espectral, sin necesidad de que introduzcamos ningún valor por teclado. A la vez que nos aparece una ventana con los picos marcados en color magenta y los modos propios del sistema normalizados.

```
¿De qué manera desea encontrar las frecuencias naturales?
Automático(1) o Manual(2)-> 1

////////////////////////////////////////////////////////////////
--FRECUENCIA NATURAL CON EL MÉTODO PP--
Las frecuencias naturales del sistema en Hz son
   1.303710937500000
   1.596679687500000


Los modos propios del sistema normalizados son
modo
     1

  0.998775039031381 + 0.015491569150075i  1.000000000000000

modo
     2

 -1.014566793446075 + 0.011562566445995i  1.000000000000000
```

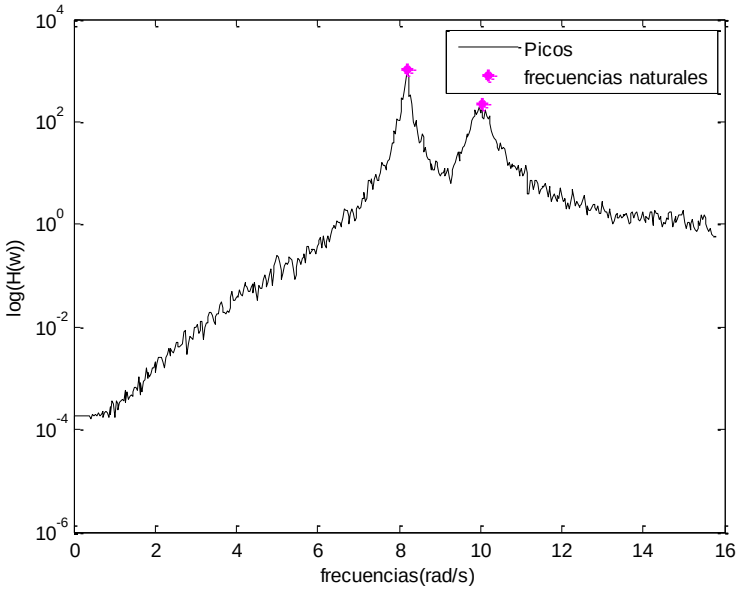


Ilustración 77: Forma automática para seleccionar los picos (tutorial)

Si por el contrario, preferimos escoger el modo manual, aparecerá la siguiente gráfica de la matriz de densidad espectral, llena de puntos para que nos sea más cómodo seleccionarlos. Aparecerá sobre la imagen una lupa y en la ventana de matlab nos preguntará cuántos puntos deseamos marcar.

```
¿De qué manera desea encontrar las frecuencias naturales?
Automático(1) o Manual(2)-> 2
```

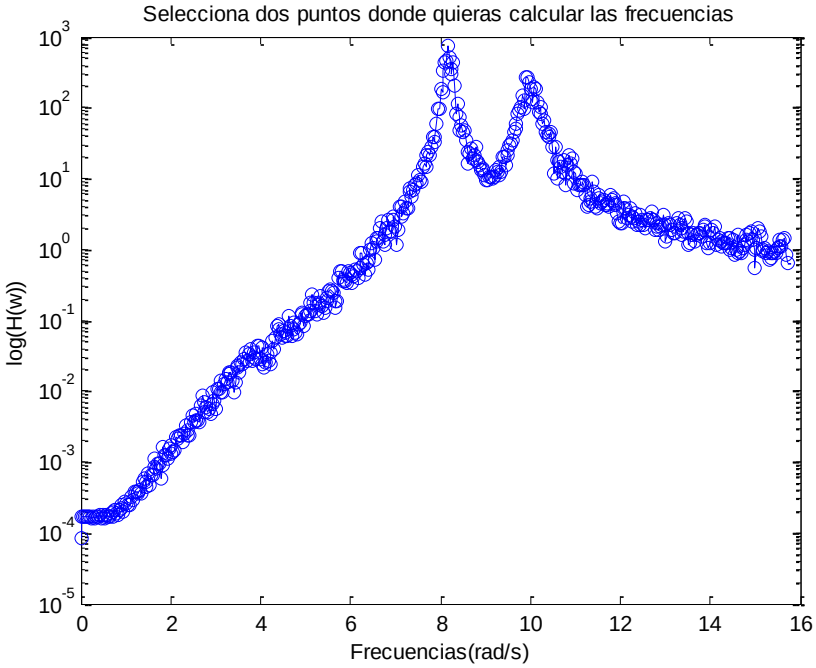


Ilustración 78: Forma manual para seleccionar los picos (tutorial)

Es importante, antes de introducir el número de puntos por teclado, que hagamos ampliemos la zona en la que queremos seleccionarlos

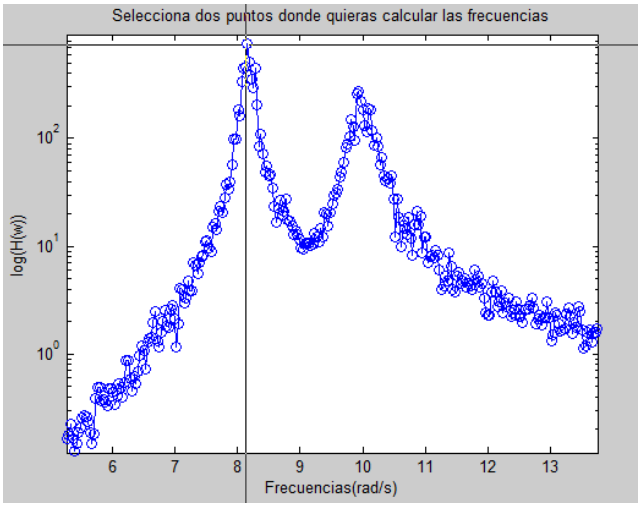


Ilustración 79: Zoom en la forma manual para seleccionar los picos (tutorial)

Tras seleccionarlos aparecerán marcados en color magenta, y aparecerán en la ventana de matlab, las frecuencias naturales y los modos normalizados del sistema, tal y como ocurría en el modo automático.

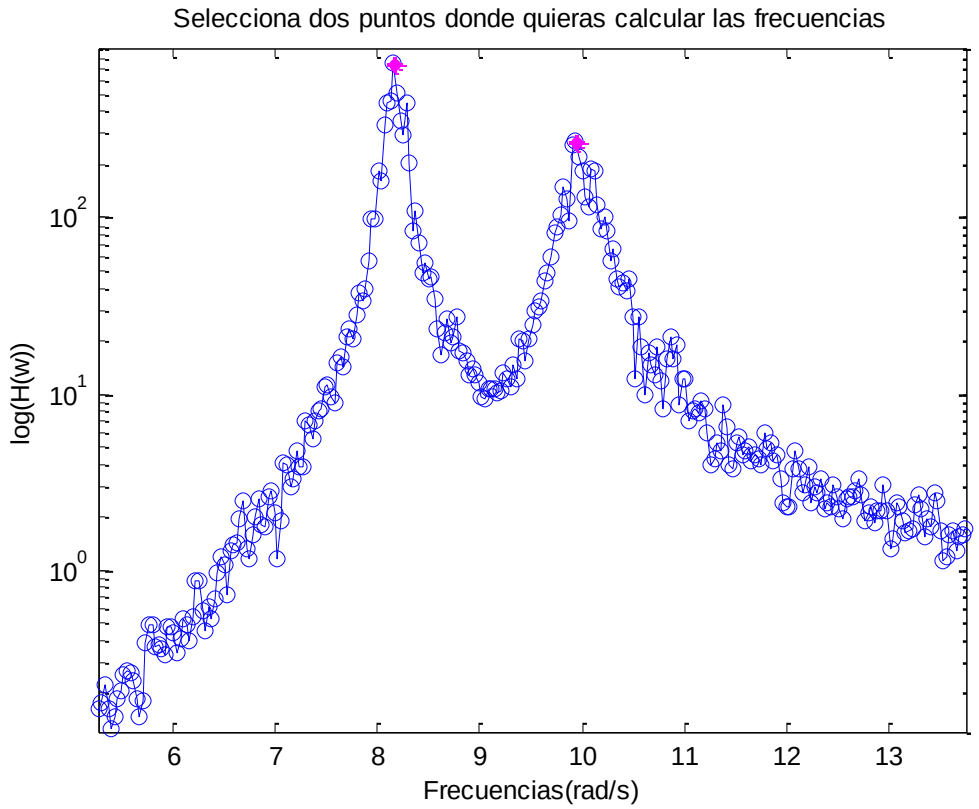


Ilustración 80: Picos marcados en la forma manual para seleccionar los picos (tutorial)

```
Frecuencias naturales en Hz
   1.300630053321387
   1.583593204708197


Los modos propios del sistema normalizados son
modo
     1

  0.985603773661746 - 0.004700530490666i   1.000000000000000

modo
     2

 -1.039176176705141 + 0.053891464869436i   1.000000000000000
```

En tercer lugar, se nos pide que establezcamos el parámetro MAC_b En este caso hemos introducido 0.8. Después nos preguntará si queremos campanas del sistema equivalente de un grado de libertad simétricas o no. En este caso se ha escogido que si.

```
---Función de autocorrelación: INDICADOR MAC---
MAC_b-> 0.8
¿Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad simétricas?
si(1) o no(2)->1
```

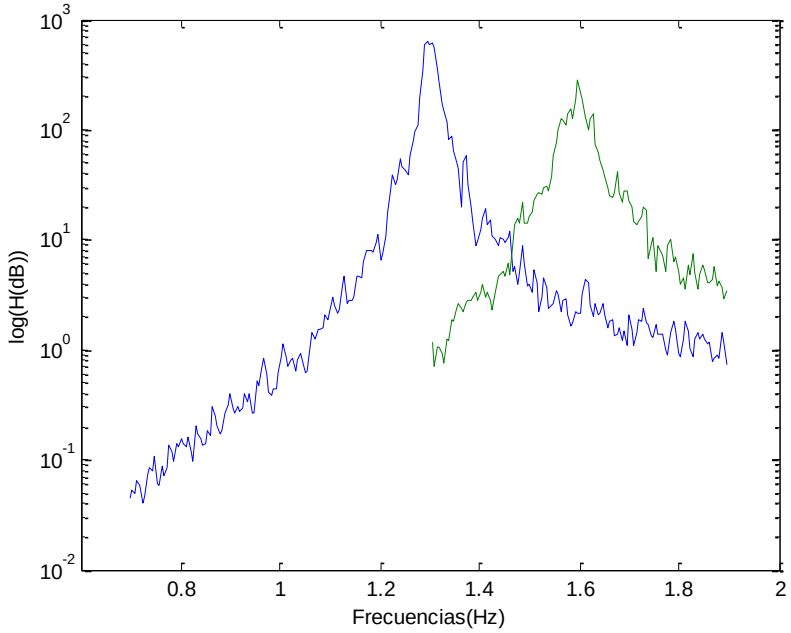


Ilustración 81: Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad simétricas (tutorial)

En el caso de decir que no(2)

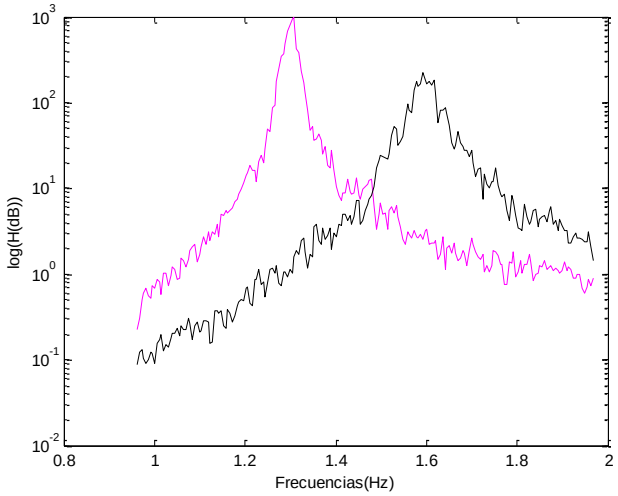


Ilustración 82: Campanas del sistema equivalente de un grado de libertad no simétricas (tutorial)

En cuarto lugar, se calculará la frecuencia y el amortiguamiento, con el método del algoritmo empleado, EFDD. Para ello, primero se realiza la transformada inversa de Fourier de las campanas calculadas previamente (función de autocorrelación) para que después indiquemos la frecuencia de la spline, que debe ser inferior a la f_{sample} o igual, para que tenga más número de puntos y se ajuste mejor a la curva. En este caso se ha seleccionado una menor, 0.02. También fijaremos T_{high} y T_{low}

```
////////////////////////////////////////////////////////////////
--FRECUENCIA Y AMORTIGUAMIENTO--
Indique la frecuencia para el cálculo de la spline-> 0.02

A continuación vamos a fijar "T_high y T_low" de la función de autocorrelación
Indique T_high(valor décimal)-> 0.9
Indique T_low(valor décimal)-> 0.2
El coeficiente de amortiguamiento es
   0.010623748008264   0.020822517467697

Las Frecuencias naturales son
   1.300236406619385   1.585014409221902
```

Aparecerán además en la pantalla las frecuencias naturales y los coeficientes de amortiguamientos calculados, unas ventanas con las funciones de autocorrelación para cada modo:

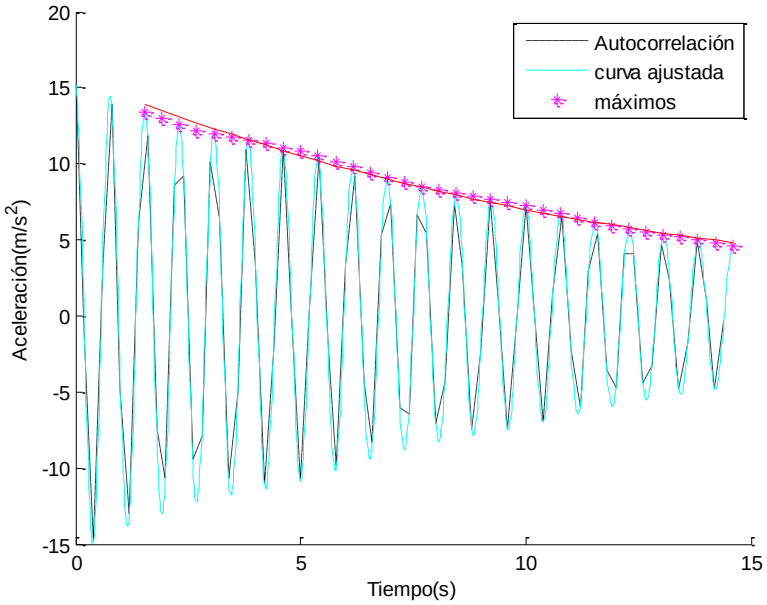


Ilustración 83: Función de autocorrelación modo1 (tutorial)

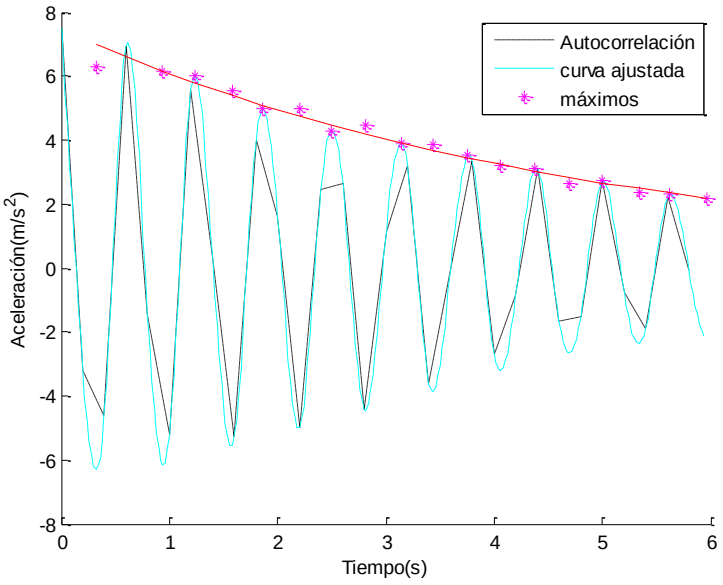


Ilustración 84: Función de autocorrelación modo2 (tutorial)