



# Influencia del ángulo de incidencia y tipo de onda en la respuesta sísmica de estructuras de edificación pilotadas

Máster Universitario en Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en  
Ingeniería

División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras

Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en  
Ingeniería

Autor:

José María Zarzalejos Familiar

Tutor:

Luis A. Padrón Hernández

Tutor:

Juan José Aznárez González

Las Palmas de Gran Canaria, Junio de 2011



# Agradecimientos

Siempre resulta complicado mostrar en unas pocas líneas toda la gratitud que debo por el apoyo recibido para llevar a cabo un trabajo de estas características. Resulta inevitable, además, olvidarme de alguien. Si es tu caso, te pido humildemente perdón.

A los tutores del presente trabajo, los Drs. D. Luis Alberto Padrón Hernández y D. Juan José Aznárez González, cuya relación conmigo ha trascendido de lo puramente profesional y ha llegado al terreno personal, les debo el haberme dado la oportunidad de trabajar y aprender día a día de su calidad profesional y humana. Ambos han hecho siempre lo posible por brindarme todos los medios, toda la ayuda, todo el material y todo el apoyo que he necesitado en cada momento, siempre con una profesionalidad inmaculada. Gracias por haberme enseñado tanto.

Al Dr. D. Orlando Maeso Fortuny, tutor oficioso de este trabajo, le corresponden los mismos méritos y agradecimientos indicados en el párrafo anterior. Su valía personal y profesional son dignas de admiración para cualquiera, tanto más para quien que esté comenzando a hacer sus pinitos en el duro mundo de la investigación. Quisiera aprovechar la ocasión para agradecer al resto de miembros de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras, y en especial a Fidel García del Pino, Ariel Santana Naranjo, Fernando García Torcelly, Cristina Medina y Rayco Toledo, tanto el apoyo técnico brindado durante la realización de este trabajo, como los buenos ratos pasados todos estos meses. Sin su compañía el proceso hubiese sido mucho más arduo.

Un capítulo aparte merecen mis padres, artífices de cualquier éxito que haya podido conseguir y responsables principales de que haya podido llegar hasta este punto. Me gustaría agradecer también al resto de mi familia el apoyo, calidez y cariño que en los momentos buenos y en los no tan buenos han sabido proporcionarme pese a la distancia existente, y que durante toda mi vida ha sido una constante.

Por último, me gustaría expresar mi gratitud a mis amigos Óscar, Noe, Cathy, Felipe, Amar, así como a todos los que involuntariamente omito. Gracias también a esas personas especiales que me han acompañado, desde la lejanía y desde la proximidad, pero siempre desde el cariño.



Este trabajo ha sido realizado con la financiación del Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), la Agencia Canaria de Investigación, Innovación y Sociedad de la Información (ACIISI) del Gobierno de Canarias y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER) a través de los Proyectos de Investigación BIA2010-21399-C02-01 y ProID20100224.



# Índice general

Índice de figuras	ix
Índice de cuadros	xv
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Objetivos y alcance . . . . .	4
1.3. Estructura del documento . . . . .	5
<b>2. El problema elastodinámico armónico y su formulación MEC</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción . . . . .	7
2.2. Ecuaciones de gobierno del problema elastodinámico . . . . .	8
2.3. Propagación de ondas en medios elásticos . . . . .	9
2.3.1. Ondas planas armónicas . . . . .	10
2.4. Representación integral del problema elastodinámico . . . . .	11
2.4.1. Teorema de reciprocidad en la elastodinámica . . . . .	11
2.4.2. Solución fundamental . . . . .	13
2.4.3. Representación integral . . . . .	14
2.4.4. Representación integral en el contorno . . . . .	15
2.5. El método de elementos de contorno . . . . .	16
2.5.1. Proceso de discretización . . . . .	17
2.5.2. Sistema de ecuaciones que surge del MEC . . . . .	19
2.5.3. Tipología de elementos de contorno . . . . .	19
2.5.4. Acoplamiento entre regiones . . . . .	20
2.5.5. Aspectos numéricos del MEC . . . . .	22
2.6. Modelado del amortiguamiento del material . . . . .	23
2.6.1. Materiales viscoelásticos lineales . . . . .	23
2.6.2. Relación constitutiva para materiales viscoelásticos armónicos	23
2.6.3. Modelo histerético viscoelástico lineal . . . . .	24

<b>3. Modelo BEM-FEM</b>	<b>25</b>
3.1. Introducción . . . . .	25
3.2. Ecuaciones de elementos de contorno para el suelo . . . . .	26
3.3. Ecuaciones de elementos finitos para la cimentación pilotada . . . . .	29
3.3.1. Ecuación de movimiento . . . . .	29
3.3.2. Definición del elemento viga . . . . .	30
3.3.3. Fuerzas sobre el pilote . . . . .	32
3.3.4. Sistema de ecuaciones para el pilote simple . . . . .	34
3.4. Acoplamiento MEC-MEF . . . . .	34
3.5. Formulación del encepado rígido . . . . .	36
3.5.1. Restricciones cinemáticas . . . . .	37
3.5.2. Ecuaciones de equilibrio . . . . .	39
3.6. Modelo para las estructuras pilotadas . . . . .	40
3.6.1. Introducción . . . . .	40
3.6.2. Relaciones cinemáticas . . . . .	41
3.6.3. Matriz de rigidez de entreplanta . . . . .	43
3.7. Ensamblaje de la matriz global del sistema . . . . .	45
3.8. Evaluación numérica de las integrales definidas sobre las líneas de carga . . . . .	47
<b>4. Ecuaciones del campo incidente</b>	<b>53</b>
4.1. Introducción . . . . .	53
4.2. Fundamentos . . . . .	53
4.3. Onda SH incidente . . . . .	56
4.3.1. Campo incidente . . . . .	56
4.3.2. Tensores de deformación y tensión . . . . .	58
4.3.3. Aplicación de las condiciones de contorno . . . . .	59
4.4. Onda P incidente . . . . .	60
4.4.1. Campo incidente . . . . .	60
4.4.2. Tensores de deformación y tensión . . . . .	62
4.4.3. Aplicación de las condiciones de contorno . . . . .	64
4.4.4. Cambios de modo . . . . .	66
4.5. Onda SV incidente . . . . .	68
4.5.1. Campo incidente . . . . .	68
4.5.2. Ángulo crítico . . . . .	70
4.5.3. Tensores de deformación y tensión . . . . .	73
4.5.4. Aplicación de las condiciones de contorno . . . . .	75
4.5.5. Cambios de modo . . . . .	79
4.6. Implementación del campo incidente en la formulación . . . . .	82

---

<b>5. Influencia del tipo de onda y ángulo de incidencia</b>	<b>85</b>
5.1. Introducción . . . . .	85
5.2. Influencia del ángulo de incidencia y tipo de onda . . . . .	86
5.3. Definición del problema . . . . .	86
5.4. Variación del desplazamiento de campo libre con $\theta_0$ . . . . .	87
5.5. Resultados en el dominio de la frecuencia . . . . .	89
5.5.1. Factores de interacción cinemática de las cimentaciones empleadas . . . . .	89
5.5.2. Funciones de transferencia en desplazamientos y giros en los encepados . . . . .	91
5.5.3. Deflexión lateral del edificio . . . . .	100
5.5.4. Esfuerzos en los pilotes . . . . .	102
5.6. Resultados en el dominio del tiempo . . . . .	143
5.6.1. Definición de los acelerogramas sintéticos a utilizar . . . . .	143
5.6.2. Espectros de Fourier de los acelerogramas empleados . . . . .	150
5.6.3. Sobre la obtención de la evolución temporal de los esfuerzos en los pilotes . . . . .	151
5.6.4. Evolución temporal del momento flector en la cabeza de los pilotes . . . . .	152
5.6.5. Evolución temporal de la deflexión lateral del edificio . . . . .	166
<b>6. Conclusiones y líneas futuras</b>	<b>179</b>
6.1. Resumen y conclusiones . . . . .	179
6.2. Líneas futuras . . . . .	181
<b>Bibliografía</b>	<b>183</b>



# Índice de figuras

2.1. Movimientos y direcciones de propagación correspondientes a ondas planas tipo P y S. Extraído de [2] . . . . .	11
2.2. Procedimiento de eliminación de la singularidad. Semiesfera alrededor del punto de colocación para integración . . . . .	15
2.3. Acoplamiento entre dos regiones sólidas . . . . .	20
3.1. Representación de las líneas de carga . . . . .	27
3.2. Definición del elemento finito . . . . .	30
3.3. Fuerzas puntuales externas (izquierda) y tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo, definidas sobre un elemento genérico . . . . .	33
3.4. Pilote de referencia (r) y pilote periférico (p) . . . . .	37
3.5. Esquema bidimensional del modelo de estructuras pilotadas . . . . .	40
3.6. Grados de libertad para el acoplamiento entre pilares y encepado . . . . .	41
3.7. Estructura de la matriz de coeficientes $\mathcal{A}$ del sistema . . . . .	46
3.8. Superficie cilíndrica de integración sobre la interfase pilote-suelo cuando el punto de colocación pertenece al pilote . . . . .	48
3.9. Estrategia de colocación no nodal . . . . .	50
3.10. Integración sobre la superficie de la punta del pilote . . . . .	51
4.1. Definición de ejes en el semiespacio . . . . .	54
4.2. Ángulos de interés en el plano $x_2 x_3$ para los distintos problemas . . . . .	54
4.3. Ángulos de interés en el plano $x_2 x_3$ para una onda SH incidente . . . . .	56
4.4. Ángulos de interés en el plano $x_2 x_3$ para una onda P incidente . . . . .	60
4.5. Variación de la amplitud de la onda P reflejada con el ángulo de incidencia $\theta_0$ y el coeficiente de Poisson $\nu$ del terreno . . . . .	67
4.6. Ángulos de interés en el plano $x_2 x_3$ para una onda SV incidente . . . . .	68
4.7. Variación de la amplitud de la onda SV reflejada con el ángulo de incidencia $\theta_0$ . . . . .	80
4.8. Ampliación de la figura 4.7 en el entorno del ángulo crítico para ondas incidentes SV . . . . .	81

4.9. Variación de los ángulos de cambio de modo y crítico con el coeficiente de Poisson del terreno para ondas incidentes SV . . . . .	81
4.10. Campos incidente y reflejado para pilotes embebidos en un semiespacio . . . . .	82
5.1. Definición del problema . . . . .	87
5.2. Variación del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre con el ángulo $\theta_0$ y $\nu_s$ . Ondas SV y P incidentes . . . . .	88
5.3. Factores de interacción cinemática en desplazamientos para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P . . . . .	92
5.4. Factores de interacción cinemática en giros para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P . . . . .	93
5.5. Funciones de transferencia de desplazamientos en el encepado para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Relación de aspecto $h/b = 2$ . . . . .	94
5.6. Funciones de transferencia de giros en el encepado para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Relación de aspecto $h/b = 2$ . . . . .	95
5.7. Funciones de transferencia de desplazamientos en el encepado para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Relación de aspecto $h/b = 3$ . . . . .	96
5.8. Funciones de transferencia de giros en el encepado para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Relación de aspecto $h/b = 3$ . . . . .	97
5.9. Funciones de transferencia de desplazamientos en el encepado para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Relación de aspecto $h/b = 4$ . . . . .	98
5.10. Funciones de transferencia de giros en el encepado para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Relación de aspecto $h/b = 4$ . . . . .	99
5.11. Deflexión lateral del edificio. Relación de aspecto $h/b = 2$ . . . . .	104
5.12. Deflexión lateral del edificio. Relación de aspecto $h/b = 3$ . . . . .	105
5.13. Deflexión lateral del edificio. Relación de aspecto $h/b = 4$ . . . . .	106
5.14. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda P, encepado sin superestructura . . . . .	107
5.15. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda P, encepado sin superestructura . . . . .	108
5.16. Momentos flectores en los pilotes. Onda P, encepado sin superestructura . . . . .	109
5.17. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SH, encepado sin superestructura . . . . .	110
5.18. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SH, encepado sin superestructura . . . . .	111
5.19. Momentos flectores en los pilotes. Onda SH, encepado sin superestructura . . . . .	112

5.20. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SV, encepado sin superestructura . . . . .	113
5.21. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV, encepado sin superestructura . . . . .	114
5.22. Momento flector en los pilotes. Onda SV, encepado sin superestructura . . . . .	115
5.23. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda P, $h/b = 2$ . . . . .	116
5.24. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda P, $h/b = 2$ . . . . .	117
5.25. Momentos flectores en los pilotes. Onda P, $h/b = 2$ . . . . .	118
5.26. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SH, $h/b = 2$ . . . . .	119
5.27. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SH, $h/b = 2$ . . . . .	120
5.28. Momentos flectores en los pilotes. Onda SH, $h/b = 2$ . . . . .	121
5.29. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SV, $h/b = 2$ . . . . .	122
5.30. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV, $h/b = 2$ . . . . .	123
5.31. Momento flector en los pilotes. Onda SV, $h/b = 2$ . . . . .	124
5.32. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda P, $h/b = 3$ . . . . .	125
5.33. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda P, $h/b = 3$ . . . . .	126
5.34. Momentos flectores en los pilotes. Onda P, $h/b = 3$ . . . . .	127
5.35. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SH, $h/b = 3$ . . . . .	128
5.36. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SH, $h/b = 3$ . . . . .	129
5.37. Momentos flectores en los pilotes. Onda SH, $h/b = 3$ . . . . .	130
5.38. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SV, $h/b = 3$ . . . . .	131
5.39. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV, $h/b = 3$ . . . . .	132
5.40. Momentos flectores en los pilotes. Onda SV, $h/b = 3$ . . . . .	133
5.41. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda P, $h/b = 4$ . . . . .	134
5.42. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda P, $h/b = 4$ . . . . .	135
5.43. Momentos flectores en los pilotes. Onda P, $h/b = 4$ . . . . .	136
5.44. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SH, $h/b = 4$ . . . . .	137
5.45. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SH, $h/b = 4$ . . . . .	138
5.46. Momentos flectores en los pilotes. Onda SH, $h/b = 4$ . . . . .	139
5.47. Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SV, $h/b = 4$ . . . . .	140
5.48. Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV, $h/b = 4$ . . . . .	141
5.49. Momentos flectores en los pilotes. Onda SV, $h/b = 4$ . . . . .	142
5.50. Momentos flectores en los pilotes. Onda SH, $\theta_0 = 90^\circ$ , $h/b = 2$ , $a_o \leq 1$ . . . . .	143
5.51. Espectros de respuesta elástica empleados en el trabajo . . . . .	145
5.52. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1 . . . . .	146
5.53. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2 . . . . .	146
5.54. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1. Línea base corregida . . . . .	147

5.55. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2. Línea base corregida . . . . .	147
5.56. Comparativa entre los espectros de respuesta de diseño y los espectros de respuesta de los acelerogramas generados. Tipo 1 . . . . .	149
5.57. Comparativa entre los espectros de respuesta de diseño y los espectros de respuesta de los acelerogramas generados. Tipo 2 . . . . .	149
5.58. Espectro de amplitudes de Fourier de los acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1 . . . . .	150
5.59. Espectro de amplitudes de Fourier de los acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2 . . . . .	151
5.60. Momentos máximos en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda), $h/b = 2$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1 . . . . .	157
5.61. Momentos máximos en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda), $h/b = 2$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2 . . . . .	158
5.62. Momentos máximos en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda), $h/b = 2$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1 . . . . .	159
5.63. Momentos máximos en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda), $h/b = 2$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2 . . . . .	160
5.64. Momentos flectores obtenidos por subestructuración. Pilote central. Ondas SV. 30 grados . . . . .	161
5.65. Valores cuadráticos medios del momento flector en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda), $h/b = 2$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1 . . . . .	162
5.66. Valores cuadráticos medios del momento flector en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda), $h/b = 2$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2 . . . . .	163
5.67. Valores cuadráticos medios del momento flector en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda), $h/b = 2$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1 . . . . .	164
5.68. Valores cuadráticos medios del momento flector en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda), $h/b = 2$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2 . . . . .	165

5.69. Deflexiones laterales máximas del edificio. $h/b = 2$ (izquierda), $h/b = 3$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas P. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 1 . . . . .	167
5.70. Deflexiones laterales máximas del edificio. $h/b = 2$ (izquierda), $h/b = 3$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas P. Acelerograma compatibles con el espectro de tipo 2 . . . . .	168
5.71. Deflexiones laterales máximas del edificio. $h/b = 2$ (izquierda), $h/b = 3$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1 . . . . .	169
5.72. Deflexiones laterales máximas del edificio. $h/b = 2$ (izquierda), $h/b = 3$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2 . . . . .	170
5.73. Deflexiones laterales máximas del edificio. $h/b = 2$ (izquierda), $h/b = 3$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1 . . . . .	171
5.74. Deflexiones laterales máximas del edificio. $h/b = 2$ (izquierda), $h/b = 3$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2 . . . . .	172
5.75. Valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio. $h/b = 2$ (izquierda), $h/b = 3$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas P. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 1 . . . . .	173
5.76. Valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio. $h/b = 2$ (izquierda), $h/b = 3$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas P. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 2 . . . . .	174
5.77. Valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio. $h/b = 2$ (izquierda), $h/b = 3$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 1 . . . . .	175
5.78. Valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio. $h/b = 2$ (izquierda), $h/b = 3$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 2 . . . . .	176
5.79. Valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio. $h/b = 2$ (izquierda), $h/b = 3$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 1 . . . . .	177
5.80. Valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio. $h/b = 2$ (izquierda), $h/b = 3$ (centro) y $h/b = 4$ (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 2 . . . . .	178



# Índice de cuadros

2.1.	Tipos de elementos triangulares y cuadriláteros cuadráticos . . . .	21
4.1.	Cuadro resumen de los ángulos de cambio de modo para una onda incidente tipo P y un conjunto de coeficientes de Poisson del terreno . . . .	68
4.2.	Cuadro resumen de los ángulos críticos para una onda incidente tipo SV y un conjunto de coeficientes de Poisson del terreno . . . .	71
4.3.	Cuadro resumen de los ángulos de cambio de modo para una onda incidente tipo SV y un conjunto de coeficientes de Poisson del terreno . . . .	82
5.1.	Cuadro resumen de los valores del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre en el punto de referencia (0,0,0) en función del ángulo $\theta_0$ de incidencia. Onda SV incidente y $\nu_s = 0,4$ . . . . .	89
5.2.	Cuadro resumen de los valores del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre en el punto de referencia (0,0,0) en función del ángulo $\theta_0$ de incidencia. Onda P incidente y $\nu_s = 0,4$ . . . . .	89
5.3.	Coefficiente de correlación de Pearson de los acelerogramas. Acelerogramas compatibles con los espectros de tipo 1 (izquierda) y con los espectros de tipo 2 (derecha) . . . . .	148



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

Este Trabajo Fin de Máster se integra en la línea de trabajo principal que se desarrolla en la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería, que tiene por objetivo el desarrollo de modelos numéricos que permitan determinar la respuesta dinámica de estructuras de diferente tipología. Se trata de modelos que posibilitan el estudio de desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y tensiones en cualquier punto de las estructuras ante cargas de cualquier tipo variables en el tiempo y que, por tanto, son magnitudes que también poseen dependencia temporal.

Es posible, así, obtener de forma aproximada la respuesta dinámica de una estructura ante, por ejemplo, las solicitaciones producidas por una máquina anclada a la misma o en sus proximidades, las cargas dinámicas producidas por el viento o las vibraciones que se transmiten desde el terreno a través del cimiento durante el desarrollo de un evento de carácter sísmico. Este último tipo de problema, de especial interés en el diseño de estructuras civiles singulares (puentes, presas, edificios altos, etc.), presenta algunas dificultades añadidas para su tratamiento. Los modelos a desarrollar para el estudio sísmico de estructuras deben tener en cuenta aspectos tales como el carácter propagatorio de la excitación y el ángulo de incidencia de las ondas sísmicas sobre el emplazamiento, los efectos de distorsión del campo incidente asociados a la topografía, estratigrafía o la propia geometría del cimiento y, en general, cualquier aspecto relacionado con la interacción entre la estructura analizada y el terreno de cimentación. Considerar con rigor estos efectos requiere de la utilización de modelos directos que tengan en cuenta la estructura y el terreno y que formulen adecuadamente la interacción mutua. Su principal inconveniente es el elevado número de grados de libertad que implican, de ahí que estos modelos directos, hasta el desarrollo reciente de computadores de

grandes prestaciones accesibles, tuviesen un campo de aplicación muy restringido. La metodología desarrollada entonces (ampliamente utilizada actualmente en algunos problemas) se basa en la aplicación de técnicas de subestructuración que permitan el análisis dinámico teniendo en cuenta los fenómenos de interacción de forma simplificada [1].

Los modelos formulados en la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras se enmarcan dentro de la categoría de Modelos Directos, siendo aplicados a problemas donde coexisten medios de diferentes características y comportamientos (suelo, estructura, agua, sedimentos) sometidos a solicitaciones sísmicas. Ante este tipo de solicitaciones, estos medios interactúan entre sí formando un sistema acoplado en el que ninguna de las partes puede ser estudiada aisladamente. Además, existe una dificultad adicional asociada al hecho de que algunas de estas regiones pueden ser muy extensas (o prácticamente infinitas, como el suelo). Esto dificulta el estudio, ya que, a diferencia del análisis estático, en el caso dinámico elementos muy alejados de un punto pueden tener una gran influencia sobre los movimientos y tensiones a que éste se ve sometido.

El método utilizado para el tratamiento numérico de las ecuaciones del problema en estos modelos ha sido, fundamentalmente, el Método de los Elementos de Contorno. Teniendo en cuenta las características del problema a resolver y sus condicionantes, el Método de los Elementos de Contorno es, sin duda, la opción más adecuada [2]. Este Método permite el tratamiento sencillo de regiones de geometría infinita o semi-infinita en problemas dinámicos, ya que verifica de forma implícita las condiciones de radiación. Asimismo, la incorporación de un tren de ondas como solicitación en el terreno simulando el evento sísmico es también muy natural. En este sentido, y con anterioridad al desarrollo del presente Trabajo Fin de Máster, ya se había desarrollado un modelo numérico acoplado que, haciendo uso del Método de Elementos de Contorno, permite el estudio de la respuesta sísmica de estructuras continuas, habiendo sido aplicado con éxito al estudio sísmico de presas bóveda [3-5]. En este modelo, todas los dominios implicados (terreno, presa, agua y sedimentos de fondo) son discretizados haciendo uso del Método de Elementos de Contorno como regiones continuas sin simplificación dimensional o de comportamiento alguna. La interacción dinámica entre dichas regiones se formula de manera rigurosa (equilibrio y compatibilidad) dando lugar a un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son desplazamientos o tensiones en el contorno de dichas regiones. Los desplazamientos y tensiones en el interior de estas regiones pueden obtenerse a través de los valores calculados en el contorno. La solicitación consiste en un tren de ondas sísmicas planas de diferente tipo (P, SH, SV y ondas de Rayleigh) que, partiendo desde el infinito, incide en el lugar de emplazamiento de la estructura.

Otro caso de interés para los miembros de la División en los últimos años ha sido el análisis de la respuesta dinámica de estructuras de edificación cimentadas

mediante pilotes. Este problema tiene gran interés, principalmente por dos motivos básicos: el gran número de edificaciones de estas características en zonas de peligrosidad sísmica y la necesidad, aún hoy en día, de alcanzar una mayor y mejor comprensión de los fenómenos implicados en la respuesta dinámica de estructuras de estas características, que adolecen de grandes lagunas en aspectos tales como la interacción suelo-estructura como se pone de manifiesto, por ejemplo, en distintas normativas como el Eurocódigo 8 [6]. En este sentido, se ha desarrollado e implementado un modelo acoplado de Elementos de Contorno y Elementos Finitos (MEC-MEF) tridimensional armónico que aprovecha las ventajas de cada metodología para el análisis dinámico directo de este tipo de estructuras. Este modelo cuenta con las ventajas del Método de Elementos de Contorno para representar el terreno donde se asienta la edificación, es decir, su carácter de medio semi-infinito así como la presencia de ondas sísmicas excitadoras, y la simplificación que supone modelar vigas, pilares y pilotes de la estructura como barras mediante el MEF. Este programa ha permitido el análisis de la respuesta de cimentaciones pilotadas, tanto en impedancias como en interacción cinemática [7–9], así como el estudio de la respuesta de la superestructura y de otras estructuras cercanas, sometido el conjunto a trenes de ondas sísmicas con incidencia vertical [10, 11].

Este Trabajo Fin de Máster pretende continuar la línea de investigación iniciada por el autor en su Proyecto Fin de Carrera. En él, se incorporó en el código original la posibilidad de considerar una excitación formada por trenes de ondas volumétricas de tipo P, SH y SV incidentes con un ángulo genérico. Para tal fin, se formularon e implementaron las ecuaciones que describen el campo incidente, se validaron los resultados con ejemplos de la bibliografía y se resolvieron algunos problemas concretos en los que se puso de manifiesto la importancia del ángulo de incidencia y del tipo de onda en la respuesta dinámica del sistema. Estos resultados se obtuvieron en el dominio de la frecuencia. Es objetivo del presente trabajo el ampliar el conjunto de resultados en el dominio de la frecuencia obtenidos en el Proyecto Fin de Carrera, así como de incorporar resultados en el dominio del tiempo. Para ello, el sistema es sometido a excitaciones sísmicas caracterizadas por un conjunto de acelerogramas, que deben ser generados y tratados de manera adecuada con anterioridad a la obtención de las leyes de evolución temporal de las magnitudes cuyas funciones de transferencia fueron obtenidas previamente. Estos resultados permitirán cuantificar, desde el punto de vista del diseño, la relevancia que el ángulo de incidencia y el tipo de onda tienen en la magnitud de los esfuerzos de cálculo de un determinado elemento estructural cuando es sometido a un evento sísmico originado por distintos tipos de onda cuyo ángulo de incidencia es variable.

## 1.2. Objetivos y alcance

Con este Trabajo Fin de Máster se pretende continuar con la vía abierta por el Proyecto Fin de Carrera del autor, obteniendo y analizando nuevos resultados que permitan continuar con el desarrollo de un modelo directo acoplado de Elementos de Contorno - Elementos Finitos para el estudio de la respuesta sísmica de estructuras de edificación pilotadas que incorpora de forma rigurosa los fenómenos de interacción con el suelo. En concreto, se busca mejorar la comprensión de fenómenos asociados a la ampliación de la definición del campo incidente y de su posterior aplicación al estudio de los fenómenos que determinan el comportamiento dinámico de esta clase de estructuras. De manera concreta, los objetivos a cumplir en este Trabajo Fin de Máster son los que se relacionan a continuación:

- Obtención de funciones de transferencia en frecuencia, en términos de desplazamientos y deflexiones laterales del edificio y esfuerzos en pilotes, para distintas configuraciones del sistema y para ondas incidentes tipo P, SH y SV con distintos ángulos de incidencia en cada caso. Análisis de los resultados e identificación de los casos de especial interés.
- Generación de acelerogramas sintéticos compatibles con los problemas en estudio y acordes a la normativa vigente.
- Definición de un problema real y cálculo de la capacidad resistente de los elementos de cimentación en términos, principalmente, de máximos momentos flectores.
- Obtención de la respuesta temporal del sistema real definido anteriormente sometido a los distintos acelerogramas generados para cada configuración, tipo de onda y ángulo de incidencia haciendo uso de las funciones de respuesta en frecuencia obtenidas. Análisis de los resultados en términos de momentos máximos, deflexiones máximas, ángulos pésimos, tipos de onda pésimos, etc.
- Presentación de resultados y redacción de conclusiones.

Tras esta relación de objetivos de carácter científico, puede enumerarse otra serie de objetivos, de carácter más metodológico, que han permitido incrementar la formación del autor en el campo de estudio y su introducción a las tareas de investigación, en un nuevo paso hacia el desarrollo de una Tesis Doctoral en la materia. Entre éstos están:

- Formación curricular del autor en el campo de la dinámica de estructuras, estudiando las bases teóricas de la dinámica de estructuras de barras.

- Por la misma razón, estudio y comprensión de las bases de la Elastodinámica Lineal, del Método de los Elementos de Contorno y el Método de los Elementos Finitos, que han servido para el desarrollo del software aplicable al análisis dinámico de estructuras pilotadas.
- Estudio del lenguaje de programación FORTRAN, utilizado en la implementación de los modelos matemáticos utilizados y modificados, así como el desarrollo de la capacidad de escritura, compilación y ejecución de programa propios en tal lenguaje.
- Estudio del programa informático vinculado al modelo acoplado MEC-MEF, incluida en éste la posibilidad de incorporar como excitación trenes de ondas sísmicas con incidencia general.
- Realización de búsquedas bibliográficas y recopilación de bibliografía con el uso frecuente de los mecanismos de búsquedas de datos en las fuentes electrónicas de los organismos y centros de investigación.

### 1.3. Estructura del documento

Una vez se han comentado los aspectos genéricos del Trabajo Fin de Máster en el presente capítulo introductorio, es hora de resumir el contenido del resto de capítulos del documento. De este modo, en el capítulo 2 se explican las bases y se escriben las ecuaciones que gobiernan el problema elastodinámico armónico en sólidos isótropos. También se introducen las bases del Método de Elementos de Contorno aplicado a este problema y se discuten sus aspectos metodológicos y de implementación. En el capítulo 3 se describe el modelo acoplado MEC-MEF, tanto en sus aspectos teóricos como de implementación. Se estudia en detalle la formulación de Elementos de Contorno para el suelo y la correspondiente de Elementos Finitos para pilotes y estructura, así como las ecuaciones de acoplamiento dinámico, las variables primarias del problema y el sistema de ecuaciones resultante. Por otro lado, en el capítulo 4 se formulan las ecuaciones del campo incidente para ondas P, SH y SV con ángulo de incidencia genérico en su propagación por el terreno. Se obtienen las expresiones del campo de desplazamientos y tensor de tensiones necesarias para su incorporación al código en términos del campo difractado. En el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos de la aplicación del código modificado. Se estudia la influencia del ángulo de incidencia y tipo de onda en la respuesta dinámica de la estructura y cimentación (desplazamientos y esfuerzos) para algunos ejemplos tipo tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo. Para finalizar, el capítulo 6 extrae algunas conclusiones

del trabajo proponiendo, además, algunas vías futuras de trabajo en la misma línea de investigación.

## Capítulo 2

# El problema elastodinámico armónico y su formulación mediante el Método de Elementos de Contorno

### 2.1. Introducción

A lo largo del presente trabajo se estudia el comportamiento dinámico de cimentaciones pilotadas tridimensionales alojadas en suelos viscoelásticos y de las superestructuras que esta clase de cimentaciones soportan. El citado comportamiento se encuentra enmarcado en el ámbito de los problemas elastodinámicos tridimensionales, cuyas soluciones analíticas son, generalmente, inabordables. Por ello, se han desarrollado distintas metodologías aproximadas, entre las que el método de elementos de contorno ha demostrado ser una aproximación numérica suficientemente precisa, siendo especialmente adecuada para problemas en los que intervienen regiones no acotadas.

Este capítulo introductorio comienza estableciendo las ecuaciones básicas de gobierno del problema elastodinámico y estudiando con brevedad el fenómeno de propagación de ondas en medios elásticos en los apartados 2.2 y 2.3 respectivamente. Posteriormente, la sección 2.4 presenta la representación integral del problema elastodinámico, permitiendo, de este modo, formular el método de elementos de contorno (MEC en lo sucesivo) en la sección 2.5. Para terminar, el presente capítulo finaliza en la sección 2.6 con algunos conceptos relacionados con el tratamiento de problemas viscoelásticos haciendo uso de la misma formulación obtenida para medios elásticos.

## 2.2. Ecuaciones de gobierno del problema elastodinámico

La formulación presentada en el presente trabajo trata la solución numérica de un problema dinámico en estado estacionario para regiones elásticas, lineales, homogéneas e isotrópicas. El primer paso es, por tanto, establecer las ecuaciones de gobierno del problema, que pueden obtenerse de la combinación de las relaciones cinemáticas, las ecuaciones de equilibrio y la ley de comportamiento del material y que controlan el comportamiento dinámico de los sólidos elásticos.

Sea  $\mathbf{x}$  el vector de posición de un punto del cuerpo  $\Omega$  con respecto a un sistema fijo de coordenadas cartesianas rectangulares. El tensor de pequeñas deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  del citado punto en el instante de tiempo  $t$  se define, en términos de las componentes de su vector de desplazamientos  $u_i(\mathbf{x}, t)$ , como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

donde las comas indican derivación con respecto a las coordenadas espaciales.

Por otro lado, se pueden expresar las condiciones de equilibrio para los puntos de un sólido elástico en términos del siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.2)$$

donde  $\sigma_{ij}$  representa el tensor de tensiones,  $b_i$  las fuerzas de volumen que actúan en  $\Omega$ ,  $\rho$  es la densidad del cuerpo, los puntos indican derivadas temporales y los subíndices repetidos implican suma (según el convenio de sumación de Einstein).

Finalmente, la relación entre los tensores de tensión y deformación para sólidos elásticos, lineales, isotrópicos y homogéneos se establece, en términos de la ley de Hooke, como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (2.3)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ;  $\delta_{ij} = 0$  en otro caso).  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé, que se relacionan con el módulo de elasticidad transversal o módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$  según:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.4)$$

siendo  $\mu$  el módulo de elasticidad transversal o módulo de cizalladura.

Sabiendo lo anterior, el comportamiento dinámico de un cuerpo elástico, lineal, isotrópico y homogéneo se encuentra gobernado por las expresiones (2.1), (2.2) y (2.3), las cuales forman un sistema completo de ecuaciones (15 en el caso tridimensional). La sustitución de (2.1) y (2.3) en (2.2) da como resultado:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.5)$$

que son las ecuaciones de Navier, representando las ecuaciones de gobierno del movimiento en términos del vector de desplazamientos  $\mathbf{u}$ .  $\mathbf{b}$  es, como se comentó con anterioridad, el vector de fuerzas volumétricas actuantes en el cuerpo. Como ecuaciones diferenciales que son, la resolución del conjunto de ecuaciones (2.5) requiere el establecimiento de una serie de condiciones de contorno que, en este caso, consisten en un conjunto de tensiones y/o desplazamientos conocidos en el contorno  $\Gamma$  del cuerpo  $\Omega$ , así como de condiciones iniciales  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ .

### 2.3. Propagación de ondas en medios elásticos

La integración de las expresiones (2.5) para un caso general es una tarea complicada y no siempre posible. Por ello, se han desarrollado distintos procedimientos para expresar las ecuaciones de Navier de modo que se pueda obtener su solución de manera más sencilla para determinados problemas. Entre esos procedimientos, la formulación del problema elastodinámico en términos de dilatación y rotación lleva a un conjunto de ecuaciones de onda más simples que, además, dependen de variables con un claro significado físico. Así, sean  $\mathbf{e}$  y  $\boldsymbol{\omega}$ , respectivamente, los vectores dilatación y rotación, expresables del modo siguiente:

$$\mathbf{e} = \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.6a)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.6b)$$

Tomando la divergencia y el rotacional de la ecuación (2.5) se obtiene, respectivamente, el siguiente par de ecuaciones de onda:

$$c_p^2 \nabla^2 \mathbf{e} + \nabla \cdot \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{e}} \quad (2.7)$$

$$c_s^2 \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{b} = \ddot{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.8)$$

donde

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{y} \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.9)$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) representan la formulación desacoplada de las ecuaciones de Navier en términos de la dilatación y de tres componentes del vector de rotación. La ecuación (2.7) es una ecuación de onda escalar, con velocidad de propagación  $c_p$ , mientras que la ecuación (2.8) es una ecuación de onda vectorial con velocidad de propagación  $c_s$ . Por lo tanto, las ondas que se propagan en

el sólido elástico se pueden clasificar en ondas irrotacionales y equivolumiales, también conocidas como ondas compresionales (o *primarias* -P-) y de corte (o *secundarias* -S-). La denominación *primaria* y *secundaria* proviene del campo de la sismología, ya que  $c_p > c_s$  y, en consecuencia, las primeras alcanzan la estación sismológica en primer lugar en caso de existir un terremoto.

### 2.3.1. Ondas planas armónicas

Es momento de centrarse en el problema específico de las ondas elásticas planas propagándose en una cierta dirección, definida por un cierto vector unitario  $\mathbf{s}$ . En esta situación, todos los puntos de un plano común perpendicular a  $\mathbf{s}$  están sometidos a los mismos movimientos, definidos por el vector unitario  $\mathbf{d}$ . En el caso armónico en estado estacionario, los desplazamientos de un punto  $\mathbf{x}$  tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = A e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (2.10)$$

donde  $A$  es la amplitud del movimiento, independiente de  $t$  y  $\mathbf{x}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  y  $k = \omega/c$  es el número de onda, siendo  $c$  la velocidad de onda. Por otro lado, definiendo las características elásticas del sólido por medio de  $c_s$  y  $c_p$  y asumiendo nulas, por simplicidad, las fuerzas de volumen, las ecuaciones de Navier pueden escribirse como:

$$-c_s^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} + c_p^2 \nabla \mathbf{e} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.11)$$

Sustituyendo la ecuación (2.10), cada término de (2.11) queda:

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -k^2 \mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.12a)$$

$$\nabla \mathbf{e} = -k^2 (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \quad (2.12b)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 e^{i(\omega t - k \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})} \mathbf{d} \quad (2.12c)$$

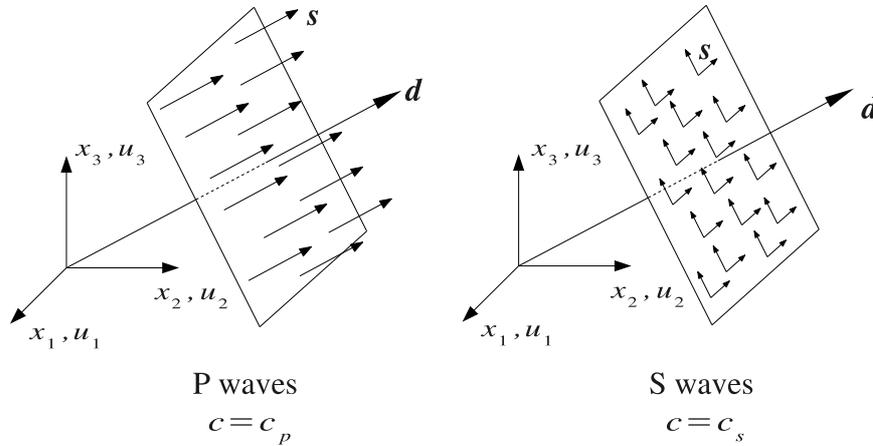
Por lo tanto, y teniendo en cuenta que  $\mathbf{s} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} - \mathbf{d}$ , la ecuación (2.11) se convierte en:

$$(c_s^2 - c^2) \mathbf{d} + (c_p^2 - c_s^2) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{s} = 0 \quad (2.13)$$

y, en consecuencia:

$$\text{si } \begin{cases} c = c_s \Rightarrow \mathbf{s} \cdot \mathbf{d} = 0 & \Rightarrow \text{mov. perpendicular a la dirección de propagación} \\ c = c_p \Rightarrow \mathbf{s} \times \mathbf{d} = 0 & \Rightarrow \text{mov. paralelo a la dirección de propagación} \end{cases}$$

como se ilustra en la figura 2.1.



**Figura 2.1:** Movimientos y direcciones de propagación correspondientes a ondas planas tipo P y S. Extraído de [2]

En esta sección sólo se han apuntado algunos conceptos esenciales de los fenómenos de propagación de ondas elásticas para facilitar la comprensión de las siguientes secciones y capítulos. Una explicación más profunda de los fenómenos de propagación de ondas en elastodinámica y su resolución con elementos de contorno puede encontrarse en Domínguez [2]. Además, un análisis exhaustivo del problema se puede encontrar en [12, 13]

## 2.4. Representación integral del problema elastodinámico

En la sección anterior se ha descrito el comportamiento dinámico de un medio elástico, lineal, isótropo y homogéneo mediante sus ecuaciones de gobierno. La transformación de ese conjunto de ecuaciones diferenciales en expresiones integrales dará como resultado la formulación del problema en términos del método de elementos de contorno.

### 2.4.1. Teorema de reciprocidad en la elastodinámica

El punto de partida es el teorema de reciprocidad entre dos estados elastodinámicos. Éste es una extensión del clásico teorema de la reciprocidad en la elastoestática de Betti, formulado en el dominio del tiempo. El teorema de reciprocidad en la elastodinámica fue propuesto inicialmente por Graffi [14], siendo extendido con posterioridad a dominios infinitos por Wheeler y Sternberg [15].

Sean  $\mathcal{S}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b}; \Omega)$  y  $\mathcal{S}^*(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{b}^*; \Omega)$  dos estados elastodinámicos diferentes que satisfacen las ecuaciones (2.5) de Navier en un dominio regular  $\Omega$ .  $\mathcal{S}^*$  será una solución de referencia conocida de antemano que se empleará para resolver el problema y obtener el estado desconocido  $\mathcal{S}$ . Asumiendo condiciones iniciales nulas, el teorema de reciprocidad en la elastodinámica puede escribirse como:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{p} * \mathbf{u}^*) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{b} * \mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{p}^* * \mathbf{u}) d\Gamma + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{b}^* * \mathbf{u}) d\Omega \quad (2.14)$$

donde  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{u}^*$  son los vectores de desplazamiento en cualquier punto del dominio, mientras que  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}^*$  son los vectores de tensión en  $\Gamma$ , en equilibrio con los correspondientes tensores de tensión  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\sigma}^*$ , en los estados  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}^*$  respectivamente. El operador  $*$  representa la convolución de Riemann.

La formulación elastodinámica desarrollada en el presente trabajo considera fuerzas de volumen y condiciones de contorno armónicas en el tiempo con frecuencia angular  $\omega$ , *i.e.*, del tipo  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t}$ . En este caso, los movimientos consisten en una parte transitoria ( $\mathbf{u}^t(\mathbf{x}, t)$ ) y una permanente ( $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$ ) variando armónicamente en el tiempo, de modo que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^t(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t} \quad (2.15)$$

Sin embargo, todos los sistemas físicos reales poseen alguna clase de mecanismo de disipación de energía, de modo que cuando  $t \rightarrow \infty$ , la parte transitoria desaparece. Esto hace posible la formulación del problema cuando es sólo la parte permanente (causada por las condiciones de contorno armónicamente variables) la que tiene influencia. En general,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$  será una función compleja desfasada con la excitación. Entonces, asumiendo que las propiedades del medio elástico no varían con el tiempo, los campos de desplazamientos y tensiones se pueden expresar como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)e^{i\omega t} \quad (2.16a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}; \omega)e^{i\omega t} \quad (2.16b)$$

La sustitución de las ecuaciones (2.16) en las ecuaciones de gobierno permite eliminar el término repetido  $e^{i\omega t}$  y reescribir las ecuaciones para el estado elastodinámico permanente. Por lo tanto, es posible redefinir los dos estados elastodinámicos expuestos con anterioridad en el dominio de la frecuencia  $\mathcal{S}_{\omega}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b}; \omega, \Omega)$  y  $\mathcal{S}_{\omega}^*(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{b}^*; \omega, \Omega)$ . Bajo estas consideraciones, los productos de convolución desaparecen de la ecuación (2.14), simplificándose la expresión y quedando, entonces, del modo siguiente:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{p}\mathbf{u}^* d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{b}\mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*\mathbf{u} d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{b}^*\mathbf{u} d\Omega \quad (2.17)$$

### 2.4.2. Solución fundamental

La formulación de la ecuación integral de la elastodinámica de la ecuación (2.17) pasa por escoger un estado de referencia  $\mathcal{S}_\omega^*$  adecuado, generalmente denominado *solución fundamental*. Existen distintas soluciones fundamentales (o funciones de Green) para diversos problemas de referencia. La solución empleada en el presente trabajo representa la respuesta, en términos de desplazamientos y tensiones, de un medio elástico, lineal, isótropo y homogéneo no acotado cuando es sometido a una carga armónica unitaria concentrada de la forma:

$$\rho b_k^* = \delta(\boldsymbol{\nu}) \delta_{lk} e^{i\omega t} \quad (2.18)$$

aplicada en el punto  $\boldsymbol{\nu}$ , en dirección  $l$ , siendo  $\delta_{lk}$  la delta de Kronecker y  $\delta(\boldsymbol{\nu})$  la delta de Dirac, definida como:

$$\int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\nu}) d\Omega = \begin{cases} 1, & \text{si } \boldsymbol{\nu} \in \Omega \\ 0, & \text{si } \boldsymbol{\nu} \notin \Omega \end{cases} \quad (2.19)$$

Se trata de un problema clásico resuelto por Stokes [16] en el dominio del tiempo, por Cruse y Rizzo [17] en el de Laplace, y, algunos años antes, por Kupradze [18] para problemas armónicos. Como ya ha sido mencionado, esta solución fundamental corresponde al espacio completo, lo que obliga a discretizar la superficie libre cuando se estudia un dominio semi-infinito, como ocurre en este trabajo. En la práctica, sin embargo, sólo se debe incluir en el modelo una pequeña región alrededor del área de análisis para obtener resultados precisos.

Sean  $u_{ik}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \omega)$  los desplazamientos en dirección  $k$  en el punto  $\mathbf{x}$  debidos a la carga puntual. De igual modo, sea  $p_{ik}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \omega)$  la componente en  $k$  de las tensiones asociadas a un plano con normal exterior (unitaria)  $\mathbf{n}$  en el punto  $\mathbf{x}$ . Sus expresiones, para  $k, l = 1, 2$  o  $3$ , son:

$$u_{ik}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \omega) = \frac{1}{4\pi\mu} [\psi \delta_{lk} - \chi r_{,k} r_{,l}] \quad (2.20)$$

$$p_{ik}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \left( \delta_{kl} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + r_{,k} n_l \right) - \frac{2}{r} \chi \left( n_k r_{,l} - 2 r_{,k} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial \chi}{\partial r} r_{,k} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \left( \frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{2}{r} \chi \right) r_{,l} n_k \right] \quad (2.21)$$

donde  $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\nu}|$  y

$$\begin{aligned}\psi &= -\left(\frac{c_s}{c_p}\right)^2 \left(\frac{1}{z_p^2 r^2} - \frac{1}{z_p r}\right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left(\frac{1}{z_s^2 r^2} - \frac{1}{z_s r} + 1\right) \frac{e^{z_s r}}{r} \\ \chi &= -\left(\frac{c_s}{c_p}\right)^2 \left(\frac{3}{z_p^2 r^2} - \frac{3}{z_p r} + 1\right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left(\frac{3}{z_s^2 r^2} - \frac{3}{z_s r} + 1\right) \frac{e^{z_s r}}{r}\end{aligned}\quad (2.22)$$

siendo

$$z_p = -\frac{i\omega}{c_p}; \quad z_s = -\frac{i\omega}{c_s} \quad (2.23)$$

Es interesante resaltar que esta solución fundamental presenta una singularidad cuando  $\omega r \rightarrow 0$ , lo que implica la necesidad de un tratamiento especial de las integrales de estas funciones en los alrededores del punto fuente (ver, p. ej., [2, 19]).

### 2.4.3. Representación integral

La aplicación del teorema de reciprocidad (2.17) entre el estado desconocido en estudio y el de referencia  $\mathcal{S}_\omega^*$  definido con anterioridad lleva a la representación integral del problema. En lo sucesivo, las ecuaciones se escribirán representando un conjunto de tres ecuaciones, que aparecen de la colocación de la carga unitaria en las tres direcciones del espacio, de modo que los vectores  $\mathbf{u}^*$ ,  $\mathbf{p}^*$  y  $\mathbf{b}^*$  se organizarán en las matrices de  $3 \times 3$   $\mathbf{u}^*$ ,  $\mathbf{p}^*$  y  $\mathbf{b}^*$ . De esta manera, cuando se considera la solución fundamental definida anteriormente, y teniendo en cuenta la ecuación (2.18), el último término de la ecuación (2.17) se convierte en:

$$\rho \int_{\Omega} \mathbf{b}^* \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\iota}) \mathbf{u} \, d\Omega = \mathbf{u}^{\boldsymbol{\iota}} \quad (2.24)$$

lo que hace que la ecuación (2.17) se transforme en:

$$\mathbf{u}^{\boldsymbol{\iota}} + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} \, d\Omega \quad (2.25)$$

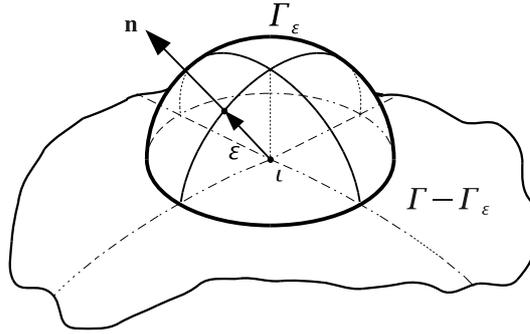
que es la representación integral del campo de desplazamientos del problema elastodinámico armónico cuando la carga puntual se aplica en  $\boldsymbol{\iota} \in \Omega$ , donde  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  son los vectores de desplazamientos y tensión, mientras que  $\mathbf{u}^*$  y  $\mathbf{p}^*$  son los tensores de la solución fundamental, que en forma matricial se pueden escribir como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

#### 2.4.4. Representación integral en el contorno

La ecuación (2.25) permite obtener los desplazamientos en puntos internos de  $\Omega$  cuando se conocen los desplazamientos y tensiones en  $\Gamma$ . Para formular el problema de modo que, dadas las condiciones de contorno, puedan obtenerse las incógnitas en los contornos, la ecuación integral debe escribirse únicamente en términos de variables en  $\Gamma$ , lo que implica aplicar la carga unitaria en el contorno. Sin embargo, el caso específico de  $\iota \in \Gamma$ , que lleva a la representación integral en el contorno, requiere atención especial debido a la singularidad de la solución fundamental cuando  $r \rightarrow 0$ .



**Figura 2.2:** Procedimiento de eliminación de la singularidad. Semiesfera alrededor del punto de colocación para integración

El proceso de eliminación de la singularidad suele llevarse a cabo modificando ligeramente  $\Gamma$  para evitar el caso  $r = 0$ . Para este fin, se considera un contorno aproximado, elaborado aumentando el contorno  $\Gamma$  del dominio  $\Omega$  mediante una semiesfera  $\Gamma_\epsilon$  de radio  $\epsilon \rightarrow 0$ . Como se puede observar en la figura 2.2, el punto de colocación  $\iota$  se supone en el centro de la semiesfera. De esta manera, cada integral en el contorno se puede descomponer en otras dos, extendidas a  $\Gamma - \Gamma_\epsilon$  y  $\Gamma_\epsilon$  respectivamente. Así, la ecuación (2.25) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\iota + \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma &= \\ &= \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \end{aligned}$$

Las integrales extendidas sobre  $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$  no contienen la singularidad, y para  $\varepsilon \rightarrow 0$  representan el valor principal de Cauchy de la integral original.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \text{val. princ.} \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (2.28)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma = \text{val. princ.} \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma \quad (2.29)$$

Por otra parte, las integrales que se extienden sobre  $\Gamma_\varepsilon$  se definen en el límite. Teniendo en cuenta que  $\mathbf{u}^* \sim O(1/\varepsilon)$ ,  $\mathbf{p}^* \sim O(1/\varepsilon^2)$  y  $d\Gamma \sim O(\varepsilon^2)$ , se puede escribir:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma = 0 \quad (2.30)$$

$$\mathbf{u}^\iota + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota \quad (2.31)$$

donde  $\mathbf{c}^\iota$  es el *término libre* que, en un caso tridimensional, es un tensor de  $3 \times 3$  dependiente de la geometría del contorno en el punto  $\iota$  y del coeficiente de Poisson del dominio (ver, p. ej., [20]). Si el contorno es suave en  $\iota$ , entonces  $\mathbf{c}^\iota = 1/2 \mathbf{I}$ , mientras que  $\mathbf{c}^\iota = \mathbf{I}$  en puntos internos, siendo  $\mathbf{I}$  la matriz unidad de  $3 \times 3$ . Teniendo en cuenta las ecuaciones desde (2.28) a (2.31), la ecuación (2.30) se convierte en:

$$\mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma + \rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} \, d\Omega \quad (2.32)$$

donde todas las integrales son integrales en el sentido del valor principal de Cauchy, a pesar de que se ha omitido *val. princ.* por simplicidad.

## 2.5. El método de elementos de contorno

Para puntos  $\iota \in \Gamma$ , la ecuación (2.32), junto con las condiciones de contorno, constituye una formulación cerrada que puede permitir obtener los campos de desplazamiento y tensiones en el contorno. Una vez conocidos estos campos, los desplazamientos en cualquier punto  $\iota \in \Omega$  se pueden conocer mediante la ecuación (2.25). Sin embargo, no es posible obtener, en general, la solución analítica del problema, excepto para algunos casos simples. Por este motivo, es preciso llevar a cabo un proceso de discretización para obtener un sistema de ecuaciones lineal de donde puede obtenerse la solución numérica del problema en un conjunto de puntos.

En esta sección, las fuerzas de volumen se asumirán, como es habitual, nulas. De esta manera, la ecuación (2.32) queda:

$$\mathbf{c}^\iota \mathbf{u}^\iota + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma \quad (2.33)$$

### 2.5.1. Proceso de discretización

La solución numérica de la ecuación (2.33) requiere, en primer lugar, la discretización del contorno en  $\mathcal{N}_e$  elementos  $\Gamma_j$  y en  $\mathcal{N}_n$  nodos, de forma que:

$$\Gamma \simeq \bigcup_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \Gamma_j \quad (2.34)$$

donde cada elemento se define mediante  $\mathcal{N}_n^j$  nodos. Se aproximan los campos de desplazamientos  $\mathbf{u}$  y tensiones  $\mathbf{p}$  sobre cada elemento  $j$  en términos de sus valores nodales haciendo uso de un conjunto de funciones polinómicas de interpolación  $\Phi(\boldsymbol{\xi})$ .  $\boldsymbol{\xi}$  representa el conjunto de coordenadas naturales empleado para definir un punto en el elemento de referencia, que se presentará con posterioridad. De esta manera, los campos de desplazamientos ( $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ ) y tensiones ( $\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi})$ ) en un elemento se aproximan como:

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \Phi(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}^j; \quad \mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}) = \Phi(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{p}^j \quad (2.35)$$

donde  $\mathbf{u}^j$  y  $\mathbf{p}^j$  son vectores de  $3\mathcal{N}_n^j \times 1$  que contienen los desplazamientos y tensiones nodales de los elementos, y  $\Phi(\boldsymbol{\xi})$  es una matriz de  $3 \times 3\mathcal{N}_n^j$  en la forma:

$$\Phi(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \cdots & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \cdots & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \cdots & 0 & 0 & \phi_{\mathcal{N}_n^j} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

conteniendo las funciones de interpolación específicas del elemento, que se definirán con posterioridad. Por otra parte, la geometría de cada elemento se puede definir empleando las mismas funciones de interpolación:

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \Phi(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}^j \quad (2.37)$$

donde  $\mathbf{x}^j$  es un vector de  $3\mathcal{N}_n^j \times 1$  que contiene las coordenadas de los nodos que definen al elemento  $j$ . Esta clase de elemento, en el que se emplean las mismas funciones de interpolación para describir la geometría y las incógnitas, recibe el nombre de *elemento isoparamétrico*.

Se debe destacar que la geometría aproximada mediante la ecuación (2.37) no será, en general, completamente coincidente con el contorno original, como se expresa en la ecuación (2.34). El error en la aproximación depende de la complejidad de la geometría original, de la discretización empleada y de las funciones de interpolación  $\phi_i$ . Sin embargo, esta clase de errores, que también existen en los campos aproximados, son inherentes al concepto de aproximación en el que el

MEC, como muchos otros métodos, se basa y, en consecuencia, no invalida esta clase de aproximación.

Una vez que todos los contornos han sido discretizados, y teniendo en cuenta que tanto  $\mathbf{u}^j$  como  $\mathbf{p}^j$  son vectores constantes en  $\Gamma_j$ , la sustitución de las ecuaciones (2.35) en (2.33) da como resultado:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{u}^t + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_e} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \quad (2.38)$$

que constituye un conjunto de tres ecuaciones algebraicas que dependen de los desplazamientos en el punto de colocación y de los desplazamientos y tensiones en todos los nodos del contorno correspondiente. La ecuación (2.38) se puede escribir, en forma matricial, como:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{u}^t + \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \hat{\mathbf{H}}^{\iota m} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{G}^{\iota m} \mathbf{p}^m \quad (2.39)$$

donde, en esta ocasión, los sumatorios se extienden a todos los nodos de la discretización.

Se debe destacar que cada punto posee un único valor del desplazamiento. Sin embargo, pueden existir valores distintos de las tensiones en el mismo punto si éste pertenece a más de un elemento con normales exteriores no paralelas. Esta situación puede resolverse considerando más de un nodo en el mismo punto. Cuando al menos una de las tensiones es conocida, los desplazamientos en ambos nodos serán, de la solución del sistema de ecuaciones resultante, iguales. Por el contrario, cuando ambas tensiones son desconocidas, la matriz del sistema de ecuaciones se convierte en singular porque las ecuaciones asociadas a los nodos duplicados son iguales entre sí. En este caso, conocido como *problema de esquina*, se lleva a cabo una técnica denominada estrategia de colocación no nodal. Este procedimiento, empleado por primera vez por Medina [21], fue estudiado en profundidad por Aznárez [19].

Los vectores  $\mathbf{u}^m$  y  $\mathbf{p}^m$ , de dimensiones  $3 \times 1$ , representan las tres componentes nodales de los desplazamientos y tensiones en el nodo  $m$ . Por su parte, las matrices  $\hat{\mathbf{H}}^{\iota m}$  y  $\mathbf{G}^{\iota m}$ , de dimensiones  $3 \times 3$ , representan la respuesta en el nodo  $m$  debida a una carga armónica unitaria en el punto de colocación  $\iota$ , y se definen como:

$$\hat{\mathbf{H}}^{\iota m} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_{e_m}} \mathbf{p}^* \phi_k d\Gamma \quad (2.40)$$

$$\mathbf{G}^{\iota m} = \sum_{e_m} \int_{\Gamma_{e_m}} \mathbf{u}^* \phi_k d\Gamma \quad (2.41)$$

donde los sumatorios se extienden sobre todos los elementos  $e_m$  a los que pertenece el nodo  $m$  y  $\phi_k$  es la función de forma del nodo  $m$  en el elemento  $\Gamma_{e_m}$ . Generalmente, el punto de colocación  $\iota$  se corresponderá con un cierto nodo  $m$  de la discretización. En este caso, llamando:

$$\mathbf{H}^{\iota m} = \begin{cases} \hat{\mathbf{H}}^{\iota m} & , \text{ si } \iota \neq m \\ \mathbf{c}^{\iota} + \hat{\mathbf{H}}^{\iota m} & , \text{ si } \iota = m \end{cases} \quad (2.42)$$

la ecuación (2.39) se puede expresar como:

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{H}^{\iota m} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{G}^{\iota m} \mathbf{p}^m \quad (2.43)$$

que representa la ecuación integral en el contorno discretizada.

### 2.5.2. Sistema de ecuaciones que surge del método de elementos de contorno

Finalmente, escribiendo la ecuación (2.43) para cada nodo, se obtiene un sistema de ecuaciones del tipo:

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{p}} \quad (2.44)$$

donde  $\bar{\mathbf{u}}$  y  $\bar{\mathbf{p}}$  son vectores de dimensión  $3\mathcal{N}_n \times 1$  que contienen los valores nodales del problema, y donde las matrices  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$  se componen de las submatrices  $\mathbf{H}^{\iota m}$  y  $\mathbf{G}^{\iota m}$ . Aplicando las condiciones de contorno y reordenando las columnas de modo que todas las incógnitas (desplazamientos y tensiones) estén agrupadas en un vector  $\bar{\mathbf{x}}$ , se obtiene un sistema lineal de ecuaciones linealmente independiente de la forma:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (2.45)$$

donde  $\bar{\mathbf{f}}$  es el vector de valores conocidos, obtenido por aplicación de las condiciones de contorno y por reordenación de las ecuaciones.

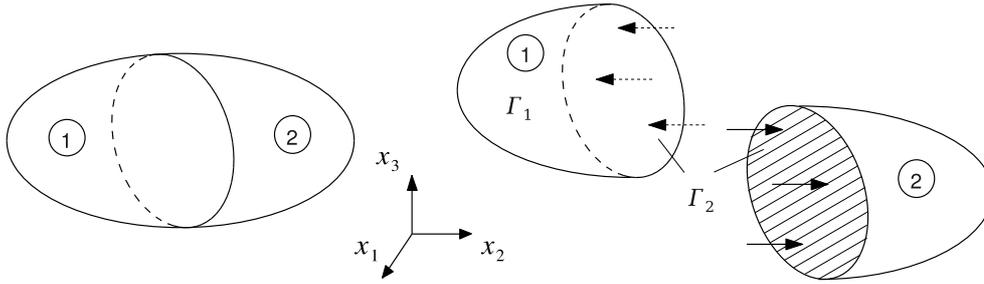
### 2.5.3. Tipología de elementos de contorno

A pesar de que la formulación presentada con anterioridad es genérica y, por tanto, válida para cualquier clase de elementos, en el presente trabajo se emplean elementos cuadráticos de forma triangular y cuadrilátera de seis y nueve nodos

respectivamente. Estos elementos, en conjunción con sus funciones de aproximación (también llamadas funciones de forma), que se escriben en términos de las coordenadas naturales  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , se definen en el cuadro 2.1. La función de aproximación  $\phi_i$  se define de modo que toman un valor unitario en el nodo  $i$  y cero en el resto de nodos del elemento.

### 2.5.4. Acoplamiento entre regiones

Si el dominio bajo estudio está definido, no sólo por una única región, sino por un conjunto de regiones con distintas propiedades elásticas, la formulación integral y su discretización son válidas todavía para cada subdominio. Así, para el ejemplo mostrado en la figura 2.3, se deben obtener, previamente, dos conjuntos independientes de ecuaciones, correspondientes a las regiones 1 y 2. A continuación, se imponen las condiciones de equilibrio y compatibilidad para escribir un único sistema de ecuaciones que represente el problema completo.



**Figura 2.3:** *Acoplamiento entre dos regiones sólidas*

Entonces, para una pareja de regiones, es posible escribir:

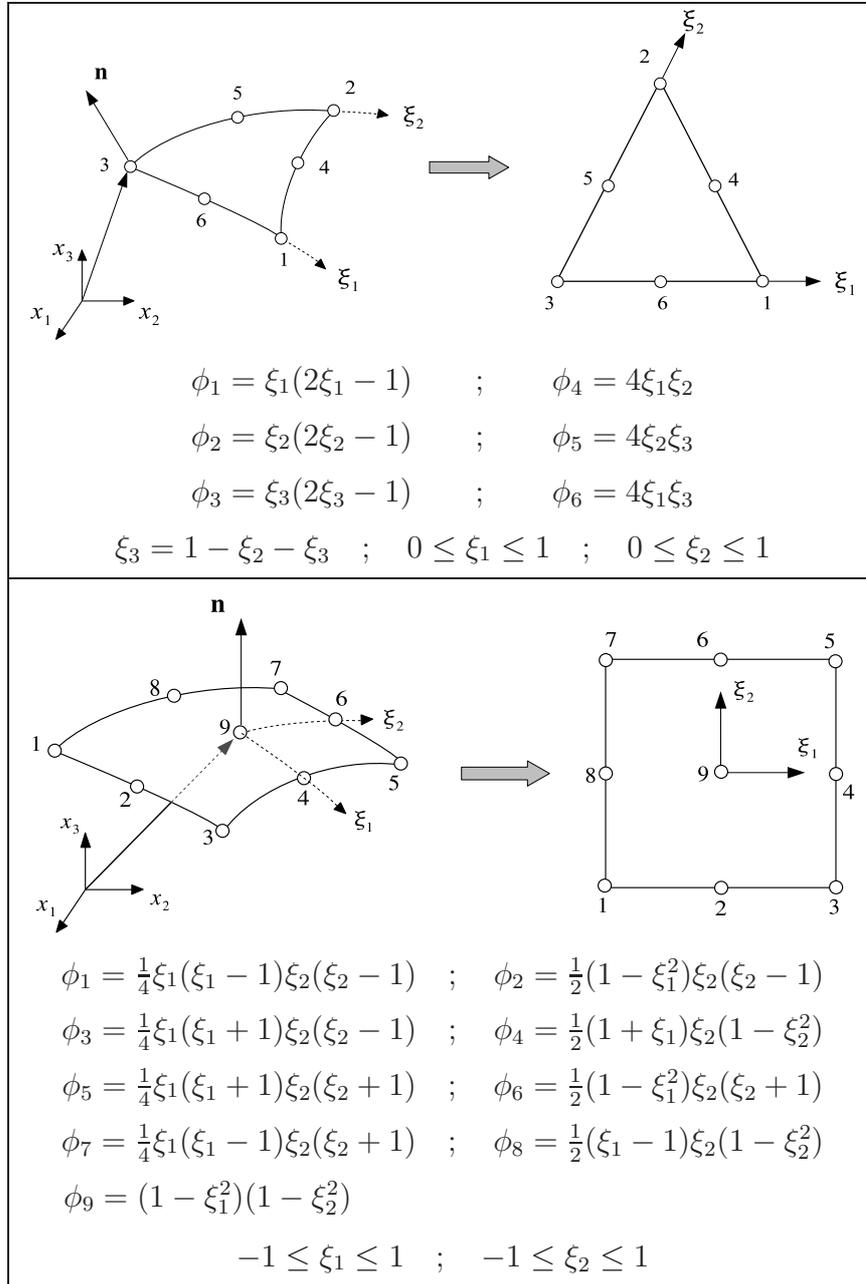
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^1 \bar{\mathbf{u}}_1^1 + \mathbf{H}_2^1 \bar{\mathbf{u}}_2^1 &= \mathbf{G}_1^1 \bar{\mathbf{p}}_1^1 + \mathbf{G}_2^1 \bar{\mathbf{p}}_2^1 \\ \mathbf{H}_2^2 \bar{\mathbf{u}}_2^2 + \mathbf{H}_3^2 \bar{\mathbf{u}}_3^2 &= \mathbf{G}_2^2 \bar{\mathbf{p}}_2^2 + \mathbf{G}_3^2 \bar{\mathbf{p}}_3^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

que, junto con:

$$\bar{\mathbf{u}}_2^1 = \bar{\mathbf{u}}_2^2 = \bar{\mathbf{u}}_2 \quad ; \quad \bar{\mathbf{p}}_2^1 = -\bar{\mathbf{p}}_2^2 = \bar{\mathbf{p}}_2 \quad (2.47)$$

lleva a un único sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^1 & \mathbf{H}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2^2 & \mathbf{H}_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1^1 \\ \bar{\mathbf{u}}_2 \\ \bar{\mathbf{u}}_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^1 & \mathbf{G}_2^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_2^2 & \mathbf{G}_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_1^1 \\ \bar{\mathbf{p}}_2 \\ \bar{\mathbf{p}}_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$



Cuadro 2.1: Tipos de elementos triangulares y cuadriláteros cuadráticos

### 2.5.5. Aspectos numéricos del MEC

Como se ha comentado anteriormente, la resolución del problema de los valores en el contorno mediante el método de elementos de contorno se apoya en la discretización del problema, en la evaluación numérica de las submatrices  $\mathbf{H}^{lm}$  y  $\mathbf{G}^{lm}$ , en el ensamblaje de la matriz  $\mathbf{A}$  del sistema de ecuaciones y del vector de valores conocidos (mediante la aplicación de las condiciones de contorno) y, finalmente, en la resolución del sistema lineal de ecuaciones algebraicas resultante. De esta manera, se obtiene una aproximación numérica de los campos de interés en un conjunto de puntos del contorno pudiendo, entonces, obtenerse los desplazamientos en cualquier punto interno  $\mathbf{x} \in \Omega$  mediante la aplicación de la ecuación (2.25). Por lo tanto, uno de los puntos clave del método es la correcta y eficiente evaluación numérica de las integrales que intervienen, aspecto que se tratará en lo sucesivo.

Cuando el punto de colocación no pertenece al elemento  $j$  en el que se integra, los integrandos de las ecuaciones (2.40) y (2.41) son regulares en  $\Gamma_j$  y, en consecuencia, las integrales se pueden evaluar empleando una cuadratura de Gauss (ver, p. ej., [22, 23]). Sin embargo, cuando la distancia  $r$  desde el punto fuente hasta el elemento integrado es relativamente pequeña, las integrales son casi singulares porque los integrandos son inversamente proporcionales a  $r$ . En este caso, se debe usar un esquema de normalización como el presentado por Telles [24]. Por el contrario, cuando el punto de colocación pertenece al elemento  $j$  integrado, los tensores  $\mathbf{u}^*$  y  $\mathbf{p}^*$  de la solución fundamental presentan singularidades de orden  $O(1/r)$  y  $O(1/r^2)$ , respectivamente. La primera clase de singularidad, también conocida como *singularidad débil*, se puede resolver mediante una técnica de subdivisión elemental (similar a la presentada por Li *et ál.* [25] en coordenadas polares) en conjunción con un procedimiento de transformación de coordenadas (parecido al presentado por Telles [24] o por Cerrolaza y Alarcón [26]) para convertir el integrando en regular. El segundo tipo de términos, denominados *términos fuertemente singulares*, se evalúan haciendo uso de una técnica directa propuesta por Chirino *et ál.* [27] en la línea de trabajos previos de Cruse *et ál.* [28] y Li *et ál.* [25]. Estas integrales fuertemente singulares se evalúan identificando los elementos  $O(1/r^2)$  y dividiéndolos en integrales regulares de superficie y una integral de línea sobre el perímetro del elemento. De esta manera, las singularidades se cancelan con la contribución de los elementos adyacentes, eliminándose, por tanto la problemática.

La exposición rigurosa de estos detalles numéricos se encuentra fuera del alcance del presente trabajo, habiéndose comentado en el presente apartado unas nociones básicas de referencia. Una explicación más detallada de la evaluación numérica de integrales y de otros aspectos numéricos del MEC puede hallarse, entre otros, en [2, 19].

## 2.6. Modelado del amortiguamiento del material

A lo largo del presente capítulo se ha planteado la formulación integral del problema elastodinámico, junto con una metodología numérica para la resolución del problema de valores en el contorno (MEC), estando el comportamiento elástico del dominio definido mediante una serie de ecuaciones de gobierno dependientes de un conjunto de parámetros del material.

Sin embargo, nada se ha mencionado hasta el momento sobre la posible existencia de mecanismos de disipación de energía, A pesar de ello, se puede demostrar que la formulación expuesta hasta este punto es válida tanto para materiales con amortiguamiento como para materiales en los que éste no se considera.

### 2.6.1. Materiales viscoelásticos lineales

En este trabajo, el amortiguamiento del material ha sido incluido en el modelo considerando las regiones MEC como materiales viscoelásticos. En las regiones viscoelásticas, como en sólidos elásticos, las tensiones y deformaciones se supone que están relacionadas de modo lineal en un tiempo  $t$ , siendo de aplicación, por tanto, el principio de superposición. Sin embargo, al contrario de lo que ocurre en los sólidos elásticos, las tensiones y deformaciones en materiales viscoelásticos dependen, no sólo de la situación en el tiempo  $t$ , sino también de las configuraciones previas.

En sólidos viscoelásticos ocurren dos fenómenos que no se presentan en sólidos elásticos. En concreto, se trata de los fenómenos de fluencia y relajación. Se entiende por fluencia al incremento en la deformación de un material debida a un estado de tensión prolongado en el tiempo, mientras que la relajación consiste en la lenta reducción del nivel de tensión en un sólido cuando está sometido a una deformación constante. Una descripción más profunda de estos fenómenos puede encontrarse en Christensen [29].

### 2.6.2. Relación constitutiva para materiales viscoelásticos armónicos

Puede demostrarse que el comportamiento armónico en el tiempo de medios elásticos, lineales, isótropos y homogéneos puede describirse mediante la ecuación constitutiva siguiente:

$$\sigma_{ij} = \lambda(\omega) \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu(\omega) \varepsilon_{ij} \quad (2.49)$$

que es idéntica a la ecuación (2.3) para problemas elásticos y lineales, dependiendo ahora de parámetros del material de valores complejos dependientes de

la frecuencia (ver, p. ej., Domínguez [2]). Por lo tanto, siendo idéntica la formulación en ambos casos, los materiales con amortiguamiento (viscoelásticos) o sin él (elásticos) pueden considerarse, simplemente, asumiendo que las constantes de Lamé son valores reales o complejos, siendo éstos últimos de la forma:

$$\mu(\omega) = \text{Re}[\mu](1 + i2\beta_\mu(\omega)) \quad (2.50a)$$

$$\lambda(\omega) = \text{Re}[\lambda](1 + i2\beta_\lambda(\omega)) \quad (2.50b)$$

donde  $\beta_\mu$  y  $\beta_\lambda$  tienen generalmente el mismo valor  $\beta$ . Como  $\lambda$  y  $\mu$  son magnitudes complejas en materiales viscoelásticos,  $c_s$ ,  $c_p$  y los números de onda  $k$  tendrán, también, componente imaginaria. En consecuencia, de acuerdo a la ecuación (2.10), el movimiento de la onda se multiplicará por una función exponencial decreciente, proveniente de la parte imaginaria de  $k$ , de manera que, al aumentar la distancia en la dirección de propagación, la amplitud del movimiento decrece, estando este fenómeno producido por el amortiguamiento del material.

### 2.6.3. Modelo histerético viscoelástico lineal

Esta manera de modelar materiales con amortiguamiento se corresponde con el modelo tridimensional de Kelvin-Voigt, cuya representación unidimensional consiste en un resorte  $\mathcal{R}$  y un amortiguador  $\mathcal{C}$  lineales conectados en paralelo, de manera que:

$$\sigma = \mathcal{R}\varepsilon + \mathcal{C}\dot{\varepsilon} = (\mathcal{R} + i\omega\mathcal{C})\varepsilon = \mathcal{R}(1 + i2\beta(\omega))\varepsilon \quad (2.51)$$

Entonces, si se asume que  $\beta(\omega)$  es directamente proporcional a  $\omega$ , el amortiguamiento del material, que se incrementa linealmente con la frecuencia, sería de tipo *viscoso*. Por el contrario, el amortiguamiento *histerético* puede modelarse considerando un coeficiente de amortiguamiento  $\beta$  independiente de la frecuencia.

Este último modelo (el modelo de amortiguamiento histerético viscoelástico lineal), donde las constantes de Lamé son del tipo:

$$\mu = \text{Re}[\mu](1 + i2\beta) \quad (2.52a)$$

$$\lambda = \text{Re}[\lambda](1 + i2\beta) \quad (2.52b)$$

se considera que es el que mejor representa el comportamiento dinámico de los materiales incluidos en los análisis posteriores y, en consecuencia, es el modelo que ha sido implementado en los códigos empleados en el presente trabajo.

# Capítulo 3

## Modelo BEM-FEM para el análisis dinámico de cimentaciones y estructuras pilotadas

### 3.1. Introducción

A la hora de plantear el método directo de los elementos de contorno aplicado al problema elastodinámico en el dominio de la frecuencia, la ecuación integral en el contorno se obtiene, generalmente, a partir del teorema de reciprocidad en la elastodinámica, teniendo en cuenta las fuerzas por unidad de volumen. Sin embargo, antes del proceso de discretización que permite plantear el sistema lineal de ecuaciones del método de los elementos de contorno se asume, en la mayor parte de las aplicaciones, que dichas fuerzas por unidad de volumen son nulas en todo el dominio, lo que permite cancelar el último término de la ecuación integral, tal y como se mostró en el capítulo anterior.

Por contra, el enfoque utilizado en este trabajo, similar al presentado por Matos Filho et al [30] en un modelo estático previo, incluye este término al considerar que las tensiones que aparecen en la interfase pilote-suelo pueden entenderse como fuerzas de volumen que actúan en el interior del dominio. Por otro lado, la rigidez aportada por los pilotes es tenida en cuenta a través de elementos finitos longitudinales que relacionan los desplazamientos de distintos puntos internos del suelo alineados a lo largo del eje del pilote. De este modo, no hay necesidad de discretizar la interfase pilote-suelo utilizando elementos de contorno, con el consiguiente ahorro en grados de libertad. Así, no se considera un vaciado en el suelo, que se modela como un medio continuo.

La sección 3.2 presenta la ecuación integral de contorno para el suelo, donde las fuerzas y las tensiones que aparecen en la interfase pilote-suelo son consideradas como líneas de carga y fuerzas internas que aparecen en el interior del dominio. A continuación, la sección 3.3 expone la formulación de elementos finitos utilizada para modelar los pilotes, con la que es posible realizar el acoplamiento entre los elementos finitos y los elementos de contorno, tal y como se hace en la sección 3.4. Posteriormente, la agrupación de pilotes por medio de encepados rígidos se presenta en la sección 3.5 y, a partir de ahí, la sección 3.6 aborda el modo en que se introducen en el modelo estructuras cimentadas sobre los grupos de pilotes formulados en los apartados anteriores. La exposición del modelo numérico de elementos de contorno y elementos finitos termina en la sección 3.7, donde se aborda el proceso de ensamblaje del sistema de ecuaciones final. Por último, en la sección 3.8 se explican algunos aspectos numéricos sobre la evaluación de las integrales relacionadas con las líneas de carga. Parte del material presentado en este capítulo ha sido publicado en algunos trabajos realizados por los tutores del proyecto [7,31]

## 3.2. Ecuaciones de elementos de contorno para el suelo

El terreno se modela a través del método de los elementos de contorno como una región lineal, homogénea, isótropa, viscoelástica y no acotada, con un módulo de elasticidad transversal complejo  $\mu$  del tipo  $\mu = Re[\mu](1 + 2i\beta)$ , donde  $\beta$  es el coeficiente de amortiguamiento. La ecuación integral en el contorno para un estado elastodinámico definido en un dominio  $\Omega$  con un contorno  $\Gamma$  puede ser escrito de forma general y condensada como:

$$\mathbf{c}'\mathbf{u}' + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*\mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^*\mathbf{p} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^*\mathbf{X} d\Omega \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{c}'$  es el tensor del término libre en el punto de colocación  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{X}$  son las fuerzas de volumen en el dominio  $\Omega$ ,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  son los vectores de desplazamientos y tensiones, y  $\mathbf{u}^*$  y  $\mathbf{p}^*$  son los tensores de la solución fundamental elastodinámica, que representan la respuesta de una región no acotada a una carga armónica unitaria concentrada en un punto  $\mathbf{x}$  y con una variación temporal del tipo  $e^{i\omega t}$

En gran número de aplicaciones se considera que las fuerzas de volumen  $\mathbf{X}$  son nulas. De aquí en adelante, por contra, se considerará que la interacción pilote-suelo se produce, desde el punto de vista de la ecuación integral, a través de fuerzas internas puntuales situadas en la punta de los pilotes y de líneas de carga repartidas a lo largo del eje de los pilotes. Se considera, por tanto, que la continuidad del suelo no se ve alterada por la presencia de los pilotes. Las líneas de carga dentro

del suelo, las tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo, actuando sobre el pilote y en el interior del suelo ( $\mathbf{q}^{pj} = -\mathbf{q}^{sj}$ ) y las fuerzas internas puntuales  $F_{p_j}$  en la punta de los pilotes, están representadas en la figura 3.1, donde se muestra un esquema del modelo.

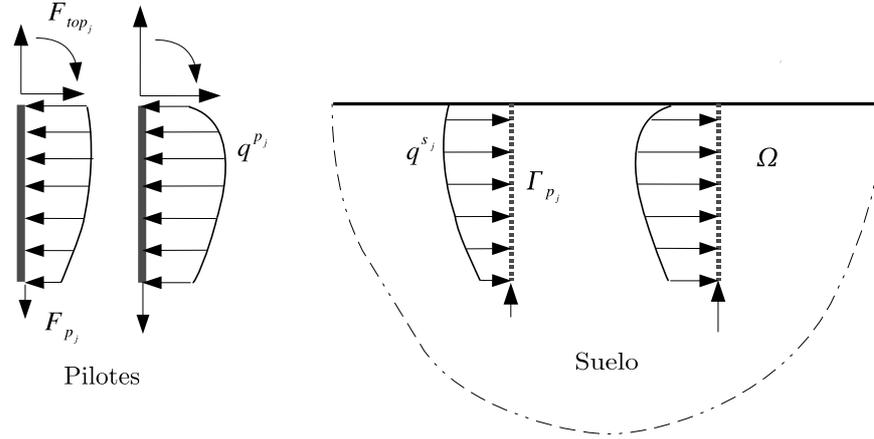


Figura 3.1: Representación de las líneas de carga

De acuerdo a las hipótesis enumeradas anteriormente, la ecuación (3.1) puede ser escrita como:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{u}^t + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_p} \left[ \int_{\Gamma_{p_j}} \mathbf{u}^* \mathbf{q}^{sj} d\Gamma_{p_j} - \delta_j \Upsilon_k^j F_{p_j} \right] \quad (3.2)$$

donde  $\Gamma_{p_j}$  es la interfase pilote-suelo a lo largo de la línea de carga  $j$  en el interior del dominio  $\Omega$ ,  $n_p$  es el número total de pilotes en el dominio  $\Omega$ ,  $\delta_j$  toma valor unitario si la línea de carga  $j$  contiene a la punta de un pilote flotante, tomando el valor cero en caso contrario, y  $\Upsilon_k^j$  es un vector de tres componentes que representa la contribución de la fuerza axial  $F_{p_j}$  en la punta de la línea de carga  $j$ -ésima.

Los contornos  $\Gamma$  son discretizados por medio de elementos cuadráticos triangulares o cuadriláteros con seis o nueve nodos, respectivamente. Cuando los contornos han sido discretizados, la ecuación (3.2) puede escribirse para cada región  $\Omega$  en todos los nodos sobre  $\Gamma$  con el fin de obtener una ecuación matricial del tipo:

$$\mathbf{H}^{ss} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{ss} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{sp_j} \mathbf{q}^{sj} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{sj} F_{p_j} = 0 \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{u}^s$  y  $\mathbf{p}^s$  son los vectores de desplazamientos y tensiones nodales de los elementos de contorno,  $\mathbf{H}^{ss}$  y  $\mathbf{G}^{ss}$  son las matrices de coeficientes obtenidas de la

integración numérica sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental por las funciones de forma correspondientes y  $\mathbf{G}^{spj}$  es la matriz de coeficientes obtenida de la integración numérica sobre la línea de carga  $j$  del producto de la solución fundamental por las funciones de interpolación (3.12), cuando la carga unitaria está aplicada sobre  $\Gamma$ .

Por otro lado, la ecuación (3.2) se aplica también en los puntos internos que pertenecen a la línea de carga  $\Gamma_{p_i}$ , lo que lleva a la siguiente expresión:

$$\mathbf{c} \mathbf{u}^{p_i} + \mathbf{H}^{p_i s} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{p_i s} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{p_i p_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{p_i j} F_{p_j} = 0 \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{H}^{p_i s}$  y  $\mathbf{G}^{p_i s}$  son matrices de coeficientes obtenidas a través de la integración numérica sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental por las funciones de forma correspondientes y  $\mathbf{G}^{p_i p_j}$  es la matriz de coeficientes obtenida a través de la integración numérica sobre la línea de carga  $j$  del producto de la solución fundamental por las funciones de interpolación (3.12), cuando la carga unitaria está aplicada sobre la línea de carga  $\Gamma_{p_i}$ . Aquí,  $\mathbf{u}^{p_i}$  es el vector de desplazamientos nodales de la línea de carga  $i$ , el cual es multiplicado por el vector  $\mathbf{c}$ , que toma el valor 1/2 en posiciones correspondientes a nodos del pilote localizados sobre un contorno suave (como en el caso de las cabezas de los pilotes) o toma un valor unitario en los puntos internos. Debe tenerse en cuenta que la posición del nodo que define la cabeza del pilote puede coincidir con la posición de algún nodo de la superficie. En este caso, existirán dos nodos con idénticas coordenadas espaciales. Entonces, dos de las ecuaciones del sistema, la escrita para el nodo de la superficie y la escrita para el nodo de la línea de carga, serán equivalentes, pero el término libre ocupará diferentes posiciones en la matriz de coeficientes, lo que evitará que se tenga un sistema de ecuaciones singular.

Por otra parte, dado que para pilotes flotantes se considera la existencia de una fuerza axial actuando en la punta, es necesario escribir una ecuación extra. Para ello, la carga puntual debe ser aplicada en la dirección  $x_3$  en algún punto no nodal. Dada su cercanía a la punta del pilote, el punto idóneo es el de coordenada elemental adimensional  $\xi = -1/2$  del elemento inferior (véase la sección 3.3.2). De este modo, la ecuación extra es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left( 3u_3^{b_k} + 6u_3^{b_l} - u_3^{b_m} \right) + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{p}}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{p} \, d\Gamma + \sum_{j=1}^{n_p} \left[ \int_{\Gamma_{p_j}} \hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{q}^{s_j} \, d\Gamma_{p_j} - \delta_j (\Upsilon_b^j)_3 F_{p_j} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde  $u_3^{b_k}, u_3^{b_l}$  y  $u_3^{b_m}$  son los desplazamientos verticales de los nodos  $k, l$  y  $m$  del elemento inferior,  $\hat{\mathbf{p}}^* = \{p_{31}^*, p_{32}^*, p_{33}^*\}$  y  $\hat{\mathbf{u}}^* = \{u_{31}^*, u_{32}^*, u_{33}^*\}$ . En forma matricial, la ecuación (3.5) puede escribirse como:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{u}_b^{p_i} + \mathbf{H}_e^{p_i s} \mathbf{u}^s - \mathbf{G}_e^{p_i s} \mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}_e^{p_i p_j} \mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon_{b_3}^{p_i j} F_{p_j} = 0 \quad (3.6)$$

donde  $\mathbf{u}_b^{p_i}$  es el vector de desplazamientos nodales en los nodos del elemento inferior de la línea de carga  $i$  (que corresponde al extremo inferior de un pilote flotante), donde la carga unitaria está aplicada,  $\mathbf{H}_e^{p_i s}$  y  $\mathbf{G}_e^{p_i s}$  son vectores obtenidos por integración numérica sobre  $\Gamma$  del producto de la solución fundamental elastodinámica por las funciones de forma de los elementos de contorno y  $\mathbf{G}_e^{p_i p_j}$  es el vector obtenido de la integración sobre  $\Gamma_{p_j}$  del producto de la solución fundamental elastodinámica por las funciones de forma definidas en (3.12), cuando la carga unitaria está aplicada en el punto extra de la línea de carga  $i$ . Finalmente,  $\mathbf{D}^T = 1/8\{0, 0, 3, 0, 0, 6, 0, 0, -1\}$ .

### 3.3. Ecuaciones de elementos finitos para la cimentación pilotada

#### 3.3.1. Ecuación de movimiento

El comportamiento de un pilote sometido a cargas dinámicas puede ser descrito a través de la siguiente ecuación diferencial:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  son, respectivamente, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del pilote,  $\mathbf{u}(t)$  es el vector de desplazamientos nodales y  $\mathbf{f}(t)$  es el vector de fuerzas nodales sobre el pilote.

Considérese ahora que el pilote está sujeto a cargas armónicas, en cuyo caso los vectores de desplazamientos y fuerzas nodales pueden ser expresados como:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^p e^{i\omega t}; \quad \mathbf{f}(t) = \mathbf{F} e^{i\omega t} \quad (3.8)$$

donde  $\mathbf{u}^p$  es el vector que contiene las amplitudes de las traslaciones y rotaciones nodales,  $\mathbf{F}$  es el vector que contiene las amplitudes de las fuerzas y momentos nodales,  $\omega$  es la frecuencia angular de la excitación, e  $i = \sqrt{-1}$ . De este modo, y considerando un pilote con amortiguamiento interno nulo, la ecuación (3.7) puede expresarse ahora como

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}^p = \mathbf{F} \quad (3.9)$$

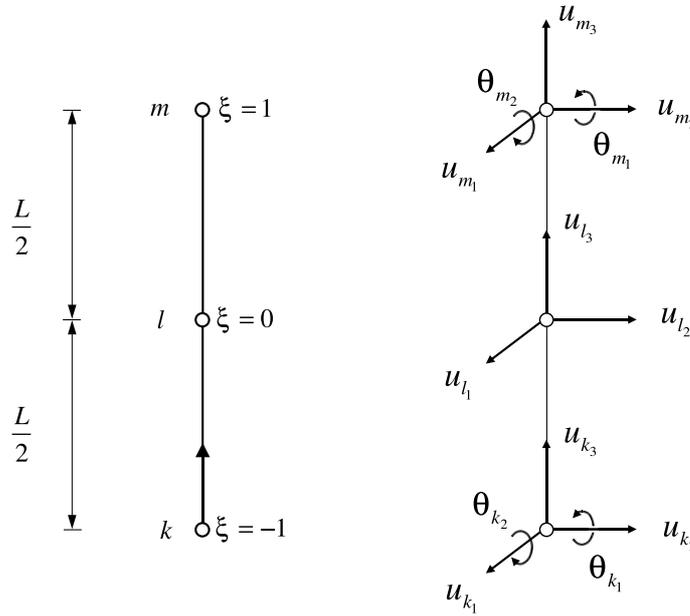


Figura 3.2: Definición del elemento finito

### 3.3.2. Definición del elemento viga

Los pilotes son modelados, haciendo uso del método de los elementos finitos, como elementos verticales de acuerdo a la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, siendo discretizados utilizando elementos de tres nodos (como se muestra en la figura 3.2) que han sido definidos de manera que sea posible aproximar la deformada del pilote con un número reducido de elementos. Se definen 13 grados de libertad sobre dicho elemento: un desplazamiento vertical y dos desplazamientos horizontales en cada nodo y, además, dos rotaciones  $\theta$  en cada uno de los nodos extremos, uno alrededor del eje  $x_1$  y otro alrededor del eje  $x_2$ .

Los desplazamientos laterales  $u_1$  y  $u_2$  a lo largo del elemento son aproximados a través de un conjunto de funciones de forma de cuarto grado, mientras que los desplazamientos verticales  $u_3$  son aproximados por funciones de segundo grado. De este modo, los desplazamientos se aproximan del siguiente modo:

$$u_i = \varphi_1 u_{k_i} + \varphi_2 \theta_{k_i} + \varphi_3 u_{l_i} + \varphi_4 u_{m_i} + \varphi_5 \theta_{m_i}; \quad i = 1, 2 \quad (3.10a)$$

$$u_3 = \phi_1 u_{k_3} + \phi_2 u_{l_3} + \phi_3 u_{m_3} \quad (3.10b)$$

donde

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \xi\left(-\frac{3}{4} + \xi + \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3\right) \\
\varphi_2 &= \frac{1}{4}\xi(-1 + \xi + \xi^2 - \xi^3) \\
\varphi_3 &= 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \\
\varphi_4 &= \xi\left(\frac{3}{4} + \xi - \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3\right) \\
\varphi_5 &= \frac{1}{4}\xi(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

y

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\
\phi_2 &= 1 - \xi^2 \\
\phi_3 &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

siendo  $\xi$  la coordenada adimensional elemental que varía desde  $\xi = -1$  hasta  $\xi = +1$ .

Las submatrices de rigidez que definen el comportamiento lateral y axial del elemento (indicadas por los superíndices  $l$  y  $a$  respectivamente), pueden obtenerse haciendo uso de las funciones de forma arriba indicadas y del principio de los desplazamientos virtuales como:

$$k_{ij}^l = \int_L \varphi_i'' EI \varphi_j'' dx_3; \quad i, j = 1, \dots, 5 \tag{3.13}$$

y

$$k_{ij}^a = \int_L \phi_i' EA \phi_j' dx_3; \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.14}$$

donde las primas indican derivada respecto de la coordenada  $x_3$ . De este modo, las submatrices de rigidez son:

$$\mathbf{K}^l = \frac{EI}{5L} \begin{bmatrix} \frac{316}{L^2} & \frac{94}{L} & \frac{-512}{L^2} & \frac{196}{L^2} & \frac{-34}{L} \\ \frac{94}{L} & 36 & \frac{-128}{L} & \frac{34}{L} & -6 \\ \frac{512}{L^2} & \frac{-128}{L} & \frac{1024}{L^2} & \frac{-512}{L^2} & \frac{128}{L} \\ \frac{196}{L^2} & \frac{34}{L} & \frac{-512}{L^2} & \frac{316}{L^2} & \frac{-94}{L} \\ \frac{-34}{L} & -6 & \frac{-128}{L} & \frac{-94}{L} & 36 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}^a = \frac{EA}{3L} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

donde  $E$  es el módulo de Young del pilote,  $A$  e  $I$  son, respectivamente, el área y el momento de inercia de la sección del pilote, y  $L$  es la longitud del elemento. Además, se ha considerado que los momentos de inercia respecto a ambos ejes principales de inercia son iguales.

De manera similar, los coeficientes de influencia que constituyen la matriz de masa de un elemento, y que representan las fuerzas de inercia que se oponen a la aceleración experimentada por un cierto grado de libertad, pueden ser evaluadas de manera similar como:

$$m_{ij}^l = \int_L \varphi_i \bar{m} \varphi_j dx_3; \quad m_{ij}^a = \int_L \phi_i \bar{m} \phi_j dx_3 \quad (3.16)$$

De este modo, y considerando un viga con una masa  $\bar{m}$  uniformemente distribuida, las matrices de masa consistente que rigen los comportamientos lateral y axial son, respectivamente:

$$\mathbf{M}^l = L \bar{m} \begin{bmatrix} \frac{13}{63} & \frac{L}{63} & \frac{4}{63} & \frac{-23}{630} & \frac{L}{180} \\ \frac{L}{63} & \frac{L^2}{630} & \frac{2L}{315} & \frac{-L}{180} & \frac{L^2}{1260} \\ \frac{4}{63} & \frac{2L}{315} & \frac{128}{315} & \frac{4}{63} & \frac{-2L}{315} \\ \frac{-23}{630} & \frac{-L}{180} & \frac{4}{63} & \frac{13}{63} & \frac{-L}{63} \\ \frac{L}{180} & \frac{L^2}{1260} & \frac{-2L}{315} & \frac{-L}{63} & \frac{L^2}{630} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}^a = \frac{L \bar{m}}{15} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 8 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

### 3.3.3. Fuerzas sobre el pilote

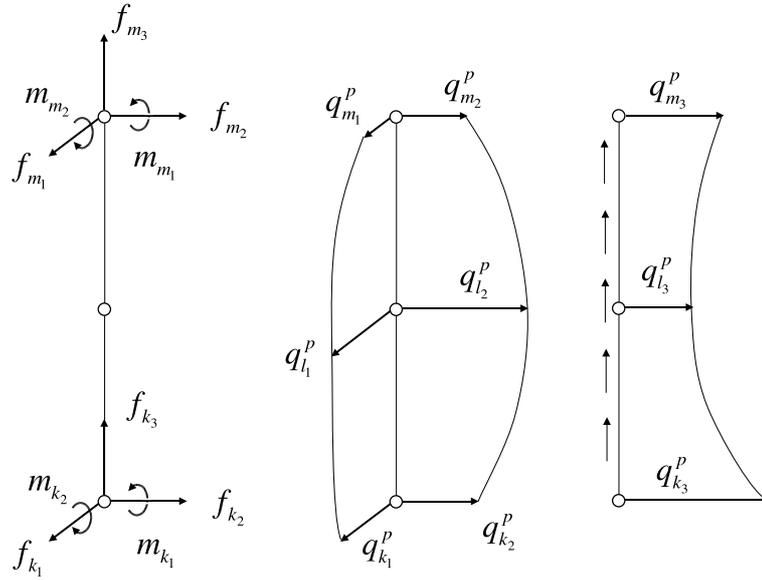
Dentro de las fuerzas externas actuando sobre el pilote, se considera la existencia de fuerzas y momentos puntuales en la cabeza del pilote, fuerzas distribuidas a lo largo del fuste debidas a la interacción pilote-suelo y una fuerza axial sobre la punta del pilote. De este modo, el vector de fuerzas nodales  $\mathbf{F}$  puede ser descompuesto como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{F}^{eq} = \mathbf{F}_{top} + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}^{eq} \quad (3.18)$$

donde  $\mathbf{F}^{ext}$  incluye las fuerzas en la cabeza ( $\mathbf{F}_{top}$ ) y la fuerza axial en la punta del pilote ( $\mathbf{F}_p$ ) y  $\mathbf{F}^{eq}$  es el vector de fuerzas nodales equivalente debido a la interacción pilote-suelo, que puede ser calculado como  $\mathbf{F}^{eq} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}^p$ , siendo  $\mathbf{Q}$  la matriz que transforma las tensiones en fuerzas nodales equivalentes.

Las fuerzas externas que se definen sobre un elemento genérico están esquematizadas en la figura 3.3. Las tensiones  $\mathbf{q}^p$  a lo largo de la interfase pilote-suelo se aproximan como:

$$q_i = \phi_1 q_{k_i} + \phi_2 q_{l_i} + \phi_3 q_{m_i}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.19)$$



**Figura 3.3:** Fuerzas puntuales externas (izquierda) y tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo, definidas sobre un elemento genérico

utilizando el conjunto de funciones de forma definidos por la ecuación (3.12). La distribución de tensiones a lo largo de la interfase pilote-suelo es continua entre elementos.

De nuevo, los coeficientes de la matriz  $\mathbf{Q}$  para la obtención de las fuerzas laterales pueden ser obtenidos utilizando el principio de los desplazamiento virtuales:

$$q_{ij}^l = \int_L \varphi_i \phi_j dx; \quad i = 1, \dots, 5; \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.20)$$

mientras que los coeficientes de la matriz correspondiente a las fuerzas axiales se obtienen haciendo:

$$q_{ij}^a = \int_L \phi_i \phi_j dx; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

lo cual permite obtener las siguientes matrices:

$$\mathbf{Q}^l = \begin{bmatrix} \frac{23L}{140} & \frac{11L}{105} & \frac{-L}{28} \\ \frac{L^2}{84} & \frac{L^2}{105} & \frac{-L^2}{210} \\ \frac{4L}{105} & \frac{16L}{35} & \frac{4L}{105} \\ \frac{-L}{28} & \frac{11L}{105} & \frac{23L}{140} \\ \frac{L^2}{210} & \frac{-L^2}{105} & \frac{-L^2}{84} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}^a = \frac{L}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

### 3.3.4. Sistema de ecuaciones para el pilote simple

Una vez que todas las matrices elementales han sido obtenidas para el pilote completo, es posible escribir, para cada pilote, la siguiente expresión

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}^p = \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{Q} \mathbf{q}^p \quad (3.23)$$

donde  $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ . Dado que cada pilote es discretizado utilizando tantos elementos como sea necesario para poder seguir de forma precisa su deformada, las matrices  $\bar{\mathbf{K}}$  y  $\mathbf{Q}$  deben ser entendidas como matrices globales, obtenidas a partir de las matrices elementales siguiendo los procedimientos usuales del método de los elementos finitos.

Nótese que, dado que se asume que la continuidad del suelo no se ve alterada por la presencia de los pilotes, el valor de la masa distribuida asignado a cada pilote debe ser modificado según la expresión  $\bar{m} = A(\rho_p - \rho_s)$ , con el objetivo de no sobrestimar la masa total del sistema, siendo  $\rho_p$  y  $\rho_s$ , respectivamente, las densidades del pilote y del suelo. Consideraciones de similar naturaleza fueron adoptadas en [32–34].

## 3.4. Acoplamiento MEC-MEF

El siguiente paso es la construcción de un sistema de ecuaciones global a partir de las expresiones deducidas en las secciones anteriores. El acoplamiento se realiza a través de las tensiones  $\mathbf{q}^{sj} = -\mathbf{q}^{pj}$  a lo largo de la interfase pilote-suelo y de los desplazamientos  $\mathbf{u}^{pj}$  a lo largo del pilote  $j$ .

La ecuación (3.23), escrita para el pilote  $j$ , puede expresarse ahora como:

$$\bar{\mathbf{K}}^{pj} \mathbf{u}^{pj} - \mathbf{F}_{pj} + \mathbf{Q} \mathbf{q}^{sj} = \mathbf{F}_{top}^j \quad (3.24)$$

Imponiendo condiciones de compatibilidad y equilibrio soldados a lo largo de las interfases pilote-suelo, y tomando como criterio de signos que las tensiones  $\mathbf{q}^s$

son positivas, las ecuaciones (3.3), (3.4), (3.6) y (3.24) pueden ser reordenadas en un único sistema de ecuaciones que representa al sistema suelo-cimentación pilotada. Para un semiespacio uniforme, el sistema acoplado será de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{ss} & -\mathbf{G}^{sp} & \boldsymbol{\Upsilon}^s & \emptyset \\ \mathbf{H}^{ps} & -\mathbf{G}^{pp} & \boldsymbol{\Upsilon}^p & \mathbf{C}' \\ \mathbf{H}_e^{ps} & -\mathbf{G}_e^{pp} & \boldsymbol{\Upsilon}_{b_3}^p & \mathbf{D}' \\ \emptyset & \mathbf{Q} & -\mathbf{I}' & \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{q}^s \\ \mathbf{F}_p \\ \mathbf{u}^p \end{bmatrix} = \mathcal{B} \quad (3.25)$$

donde  $\mathbf{H}^{ss}$  es una matriz de dimensiones  $3N \times 3N$  obtenida mediante la integración, sobre los elementos de contorno del producto de la solución fundamental armónica en tensiones por las funciones de forma correspondientes, cuando la carga es aplicada sobre los contornos,  $N$  es el número de nodos en el contorno,  $\mathbf{D}'$  es una matriz constituida por los distintos vectores  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{C}'$  es una matriz que contiene los términos libres correspondientes a la colocación sobre los nodos del pilote e  $\mathbf{I}'$  es una matriz nula excepto en los términos correspondientes a las incógnitas  $F_{p_j}$ , donde se coloca un término de valor unidad. El resto de las submatrices son:

$$\mathbf{G}^{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{p_1 p_1} & \mathbf{G}^{p_1 p_2} & \dots & \mathbf{G}^{p_1 p_n} \\ \mathbf{G}^{p_2 p_1} & \mathbf{G}^{p_2 p_2} & \dots & \mathbf{G}^{p_2 p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}^{p_n p_1} & \mathbf{G}^{p_n p_2} & \dots & \mathbf{G}^{p_n p_n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_e^{pp} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_e^{p_1 p_1} & \mathbf{G}_e^{p_1 p_2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p_1 p_n} \\ \mathbf{G}_e^{p_2 p_1} & \mathbf{G}_e^{p_2 p_2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p_2 p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_e^{p_n p_1} & \mathbf{G}_e^{p_n p_2} & \dots & \mathbf{G}_e^{p_n p_n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Upsilon}^p = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Upsilon}^{p_1 1} & \boldsymbol{\Upsilon}^{p_1 2} & \dots & \boldsymbol{\Upsilon}^{p_1 n} \\ \boldsymbol{\Upsilon}^{p_2 1} & \boldsymbol{\Upsilon}^{p_2 2} & \dots & \boldsymbol{\Upsilon}^{p_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Upsilon}^{p_n 1} & \boldsymbol{\Upsilon}^{p_n 2} & \dots & \boldsymbol{\Upsilon}^{p_n n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{b_3}^p &= \begin{bmatrix} \Upsilon_{b_3}^{p_1 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_1 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_1 n} \\ \Upsilon_{b_3}^{p_2 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_2 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Upsilon_{b_3}^{p_n 1} & \Upsilon_{b_3}^{p_n 2} & \dots & \Upsilon_{b_3}^{p_n n} \end{bmatrix} \\
\mathbf{G}^{sp} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{sp_1} & \mathbf{G}^{sp_2} & \dots & \mathbf{G}^{sp_n} \end{bmatrix} \\
\Upsilon^s &= \begin{bmatrix} \Upsilon^{s1} & \Upsilon^{s2} & \dots & \Upsilon^{sn} \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}^{ps} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{p_1 s} & \mathbf{H}^{p_2 s} & \dots & \mathbf{H}^{p_n s} \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{H}_e^{ps} &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_e^{p_1 s} & \mathbf{H}_e^{p_2 s} & \dots & \mathbf{H}_e^{p_n s} \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{p_1} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \mathbf{Q}^{p_2} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & \mathbf{Q}^{p_n} \end{bmatrix} \\
\bar{\mathbf{K}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^{p_1} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \bar{\mathbf{K}}^{p_2} & \dots & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & \bar{\mathbf{K}}^{p_n} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\mathcal{B}$  es el vector del lado derecho, obtenido de aplicar las condiciones de contorno, mientras que el vector de incógnitas es:

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{u}^s, \mathbf{q}^{s_1}, \mathbf{q}^{s_2}, \dots, \mathbf{q}^{s_n}, F_{p_1}, F_{p_2}, \dots, F_{p_n}, \mathbf{u}^{p_1}, \mathbf{u}^{p_2}, \dots, \mathbf{u}^{p_n}\}^T \quad (3.26)$$

### 3.5. Formulación del encepado rígido

Pilotes diferentes pueden trabajar juntos en un grupo si sus cabezas están vinculadas a través de un encepado. En este trabajo en concreto, se considerará que los pilotes están fijamente conectados a un encepado rígido. Las restricciones cinemáticas entre los distintos pilotes, junto a las ecuaciones de equilibrio del conjunto, se presentan en las siguientes secciones.

### 3.5.1. Restricciones cinemáticas

La vinculación de los desplazamientos de las cabezas de los pilotes de un grupo es ejecutada definiendo las ecuaciones de movimiento de sólido rígido y, posteriormente, condensando los grados de libertad deseados. Con el objetivo de simplificar la implementación, los grados de libertad definidos sobre las cabezas de algunos pilotes serán los utilizados como referencia para condensar el resto de grados de libertad. Sólo existen cinco grados de libertad en la cabeza de un pilote, mientras que se necesitan seis grados de libertad (tres desplazamientos y tres rotaciones) para representar el comportamiento del encepado rígido, por lo que se utilizarán dos pilotes. Éstos serán denominados como *pilote de referencia* y *pilote periférico*, siendo este último necesario tan solo para la definición de la rotación del encepado alrededor de un eje vertical.

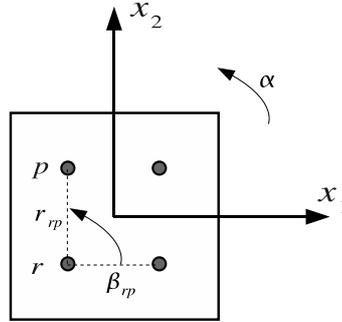


Figura 3.4: Pilote de referencia ( $r$ ) y pilote periférico ( $p$ )

Sean  $\beta_{rp}$  y  $r_{rp}$  el ángulo y la distancia existentes entre las cabezas de los pilotes de referencia y periférico (véase la fig. 3.4). Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, se pueden escribir las siguientes relaciones:

$$u_{p1} = u_{r1} - r_{rp}\alpha \sin(\beta_{rp}) \quad (3.27a)$$

$$u_{p2} = u_{r2} + r_{rp}\alpha \cos(\beta_{rp}) \quad (3.27b)$$

donde los subíndices 1 y 2 indican desplazamientos a lo largo de los ejes  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente. De este modo, el ángulo  $\alpha$  de rotación del encepado puede definirse entre ambos pilotes como:

$$si \begin{cases} 45^\circ \leq \beta_{rp} \leq 135^\circ \\ 225^\circ \leq \beta_{rp} \leq 315^\circ \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \alpha = \frac{u_{r1} - u_{p1}}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} \quad (\text{caso a})$$

$$si \begin{cases} 315^\circ \leq \beta_{rp} \leq 45^\circ \\ 135^\circ \leq \beta_{rp} \leq 225^\circ \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \alpha = \frac{u_{p2} - u_{r2}}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} \quad (\text{caso b}) \quad (3.28)$$

de tal modo que en el caso a, el grado de libertad auxiliar del pilote periférico es  $u_{p_1}$ , mientras que en el caso b, el grado de libertad utilizado es  $u_{p_2}$ . Teniendo en cuenta el conjunto de grados de libertad elegidos para representar el comportamiento del encepado rígido, el acoplamiento entre los pilotes de referencia y periférico puede expresarse, para los casos a y b respectivamente, a través de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} u_{p_2} \\ u_{p_3} \\ \theta_{p_1} \\ \theta_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan(\beta_{rp})^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\tan(\beta_{rp})^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp_1} & -d_{rp_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_1} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

y

$$\begin{bmatrix} u_{p_1} \\ u_{p_3} \\ \theta_{p_1} \\ \theta_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan(\beta_{rp}) & 0 & 0 & 0 & -\tan(\beta_{rp}) \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp_1} & -d_{rp_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_2} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

donde  $d_{rp_i} = x_{p_i} - x_{r_i}$ , siendo  $\mathbf{x}$  el vector de posición del punto de interés. Sean ahora  $\beta_{rj}$  y  $r_{rj}$  el ángulo y la distancia existentes entre la cabeza del pilote de referencia y la de cualquier otro pilote  $j$ . Las matrices de acoplamiento, para los casos a y b, son, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} u_{j_1} \\ u_{j_2} \\ u_{j_3} \\ \theta_{j_1} \\ \theta_{j_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} \\ \frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \sin(\beta_{rp})} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rj_1} & -d_{rj_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_1} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

y

$$\begin{bmatrix} u_{j_1} \\ u_{j_2} \\ u_{j_3} \\ \theta_{j_1} \\ \theta_{j_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{rj} \sin(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} \\ 0 & 1 - \frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{rj} \cos(\beta_{rj})}{r_{rp} \cos(\beta_{rp})} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rj_1} & -d_{rj_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r_1} \\ u_{r_2} \\ u_{r_3} \\ \theta_{r_1} \\ \theta_{r_2} \\ u_{p_2} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

donde  $d_{rj_i} = x_{j_i} - x_{r_i}$ . Tal y como ya se ha comentado con anterioridad, estas matrices son utilizadas para condensar los grados de libertad definidos en las cabezas de los pilotes de un grupo en sólo seis grados de libertad de referencia.

### 3.5.2. Ecuaciones de equilibrio

Deben imponerse condiciones de equilibrio dinámico sobre el encepado entre las fuerzas externas, las fuerzas de inercia y las reacciones en la cabeza de los pilotes. Sean  $F_i^e$  las fuerzas externas aplicadas sobre el centro de gravedad del encepado  $\mathbf{x}_{cg}^c$  en dirección  $i$  y  $M_1^e$ ,  $M_2^e$  y  $M_3^e$  los momentos externos aplicados alrededor de los ejes  $x_2$ ,  $x_1$  y  $x_3$ , respectivamente. Las propiedades inerciales del encepado son su masa  $m^c$  y sus momentos de inercia  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , definidos alrededor de los ejes  $x_2$ ,  $x_1$  y  $x_3$ , respectivamente. Finalmente, la reacciones en la cabeza del pilote  $j$ -ésimo son las fuerzas  $F_{j_i}$  y los momentos  $M_{j_1}$  y  $M_{j_2}$ , definidos alrededor de los ejes  $x_2$  y  $x_1$ , respectivamente. Con esta nomenclatura, las ecuaciones de equilibrio dinámico del encepado  $c$  pueden escribirse como:

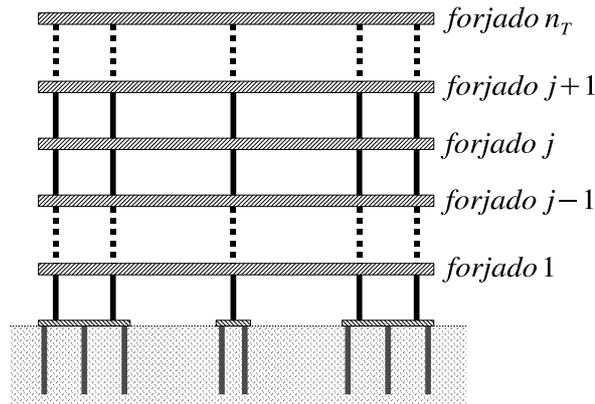
$$\begin{aligned} F_i^e + \sum_{j=1}^{n_p^c} F_{j_i} &= -\omega^2 m^c u_{cg_i} & i = 1, 2, 3 \\ M_i^e + \sum_{j=1}^{n_p^c} (M_{j_i} - (x_{j_i} - x_{cg_i})F_{j_3} + (x_{j_3} - x_{cg_3})F_{j_i}) &= -\omega^2 I_i \theta_i & i = 1, 2 \\ M_3^e + \sum_{j=1}^{n_p^c} ((x_{j_1} - x_{cg_1})F_{j_2} - (x_{j_2} - x_{cg_2})F_{j_1}) &= -\omega^2 I_3 \alpha & (3.33) \end{aligned}$$

donde  $n_p^c$  es el número de pilotes agrupados bajo el encepado  $c$ .

## 3.6. Modelo para las estructuras pilotadas

### 3.6.1. Introducción

En esta sección se describe la formulación que se ha adoptado para el análisis dinámico de estructuras pilotadas compuestas por uno o más pilares verticales extensibles y uno o más forjados horizontales infinitamente rígidos, tal y como se muestra en la figura 3.5. Los pilotes son modelados como vigas de Euler-Bernoulli sin masa, con deformación axial y lateral y con amortiguamiento de tipo viscoelástico, introducido a través de un módulo de rigidez complejo del tipo  $k = Re[k](1 + 2i\zeta)$ . Se desprecia la rigidez torsional de los pilares. Se considera, además, que los ejes principales de inercia de los forjados rígidos son paralelos a los ejes de coordenadas, aunque la posición de sus centros de gravedad en el plano horizontal puede variar entre distintas plantas.



**Figura 3.5:** Esquema bidimensional del modelo de estructuras pilotadas

Con el objetivo de escribir las ecuaciones de movimiento directamente en función de los desplazamientos y rotaciones de los forjados (parámetros de mayor interés en este trabajo), se condensan todos los grados de libertad correspondientes a los extremos de los pilares al centro de gravedad del forjado o del encepado situado a su mismo nivel. Dado que las matrices elementales de rigidez de los pilares serán expresadas inicialmente respecto a los extremos de los pilares, es necesario escribir primero las relaciones cinemáticas existentes entre tales extremos y los centros de gravedad de los forjados o los encepados. Posteriormente, se define una matriz de rigidez elemental para la entreplanta entre dos niveles consecutivos.

### 3.6.2. Relaciones cinemáticas

Sea  $\mathbf{X}^j = \{u_{cg1^j}, u_{cg2^j}, u_{cg3^j}, \alpha_{cg^j}, \Theta_{cg1^j}, \Theta_{cg2^j}\}^T$  el vector que define los desplazamientos y rotaciones del centro de gravedad del forjado o encepado  $j$ , donde  $\alpha_{cg^j}$ ,  $\Theta_{cg1^j}$  y  $\Theta_{cg2^j}$  son las rotaciones en sentido antihorario alrededor de los ejes  $x_3$ ,  $x_2$  y  $x_1$ , respectivamente. Sea  $\mathbf{Y}_i^j = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, \theta_{i1}, \theta_{i2}\}_j^T$  el vector que define los desplazamientos y las rotaciones en un extremo del pilar  $i$  vinculado al forjado o encepado  $j$ . La compatibilidad entre  $\mathbf{X}^j$  y  $\mathbf{Y}_i^j$  puede ser expresada, en forma matricial, como:

$$\begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \\ \theta_{i1} \\ \theta_{i2} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (x_{cg2^j} - x_{i2}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (x_{i1} - x_{cg1^j}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (x_{i1} - x_{cg1^j}) & (x_{i2} - x_{cg2^j}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{cg1^j} \\ u_{cg2^j} \\ u_{cg3^j} \\ \alpha_{cg^j} \\ \Theta_{cg1^j} \\ \Theta_{cg2^j} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

#### Sobre el acoplamiento entre pilares y encepado

Sin embargo, tal y como se vio en la sección 3.5, los grados de libertad correspondientes al centro de gravedad del encepado no están presentes de modo explícito en el sistema de ecuaciones final, estando, por contra, definidos en función de los correspondientes a dos de los pilotes del grupo. Por esta razón, las columnas de la matriz de rigidez elemental de la entreplanta, correspondientes a la vinculación de los pilares con el encepado, deberán ser escritas en función de dichos grados de libertad auxiliares.

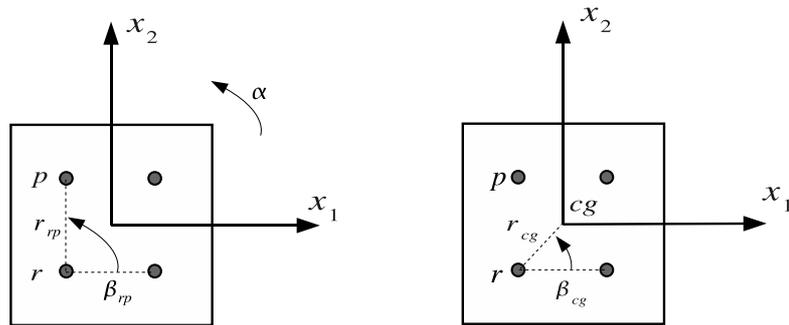


Figura 3.6: Grados de libertad para el acoplamiento entre pilares y encepado

Para ello, sean  $\beta_{rp}$  y  $r_{rp}$  el ángulo y la distancia entre las cabezas de los pilotes

de referencia y periférico y  $\beta_{cg}$  y  $r_{cg}$  el ángulo y la distancia entre el pilote de referencia y el centro de gravedad del encepado (véase figura 3.6). En concordancia con el conjunto de seis grados de libertad elegido para definir los desplazamientos y rotaciones del encepado, se definen las matrices de acoplamiento entre la cabeza del pilote de referencia y el centro de gravedad del encepado que, para los casos a y b (véase la sección 3.5), son, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} u_{cg1} \\ u_{cg2} \\ u_{cg3} \\ \alpha_{cg} \\ \Theta_{cg1} \\ \Theta_{cg2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_{cg} \sin \beta_{cg}}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{cg} \sin \beta_{cg}}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} \\ \frac{r_{cg} \cos \beta_{cg}}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{cg} \cos \beta_{cg}}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp1} & -d_{rp2} & 0 \\ \frac{1}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{rp} \sin \beta_{rp}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ u_{r3} \\ \theta_{r1} \\ \theta_{r2} \\ u_{p1} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

y

$$\begin{bmatrix} u_{cg1} \\ u_{cg2} \\ u_{cg3} \\ \alpha_{cg} \\ \Theta_{cg1} \\ \Theta_{cg2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_{cg} \sin \beta_{cg}}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{r_{cg} \sin \beta_{cg}}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} \\ 0 & 1 - \frac{r_{cg} \cos \beta_{cg}}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & \frac{r_{cg} \cos \beta_{cg}}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{rp1} & -d_{rp2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{rp} \cos \beta_{rp}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ u_{r3} \\ \theta_{r1} \\ \theta_{r2} \\ u_{p2} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

donde  $d_{rp_i} = x_{p_i} - x_{r_i}$

### 3.6.3. Matriz de rigidez de entreplanta

La submatriz elemental de rigidez de dimensión  $10 \times 10$  de un pilar  $i$ , modelado como una viga de Euler-Bernoulli, puede ser definida como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^{j-1} \\ \mathbf{f}_i^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{x_1} & 0 & 0 & -b_{x_1} & 0 & -a_{x_1} & 0 & 0 & -b_{x_1} & 0 \\ & a_{x_2} & 0 & 0 & -b_{x_2} & 0 & -a_{x_2} & 0 & 0 & -b_{x_2} \\ & & c & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\ & & & d_{x_1} & 0 & b_{x_1} & 0 & 0 & \frac{d_{x_1}}{2} & 0 \\ & & & & d_{x_2} & 0 & b_{x_2} & 0 & 0 & \frac{d_{x_2}}{2} \\ & & & & & a_{x_1} & 0 & 0 & b_{x_1} & 0 \\ & & & & & & a_{x_2} & 0 & 0 & b_{x_2} \\ & & \text{sim} & & & & & c & 0 & 0 \\ & & & & & & & & d_{x_1} & 0 \\ & & & & & & & & & d_{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_i^{j-1} \\ \mathbf{Y}_i^j \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

donde

$$a_{x_i} = 12 \frac{E I_{x_i}}{L^3}; \quad b_{x_i} = 6 \frac{E I_{x_i}}{L^2}; \quad c = \frac{E A}{L}; \quad d_{x_i} = 4 \frac{E I}{L}$$

siendo, además,  $\mathbf{f}_i^j = \{f_{x_1^i}, f_{x_2^i}, f_{x_3^i}, m_{x_1^i}, m_{x_2^i}\}^{jT}$  las reacciones en la conexión entre el pilar y el forjado.

Con el objetivo de construir una matriz elemental equivalente  $\mathcal{K}^i$  para la entreplanta que relacione directamente los grados de libertad de los forjados superior e inferior, la submatriz de rigidez correspondiente a cada extremo del pilote  $i$  es post-multiplicada por la ecuación (3.34), obteniéndose las submatrices de rigidez expresadas en términos de los grados de libertad asociados a los centros de gravedad de forjados y encepados. Del mismo modo se opera con las filas para definir las fuerzas resultantes respecto a los centros de gravedad de los forjados. Este proceso lleva a la obtención de la siguiente matriz de rigidez elemental del pilar  $i$  para la entreplanta situada entre los niveles  $j - 1$  y  $j$ :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{j-1}^i \\ \mathcal{F}_j^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{11(6x6)}^i & \mathcal{K}_{12(6x6)}^i \\ \mathcal{K}_{21(6x6)}^i & \mathcal{K}_{22(6x6)}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{j-1} \\ \mathbf{X}^j \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

donde

$$\mathcal{K}_{11} = \begin{bmatrix} 12\frac{EI_{x1}}{L^3} & 0 & 0 & -12\frac{EI_{x1}}{L^3}x_2^b & -6\frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 \\ 0 & 12\frac{EI_{x2}}{L^3} & 0 & 12\frac{EI_{x2}}{L^3}x_1^b & 0 & -6\frac{EI_{x2}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L}x_1^b & \frac{EA}{L}x_2^b \\ -12\frac{EI_{x1}}{L^3}x_2^b & 12\frac{EI_{x2}}{L^3}x_1^b & 0 & 12\frac{E}{L^3}IX^b & 6\frac{EI_{x1}}{L^2}x_2^b & -6\frac{EI_{x2}}{L^2}x_1^b \\ -6\frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L}x_1^b & 6\frac{EI_{x1}}{L^2}x_2^b & 4\frac{EI_{x1}}{L} + \frac{EA}{L}x_1^b & \frac{EA}{L}x_2^bx_1^b \\ 0 & -6\frac{EI_{x2}}{L^2} & \frac{EA}{L}x_2^b & -6\frac{EI_{x2}}{L^2}x_1^b & \frac{EA}{L}x_2^bx_1^b & 4\frac{EI_{x2}}{L} + \frac{EA}{L}x_2^b \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{12} = \begin{bmatrix} -12\frac{EI_{x1}}{L^3} & 0 & 0 & 12\frac{EI_{x1}}{L^3}x_2^a & -6\frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 \\ 0 & -12\frac{EI_{x2}}{L^3} & 0 & -12\frac{EI_{x2}}{L^3}x_1^a & 0 & -6\frac{EI_{x2}}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L}x_1^a & -\frac{EA}{L}x_2^a \\ 12\frac{EI_{x1}}{L^3}x_2^b & -12\frac{EI_{x2}}{L^3}x_1^b & 0 & -12\frac{E}{L^3}IX^{ab} & 6\frac{EI_{x1}}{L^2}x_2^b & -6\frac{EI_{x2}}{L^2}x_1^b \\ 6\frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 & -\frac{EA}{L}x_1^b & -6\frac{EI_{x1}}{L^2}x_2^a & 2\frac{EI_{x1}}{L} + \frac{EA}{L}x_1^ax_1^b & -\frac{EA}{L}x_2^ax_1^b \\ 0 & 6\frac{EI_{x2}}{L^2} & -\frac{EA}{L}x_2^b & 6\frac{EI_{x2}}{L^2}x_1^a & -\frac{EA}{L}x_1^ax_2^b & 2\frac{EI_{x2}}{L} - \frac{EA}{L}x_2^ax_2^b \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{21} = \begin{bmatrix} -12\frac{EI_{x1}}{L^3} & 0 & 0 & 12\frac{EI_{x1}}{L^3}x_2^b & 6\frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 \\ 0 & -12\frac{EI_{x2}}{L^3} & 0 & -12\frac{EI_{x2}}{L^3}x_1^b & 0 & 6\frac{EI_{x2}}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L}x_1^b & -\frac{EA}{L}x_2^b \\ 12\frac{EI_{x1}}{L^3}x_2^a & -12\frac{EI_{x2}}{L^3}x_1^a & 0 & -12\frac{E}{L^3}IX^{ab} & -6\frac{EI_{x1}}{L^2}x_2^a & 6\frac{EI_{x2}}{L^2}x_1^a \\ -6\frac{EI_{x1}}{L^2} & 0 & -\frac{EA}{L}x_1^a & 6\frac{EI_{x1}}{L^2}x_2^b & 2\frac{EI_{x1}}{L} - \frac{EA}{L}x_1^ax_1^b & -\frac{EA}{L}x_2^bx_1^a \\ 0 & -6\frac{EI_{x2}}{L^2} & -\frac{EA}{L}x_2^a & -6\frac{EI_{x2}}{L^2}x_1^b & -\frac{EA}{L}x_1^bx_2^a & 2\frac{EI_{x2}}{L} - \frac{EA}{L}x_2^bx_2^a \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{K}_{22} = \begin{bmatrix} 12\frac{EI_{x_1}}{L^3} & 0 & 0 & -12\frac{EI_{x_1}}{L^3}x_2^a & 6\frac{EI_{x_1}}{L^2} & 0 \\ 0 & 12\frac{EI_{x_2}}{L^3} & 0 & 12\frac{EI_{x_2}}{L^3}x_1^a & 0 & 6\frac{EI_{x_2}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L}x_1^a & \frac{EA}{L}x_2^a \\ -12\frac{EI_{x_1}}{L^3}x_2^a & 12\frac{EI_{x_2}}{L^3}x_1^a & 0 & 12\frac{E}{L^3}IX^a & -6\frac{EI_{x_1}}{L^2}x_2^a & 6\frac{EI_{x_2}}{L^2}x_1^a \\ 6\frac{EI_{x_1}}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L}x_1^a & -6\frac{EI_{x_1}}{L^2}x_2^a & 4\frac{EI_{x_1}}{L} + \frac{EA}{L}x_1^{a2} & \frac{EA}{L}x_2^ax_1^a \\ 0 & 6\frac{EI_{x_2}}{L^2} & \frac{EA}{L}x_2^a & 6\frac{EI_{x_2}}{L^2}x_1^a & \frac{EA}{L}x_2^ax_1^a & 4\frac{EI_{x_2}}{L} + \frac{EA}{L}x_2^{a2} \end{bmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} IX^a &= I_{x_1}x_2^{a2} + I_{x_2}x_1^{a2} \\ IX^{ab} &= I_{x_1}x_2^ax_2^b + I_{x_2}x_1^ax_1^b \\ IX^b &= I_{x_1}x_2^{b2} + I_{x_2}x_1^{b2} \end{aligned}$$

En estas expresiones,  $x_k^a = x_{i_k} - x_{cg_k^a}$  y  $x_k^b = x_{i_k} - x_{cg_k^b}$  son las coordenadas horizontales relativas del eje del pilar respecto al centro de gravedad del forjado superior o inferior, respectivamente, y  $\mathcal{F}_j^T = \{F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}, M_\alpha, M_{x_1}, M_{x_2}\}^J$  corresponde a las reacciones que aparecen en la conexión entre el pilar y el forjado, expresadas también respecto al centro de gravedad correspondiente.

Habiendo definido una matriz de rigidez de la entreplanta con carácter genérico, puede seguirse el procedimiento de ensamblaje usual del método de los elementos finitos para obtener la ecuación de movimiento de la estructura una vez discretizada, quedando de la forma:

$$(\mathcal{K} - \omega^2 \mathcal{M}) \mathcal{X} = \mathcal{F} \quad (3.39)$$

donde  $\mathcal{K}$  es la matriz de rigidez global de la estructura,  $\mathcal{X}$  es el vector de desplazamientos y rotaciones en los forjados,  $\mathcal{F}$  es el vector de fuerzas externas sobre la estructura y  $\mathcal{M}$  es la matriz de propiedades inerciales de la estructura, definida para cada forjado.

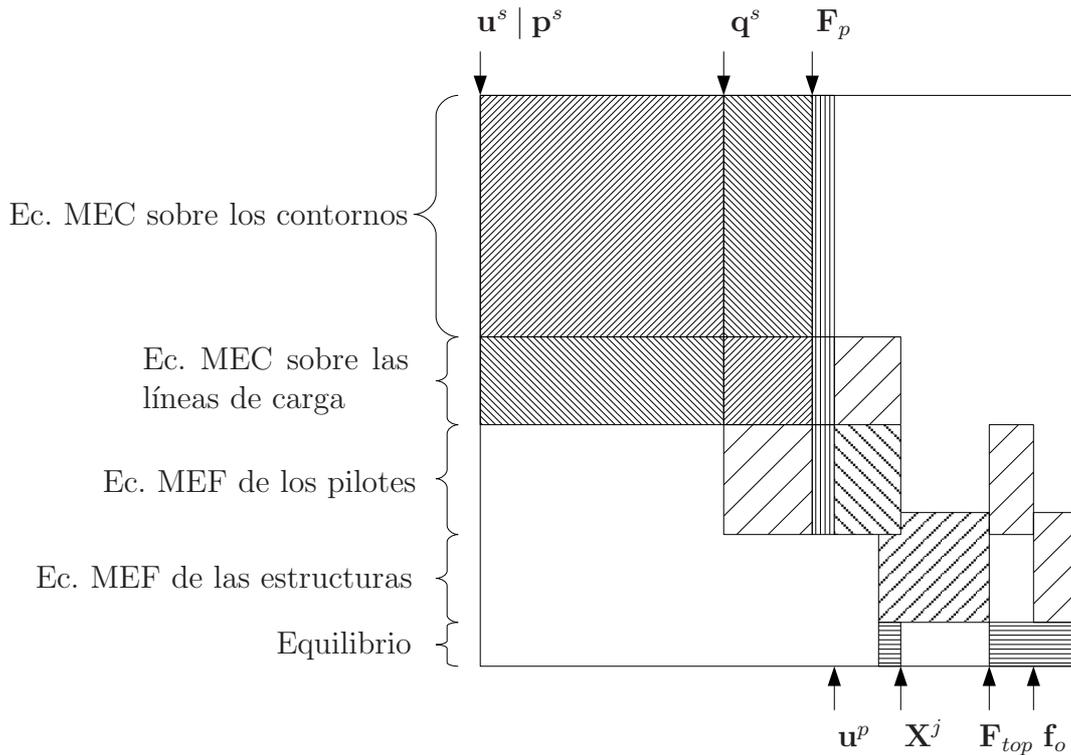
### 3.7. Ensamblaje de la matriz global del sistema

La manera en que las ecuaciones (3.23), (3.3), (3.4), (3.6) y (3.39) son reorganizadas en un único sistema de ecuaciones depende de la configuración de

estructuras, cimentaciones y suelos y de las condiciones de contorno. Sin embargo, siempre deben aplicarse las condiciones de equilibrio y de compatibilidad, considerando contacto soldado entre las diferentes interfases del sistema. En la situación más general, existen múltiples estructuras cimentadas sobre diferentes grupos de pilotes que están embebidos en el terreno, estando el sistema sometido a fuerzas externas o a ondas sísmicas. En tal caso, el sistema de ecuaciones es:

$$\mathcal{A} \{ \mathbf{u}^s, \mathbf{p}^s, \mathbf{q}^s, \mathbf{F}_p, \mathbf{u}^p, \mathbf{X}^j, \mathbf{F}_{top}, \mathbf{f}_o \}^T = \mathcal{B} \quad (3.40)$$

donde  $\mathcal{A}$ , cuya estructura está esquematizada en la fig. 3.7, es la matriz de coeficientes y  $\mathcal{B}$  es el vector del lado derecho, ambos obtenidos después de aplicar las condiciones de contorno y de reordenar las ecuaciones. El vector de incógnitas incluye los desplazamientos  $\mathbf{u}^s$  y/o las tensiones  $\mathbf{p}^s$  en los nodos correspondientes a los elementos de contorno, las tensiones en la interfase pilote-suelo  $\mathbf{q}^s$ , las fuerzas en la punta de los pilotes  $\mathbf{F}_p$ , las traslaciones y rotaciones nodales a lo largo del pilote  $\mathbf{u}^p$ , los grados de libertad definidos en las superestructuras  $\mathbf{X}^j$ , las reacciones en las uniones pilote-encepado  $\mathbf{F}_{top}$  y las fuerzas en la base de la estructura  $\mathbf{f}_o$



**Figura 3.7:** Estructura de la matriz de coeficientes  $\mathcal{A}$  del sistema

### 3.8. Evaluación numérica de las integrales definidas sobre las líneas de carga

Siempre que la fuente esté situada fuera de la línea de carga  $j$ , las integrales de  $\mathbf{u}^* \mathbf{q}^{sj}$  y  $\hat{\mathbf{u}}^* \mathbf{q}^{sj}$ , definidas sobre la línea de carga  $\Gamma_{pj}$  y que aparecen en las ecuaciones (3.2) y (3.5), respectivamente, son calculadas como integrales monodimensionales extendidas sobre una línea definida por el eje del pilote correspondiente. Por contra, estas mismas integrales poseen una singularidad cuando la fuente está situada sobre la línea que está siendo integrada. En este caso, y para evitar esta singularidad, las integrales se evalúan sobre un cilindro cuyo radio  $R_p$  tiene por valor  $\sqrt{A/\pi}$ . Considérese entonces que la interfase  $\Gamma_p$  entre el pilote (cualquiera que sea su sección) y el suelo es un cilindro de radio  $R_p$ , sobre el que existen unas tensiones  $\sigma_{ps}$ . En este caso, el último sumando de la ecuación (3.1) incluye integrales del tipo:

$$\int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \sigma_{ps} d\Gamma_p = \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \frac{\mathbf{q}^s}{2\pi R_p} d\Gamma_p = \frac{1}{2\pi R_p} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=k,l,m} \left[ \int_{\Gamma_{pe}} \mathbf{u}^* \phi_i d\Gamma_p \right] \mathbf{q}_i^s \quad (3.41)$$

donde  $N_e$  es el número de elementos en que se ha discretizado la línea de carga, y donde se ha utilizado la ecuación (3.19) para expresar  $\mathbf{q}^s$  a lo largo del elemento. Tal y como se vio en el capítulo 2, la solución fundamental elastodinámica utilizada en este trabajo, que da el desplazamiento en el punto  $\mathbf{x}$  y en la dirección  $k$  cuando la fuente es aplicada en el punto  $\mathbf{x}^t$  y en la dirección  $l$ , tiene la siguiente expresión:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{4\pi\mu} [\psi \delta_{lk} - \chi r_{,k} r_{,l}]$$

$$\psi = - \left( \frac{c_s}{c_p} \right)^2 \left( \frac{1}{z_p^2 r^2} - \frac{1}{z_p r} \right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left( \frac{1}{z_s^2 r^2} - \frac{1}{z_s r} + 1 \right) \frac{e^{z_s r}}{r} \quad (3.42)$$

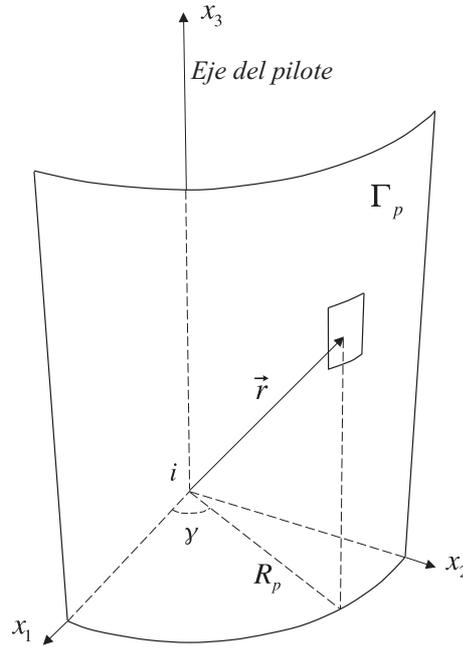
$$\chi = - \left( \frac{c_s}{c_p} \right)^2 \left( \frac{3}{z_p^2 r^2} - \frac{3}{z_p r} + 1 \right) \frac{e^{z_p r}}{r} + \left( \frac{3}{z_s^2 r^2} - \frac{3}{z_s r} + 1 \right) \frac{e^{z_s r}}{r}$$

donde  $\mu$  es el módulo de elasticidad transversal,  $\delta_{lk}$  es la delta de Kronecker y  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^t|$ . Para este caso específico (véase la figura 3.8), las derivadas del vector posición  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^t$  son:

$$r_{,1} = \frac{x_1^r}{r} = \frac{R_p \cos(\gamma)}{r} \quad (3.43a)$$

$$r_{,2} = \frac{x_2^r}{r} = \frac{R_p \sin(\gamma)}{r} \quad (3.43b)$$

$$r_{,3} = \frac{x_3^r}{r} \quad (3.43c)$$



**Figura 3.8:** Superficie cilíndrica de integración sobre la interfase pilote-suelo cuando el punto de colocación pertenece al pilote

Entonces, las integrales del último término de la ecuación (3.41) pueden ser evaluadas, en coordenadas cilíndricas (véase la figura 3.8), como:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_{pe}} \mathbf{u}^* \phi_i d\Gamma_p &= \int_{x_3^r} \int_{\theta} \frac{1}{4\pi\mu} [\psi\delta_{lk} - \chi r_{,k}r_{,l}] \phi_i R_p d\theta dx_3 \\
 &= \frac{R_p}{4\pi\mu} \int_{x_3^r} \left[ 2\pi\psi\delta_{lk} - \chi \int_0^{2\pi} r_{,k}r_{,l} d\theta \right] \phi_i dx_3 \quad (3.44) \\
 &= \frac{R_p}{4\mu} \int_{x_3^r} \left[ 2\psi\delta_{lk} - \frac{1}{r^2} \chi \mathbf{R}_{lk} \right] \phi_i dx_3
 \end{aligned}$$

donde  $x_3^r = x_3 - x_3^k$  y

$$\mathbf{R}_{lk} = \begin{pmatrix} R_p^2 & 0 & 0 \\ 0 & R_p^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_3^r)^2 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Ahora, la integral de la ecuación (3.41) puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \boldsymbol{\sigma}_{ps} d\Gamma_p = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{L_e}{16\pi\mu} \sum_{i=k,l,m} \left[ \int_{-1}^1 \left( 2\psi\delta_{lk} - \frac{\chi}{r^2} \mathbf{R}_{lk} \right) \phi_i d\xi \right] \mathbf{q}_i^s \quad (3.46)$$

Puede adoptarse, también, una estrategia de colocación no nodal para computar las integrales sobre  $\Gamma_{p_j}$  desde el mismo pilote. Esto lleva a un procedimiento que permite la reinterpretación de la ecuación anterior. En tal caso, deben elegirse al menos cuatro puntos no nodales, colocados simétricamente alrededor del pilote (tal y como se muestra en la figura 3.9) para evitar romper la simetría del problema. Se obtiene así, por superposición de las cuatro ecuaciones procedentes de esta estrategia de colocación no nodal, una única ecuación, que es dividida entre cuatro para mantener el orden de los coeficientes resultantes. En tal caso, e integrando sobre la línea de carga, el último término de la ecuación (3.1) se convierte en:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^* \mathbf{q}^s d\Gamma_p &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ c.p.}}^4 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=k,l,m} \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \int_{x_3^r} (\psi\delta_{lk} - \chi r_{,k} r_{,l}) \phi_i dx_3 \right] \mathbf{q}_i^s \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{n=1 \\ c.p.}}^4 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=k,l,m} \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \int_{x_3^r} \phi_i \left( \psi\delta_{lk} - \frac{\chi}{r^2} \mathbf{R}_{lk}^n \right) dx_3 \right] \mathbf{q}_i^s \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde

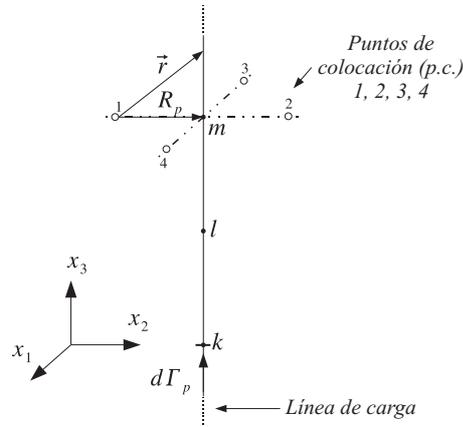
$$\mathbf{R}_{lk}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_p^2 & (-1)^n R_p x_3^r \\ 0 & (-1)^n R_p x_3^r & (x_3^r)^2 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{R}_{lk}^n = \begin{pmatrix} R_p^2 & 0 & (-1)^n R_p x_3^r \\ 0 & 0 & 0 \\ (-1)^n R_p x_3^r & 0 & (x_3^r)^2 \end{pmatrix}$$

Tal y como puede apreciarse, este procedimiento lleva a una ecuación completamente equivalente a la ecuación (3.46), con lo que se demuestra que ambas aproximaciones son análogas.

Por otro lado, cuando el punto de colocación 'k' está situado fuera de la línea de carga  $j$ , puede afirmarse que:

$$\Upsilon_k^j = \{u_{13}^* \ u_{23}^* \ u_{33}^*\}_k \quad (3.49)$$



**Figura 3.9:** Estrategia de colocación no nodal

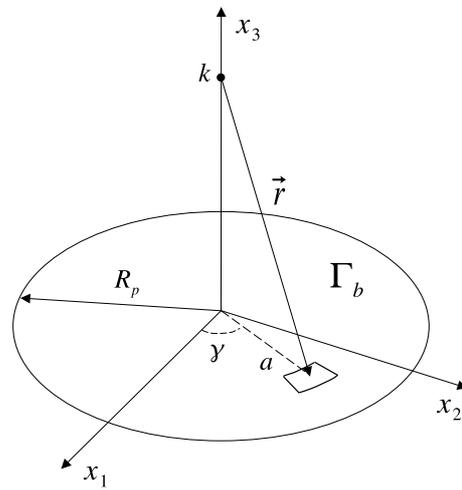
Sin embargo, cuando el punto de colocación está situado en el nodo inferior de la línea de carga  $j$  y éste coincide con el extremo inferior del pilote,  $\Upsilon_k^j F_{p_j}$  pasa a contener una singularidad. Para evitar tal singularidad, la fuerza axial en la punta del pilote puede modelarse como una presión uniforme  $\sigma_b$  aplicada sobre una superficie circular con radio  $R_p = \sqrt{A/\pi}$ . En este trabajo, esta estrategia ha sido utilizada siempre que el punto de colocación está situado a lo largo de la línea de carga  $j$ . De este modo, puede escribirse

$$\Upsilon_k^j F_{p_j} = \int_{\Gamma_b} u_{i3}^* \sigma_b d\Gamma_b \quad (3.50)$$

donde  $\Gamma_b$  es la superficie de la punta del pilote y  $\sigma_b = F_p/A$ . Así, y utilizando coordenadas polares (véase la figura 3.10), la ecuación (3.50) pasa a ser expresada como:

$$\begin{aligned} \Upsilon_k^j &= \frac{1}{4\pi\mu A} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_p} [\psi \delta_{i3} - \chi r_{,i} r_{,3}] a da d\theta = \\ &= \frac{1}{2\mu A} \int_0^{R_p} \delta_{i3} \left[ \psi - (x_3^r)^2 \frac{\chi}{r^2} \right] a da \quad (3.51) \end{aligned}$$

donde la integral es regular y puede ser evaluada numéricamente.



**Figura 3.10:** Integración sobre la superficie de la punta del pilote



# Capítulo 4

## Ecuaciones del campo incidente producido por ondas SH, P y SV con ángulo de incidencia genérico

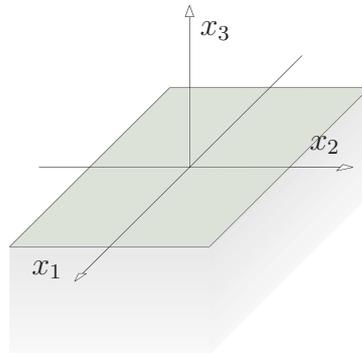
### 4.1. Introducción

Comentado el modelo acoplado de elementos de contorno y elementos finitos es hora, pues, de profundizar en el objeto del presente trabajo. Para ello, se establecen a continuación las consideraciones y expresiones que permitirán estudiar el comportamiento de un medio sometido a la incidencia de ondas sísmicas tipo SH, P y SV que llegan a la superficie con un ángulo de incidencia totalmente genérico.

El presente capítulo se estructura de modo que en la sección 4.2 se establecen las consideraciones generales respecto a los fenómenos asociados a la propagación de ondas a través del terreno. Una vez planteados los datos de partida, se analizan, en las secciones 4.3, 4.4 y 4.5, las características propias de cada tipo de onda incidente, haciendo especial hincapié en sus particularidades específicas. Por último, la sección 4.6 indica el modo de incluir el campo incidente en la formulación general del problema explicada hasta ese punto.

### 4.2. Fundamentos

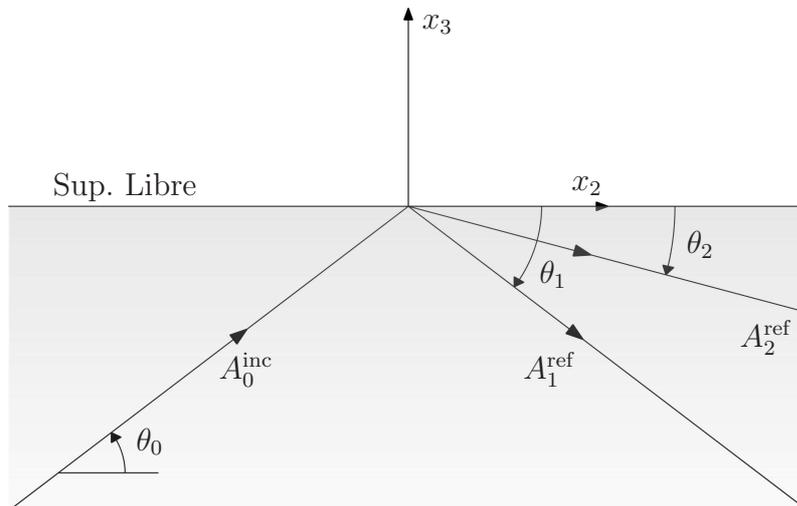
Considérese un semiespacio con propiedades mecánicas homogéneas, constantes con la profundidad, dadas por su módulo de elasticidad  $E$  y su coeficiente de Poisson  $\nu$ . Asíumase, además, que por el medio se propaga un tren de ondas cuya dirección de propagación se encuentra contenida en un plano perpendicular a la superficie del semiespacio (plano  $x_2 x_3$  en la figura 4.1), formando un ángulo  $\theta_0$  con el eje  $x_2$ , medido en sentido trigonométrico. Ese tren de ondas puede supo-



**Figura 4.1:** Definición de ejes en el semiespacio

nerse formado por ondas volumétricas de tipo P o S, pudiendo estar estas últimas polarizadas horizontal o verticalmente (tratándose, respectivamente, de ondas SH y SV).

La propagación del tren de ondas a través del medio produce en éste una perturbación en forma de campo de desplazamientos que, como se verá, es función del ángulo  $\theta_0$  de incidencia y de las propiedades mecánicas del terreno. A fin de obtener las expresiones explícitas del campo de desplazamientos provocado por el tren incidente (denominado en lo sucesivo campo incidente), se establecerá a continuación el conjunto de parámetros que se precisarán para la total definición posterior del problema.



**Figura 4.2:** Ángulos de interés en el plano  $x_2 x_3$  para los distintos problemas

En la figura 4.2 se puede observar el ángulo  $\theta_0$  de la onda incidente y los

ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  de las ondas reflejadas. Esto se debe a que, a la llegada del frente de ondas a la superficie libre del semiespacio, se produce un proceso de reflexión que provoca la generación de dos ondas adicionales en el caso más genérico (ver, por ejemplo, [12]). Como más tarde se verá, la cantidad de ondas reflejadas depende del tipo de onda incidente, siendo de dos cuando la onda que incide es de tipo P o SV y de una única cuando es una SH (ver, también, [12]).

Se pueden definir, en función de los ángulos presentados en el párrafo anterior, los vectores  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{d}$  mencionados en el capítulo 2 (figura 2.1) que contengan, respectivamente, los cosenos directores de las direcciones de propagación y de los desplazamientos de las partículas que cada una de las ondas que intervienen en el problema provocan, sabiendo que ambas direcciones son ortogonales en ondas S y coincidentes en ondas P.

Sabiendo lo anterior, las expresiones del campo de desplazamientos se pueden representar en notación subíndicada del modo que a continuación se muestra:

$$u_i = \sum_{j=1}^n d_i^j A_j e^{-ik_j (\mathbf{s}^{(j)} \cdot \mathbf{r})} \quad (4.1)$$

donde  $u_i$  es la componente en la dirección  $i$  del desplazamiento,  $n$  es el número de ondas total del problema en análisis,  $d_i^j$  es la componente en la dirección  $i$  del vector que contiene los cosenos directores de los desplazamientos que la onda  $j$  provoca en las partículas del medio,  $A_j$  y  $k_j$  son, respectivamente, la amplitud de la onda  $j$  y su número de onda (definido como el cociente entre la frecuencia  $\omega$  y la velocidad de propagación de la misma en el medio  $-k_j = \omega/c_j$ ), mientras que  $\mathbf{s}^{(j)} \cdot \mathbf{r}$  representa el producto escalar del vector de la dirección de propagación de la onda  $j$  por el vector de posición del punto donde se pretenden determinar los desplazamientos ( $\mathbf{s}^{(j)} \cdot \mathbf{r} = s_1^{(j)} x_1 + s_2^{(j)} x_2 + s_3^{(j)} x_3$ , siendo  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  las coordenadas del punto bajo análisis). Es interesante mencionar, por último, que la  $i$  que aparece en el exponente de la función representa a la unidad imaginaria ( $i = \sqrt{-1}$ ).

Obtenidas las expresiones del campo de desplazamientos en las tres direcciones del espacio para cualquier punto del medio, el tensor de pequeñas deformaciones puede obtenerse, para cada punto, por aplicación directa de las ecuaciones de compatibilidad. La ecuación es la (2.1), que se estableció en el capítulo 2. Obtenido el tensor de deformaciones para cada caso, las componentes del tensor de tensiones se pueden determinar de la ecuación constitutiva que, asumiendo que el suelo es un medio elástico, lineal, homogéneo e isótropo, se establece por la ley de Hooke, representada por la ecuación (2.3).

Una vez obtenidos los tensores de tensión para los puntos del semiespacio es posible establecer las condiciones de contorno que permitirán, una vez aplicadas, determinar las relaciones existentes entre la amplitud de la onda incidente y la

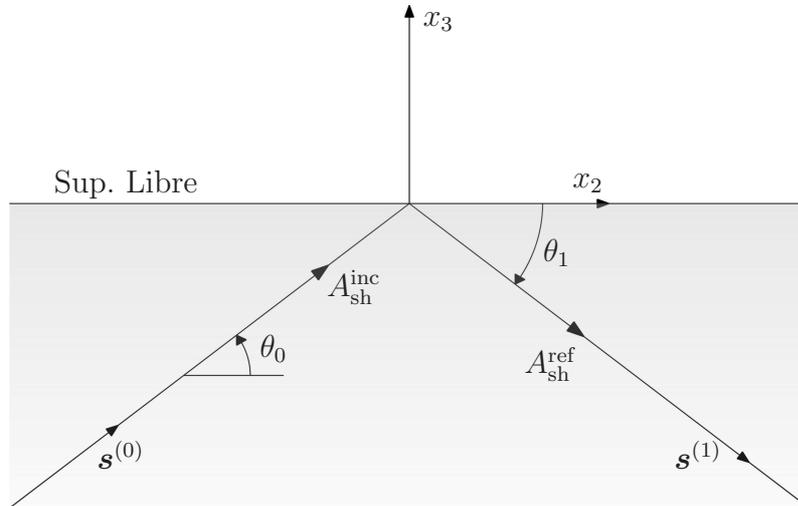
reflejada (o las reflejadas). Las condiciones de contorno a aplicar en esta ocasión son las condiciones de superficie libre, es decir, que la tensión normal  $\sigma_{33}$  y la tensión tangencial  $\sigma_{23}$  sean nulas en los puntos de coordenada  $x_3$  cero.

Las consideraciones realizadas hasta el momento son de aplicación totalmente genérica, sin estar referenciadas a ningún tipo de onda incidente en concreto. A continuación se procede a la particularización de las expresiones obtenidas a cada caso a fin de aclarar los conceptos introducidos e incidir en las características propias de cada tipo de problema.

### 4.3. Onda SH incidente

#### 4.3.1. Campo incidente

En el presente epígrafe se estudiará el problema de una onda de tipo SH incidente en un semiespacio. En este caso, se puede demostrar (ver, por ejemplo, [2]) que la llegada del frente de ondas a la superficie libre del semiespacio provoca un fenómeno de reflexión que propicia la generación de una única onda que, además, es del mismo tipo que la onda incidente. En la figura 4.3 adjunta se refleja lo comentado, definiéndose, además, los ángulos de interés del problema.



**Figura 4.3:** Ángulos de interés en el plano  $x_2 x_3$  para una onda SH incidente

En estas circunstancias, los vectores  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{d}$  que, como se indicó en el apartado anterior, son los que contienen, respectivamente, los cosenos directores de las direcciones de propagación y desplazamientos de cada una de las ondas que

intervienen en el problema, son los que se muestran a continuación. Es conveniente resaltar que el 0 se refiere a la onda SH incidente, mientras que el 1 indica referencia a la onda SH reflejada.

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^{(0)} &= \left[0, s_2^{(0)}, s_3^{(0)}\right] = [0, \cos(\theta_0), \sin(\theta_0)] & \mathbf{d}^{(0)} &= [1, 0, 0] \\ \mathbf{s}^{(1)} &= \left[0, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}\right] = [0, \cos(\theta_1), -\sin(\theta_1)] & \mathbf{d}^{(1)} &= [1, 0, 0]\end{aligned}$$

Por su parte, las expresiones del campo de desplazamientos son, en función de los vectores definidos en el párrafo anterior y de las amplitudes de las ondas implicadas:

$$\begin{aligned}u_1 &= d_1^{(0)} A_{\text{sh}}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_1^{(1)} A_{\text{sh}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= 0\end{aligned}\tag{4.2}$$

Tal y como se puede observar, la estructura de las expresiones del campo de desplazamientos es totalmente análoga a la establecida en la ecuación (4.1). Se comprueba que una onda SH incidente con un ángulo  $\theta_0$  cualquiera con respecto a la superficie del semiespacio provoca en éste desplazamientos sólo en la dirección del eje  $x_1$ , siendo nulas el resto de componentes del desplazamiento. Además, el desplazamiento no nulo se obtiene como la suma de las contribuciones de los provocados por las ondas SH incidente y reflejada.

Por tratarse de un semiespacio y ser un problema en régimen estacionario, la condición de contorno debe ser independiente de la dirección  $x_2$ . Por ello, es posible establecer las siguientes igualdades:

$$k_s s_2^{(0)} = k_s s_2^{(1)} \Rightarrow \frac{\cos(\theta_0)}{c_s} = \frac{\cos(\theta_1)}{c_s} \Rightarrow \theta_0 = \theta_1\tag{4.3}$$

de donde la ecuación (4.3) establece la igualdad entre el ángulo  $\theta_0$  de la onda incidente y el ángulo  $\theta_1$  de la onda reflejada. Una vez sabido esto, es simple demostrar algunas relaciones adicionales, como las que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}s_2^{(1)} &= s_2^{(0)} = \cos(\theta_0) \\ s_3^{(1)} &= -s_3^{(0)} = -\sin(\theta_0)\end{aligned}$$

### 4.3.2. Tensores de deformación y tensión

Una vez determinadas las expresiones del campo incidente, es posible pasar a la determinación de los tensores de deformación y tensión. El procedimiento que se seguirá es el indicado en la sección 4.2, es decir, comenzar con la determinación del tensor de deformaciones haciendo uso de las ecuaciones de compatibilidad (ecuación (2.1)) y continuar aplicando la ley de comportamiento (ecuación (2.3)) para obtener el tensor de tensiones en cada punto del semiespacio.

Cuando la onda que incide en el semiespacio es una de tipo SH, el campo de desplazamientos sólo posee componente en  $x_1$  (ecuación (4.2)). De esta manera, todas las derivadas parciales de las componentes en  $x_2$  y  $x_3$  del campo de desplazamientos se anularán. Así, el tensor de deformaciones tiene el aspecto siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

cuyas componentes no nulas valen:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} u_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ -d_1^{(0)} s_2^{(0)} A_{\text{sh}}^{\text{inc}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - d_1^{(1)} s_2^{(1)} A_{\text{sh}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} \right]$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} u_{1,3} = \frac{1}{2} \left[ -d_1^{(0)} s_3^{(0)} A_{\text{sh}}^{\text{inc}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - d_1^{(1)} s_3^{(1)} A_{\text{sh}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} \right]$$

Obtenido el tensor de deformaciones, es posible determinar las componentes del tensor de tensiones haciendo uso de la ley de comportamiento del material. Para un suelo que se comporta de manera elástica y lineal, con características de homogeneidad e isotropía, aplicando la ley de Hooke se tiene que el tensor de tensiones es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

donde las componentes no nulas tienen por valor:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2 \mu \varepsilon_{1,2} = \mu \left[ -d_1^{(0)} s_2^{(0)} A_{\text{sh}}^{\text{inc}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \right. \\ \left. -d_1^{(1)} s_2^{(1)} A_{\text{sh}}^{\text{ref}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} \right]$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = 2 \mu \varepsilon_{1,3} = \mu \left[ -d_1^{(0)} s_3^{(0)} A_{\text{sh}}^{\text{inc}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \right. \\ \left. -d_1^{(1)} s_3^{(1)} A_{\text{sh}}^{\text{ref}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} \right]$$

### 4.3.3. Aplicación de las condiciones de contorno

Todas las expresiones anteriores son función de los parámetros introducidos en 4.2. Sin embargo, nada se ha comentado hasta el momento acerca de las amplitudes de las ondas incidente y reflejada. Como se verá, las condiciones de contorno en estos problemas se materializan en la obtención de relaciones entre las amplitudes de la onda incidente y las reflejadas.

Las condiciones de contorno a aplicar son las de superficie libre, es decir, que la tensión en el contorno del semiespacio sea nula. Esto, traducido a las variables ya presentadas, implica que:

$$\text{En } x_3 = 0 \Rightarrow \sigma_{13} = 0 \quad (4.6)$$

Por lo tanto, recuperando las expresiones del tensor de tensiones en los puntos del semiespacio, se puede escribir:

$$-d_1^{(0)} s_3^{(0)} A_{\text{sh}}^{\text{inc}} - d_1^{(1)} s_3^{(1)} A_{\text{sh}}^{\text{ref}} = 0 \Rightarrow -\text{sen}(\theta_0) A_{\text{sh}}^{\text{inc}} + \text{sen}(\theta_0) A_{\text{sh}}^{\text{ref}} = 0 \quad (4.7) \\ A_{\text{sh}}^{\text{inc}} = A_{\text{sh}}^{\text{ref}}$$

Por tanto, las amplitudes de la onda incidente y reflejada coinciden cuando la onda que incide en el semiespacio es una onda SH. Sin embargo, sigue siendo necesario darle valor a una de esas amplitudes. Por esta razón, se le asigna, a modo de condición de contorno adicional, un valor unitario a la amplitud de la onda incidente.

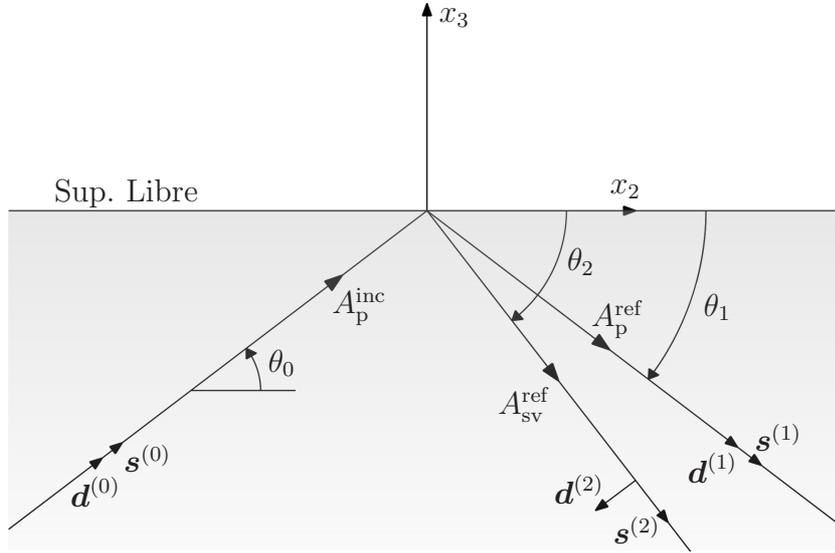
$$A_{\text{sh}}^{\text{inc}} = A_{\text{sh}}^{\text{ref}} = 1 \quad (4.8)$$

## 4.4. Onda P incidente

### 4.4.1. Campo incidente

El caso de una onda SH incidente estudiado con anterioridad es el más simple. La existencia de una única onda reflejada simplifica en gran medida las expresiones. En esta línea, la formulación relativa a una onda P supone un incremento de su complejidad.

La reflexión producida por la llegada del frente de ondas P a la superficie libre del semiespacio provoca la aparición, de dos ondas, una de tipo P y otra de tipo SV. Los ángulos del problema son los que se pueden observar en la figura 4.4.



**Figura 4.4:** Ángulos de interés en el plano  $x_2 x_3$  para una onda P incidente

Los vectores  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{d}$  para este problema pueden escribirse:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^{(0)} &= [0, s_2^{(0)}, s_3^{(0)}] = [0, \cos(\theta_0), \text{sen}(\theta_0)] \\ \mathbf{s}^{(1)} &= [0, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}] = [0, \cos(\theta_1), -\text{sen}(\theta_1)] \\ \mathbf{s}^{(2)} &= [0, s_2^{(2)}, s_3^{(2)}] = [0, \cos(\theta_2), -\text{sen}(\theta_2)] \\ \mathbf{d}^{(0)} &= [0, d_2^{(0)}, d_3^{(0)}] = [0, \cos(\theta_0), \text{sen}(\theta_0)] \\ \mathbf{d}^{(1)} &= [0, d_2^{(1)}, d_3^{(1)}] = [0, \cos(\theta_1), -\text{sen}(\theta_1)] \\ \mathbf{d}^{(2)} &= [0, d_2^{(2)}, d_3^{(2)}] = [0, -\text{sen}(\theta_2), -\cos(\theta_2)]\end{aligned}$$

La expresión del campo de desplazamientos para este problema es la siguiente:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= d_2^{(0)} A_p^{\text{inc}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(1)} A_p^{\text{ref}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(2)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \\ u_3 &= d_3^{(0)} A_p^{\text{inc}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(1)} A_p^{\text{ref}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(2)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aplicando el concepto de independencia de las expresiones respecto al eje  $x_2$  se tiene:

$$k_p s_2^{(0)} = k_p s_2^{(1)} = k_s s_2^{(2)} \Rightarrow \frac{\cos(\theta_0)}{c_p} = \frac{\cos(\theta_1)}{c_p} = \frac{\cos(\theta_2)}{c_s} \Rightarrow \theta_0 = \theta_1 \quad (4.10)$$

por lo que, también en este caso, el ángulo  $\theta_1$  es igual al ángulo  $\theta_0$ . Esta igualdad permite relacionar ciertas componentes de los vectores  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{d}$  entre sí.

$$\begin{aligned} s_2^{(1)} &= s_2^{(0)} = \cos(\theta_0) & d_2^{(1)} &= d_2^{(0)} = \cos(\theta_0) \\ s_3^{(1)} &= -s_3^{(0)} = \text{sen}(\theta_0) & d_3^{(1)} &= -d_3^{(0)} = -\text{sen}(\theta_0) \end{aligned}$$

De la primera y tercera igualdad de la ecuación (4.10) puede obtenerse la relación existente entre el ángulo de la onda P incidente y el de la SV reflejada:

$$\frac{\cos(\theta_0)}{c_p} = \frac{\cos(\theta_2)}{c_s} \Rightarrow \cos(\theta_2) = \frac{c_s}{c_p} \cos(\theta_0) \quad (4.11)$$

En la ecuación (4.11) se establece que la relación entre el ángulo de incidencia de la onda P y el ángulo de la onda SV reflejada es proporcional al cociente entre la velocidad de propagación de la onda S y la velocidad de propagación de la onda P. A ese cociente se le denominará en lo sucesivo con la letra  $\kappa$ , dependiendo en exclusiva del coeficiente de Poisson del medio y tomando valores inferiores a la unidad.

$$\frac{c_s}{c_p} = \frac{k_p}{k_s} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} = \kappa < 1 \quad (4.12)$$

Pueden establecerse relaciones entre los vectores de propagación y de desplazamientos de la onda SV reflejada con los de la onda P incidente, de modo similar al que ocurría entre las ondas P incidente y reflejada tras aplicar la ecuación (4.10). En esta ocasión:

$$\begin{aligned} s_2^{(2)} &= \cos(\theta_2) = \kappa \cos(\theta_0) & d_2^{(2)} &= -\text{sen}(\theta_2) = -\sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2(\theta_0)} \\ s_3^{(2)} &= -\text{sen}(\theta_2) = -\sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2(\theta_0)} & d_3^{(2)} &= -\cos(\theta_2) = -\kappa \cos(\theta_0) \end{aligned}$$

Resulta interesante en este punto estudiar qué ocurre con la relación entre los ángulos  $\theta_0$  y  $\theta_2$  en función del propio  $\theta_0$ . Así, el valor de  $\kappa$  varía entre  $\sqrt{2}/2$  para un valor del coeficiente de Poisson de 0 y 0 para un valor del coeficiente de Poisson de 0,5. De esta manera, para un ángulo de incidencia de la onda P de entre 0 y 90 grados, se comprueba que el ángulo  $\theta_2$  varía entre 45 y 90 grados.

#### 4.4.2. Tensores de deformación y tensión

Para una onda P incidente, el tensor de deformaciones es de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

cuyas componentes no nulas son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} = u_{2,2} = & -d_2^{(0)} s_2^{(0)} A_p^{\text{inc}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -d_2^{(1)} s_2^{(1)} A_p^{\text{ref}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -d_2^{(2)} s_2^{(2)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} = u_{3,3} = & -d_3^{(0)} s_3^{(0)} A_p^{\text{inc}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -d_3^{(1)} s_3^{(1)} A_p^{\text{ref}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & -d_3^{(2)} s_3^{(2)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} u_{2,3} = \frac{1}{2} \left[ & -\left(d_2^{(0)} s_3^{(0)} + d_3^{(0)} s_2^{(0)}\right) A_p^{\text{inc}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \right. \\ & -\left(d_2^{(1)} s_3^{(1)} + d_3^{(1)} s_2^{(1)}\right) A_p^{\text{ref}}(i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & \left. -\left(d_2^{(2)} s_3^{(2)} + d_3^{(2)} s_2^{(2)}\right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \right] \end{aligned}$$

Además de las componentes del tensor de deformaciones, otro valor de interés posterior es la suma de los elementos de la diagonal principal del tensor.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = & - \left( d_2^{(0)} s_2^{(0)} + d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right) A_p^{\text{inc}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \left( d_2^{(1)} s_2^{(1)} + d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right) A_p^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \left( d_2^{(2)} s_2^{(2)} + d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

El tensor de tensiones puede escribirse como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

cuyas componentes distintas de cero, conociendo la expresión de  $\varepsilon_{kk}$ , son:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \lambda \varepsilon_{kk} = & - \lambda \left( d_2^{(0)} s_2^{(0)} + d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right) A_p^{\text{inc}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \lambda \left( d_2^{(1)} s_2^{(1)} + d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right) A_p^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \lambda \left( d_2^{(2)} s_2^{(2)} + d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} = & - \left[ (\lambda + 2\mu) d_2^{(0)} s_2^{(0)} + \lambda d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right] A_p^{\text{inc}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \left[ (\lambda + 2\mu) d_2^{(1)} s_2^{(1)} + \lambda d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right] A_p^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \left[ (\lambda + 2\mu) d_2^{(2)} s_2^{(2)} + \lambda d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right] A_{\text{sv}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} = & - \left[ \lambda d_2^{(0)} s_2^{(0)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right] A_p^{\text{inc}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \left[ \lambda d_2^{(1)} s_2^{(1)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right] A_p^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \left[ \lambda d_2^{(2)} s_2^{(2)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right] A_{\text{sv}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu \varepsilon_{23} = & - \mu \left( d_2^{(0)} s_3^{(0)} + d_3^{(0)} s_2^{(0)} \right) A_p^{\text{inc}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \mu \left( d_2^{(1)} s_3^{(1)} + d_3^{(1)} s_2^{(1)} \right) A_p^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \mu \left( d_2^{(2)} s_3^{(2)} + d_3^{(2)} s_2^{(2)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

### 4.4.3. Aplicación de las condiciones de contorno

Las condiciones de superficie libre se enuncian como:

$$\text{En } x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

De la primera igualdad se extrae que:

$$\begin{aligned} 0 = & -\mu [\cos(\theta_0) \sin(\theta_0) + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)] A_p^{\text{inc}}(i k_p) e^{-i k_p [\cos(\theta_0) x_2]} - \\ & -\mu [-\cos(\theta_0) \sin(\theta_0) - \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)] A_p^{\text{ref}}(i k_p) e^{-i k_p [\cos(\theta_0) x_2]} - \\ & -\mu [(1 - \kappa^2 \cos^2(\theta_0)) - \kappa^2 \cos^2(\theta_0)] A_{\text{sv}}^{\text{ref}}(i k_s) e^{-i k_p [\cos(\theta_0) x_2]} \end{aligned}$$

como  $\kappa = c_s/c_p = k_p/k_s$  y, además:

$$2 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) = \sin(2\theta_0) \quad (4.16)$$

$\sigma_{23}$  se puede expresar como:

$$0 = -\mu \sin(2\theta_0) A_p^{\text{inc}} + \mu \sin(2\theta_0) A_p^{\text{ref}} - \mu [1 - 2\kappa^2 \cos^2(\theta_0)] \frac{1}{\kappa} A_{\text{sv}}^{\text{ref}}$$

Si se tiene en cuenta que  $1 - 2\kappa^2 \cos^2(\theta_0) = 1 - 2\cos^2(\theta_2)$ , se puede escribir:

$$1 - 2\cos^2(\theta_2) = 1 - \cos^2(\theta_2) - \cos^2(\theta_2) = \sin^2(\theta_2) - \cos^2(\theta_2) = -\cos(2\theta_2)$$

y dividiendo finalmente entre  $\mu$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\sin(2\theta_0) A_p^{\text{ref}} + \cos(2\theta_2) \frac{1}{\kappa} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} = \sin(2\theta_0) A_p^{\text{inc}} \quad (4.17)$$

Por otro lado, de  $\sigma_{33} = 0$ , se tiene:

$$\begin{aligned} 0 = & -[\lambda + 2\mu \sin^2(\theta_0)] (i k_p) A_p^{\text{inc}} - [\lambda + 2\mu \sin^2(\theta_0)] (i k_p) A_p^{\text{ref}} - \\ & - [-\lambda \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + (\lambda + 2\mu) \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)] (i k_s) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} 0 = & -[\lambda + 2\mu \sin^2(\theta_0)] A_p^{\text{inc}} - [\lambda + 2\mu \sin^2(\theta_0)] A_p^{\text{ref}} - \\ & - 2\mu \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \frac{1}{\kappa} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} \end{aligned}$$

Dividiendo entre  $2\mu$ , se tiene:

$$0 = - \left[ \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu} + \text{sen}^2(\theta_0) \right] A_p^{\text{inc}} - \left[ \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu} + \text{sen}^2(\theta_0) \right] A_p^{\text{ref}} - \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta_2) \frac{1}{\kappa} A_{\text{sv}}^{\text{ref}}$$

y como existe la siguiente relación entre el coeficiente de Poisson y las constantes de Lamé:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (4.18)$$

$\kappa$  puede escribirse del modo como:

$$\kappa = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}}{2 \left[ 1 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \right]}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu}{\lambda + \mu}}{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \quad (4.19)$$

por lo que, en virtud de lo anterior,  $\lambda/\mu$  es equivalente a:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} + 2 - 2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} - 2 = \frac{1}{\kappa^2} - 2 \quad (4.20)$$

Así, retomando la expresión de  $\sigma_{33}$ , se puede poner:

$$0 = - \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa^2} - 1 + \text{sen}^2(\theta_0) \right] A_p^{\text{inc}} - \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\kappa^2} - 1 + \text{sen}^2(\theta_0) \right] A_p^{\text{ref}} - \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta_2) \frac{1}{\kappa} A_{\text{sv}}^{\text{ref}}$$

de donde, reordenando términos, se obtiene, finalmente:

$$\left[ \frac{1}{2\kappa^2} - \cos^2(\theta_0) \right] A_p^{\text{ref}} + \frac{1}{2\kappa} \text{sen}(2\theta_2) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} = \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} + \cos^2(\theta_0) \right] A_p^{\text{inc}} \quad (4.21)$$

Las ecuaciones (4.17) y (4.21) constituyen un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Dándole, como en el caso de la onda SH incidente, un valor unitario a la amplitud de la onda incidente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen}(2\theta_0) A_p^{\text{ref}} + \cos(2\theta_2) \frac{1}{\kappa} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} &= \text{sen}(2\theta_0) \\ \left[ \frac{1}{2\kappa^2} - \cos^2(\theta_0) \right] A_p^{\text{ref}} + \frac{1}{2\kappa} \text{sen}(2\theta_2) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} &= \left[ -\frac{1}{2\kappa^2} + \cos^2(\theta_0) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

De la resolución del sistema de ecuaciones anterior se obtienen los valores para las amplitudes de las ondas reflejadas:

$$A_p^{\text{ref}} = \frac{\kappa^2 \text{sen}(2\theta_0) \text{sen}(2\theta_2) - \cos^2(2\theta_2)}{\kappa^2 \text{sen}(2\theta_0) \text{sen}(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_2)} \quad (4.23)$$

para la onda P reflejada y

$$A_{\text{sv}}^{\text{ref}} = \frac{2\kappa \text{sen}(2\theta_0) \cos(2\theta_2)}{\kappa^2 \text{sen}(2\theta_0) \text{sen}(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_2)} \quad (4.24)$$

para la onda SV reflejada.

#### 4.4.4. Cambios de modo

Analizando las expresiones de las amplitudes de las ondas reflejadas, puede comprobarse que existe un cierto ángulo de incidencia que produce que la amplitud de la onda P reflejada se anule, produciéndose un fenómeno conocido como cambio de modo. De esta manera, una onda incidente de tipo P se refleja en forma de una única onda de tipo SV (de ahí el nombre de cambio de modo). Así, para cada valor del coeficiente de Poisson existe, a priori, al menos un ángulo de incidencia para el que sólo se refleja una onda SV. La ecuación que permite obtener el ángulo (o los ángulos) para el que se produce el fenómeno explicado surge de la anulación de  $A_p^{\text{ref}}$  y es la siguiente:

$$\kappa^2 \text{sen}(2\theta_0) \text{sen}(2\theta_2) - \cos^2(2\theta_2) = 0 \quad (4.25)$$

que, expresada en función únicamente del ángulo de incidencia queda:

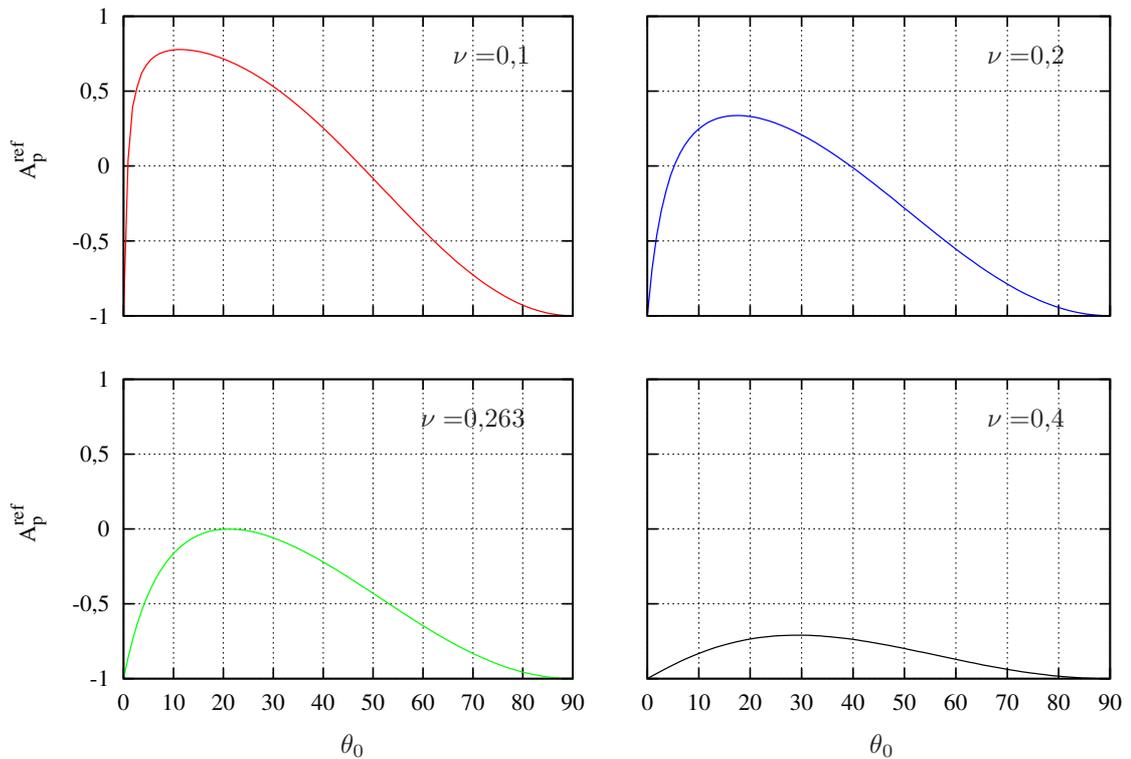
$$\begin{aligned} -4\kappa^4 \cos^4(\theta_0) + 4\kappa^3 \cos^2(\theta_0) \sqrt{1 - \cos^2(\theta_0)} \sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2(\theta_0)} + \\ + 4\kappa^2 \cos^2(\theta_0) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

La expresión anterior permite obtener el ángulo en el que se produce el cambio de modo en función de las propiedades del terreno, al estar la variable  $\kappa$  relacionada con el coeficiente de Poisson  $\nu$  del mismo según la ecuación (4.12). Sin embargo,

el comportamiento de la ecuación (4.26) presentada con anterioridad difiere según el valor del coeficiente de Poisson del terreno por el que se propagan las ondas.

Para ilustrar el fenómeno, la figura 4.5 presenta la variación de los valores de la amplitud de la onda P reflejada en función del ángulo  $\theta_0$  de incidencia y del coeficiente de Poisson del medio. Puede observarse que el cambio de modo sólo tiene lugar para valores del coeficiente de Poisson inferiores a 0,263.

Nótese que cuando el coeficiente de Poisson del terreno toma un valor de 0,5, la amplitud de la onda P reflejada pasa a valer -1 con independencia del ángulo de incidencia.



**Figura 4.5:** Variación de la amplitud de la onda P reflejada con el ángulo de incidencia  $\theta_0$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$  del terreno

El cuadro 4.1 resume los valores del ángulo de cambio de modo ( $\theta_{\text{cmodo}}$ ) para algunos coeficientes de Poisson del suelo típicos.

$\nu$	$\kappa$	$\theta_{cmodo}$
0,1	0,667	0,803° y 47,618°
0,2	0,612	5,216° y 39,519°
0,3	0,535	-
0,4	0,408	-

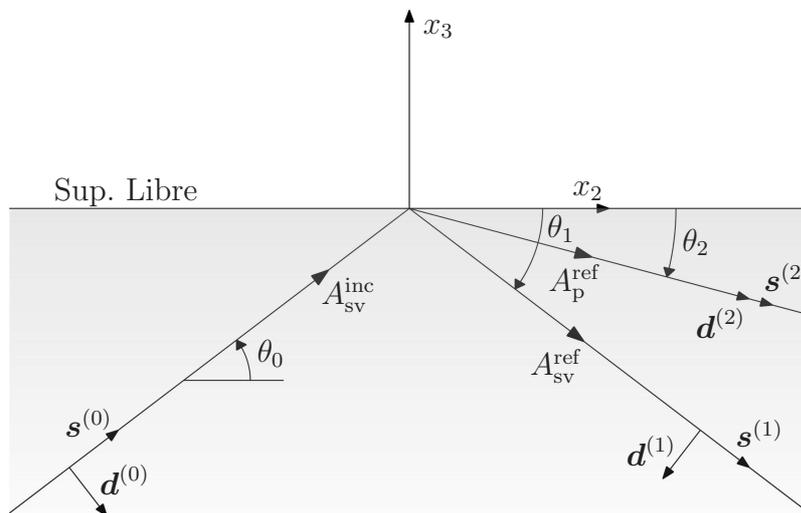
**Cuadro 4.1:** Cuadro resumen de los ángulos de cambio de modo para una onda incidente tipo P y un conjunto de coeficientes de Poisson del terreno

## 4.5. Onda SV incidente

### 4.5.1. Campo incidente

En este apartado se estudiarán las características del campo incidente cuando la onda que incide es una SV.

La incidencia de una onda SV en el semiespacio genera, tras su reflexión, la aparición de una onda SV y una P reflejadas. La figura 4.6 presenta los parámetros de interés para el problema en análisis.



**Figura 4.6:** Ángulos de interés en el plano  $x_2 x_3$  para una onda SV incidente

Los vectores  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{d}$  son:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}^{(0)} &= [0, s_2^{(0)}, s_3^{(0)}] = [0, \cos(\theta_0), \text{sen}(\theta_0)] \\ \mathbf{s}^{(1)} &= [0, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}] = [0, \cos(\theta_1), -\text{sen}(\theta_1)] \\ \mathbf{s}^{(2)} &= [0, s_2^{(2)}, s_3^{(2)}] = [0, \cos(\theta_2), -\text{sen}(\theta_2)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{(0)} &= [0, d_2^{(0)}, d_3^{(0)}] = [0, \text{sen}(\theta_0), -\cos(\theta_0)] \\ \mathbf{d}^{(1)} &= [0, d_2^{(1)}, d_3^{(1)}] = [0, -\text{sen}(\theta_1), -\cos(\theta_1)] \\ \mathbf{d}^{(2)} &= [0, d_2^{(2)}, d_3^{(2)}] = [0, \cos(\theta_2), -\text{sen}(\theta_2)]\end{aligned}$$

La expresión de las componentes del campo de desplazamientos es la siguiente:

$$\begin{aligned}u_1 &= 0 \\ u_2 &= d_2^{(0)} A_{\text{sv}}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(1)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(2)} A_{\text{p}}^{\text{ref}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \\ u_3 &= d_3^{(0)} A_{\text{sv}}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(1)} A_{\text{sv}}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(2)} A_{\text{p}}^{\text{ref}} e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}\quad (4.27)$$

Si se tiene en cuenta la independencia de las expresiones con respecto al eje  $x_2$  puede escribirse:

$$k_s s_2^{(0)} = k_s s_2^{(1)} = k_p s_2^{(2)} \Rightarrow \frac{\cos(\theta_0)}{c_s} = \frac{\cos(\theta_1)}{c_s} = \frac{\cos(\theta_2)}{c_p} \Rightarrow \theta_0 = \theta_1 \quad (4.28)$$

donde los ángulos  $\theta_0$  y  $\theta_1$  son, también en esta ocasión, iguales. Se puede comprobar que:

$$\begin{aligned}s_2^{(1)} &= s_2^{(0)} = \cos(\theta_0) & d_2^{(1)} &= -d_2^{(0)} = -\text{sen}(\theta_0) \\ s_3^{(1)} &= -s_3^{(0)} = -\text{sen}(\theta_0) & d_3^{(1)} &= d_3^{(0)} = -\cos(\theta_0)\end{aligned}$$

De la segunda y tercera igualdad de la ecuación (4.28) se obtiene la relación entre el ángulo de la onda incidente ( $\theta_0$ ) y el de la onda P reflejada ( $\theta_2$ ):

$$\frac{\cos(\theta_0)}{c_s} = \frac{\cos(\theta_2)}{c_p} \Rightarrow \cos(\theta_2) = \frac{c_p}{c_s} \cos(\theta_0) \quad (4.29)$$

La relación que existe en esta ocasión entre el ángulo de incidencia de la onda SV y el de la onda P reflejada es proporcional al cociente entre la velocidad  $c_p$  y  $c_s$ , es decir, a  $1/\kappa$ .

$$\frac{c_p}{c_s} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} = \frac{1}{\kappa} > 1 \quad (4.30)$$

La expresión (4.29) permite relacionar los vectores de propagación y de desplazamientos de la onda P reflejada con los de la onda SV incidente:

$$\begin{aligned} s_2^{(2)} &= \frac{1}{\kappa} s_2^{(0)} & d_2^{(2)} &= s_2^{(2)} = \frac{1}{\kappa} s_2^{(0)} \\ s_3^{(2)} &= -\sqrt{1 - [s_2^{(2)}]^2} & d_3^{(2)} &= s_3^{(2)} = -\sqrt{1 - [s_2^{(2)}]^2} \end{aligned}$$

#### 4.5.2. Ángulo crítico

Existe una particularidad para este tipo de ondas incidentes que puede observarse analizando la ecuación (4.30). Tómese un ángulo de incidencia  $\theta_0$  tal que el ángulo de la onda P reflejada se anule. En estas circunstancias,  $\cos(\theta_0) = \kappa$ . Llámese al ángulo que produce ese efecto ángulo crítico y denótese por  $\theta_{cr}$ . A continuación, supóngase que el ángulo de incidencia sea superior a ese ángulo crítico  $\theta_{cr}$  (ángulo supercrítico), siendo pues el coseno del ángulo de incidencia menor a  $\kappa$  y, por tanto, el coseno del ángulo reflejado igual a  $\cos(\theta_2) = 1/\kappa \cos(\theta_0) < 1$

Ahora, imagínese el lector que el ángulo de incidencia resulte ser inferior al citado ángulo crítico (ángulo subcrítico). Entonces,  $\cos(\theta_0) > \kappa$ , de modo que el coseno del ángulo reflejado será  $\cos(\theta_2) = 1/\kappa \cos(\theta_0) > 1$ . Se trata, pues, de una singularidad que implica que  $\sin(\theta_2) \in \mathbb{I}$ . Debido a esto, se hace necesaria una modificación de la formulación que permita tener en cuenta el hecho descrito.

A modo de información adicional, el cuadro 4.2 resume los ángulos críticos para algunos valores habituales del coeficiente de Poisson del suelo.

Es preciso, por tanto, modificar la formulación planteada hasta el momento para tener en cuenta el fenómeno asociado al ángulo crítico. Para ello, pártase de las expresiones ya conocidas del campo de desplazamientos y analícnense las componentes del mismo debidas a la contribución de la onda P reflejada.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^P &= \begin{bmatrix} d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix} A_P^{\text{ref}} e^{-i k_p [\cos(\theta_2) x_2 - \sin(\theta_2) x_3]} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ -\sin(\theta_2) \end{bmatrix} A_P^{\text{ref}} e^{-i k_p [\cos(\theta_2) x_2 - \sin(\theta_2) x_3]} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$\nu$	$\kappa$	$\theta_{cr}$
0,1	0,667	48,16 °
0,2	0,612	52,24 °
0,3	0,535	57,69 °
0,4	0,408	65,91 °

**Cuadro 4.2:** Cuadro resumen de los ángulos críticos para una onda incidente tipo SV y un conjunto de coeficientes de Poisson del terreno

puesto que:

$$\cos(\theta_2) = \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0); \quad \text{sen}(\theta_2) = \pm i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \quad (4.32)$$

Pese a no poder establecer, a priori, el signo de la unidad imaginaria, la expresión de los desplazamientos se puede poner del modo siguiente:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ \pm i (-1) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix} A_p^{\text{ref}} e^{-i k_p \left[ \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) x_2 - (\pm i) x_3 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \right]}$$

de donde, analizando la función exponencial, la solución adecuada será la que sirva para mantener la estructura de la misma. En esta ocasión, la estructura se mantiene si se toma  $-i$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^P &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix} A_p^{\text{ref}} e^{-i k_p \left[ \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) x_2 + i x_3 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \right]} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix} A_p^{\text{ref}} e^{k_p x_3 \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1}} e^{-i k_p \left[ \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \right] x_2} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \\ i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \end{bmatrix} A_p^{\text{ref}} e^{\xi x_3} e^{-i k_s \cos(\theta_0) x_2} \end{aligned} \quad (4.33)$$

En la expresión anterior puede observarse que la componente de uno cualquiera de los desplazamientos es igual al producto de un cierto valor por una amplitud por el producto de dos exponenciales, ambas decrecientes al aumentar la variable de la que dependen (algo evidente para el caso de  $x_2$  y fácilmente visualizable

para el caso de la exponencial dependiente de  $x_3$ , pues los puntos del semiespacio poseen valores de la citada componente negativas). De este modo, la exponencial dependiente de  $x_3$  es un término que modula la amplitud de la onda, decreciendo ésta con la profundidad. El valor de la constante real que acompaña a la variable  $x_3$  es:

$$\xi = k_p \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \quad (4.34)$$

Analizando las expresiones obtenidas puede concluirse que se trata de una onda rasante que se propaga en dirección  $x_2$  con una velocidad que no es ni la de las ondas P ni la de las ondas S, dependiendo, además, del ángulo de incidencia, con desplazamientos en  $x_2$  y  $x_3$ , ambos desfasados  $90^\circ$  y con una amplitud  $A_p^{\text{ref}}$  que decrece con la profundidad ( $x_3$  negativos) según  $\xi$ . Esta clase de ondas tiene grandes similitudes con las ondas de superficie.

A nivel de implementación, se puede considerar que  $\mathbf{s}^{(2)}$  y  $\mathbf{d}^{(2)}$  son las siguientes expresiones complejas:

$$\mathbf{s}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_2) \\ -\text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0)}{i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\theta_2) \\ -\text{sen}(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0)}{i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1}} \end{bmatrix}$$

Las expresiones anteriores permiten implementar de modo relativamente sencillo un ángulo de incidencia inferior al crítico. Sin embargo, resulta instructivo obtener las ecuaciones del campo de desplazamientos para el caso en el que  $\theta_0 = \theta_{cr}$ . En este caso, los vectores de propagación y de desplazamientos de la onda P reflejada son los siguientes:

$$\begin{aligned} s_2^{(2)} &= 1 & d_2^{(2)} &= 1 \\ s_3^{(2)} &= 0 & d_3^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

siendo el campo de desplazamientos:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0 \\
u_2 &= d_2^{(0)} A_{sv}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_2^{(1)} A_{sv}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} + A_p^{\text{ref}} e^{-i k_p (x_2)} \\
u_3 &= d_3^{(0)} A_{sv}^{\text{inc}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} + d_3^{(1)} A_{sv}^{\text{ref}} e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

donde puede observarse que los desplazamientos en las direcciones  $x_2$  y  $x_3$  son la suma de las contribuciones de las ondas SV incidente y reflejada y, en el caso de los desplazamientos en  $x_2$ , también de la aportación de la onda P reflejada, que es una onda P rasante.

### 4.5.3. Tensores de deformación y tensión

En este caso, se anulan las siguientes componentes del tensor de deformaciones:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= u_{1,1} = 0 \\
\varepsilon_{21} &= \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) = 0 \\
\varepsilon_{31} &= \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1}) = 0
\end{aligned}$$

teniendo el tensor de deformaciones de un punto cualquiera del semiespacio el siguiente aspecto:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

Sus componentes se obtienen con:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22} = u_{2,2} &= -d_2^{(0)} s_2^{(0)} A_{sv}^{\text{inc}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad - d_2^{(1)} s_2^{(1)} A_{sv}^{\text{ref}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad - d_2^{(2)} s_2^{(2)} A_p^{\text{ref}} (i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \\
\varepsilon_{33} = u_{3,3} &= -d_3^{(0)} s_3^{(0)} A_{sv}^{\text{inc}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad - d_3^{(1)} s_3^{(1)} A_{sv}^{\text{ref}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\
&\quad - d_3^{(2)} s_3^{(2)} A_p^{\text{ref}} (i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} u_{2,3} = \frac{1}{2} \left[ - \left( d_2^{(0)} s_3^{(0)} + d_3^{(0)} s_2^{(0)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{inc}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \right. \\ \left. - \left( d_2^{(1)} s_3^{(1)} + d_3^{(1)} s_2^{(1)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \right. \\ \left. - \left( d_2^{(2)} s_3^{(2)} + d_3^{(2)} s_2^{(2)} \right) A_{\text{p}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \right] \end{aligned}$$

Por su parte, la suma de los elementos de la diagonal principal del tensor de deformaciones vale:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = - \left( d_2^{(0)} s_2^{(0)} + d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{inc}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ - \left( d_2^{(1)} s_2^{(1)} + d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ - \left( d_2^{(2)} s_2^{(2)} + d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right) A_{\text{p}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \end{aligned}$$

En lo que se refiere al tensor de tensiones, sus componentes nulas son:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2 \mu \varepsilon_{12} = 0 \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = 2 \mu \varepsilon_{13} = 0 \end{aligned}$$

y el tensor de tensiones de un punto cualquiera del semiespacio se escribe como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Sus las componentes distintas de cero son:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \lambda \varepsilon_{kk} = - \lambda \left( d_2^{(0)} s_2^{(0)} + d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{inc}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ - \lambda \left( d_2^{(1)} s_2^{(1)} + d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ - \lambda \left( d_2^{(2)} s_2^{(2)} + d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right) A_{\text{p}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = - \left[ (\lambda + 2 \mu) d_2^{(0)} s_2^{(0)} + \lambda d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right] A_{\text{sv}}^{\text{inc}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ - \left[ (\lambda + 2 \mu) d_2^{(1)} s_2^{(1)} + \lambda d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right] A_{\text{sv}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ - \left[ (\lambda + 2 \mu) d_2^{(2)} s_2^{(2)} + \lambda d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right] A_{\text{p}}^{\text{ref}} (\mathbf{i} k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} = & - \left[ \lambda d_2^{(0)} s_2^{(0)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(0)} s_3^{(0)} \right] A_{\text{sv}}^{\text{inc}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \left[ \lambda d_2^{(1)} s_2^{(1)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(1)} s_3^{(1)} \right] A_{\text{sv}}^{\text{ref}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \left[ \lambda d_2^{(2)} s_2^{(2)} + (\lambda + 2\mu) d_3^{(2)} s_3^{(2)} \right] A_{\text{p}}^{\text{ref}} (i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{23} = \sigma_{32} = 2\mu \varepsilon_{23} = & - \mu \left( d_2^{(0)} s_3^{(0)} + d_3^{(0)} s_2^{(0)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{inc}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \mu \left( d_2^{(1)} s_3^{(1)} + d_3^{(1)} s_2^{(1)} \right) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} (i k_s) e^{-i k_s (\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{r})} - \\ & - \mu \left( d_2^{(2)} s_3^{(2)} + d_3^{(2)} s_2^{(2)} \right) A_{\text{p}}^{\text{ref}} (i k_p) e^{-i k_p (\mathbf{s}^{(2)} \cdot \mathbf{r})}\end{aligned}$$

#### 4.5.4. Aplicación de las condiciones de contorno

Las condiciones de superficie libre son:

$$\text{En } x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

El valor de la componente  $x_2$  de los vectores  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{d}$  en función de  $\theta_0$  es:

$$\begin{aligned}s_2^{(0)} &= \cos(\theta_0) & d_2^{(0)} &= \text{sen}(\theta_0) \\ s_2^{(1)} &= \cos(\theta_0) & d_2^{(1)} &= -\text{sen}(\theta_0) \\ s_2^{(2)} &= \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) & d_2^{(2)} &= \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0)\end{aligned}$$

mientras que la componente  $x_3$  es:

$$\begin{aligned}s_3^{(0)} &= \text{sen}(\theta_0) & d_3^{(0)} &= -\cos(\theta_0) \\ s_3^{(1)} &= -\text{sen}(\theta_0) & d_3^{(1)} &= -\cos(\theta_0) \\ s_3^{(2)} &= -\sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0)} & d_3^{(2)} &= -\sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0)}\end{aligned}$$

De la aplicación de la primera condición de contorno se obtiene:

$$\begin{aligned}0 = & - \mu \left[ \text{sen}^2(\theta_0) - \cos^2(\theta_0) \right] (i k_s) A_{\text{sv}}^{\text{inc}} - \\ & - \mu \left[ \text{sen}^2(\theta_0) - \cos^2(\theta_0) \right] (i k_s) A_{\text{sv}}^{\text{ref}} - \\ & - \mu \left[ -\text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) \right] (i k_p) A_{\text{p}}^{\text{ref}}\end{aligned}$$

Recordando las propiedades de los ángulos dobles y dividiendo entre  $\mu k_s$  se tiene, finalmente:

$$\cos(2\theta_0) A_{sv}^{\text{ref}} + \sin(2\theta_2) \kappa A_p^{\text{ref}} = -\cos(2\theta_0) A_{sv}^{\text{inc}} \quad (4.39)$$

De la otra condición de contorno ( $\sigma_{33} = 0$ ) se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 = & -[\lambda \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) - (\lambda + 2\mu) \cos(\theta_0) \sin(\theta_0)] A_{sv}^{\text{inc}}(ik_s) e^{-ik_s [\cos(\theta_0) x_2]} - \\ & - [-\lambda \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) + (\lambda + 2\mu) \cos(\theta_0) \sin(\theta_0)] A_{sv}^{\text{ref}}(ik_s) e^{-ik_s [\cos(\theta_0) x_2]} - \\ & - \left[ \lambda \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) + (\lambda + 2\mu) \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) \right) \right] A_p^{\text{ref}}(ik_p) e^{-ik_p \left[ \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) x_2 \right]} \end{aligned}$$

Tras realizar algunas operaciones se llega a:

$$\begin{aligned} & 2\mu \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) (ik_s) A_{sv}^{\text{inc}} - \\ & - 2\mu \cos(\theta_0) \sin(\theta_0) (ik_s) A_{sv}^{\text{ref}} - \\ & - [\lambda \cos^2(\theta_2) + (\lambda + 2\mu) \sin^2(\theta_2)] (ik_p) A_p^{\text{ref}} = 0 \end{aligned}$$

Si se divide entre  $ik_s$  y se aplican las propiedades del ángulo doble se tiene:

$$\mu \sin(2\theta_0) A_{sv}^{\text{inc}} - \mu \sin(2\theta_0) A_{sv}^{\text{ref}} - [\lambda + 2\mu \sin^2(\theta_2)] \kappa A_p^{\text{ref}} = 0$$

y, tras modificar la expresión, se llega a:

$$\sin(2\theta_0) A_{sv}^{\text{ref}} + \frac{1}{\kappa} [1 - 2\kappa^2 \cos^2(\theta_2)] A_p^{\text{ref}} = \sin(2\theta_0) A_{sv}^{\text{inc}} \quad (4.40)$$

Las expresiones (4.39) y (4.40) forman un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Dándole un valor unitario a la amplitud de la onda SV incidente se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} & \cos(2\theta_0) A_{sv}^{\text{ref}} + \sin(2\theta_2) \kappa A_p^{\text{ref}} = -\cos(2\theta_0) \\ & \sin(2\theta_0) A_{sv}^{\text{ref}} + \frac{1}{\kappa} [1 - 2\kappa^2 \cos^2(\theta_2)] A_p^{\text{ref}} = \sin(2\theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

De su resolución se obtienen los siguientes valores para las amplitudes de las ondas reflejadas:

$$A_{sv}^{\text{ref}} = \frac{\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) - \cos^2(2\theta_0)}{\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_0)} \quad (4.42)$$

para la onda SV y:

$$A_p^{\text{ref}} = -\frac{\kappa \sin(4\theta_0)}{\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) + \cos^2(2\theta_0)} \quad (4.43)$$

para la P.

Las expresiones obtenidas son de validez general sea cual sea el ángulo  $\theta_0$  incidente. Sin embargo, resulta interesante estudiar determinadas situaciones a fin de ver cómo se comportan las amplitudes de las ondas reflejadas al variar el ángulo incidente. Cuando  $\theta_0 = \theta_{cr}$  se tiene:

$$\cos(\theta_2) = \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \Rightarrow \cos(\theta_2) = 1 \Rightarrow \sin(\theta_2) = 0 \quad (4.44)$$

por lo que, bajo estas circunstancias, las amplitudes toman los siguientes valores:

$$A_{sv}^{\text{ref}} = -\frac{\cos^2(2\theta_0)}{\cos^2(2\theta_0)} = -1 \quad (4.45)$$

para la onda SV reflejada y:

$$A_p^{\text{ref}} = -\frac{\kappa \sin(4\theta_0)}{\cos^2(2\theta_0)} = -\frac{4\kappa^2 \sqrt{1-\kappa^2} (2\kappa^2 - 1)}{(2\kappa^2 - 1)^2} = -\frac{4\kappa^2 \sqrt{1-\kappa^2}}{2\kappa^2 - 1} \quad (4.46)$$

para la P reflejada. Así pues, cuando una onda incide con un ángulo igual al crítico, la amplitud de la onda SV reflejada toma un valor igual a -1, mientras que la amplitud de la onda P reflejada es función sólo del coeficiente de Poisson del medio.

Es posible expresar la amplitud de la onda P reflejada del modo siguiente:

$$A_p^{\text{ref}} = \frac{R}{a - bi} = \frac{R(a + bi)}{a^2 + b^2} = M e^{i\alpha} \quad (4.47)$$

donde  $M$  y  $\tan(\alpha)$  valen:

$$M = \frac{R}{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \tan(\alpha) = \frac{b}{a} \quad (4.48)$$

por lo que  $A_p^{\text{ref}}$  se puede escribir:

$$A_p^{\text{ref}} = \frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{i\alpha} \quad (4.49)$$

Sustituyendo estos valores en las componentes del desplazamiento debidas a la contribución de la onda P reflejada se obtiene:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^P = \begin{bmatrix} d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix} \frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{i\alpha} e^{\xi x_3} e^{-i k_r x_2} = \begin{bmatrix} d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix} S e^{\xi x_3} e^{-i k_r x_2 + i\alpha} \quad (4.50)$$

donde  $S$  y  $\alpha$  son expresiones análogas a las obtenidas por Achenbach en [12], es decir:

$$S = \frac{\kappa \operatorname{sen}(4\theta_0)}{\sqrt{4 [\cos^2(\theta_0) - \kappa^2] \operatorname{sen}^2(2\theta_0) \cos^2(\theta_0) + \cos^4(2\theta_0)}} \quad (4.51)$$

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen}(2\theta_0) \cos(\theta_0) \sqrt{\cos^2(\theta_0) - \kappa^2}}{\cos^2(2\theta_0)} \quad (4.52)$$

Otro supuesto de interés es el que se produce cuando el ángulo de incidencia es inferior al crítico. Cuando el ángulo es subcrítico, el seno del ángulo  $\theta_2$  toma un valor complejo. Así:

$$\cos(\theta_0) > \kappa \Rightarrow \cos(\theta_2) = \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) > 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta_2) = \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0)} \in \mathbb{I}$$

que se puede poner:

$$\operatorname{sen}(\theta_2) = -i \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1} \quad (4.53)$$

Sustituyendo ese valor en las expresiones de las amplitudes de las ondas reflejadas se obtiene:

$$A_{sv}^{\text{ref}} = \frac{-\cos^2(2\theta_0) - 2i\kappa^2 \operatorname{sen}(2\theta_0) \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1}}{\cos^2(2\theta_0) - 2i\kappa^2 \operatorname{sen}(2\theta_0) \frac{1}{\kappa} \cos(\theta_0) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1}} \quad (4.54)$$

Es de interés verificar una propiedad de esa amplitud. Así pues, llamando  $a = \cos^2(2\theta_0)$  y  $b = -2\kappa \operatorname{sen}(2\theta_0) \cos(\theta_0) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0) - 1}$  se puede escribir:

$$A_{sv}^{\text{ref}} = -\frac{a + bi}{a - bi} = -\frac{(a + bi)(a + bi)}{(a - bi)(a + bi)} = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ab}{a^2 + b^2} i \quad (4.55)$$

siendo el módulo de esa expresión:

$$|A_{sv}^{\text{ref}}| = \frac{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} = 1 \quad (4.56)$$

De esta manera, para un ángulo de incidencia inferior al ángulo crítico se cumple que  $|A_{sv}^{\text{ref}}| = 1$ .

En lo referente a la amplitud de la onda P se tiene:

$$A_p^{\text{ref}} = -\frac{\kappa \sin(4\theta_0)}{\cos^2(2\theta_0) - 2i \sin(2\theta_0) \cos(\theta_0) \sqrt{\cos^2(\theta_0) - \kappa^2}} \quad (4.57)$$

#### 4.5.5. Cambios de modo

También cuando la onda incidente es de tipo SV existe, por lo menos, un ángulo de incidencia que produce que la amplitud de la onda SV reflejada se anule. Así, para cada valor del coeficiente de Poisson existe al menos un ángulo de incidencia para el que sólo se refleja una onda P. Para este caso, la expresión es:

$$\kappa^2 \sin(2\theta_0) \sin(2\theta_2) - \cos^2(2\theta_0) = 0 \quad (4.58)$$

que, en función únicamente del ángulo de incidencia, se puede escribir:

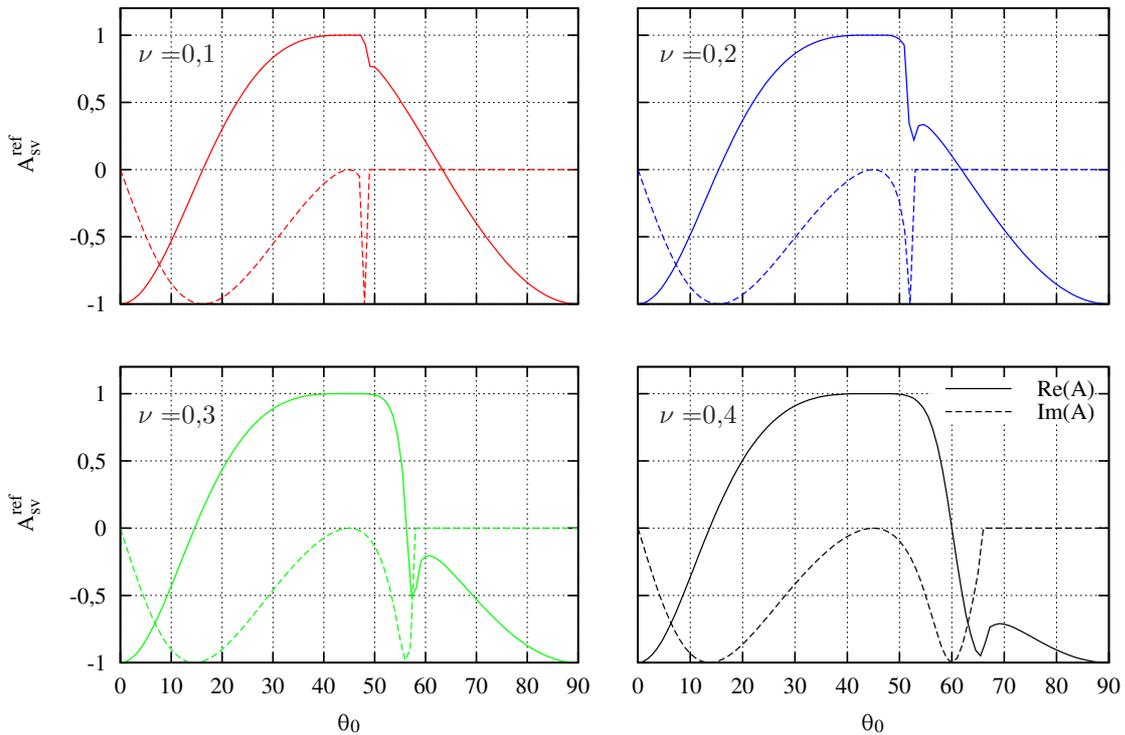
$$4\kappa \cos^2(\theta_0) \sqrt{1 - \cos^2(\theta_0)} \sqrt{1 - \frac{1}{\kappa^2} \cos^2(\theta_0)} - 4\cos^4(\theta_0) + 4\cos^2(\theta_0) - 1 = 0 \quad (4.59)$$

La amplitud de la onda SV reflejada es, en el caso general, un valor complejo, puesto que el radicando de la segunda raíz del primer miembro de la ecuación (4.59)  $(1 - 1/\kappa^2 \cos^2(\theta_0))$  toma valores negativos cuando el ángulo de incidencia es subcrítico.

Existe una componente imaginaria distinta de cero en las amplitudes de las ondas SV reflejadas cuando el ángulo de incidencia es subcrítico, componente que se anula al sobrepasar el ángulo crítico, momento a partir del cual la amplitud de la onda toma valores reales.

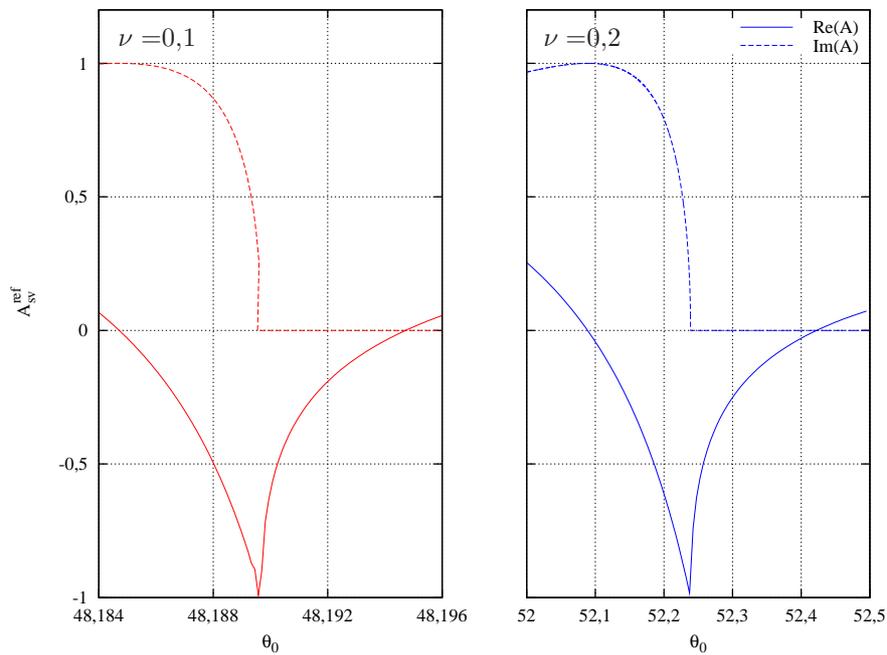
De modo semejante al que ocurría cuando la onda que incidía era de tipo SV, el fenómeno de cambio de modo tan solo tiene lugar para coeficientes de Poisson del terreno inferiores a 0,263. Para valores inferiores, existen dos ángulos de cambio de modo. El primero de ellos se encuentra muy próximo al ángulo crítico correspondiente, presentándose el segundo para un valor del ángulo de incidencia superior al crítico en todos los casos.

La figura 4.7 representa la variación de las partes real e imaginaria de la amplitud de la onda SV reflejada con el ángulo  $\theta_0$  de incidencia para algunos valores del coeficiente de Poisson del terreno. Las inmediaciones del ángulo crítico no se encuentran suficientemente bien representadas en la figura, por lo que en 4.8 se representan los ángulos cercanos al crítico a una mayor escala. Por último, la figura 4.9 muestra, en función del coeficiente de Poisson del medio, la variación de los ángulos crítico y de cambio de modo.

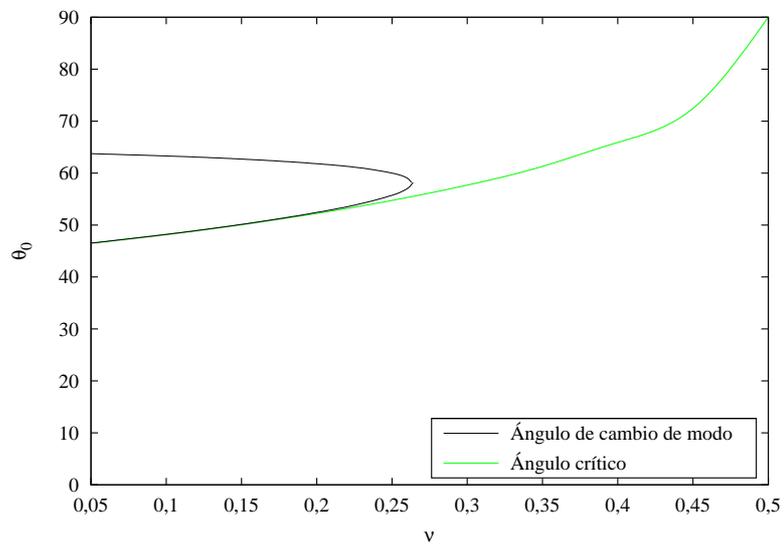


**Figura 4.7:** Variación de la amplitud de la onda SV reflejada con el ángulo de incidencia  $\theta_0$

El cuadro 4.3 presenta los valores del ángulo de cambio de modo ( $\theta_{cmodo}$ ) para algunos coeficientes de Poisson típicos del suelo. Es destacable la existencia de dos valores por cada coeficiente de Poisson del medio para los que la amplitud de la onda SV reflejada se anula, con excepción de cuando el coeficiente de Poisson toma por valor 0,263, valor para el cual tan solo existe un ángulo que produce el fenómeno descrito.



**Figura 4.8:** Ampliación de la figura 4.7 en el entorno del ángulo crítico para ondas incidentes SV



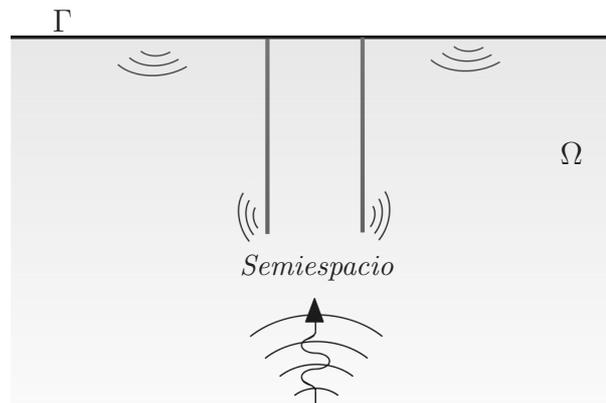
**Figura 4.9:** Variación de los ángulos de cambio de modo y crítico con el coeficiente de Poisson del terreno para ondas incidentes SV

$\nu$	$\kappa$	$\theta_{cmodo}$
0,1	0,667	48,195° y 63,206°
0,2	0,612	52,422° y 61,752°
0,3	0,535	-
0,4	0,408	-

**Cuadro 4.3:** Cuadro resumen de los ángulos de cambio de modo para una onda incidente tipo SV y un conjunto de coeficientes de Poisson del terreno

## 4.6. Implementación del campo incidente en la formulación

La presencia de elementos enterrados en el semiespacio origina fenómenos de reflexión que producen la aparición de un campo de ondas que se superpone al que incide en el lugar bajo estudio. El campo de ondas original se asume que proviene de una fuente lejana, recibiendo la denominación de *campo incidente*  $\mathbf{u}_I$ , mientras que el producido por los fenómenos de reflexión se conoce como *campo difractado*  $\mathbf{u}_R$ . De esta manera, los campos de desplazamientos y tensiones resultantes (*campos totales*) pueden obtenerse por superposición siendo, respectivamente,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_R$  y  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_I + \mathbf{p}_R$ .



**Figura 4.10:** Campos incidente y reflejado para pilotes embebidos en un semiespacio

Así pues, considérese una cimentación pilotada embebida en un semiespacio homogéneo sometida a un tren de ondas armónicas incidentes, tal y como se puede

observar en la figura 4.10. Asíumase que el dominio semiinfinito  $\Omega$  está definido por el contorno  $\Gamma$ . Debe destacarse que la magnitud del campo reflejado disminuye con la distancia debido al amortiguamiento del material y de radiación del suelo y, en consecuencia, no es preciso discretizar el contorno alejado de la cimentación.

De esta manera, puede escribirse la ecuación (3.3) para  $\Omega$  en términos del campo total como:

$$\mathbf{H}^{ss}\mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{ss}\mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{sp_j}\mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{s_j} F_{p_j} = 0 \quad (4.60)$$

Por otro lado, como tanto el campo incidente, como el reflejado y el total satisfacen las ecuaciones de gobierno, la ecuación (3.3) puede escribirse, en términos del campo incidente, como:

$$\mathbf{H}^{ss}\mathbf{u}_I^s - \mathbf{G}^{ss}\mathbf{p}_I^s = 0 \quad (4.61)$$

donde las tensiones sobre la interfase pilote-suelo  $q^{s_j}$  y las fuerzas en las puntas de los pilotes  $F_{p_j}$  no están presentes por existir únicamente en el campo difractado. La sustracción de la ecuación (4.61) en (4.60) da:

$$\mathbf{H}^{ss}\mathbf{u}^s - \mathbf{G}^{ss}\mathbf{p}^s - \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{G}^{sp_j}\mathbf{q}^{s_j} + \sum_{j=1}^{n_p} \delta_j \Upsilon^{s_j} F_{p_j} = \mathbf{H}^{ss}\mathbf{u}_I^s - \mathbf{G}^{ss}\mathbf{p}_I^s \quad (4.62)$$

donde el vector del lado derecho se conoce, ya que las expresiones explícitas de los campos de desplazamientos y tensiones  $\mathbf{u}_I^s$  y  $\mathbf{p}_I^s$  se han obtenido a lo largo del presente capítulo para cada onda incidente. El mismo procedimiento puede seguirse para obtener las ecuaciones MEC (3.4) y (3.6) para las líneas de carga. Por el contrario, la ecuación de elementos finitos (3.23) contiene variables únicamente en el campo difractado y, en consecuencia, no precisa ser reescrita.

De esta manera, los campos de desplazamientos y tensiones del campo incidente obtenidos en este capítulo se convierten en un dato más del problema, formando parte del vector del lado derecho del sistema global de ecuaciones.



# Capítulo 5

## Influencia del tipo de onda y ángulo de incidencia en la respuesta sísmica de estructuras de edificación pilotadas

### 5.1. Introducción

Para la determinación del comportamiento dinámico de estructuras teniendo en cuenta los efectos de interacción suelo-estructura es posible emplear, principalmente, dos metodologías diferentes. La primera se basa en la sustitución del suelo por un conjunto de resortes y amortiguadores que representen su rigidez y su amortiguamiento, respectivamente, denominándose *modelo de subestructuración* y constituyendo un método sencillo y computacionalmente menos exigente que la otra metodología. La segunda, denominada *método directo*, analiza la respuesta del sistema teniendo en cuenta los efectos de interacción suelo-estructura mediante una modelización más precisa y de manera conjunta de los aspectos principales del problema y de sus interacciones mutuas.

A lo largo del presente capítulo se presentan resultados obtenidos haciendo uso de una metodología directa, estudiándose la influencia del ángulo de incidencia y del tipo de onda en la respuesta dinámica de estructuras de edificación cuya cimentación es pilotada, desde el punto de vista de la interacción cinemática, de la deflexión lateral del edificio y del análisis de los esfuerzos que se generan en los pilotes. Estos resultados se presentan tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo.

## 5.2. Influencia del ángulo de incidencia y tipo de onda en la respuesta sísmica de estructuras de edificación pilotadas

### 5.3. Definición del problema

Esta sección se centra en la respuesta dinámica en el dominio de la frecuencia de estructuras pilotadas ante trenes de ondas incidentes con un ángulo genérico. Para ello, se utilizan modelos de una única masa vibrante que, de encontrarse sobre base rígida, corresponderían a sistemas de un único grado de libertad. El modelo puede responder tanto a estructuras que pueden modelarse directamente como sistemas de un grado de libertad (edificios de una única planta, por ejemplo) como a sistemas equivalentes que aproximen el comportamiento de una estructura multimodal según un modo de vibración específico. Recuérdese que, de acuerdo a la teoría clásica de la Dinámica de Estructuras, el comportamiento de un sistema de  $n$  grados de libertad puede expresarse como la suma de  $n$  problemas equivalentes de un solo grado de libertad, cada uno de ellos con propiedades de masa, rigidez y amortiguamiento efectivos correspondientes a un modo de vibración concreto. Distintos autores [35, 36] destacan el hecho de que la interacción suelo-estructura afecta principalmente al modo fundamental de vibración de estructuras de varias plantas, lo que justifica el empleo de esta aproximación.

El comportamiento dinámico de la estructura puede definirse por su período fundamental en base rígida  $T$ , la altura  $h$  de la resultante de las fuerzas de inercia para el primer modo, la masa  $m$  que participa en ese modo y el correspondiente amortiguamiento estructural  $\zeta$  (ver la figura 5.1). La rigidez horizontal de la estructura es  $k = Re[k] = 4\pi^2 m/T^2$ , considerándose amortiguamiento histerético del material, dado por una rigidez compleja del tipo  $k = Re[k](1 + 2i\zeta)$ .

Las estructuras se suponen cimentadas en grupos cuadrados de pilotes embebidos en semiespacios viscoelásticos, tal y como se muestra en la figura 5.1, estando el grupo de pilotes definido por la longitud  $L$  y el diámetro  $d$  de los mismos, la distancia entre los centros de pilotes adyacentes  $s$ , la masa del encepado  $m_o$  y el momento de inercia del encepado respecto a un eje horizontal que pase por su centro de gravedad  $I_o$ . Además,  $b$  es la mitad del ancho de la cimentación.

Si se tienen en cuenta los efectos de interacción suelo-estructura, el comportamiento del sistema puede aproximarse mediante un sistema de cuatro grados de libertad, definidos por el desplazamiento horizontal, vertical y el giro de la cimentación ( $u^c$ ,  $u_z^c$  y  $\phi$ , respectivamente), junto con la deflexión horizontal de la estructura  $u_{deflex}$ . Los giros de encepado y estructura son iguales y los pilares de la superestructura se consideran infinitamente rígidos en dirección axial.

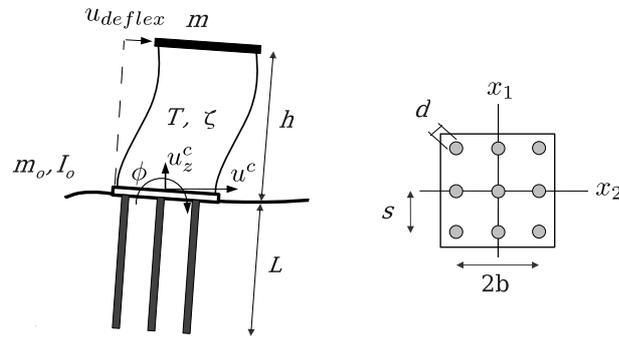


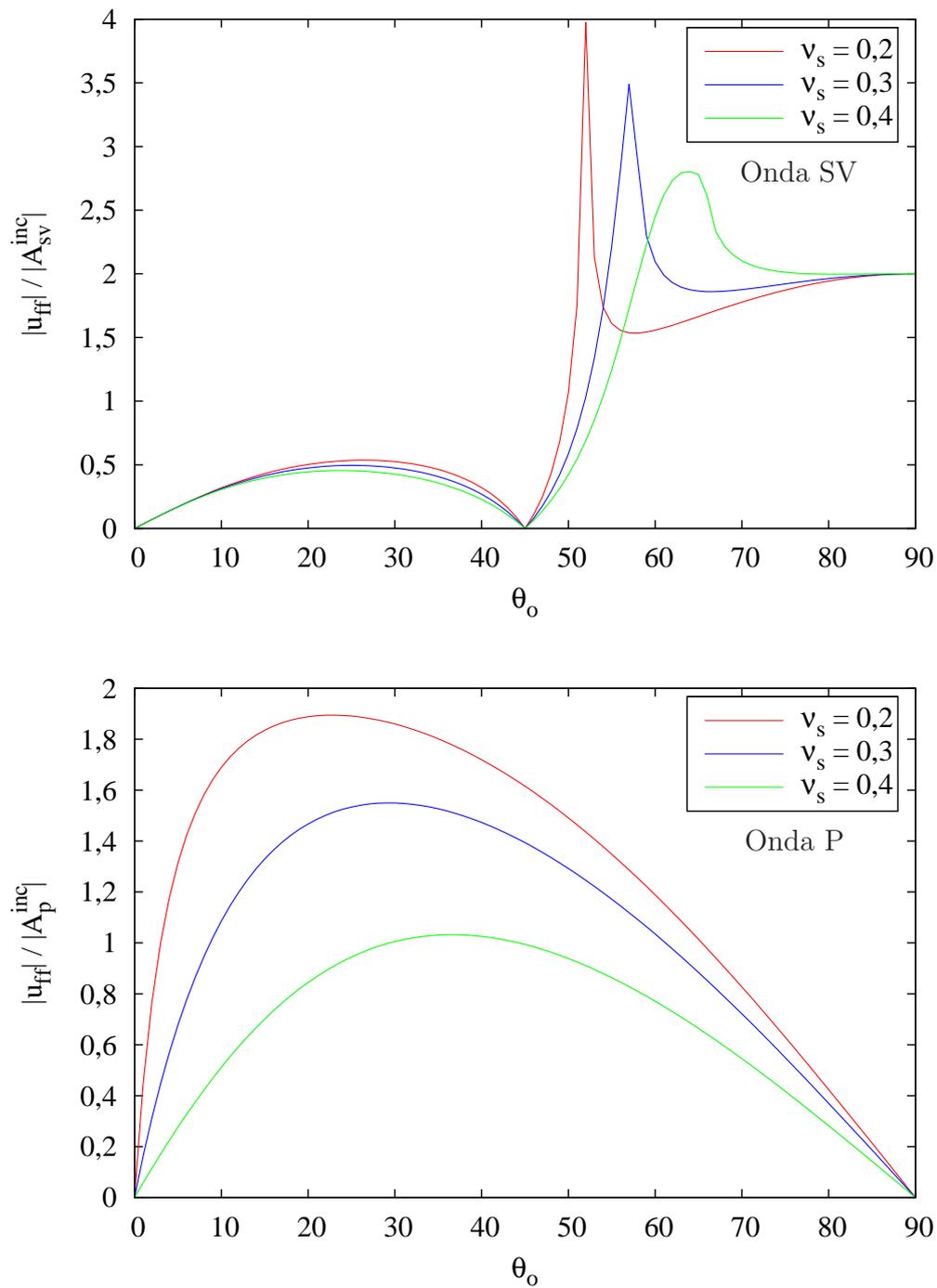
Figura 5.1: Definición del problema

Las propiedades mecánicas y geométricas de cimentación y suelo se definen mediante el coeficiente de amortiguamiento del terreno  $\beta = 0,05$ , la relación entre el módulo de elasticidad del pilote y el suelo  $E_p/E_s = 100$ , el cociente entre las densidades del suelo y del pilote  $\rho_s/\rho_p = 0,7$ , la esbeltez de los pilotes  $L/d = 15$ , el coeficiente de Poisson del suelo  $\nu_s = 0,4$  y la relación entre la separación de los pilotes y su diámetro  $s/d = 5$ .

Por otro lado, los parámetros de interés para definir el comportamiento dinámico de la superestructura son las relaciones de aspecto  $h/b = 2, 3$  y  $4$ , el cociente entre las rigideces de la estructura y del suelo  $h/(T c_s) = 0,3$ , siendo  $c_s$  la velocidad de las ondas de corte en el suelo y el coeficiente de amortiguamiento de la estructura,  $\zeta = 0,05$ . Otros parámetros a emplear son el momento de inercia de la cimentación, que se toma como el 5% del factor  $m h^2$ , la relación entre la masa de la estructura y la masa vibrante del suelo, de valor  $m/4\rho_s b^2 h = 0,2$  y la relación entre la masa de la cimentación y la de la estructura,  $m_o/m = 0,25$ . Los valores tomados para estos tres últimos parámetros se consideran representativos de tipologías estructurales habituales, habiendo sido empleados con anterioridad por otros autores [36–38]. De cualquier modo, la interacción suelo-estructura no es significativamente sensible a su variación (ver [39]).

## 5.4. Variación del desplazamiento de campo libre con el ángulo de incidencia ( $\theta_0$ )

La variación del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre con el ángulo de incidencia en el plano  $x_2 x_3$  resulta interesante de analizar por depender los resultados posteriores de este parámetro. Así, la figura 5.2 presenta el cociente entre el módulo del desplazamiento horizontal de campo libre y la amplitud de la correspondiente onda incidente frente al ángulo  $\theta_0$  cuando inciden ondas SV y P.



**Figura 5.2:** Variación del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre con el ángulo  $\theta_0$  y  $\nu_s$ . Ondas SV y P incidentes

En la gráfica correspondiente a la onda SV incidente se observan variaciones moderadas del valor de los desplazamientos para ángulos de incidencia entre 0 y 45°, ángulos para los que los desplazamientos se anulan. A continuación, los desplazamientos se incrementan drásticamente hasta alcanzar un máximo cuando el ángulo de incidencia coincide con el ángulo crítico, momento en el que descienden hasta alcanzar un valor igual a 2 cuando la incidencia de la onda es vertical.

Por otro lado, cuando la onda que incide es de tipo P, la variación es suave con valores nulos en  $\theta_0 = 0^\circ$  y  $\theta_0 = 90^\circ$ .

Los cuadros 5.1 y 5.2 recogen los valores del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre (divididos entre la amplitud de la onda incidente correspondiente) cuando la onda que incide es de tipo SV o P.

$\theta_0$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$90^\circ$
$ \mathbf{u}_{ff}  /  \mathbf{A}_{sv}^{inc} $	0	0,426	0	0,423	2,449	2,102	2

**Cuadro 5.1:** Cuadro resumen de los valores del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre en el punto de referencia (0,0,0) en función del ángulo  $\theta_0$  de incidencia. Onda SV incidente y  $\nu_s = 0,4$

$\theta_0$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$90^\circ$
$ \mathbf{u}_{ff}  /  \mathbf{A}_p^{inc} $	0	1,005	0,994	0,939	0,771	0,545	0

**Cuadro 5.2:** Cuadro resumen de los valores del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre en el punto de referencia (0,0,0) en función del ángulo  $\theta_0$  de incidencia. Onda P incidente y  $\nu_s = 0,4$

En relación a las ondas SH, el módulo de los desplazamientos horizontales de campo libre es independiente del ángulo  $\theta_0$  de incidencia, valiendo la relación  $|\mathbf{u}_{ff}|/|\mathbf{A}_{sh}^{inc}| = 2$  en todo caso, como puede comprobarse particularizando la ecuación (4.2) al punto (0,0,0) de referencia.

## 5.5. Resultados en el dominio de la frecuencia

### 5.5.1. Factores de interacción cinemática de las cimentaciones empleadas

En este apartado se expondrán las funciones de transferencia en desplazamientos y giros del encepado sin masa y sin edificio (interacción cinemática). El

problema de la determinación de esfuerzos en los miembros de estructuras de cimentación enterradas en problemas de interacción dinámica suelo-estructura es habitual considerarlo como la superposición de dos problemas que tienen lugar de manera simultánea, pero cuyos orígenes están bien diferenciados. Así, los esfuerzos pueden provenir de las fuerzas de inercia que, como consecuencia del movimiento de la superestructura, llegan al elemento de cimentación (interacción inercial). Históricamente, ha sido esta clase de interacción la que más atención ha recibido por parte de la comunidad científica. Sin embargo, el impedimento a la libre deformación del suelo que los miembros de la cimentación imponen produce otra clase de esfuerzos, conocidos como esfuerzos de interacción cinemática, cuya importancia, especialmente en pilotes que atraviesan fronteras entre estratos de diferente rigidez (ver, por ejemplo, [40]), puede ser muy superior a la producida por el problema de interacción inercial. Existen evidencias experimentales que incluyen medidas de campo (ver [41,42]) y estudios de daños en pilotes tras los terremotos de México D.F. (México, 1985) o Kobe (Japón, 1995), que ponen de manifiesto la relevancia de los esfuerzos de interacción cinemática en la práctica. Se pretende en este apartado cuantificar la importancia del ángulo de incidencia en el problema de interacción cinemática, es decir, de cuantificar cómo se modifica el desplazamiento de campo libre al introducir el elemento estructural y someterlo a trenes de ondas con distintos ángulos de incidencia.

El conocimiento de los factores de interacción cinemática permite evaluar tendencias en variables de interés en la superestructura de manera más sencilla. Los resultados se presentan adimensionalizados entre el módulo desplazamiento horizontal de campo libre en el punto de referencia en la figura 5.3 para desplazamientos y en la 5.4 para los giros.

Los resultados en términos de desplazamientos para ondas SV son similares a los obtenidos por Kaynia y Novak en [43], donde las diferencias existentes se justifican por tratarse de problemas con coeficientes de Poisson ligeramente diferentes. Para ondas SH, los resultados se ordenan correspondiéndole valores mayores a las ondas de incidencia más vertical, disminuyendo al hacerse la onda más rasante. Por último, la influencia del ángulo de incidencia en factores de interacción cinemática en desplazamientos para ondas P incidentes es muy escasa, siendo los resultados muy similares para todos los ángulos.

Ocurre un fenómeno en los factores de interacción cinemática en giros cuando la onda incidente es una SV. Los giros para  $\theta_0 = 30^\circ$  y  $\theta_0 = 50^\circ$  (ángulos subcríticos) son muy superiores a los que se obtienen para el resto de ángulos de incidencia. Ello se debe, en parte, al menor valor del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre para tales ángulos de incidencia. Este fenómeno tendrá una gran importancia en el comportamiento del sistema con superestructura (apartado 5.5.3). Para ondas SH, la tendencia observada se debe al hecho de que, cuando la onda posee incidencia vertical, los pilotes son empujados de modo síncrono hacia una

cierta dirección a unas profundidades y hacia esa misma dirección sólo que en sentido contrario a otras, lo que provoca el giro de la cimentación. Sin embargo, al hacerse la onda más rasante, el empuje sobre los pilotes pierde el mencionado sincronismo, de modo que se producen interferencias en los desplazamientos que provocan, a su vez, que el giro total en estas circunstancias se vea reducido frente al caso vertical. Por último, para ondas P, los giros toman valores muy parecidos para los ángulos de incidencia analizados, conforme con lo concluido en [43] para grupos de  $4 \times 4$  pilotes.

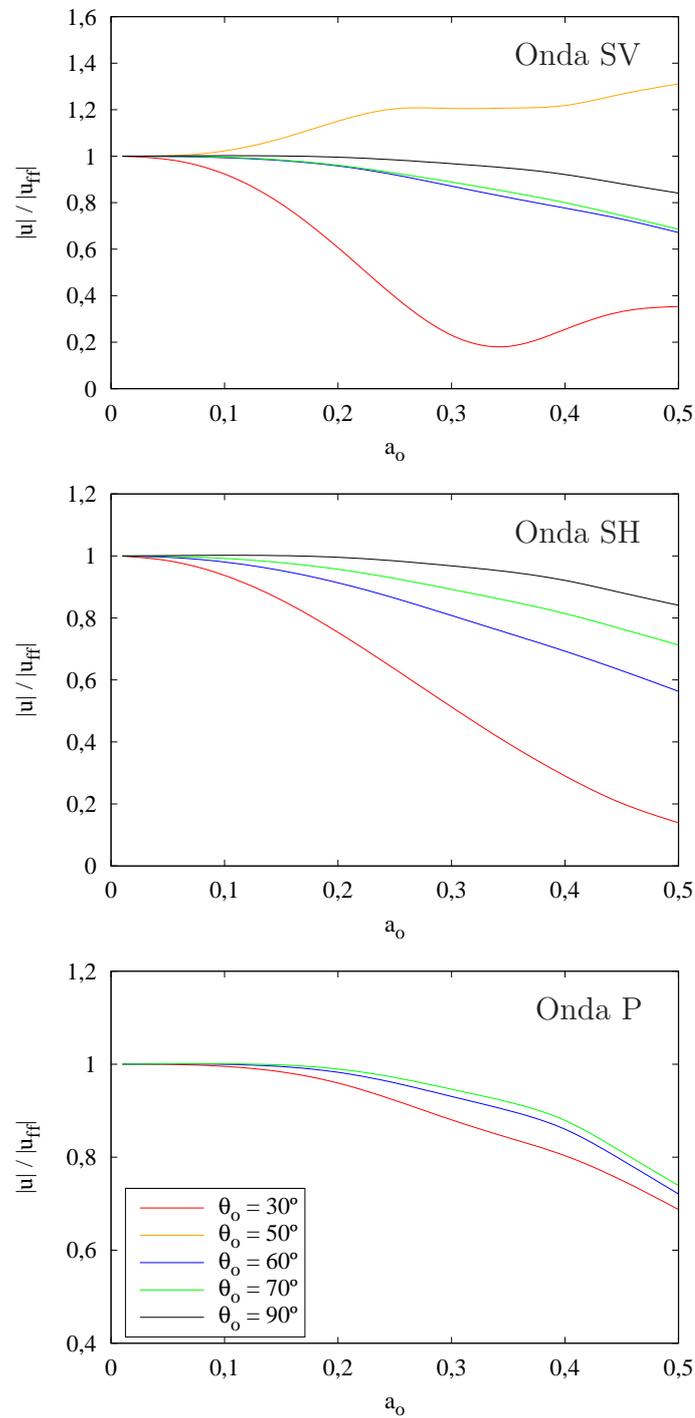
### 5.5.2. Funciones de transferencia en desplazamientos y giros en los encepados

Mostrados los factores de interacción cinemática de las cimentaciones, es momento de ocuparse de las funciones de transferencia en desplazamientos y giros cuando se considera el problema de la cimentación con la superestructura.

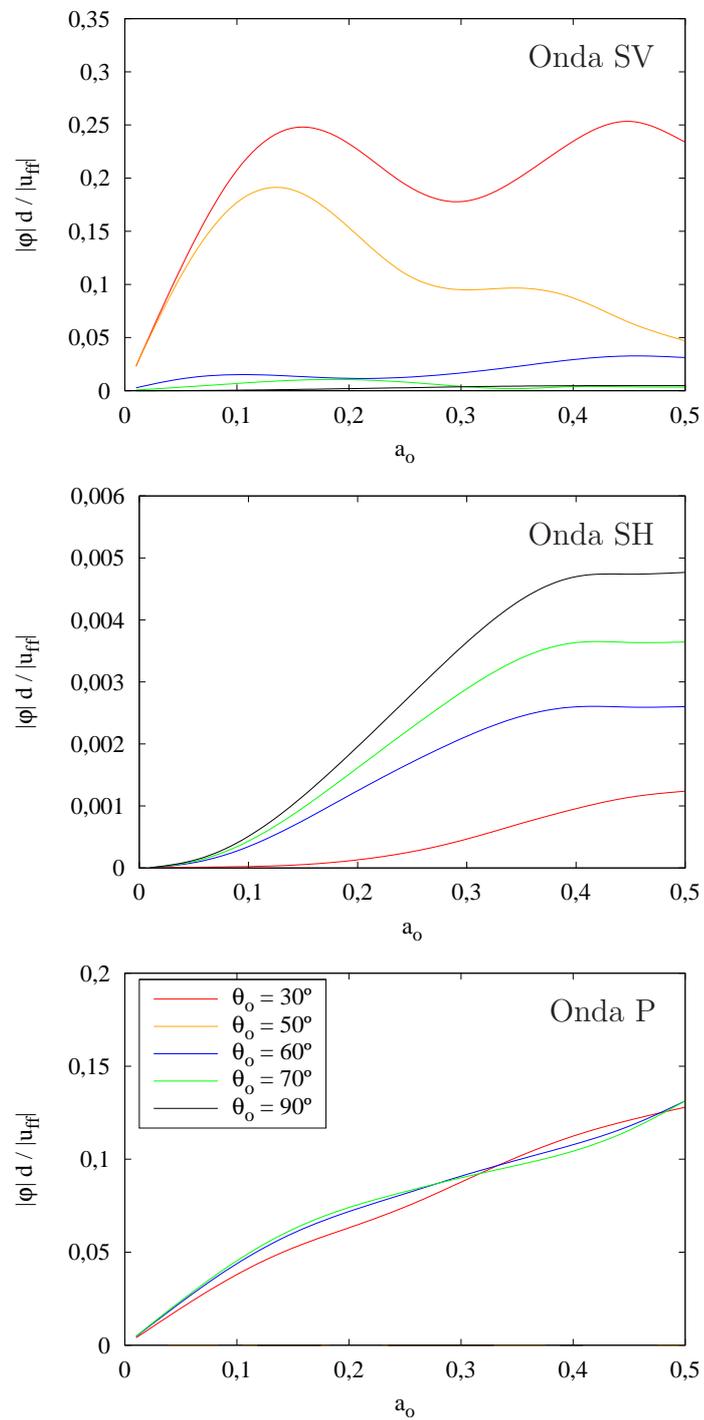
Los resultados se pueden encontrar, para las distintas relaciones de aspecto  $h/b$ , en las figuras 5.5, 5.7 y 5.9 para los desplazamientos y en 5.6, 5.8 y 5.10 para los giros.

Los resultados en desplazamientos presentan comportamientos similares con independencia de la onda incidente, de su ángulo de incidencia o de la relación de aspecto de la superestructura. En todos los casos las gráficas presentan un máximo en el entorno de la frecuencia fundamental en base flexible del edificio, seguido de una caída en los valores y una estabilización a altas frecuencias. El comportamiento a altas frecuencias difiere según el tipo de onda incidente, con valores muy semejantes para cualquier ángulo de incidencia en el caso de ondas P y con diferencias sustanciales cuando la onda incidente es de tipo SH. En relación a las ondas SV, el comportamiento es similar al que se presenta cuando inciden ondas P, con la excepción de las incidencias de  $30^\circ$  y  $50^\circ$ , que presentan, en todos los casos, una tendencia diferente. En concreto, el máximo en el entorno de la frecuencia fundamental es mucho mayor para  $\theta_0 = 30^\circ$ , con valores inferiores a los del resto de ángulos de incidencia a altas frecuencias. Por otra parte, cuando el ángulo de incidencia es de  $50^\circ$ , los valores a altas frecuencias son ligeramente superiores a los que se obtienen para ángulos de incidencia supercríticos.

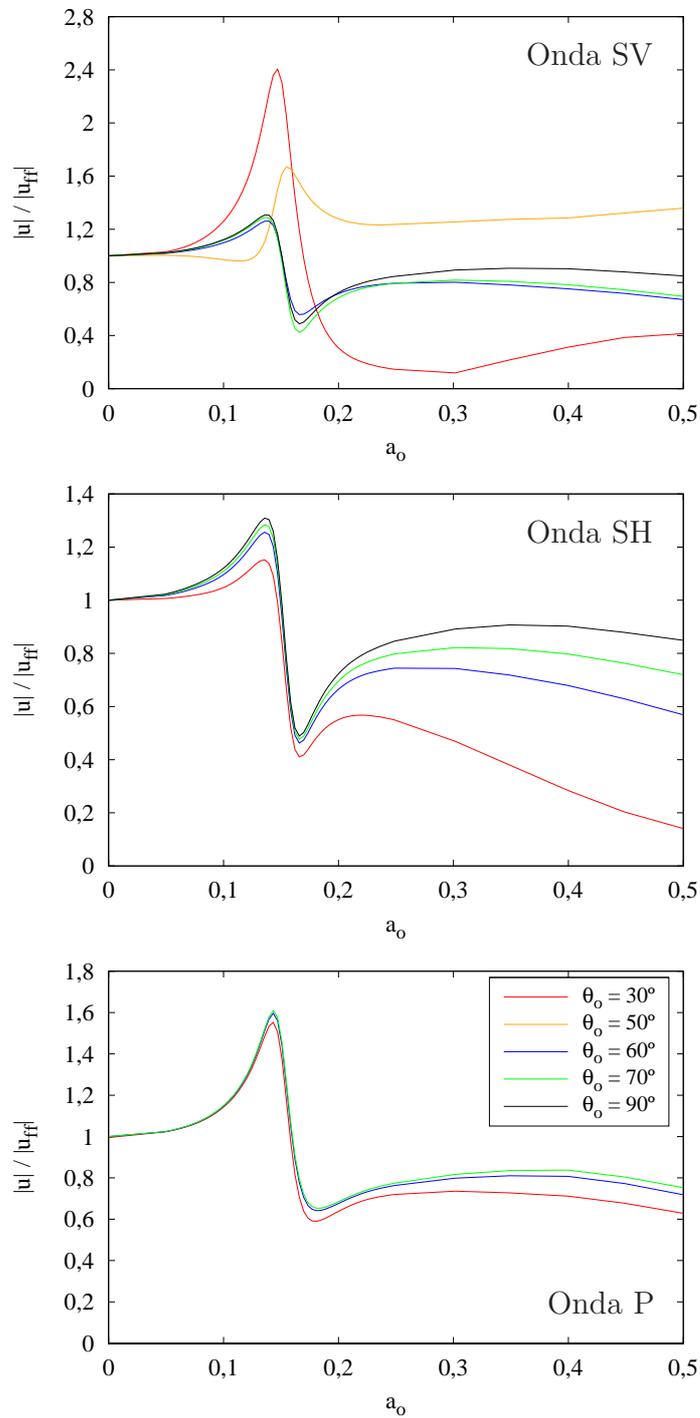
En relación a los resultados en giros, la influencia del ángulo de incidencia para ondas SH y P incidentes es muy escasa para las tres relaciones de aspecto estudiadas. Por otra parte, cuando la onda incidente es de tipo SV, existen semejanzas con los resultados obtenidos en desplazamientos, en tanto en cuanto que los máximos en el entorno de la frecuencia fundamental en base flexible del edificio se ven incrementados para ángulos de incidencia de  $30^\circ$  y  $50^\circ$ . Sin embargo, es en esta ocasión el ángulo de  $30^\circ$  el que se presenta valores mayores, no sólo en el entorno de la frecuencia fundamental, sino también a altas frecuencias.



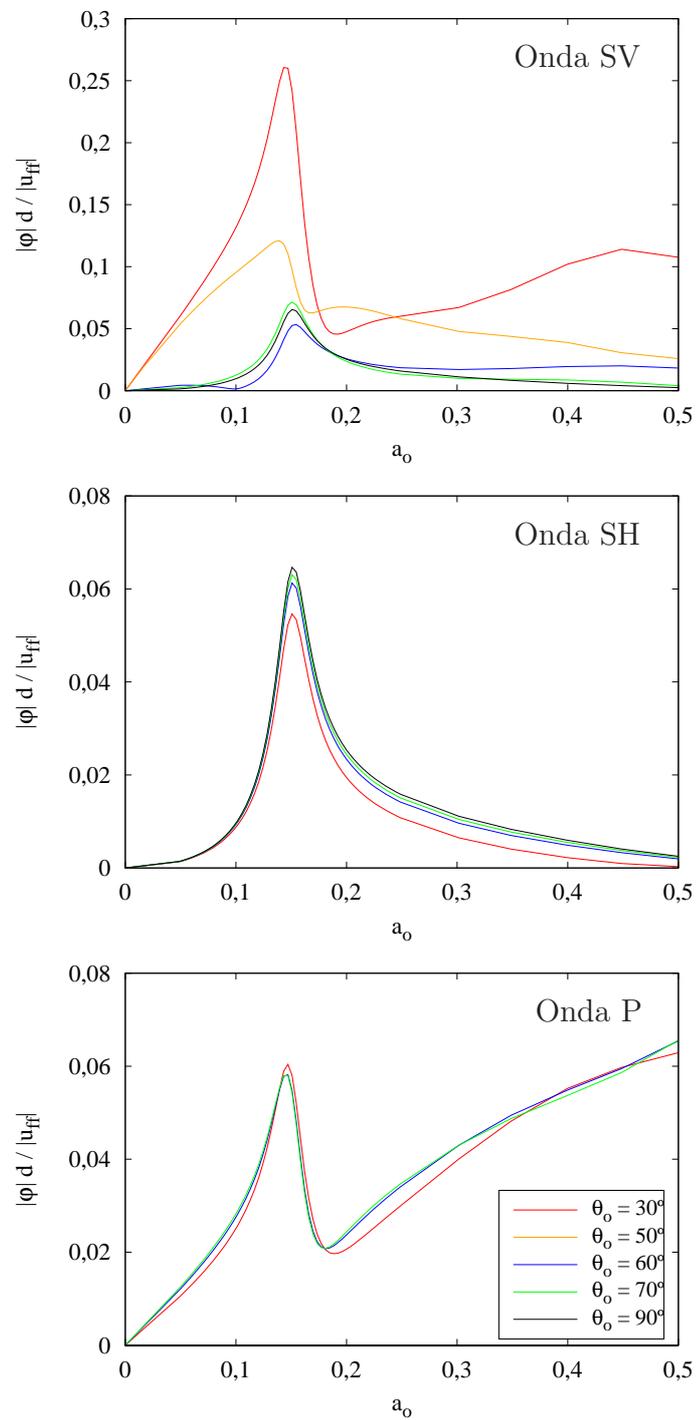
**Figura 5.3:** Factores de interacción cinemática en desplazamientos para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P



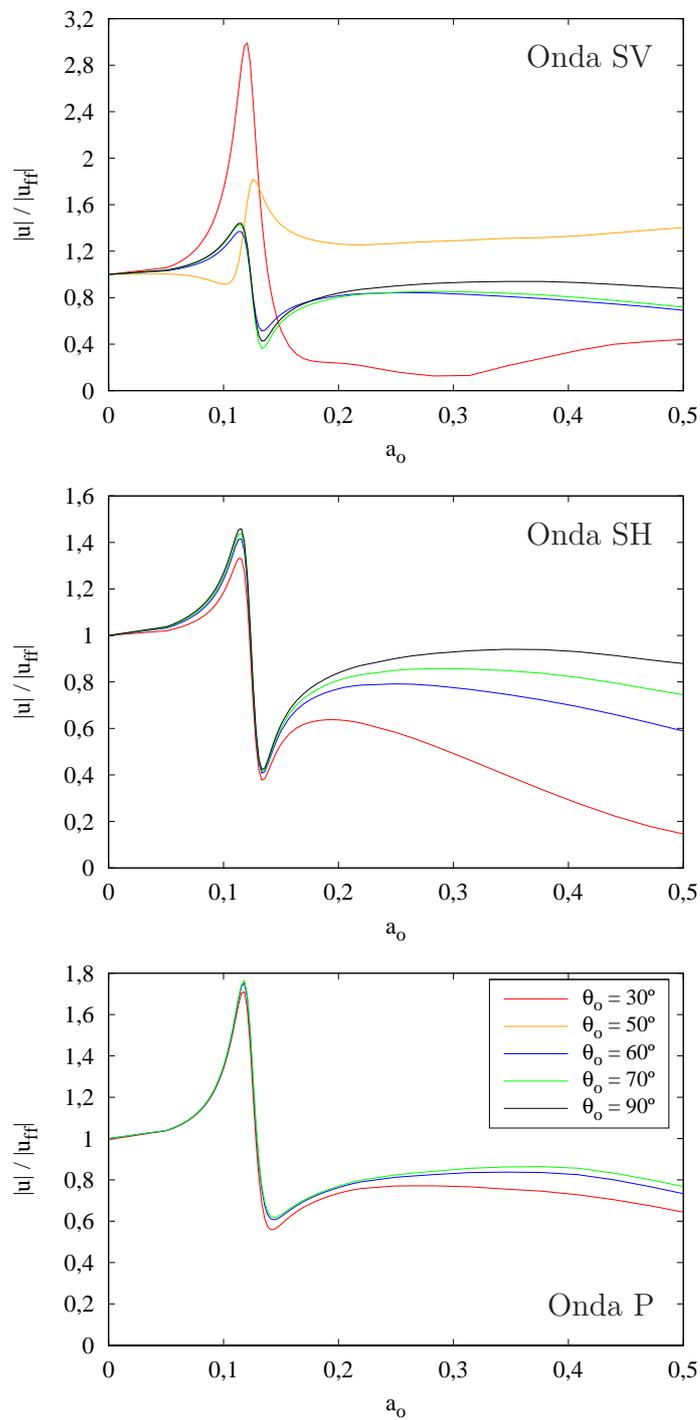
**Figura 5.4:** Factores de interacción cinemática en giros para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P



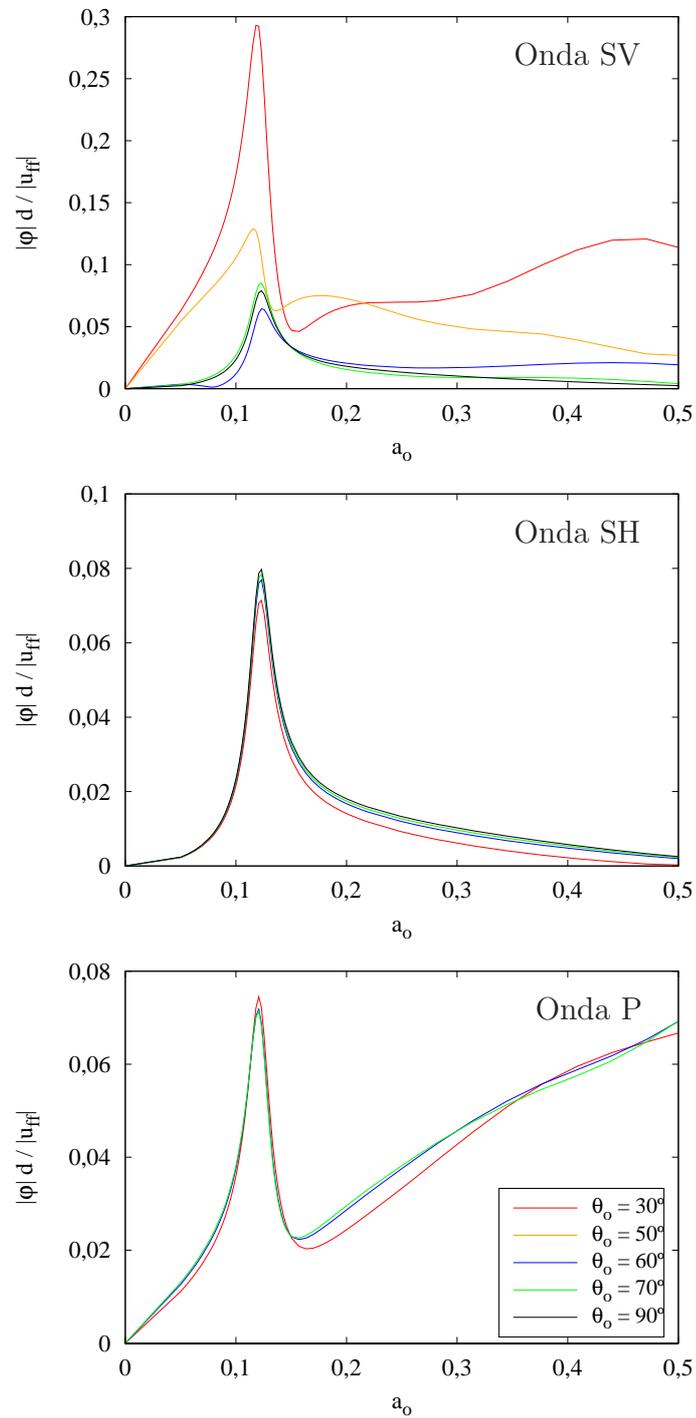
**Figura 5.5:** Funciones de transferencia de desplazamientos en el encepado para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Relación de aspecto  $h/b = 2$



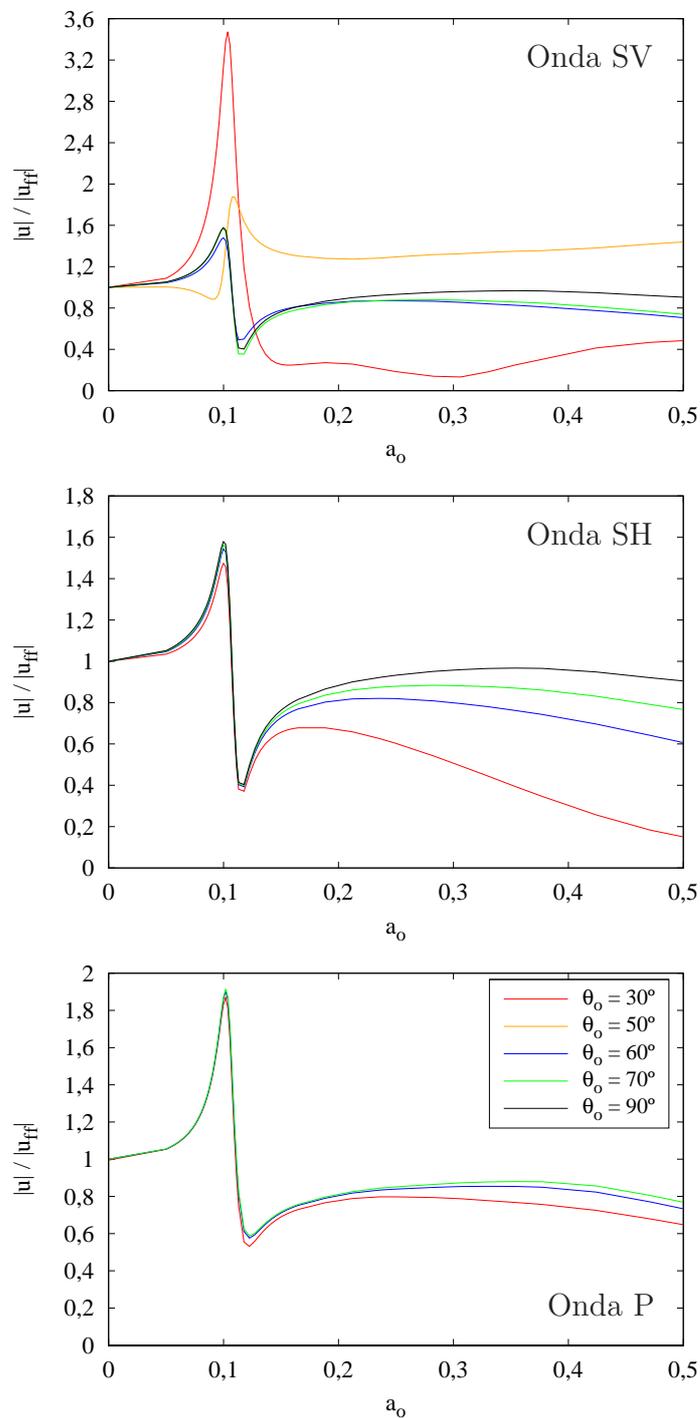
**Figura 5.6:** Funciones de transferencia de giros en el encepado para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Relación de aspecto  $h/b = 2$



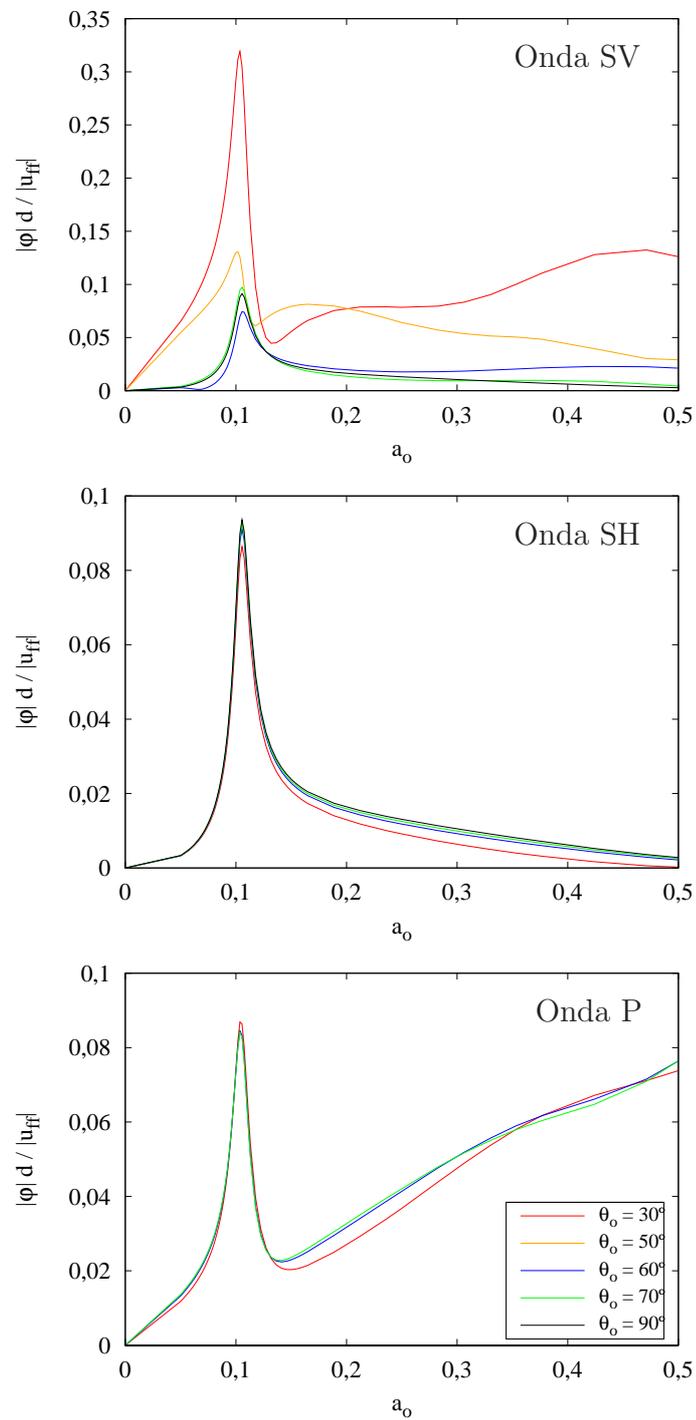
**Figura 5.7:** Funciones de transferencia de desplazamientos en el encepado para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Relación de aspecto  $h/b = 3$



**Figura 5.8:** Funciones de transferencia de giros en el encepado para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Relación de aspecto  $h/b = 3$



**Figura 5.9:** Funciones de transferencia de desplazamientos en el encepado para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Relación de aspecto  $h/b = 4$



**Figura 5.10:** Funciones de transferencia de giros en el encepado para grupos de pilotes sometidos a ondas SV, SH y P. Relación de aspecto  $h/b = 4$

### 5.5.3. Deflexión lateral del edificio

Existen diversas variables de interés a la hora de analizar la respuesta dinámica de la superestructura. Tomar la deflexión lateral del edificio permite establecer relaciones directas con magnitudes físicas de importancia de cara al diseño estructural del edificio. Puede definirse la deflexión lateral del edificio en términos de las variables presentadas en la figura 5.1 como:

$$u_{deflex} = u - u^c - \phi h \quad (5.1)$$

con  $u$  el desplazamiento horizontal total. Puede demostrarse (ver [44]) que el producto de ese valor por la rigidez del sistema proporciona el cortante en la base:

$$F = k u_{deflex} \quad (5.2)$$

Se puede definir una variable denominada factor de amplificación dinámica como la relación entre el desplazamiento producido por una acción dinámica y su valor en el caso de una acción estática de la misma magnitud, de modo que:

$$D = \frac{u_{deflex}}{u_s} \quad (5.3)$$

siendo  $D$  el factor de amplificación dinámica y  $u_s$  el desplazamiento debido a la fuerza estática. El desplazamiento debido a la carga estática puede escribirse como  $F_{equiv} = k u_s$ , quedando el factor de amplificación dinámica:

$$D = \frac{u_{deflex}}{u_s} = \frac{u_{deflex}}{F_{equiv}/k} = \frac{k u_{deflex}}{F_{equiv}} \quad (5.4)$$

Si se recuerda la definición de la frecuencia natural de la estructura:

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad k = \Omega^2 m \quad (5.5)$$

y si se expresa la acción estática equivalente sobre la masa de un sistema de un grado de libertad como:

$$F_{equiv} = \omega^2 m u_{ff} \quad (5.6)$$

siendo  $u_{ff}$  el desplazamiento en la base, el factor de amplificación dinámica puede ponerse:

$$D = \frac{k u_{deflex}}{F_{equiv}} = \frac{\Omega^2 m u_{deflex}}{\omega^2 m u_{ff}} = \frac{\Omega^2 u_{deflex}}{\omega^2 u_{ff}} \quad (5.7)$$

El cociente adimensional entre  $u_{deflex}$  y el desplazamiento en la base  $u_{ff}$  toma por valor:

$$\frac{u_{deflex}}{u_{ff}} = \frac{\omega^2 D}{\Omega^2} \quad (5.8)$$

Por lo tanto, el conocimiento de  $u_{deflex}$  en relación al desplazamiento en la base (que se corresponde con el desplazamiento horizontal de campo libre) permite obtener tanto el cortante en la base de la estructura (dado por la ecuación (5.2)) como el factor de amplificación dinámica  $D$  sin más que multiplicar en el primer caso por la rigidez  $k$  de la estructura y por el cuadrado del cociente entre la frecuencia natural de la estructura y la frecuencia de excitación en el segundo. El cortante en la base es un parámetro de aplicación inmediata de cara al cálculo y comprobación de una estructura de un grado de libertad, mientras que el factor de amplificación dinámica tiene un uso bastante frecuente a la hora de expresar cuán desfavorable es una determinada acción dinámica en relación a la misma acción, sólo que aplicada de modo estático.

Las figuras 5.11, 5.12 y 5.13 muestran las variaciones con la frecuencia del cociente entre los módulos de la deflexión lateral del edificio y el correspondiente módulo del desplazamiento horizontal de campo libre para las tres relaciones de aspecto  $h/b$  estudiadas.

Las conclusiones que pueden extraerse son de aplicación, para cada onda, a cualquiera de las tres relaciones de aspecto. Así, cuando la onda que incide es de tipo P, las gráficas presentan valores muy similares para frecuencias bajas e intermedias, incrementándose las diferencias a altas frecuencias. Se puede observar que las curvas poseen un máximo en torno a la frecuencia fundamental del edificio en base flexible, la cual varía con la relación de aspecto  $h/b$ .

Las diferencias enumeradas son más notables cuando la onda incidente es una SH, aumentando la deflexión conforme la onda se vuelve más vertical. Existe gran similitud en los resultados para frecuencias bajas, comenzando a diferir en el entorno de la frecuencia fundamental en base flexible.

Los resultados que se obtienen cuando la onda que incide es una SV son dignos de análisis. Cuando  $\theta_0$  es superior a  $50^\circ$ , los resultados siguen los patrones comentados. Sin embargo, cuando el ángulo de incidencia es inferior a ese valor, el comportamiento cambia. Atendiendo a la figura 5.2, puede comprobarse que, para una amplitud de la onda incidente unitaria, el valor del módulo del desplazamiento horizontal de campo libre para  $\theta_0 = 30^\circ$  y  $\theta_0 = 50^\circ$  es del orden de la cuarta o la quinta parte que para los otros casos. En la figura 5.3 puede observarse que el desplazamiento horizontal en relación al de campo libre es menor para los casos de  $\theta_0 = 30^\circ$  y  $\theta_0 = 50^\circ$  que para el resto. Sin embargo, los giros experimentados por el encepado para esos ángulos de incidencia son entre 10 y 12 veces mayores que los que el citado encepado sufre para otros ángulos de incidencia. Como, según la ecuación (5.1), la deflexión lateral del edificio depende del giro, se justifica que ésta tome los valores mayores en esos casos.

Se presentan dos casos de interés por la manera escogida de adimensionalizar los resultados cuando la onda que incide es una de tipo SV. Así, cuando  $\theta_0$  adquiere por valor  $45^\circ$ , el módulo del desplazamiento horizontal de campo libre se anula (figura 5.2), lo que hace que, si se desearan presentar resultados cuando  $\theta_0$  valiese  $45^\circ$ , debería buscarse otro modo de adimensionalizarlos. Algunas posibilidades pasan por dividir entre el módulo del desplazamiento horizontal de campo libre cuando la onda incide de modo vertical o por emplear cualquier otra variable de valor no nulo en ese caso.

Por otro lado, cuando el ángulo de incidencia es igual al crítico, el módulo del desplazamiento horizontal de campo libre es máximo. Además, existen grandes diferencias en su valor para ángulos ligeramente subcríticos y supercríticos, lo que provoca que existan importantes cambios en las respuestas para dos ángulos de incidencia muy próximos por encima y por debajo del ángulo crítico.

#### 5.5.4. Esfuerzos en los pilotes

Otras variables de interés de cara a la cuantificación de la respuesta dinámica de estructuras de edificación pilotadas sometidas a ondas que inciden con un ángulo genérico son los esfuerzos que aparecen en los pilotes. Las figuras 5.14 a 5.22 muestran los esfuerzos axiales, cortantes y momentos flectores dinámicos en dos puntos a distintas profundidades de cuatro pilotes del grupo para el problema de interacción cinemática cuando inciden ondas de tipo P, SH y SV con ángulos genéricos (30, 60 y 70 grados para ondas P; 30, 60, 70 y 90 grados para ondas SH y 30, 50, 60, 70 y 90 grados para ondas SV). Por otra parte, se muestran en las figuras 5.23 a 5.49 los resultados correspondientes al problema completo de encepado con masa y superestructura para esbelteces  $h/b$  de 2, 3 y 4. En relación a los puntos de estudio, se analiza el punto de unión de los pilotes al encepado, de gran importancia para su diseño resistente, así como un punto situado a una distancia  $L/5$  de su extremo superior. En todos los casos, las escalas empleadas para la representación de los resultados en el punto a mayor profundidad son inferiores a las usadas para la cabeza de los pilotes.

Como ocurría en las funciones de transferencia de los encepados presentadas para  $a_0$  de 0 a 0,5, la tendencia general de los resultados es la de incrementar sus valores con la esbeltez  $h/b$ , con un máximo en el entorno de la frecuencia fundamental en base flexible del edificio. La tendencia a medias y altas frecuencias es la de aumentar los esfuerzos, existiendo algunos (como, por ejemplo, los cortantes para ondas P incidentes o los momentos flectores para ondas SH) cuyo crecimiento con la frecuencia parece no estar acotado, por lo que a juicio de las figuras expuestas, podría pensarse que la tendencia ascendente se presenta para cualquier frecuencia de excitación. La figura 5.50 representa, para el problema de ondas SH de incidencia vertical y relación de aspecto  $h/b = 2$ , la evolución en frecuencia de

los momentos flectores del problema completo y del caso de interacción cinemática en exclusiva en los cuatro pilotes estudiados del grupo hasta una frecuencia adimensional  $a_o = 1$ . Se observa que el crecimiento se acota a altas frecuencias, con la existencia de un máximo asociado a un fenómeno de resonancia de un modo de vibración horizontal del sistema completo. Además, los momentos flectores del problema de interacción cinemática tienden a asemejarse a los totales cuando la frecuencia de excitación aumenta.

Un análisis de interés es el de los esfuerzos axiales en los pilotes cuando la onda que incide es una SH. En ese caso, los pilotes centrales se encuentran totalmente descargados a nivel de axiles debidos a las acciones dinámicas (recuérdese que en todos los casos las figuras representan exclusivamente los esfuerzos dinámicos sobre los elementos de cimentación, a los que habría que sumar la correspondiente parte estática a fin de obtener los esfuerzos totales), distribuyéndose el total de la carga dinámica entre los pilotes extremos. Esto se debe a que, en estas circunstancias, el desplazamiento vertical del centro de gravedad del encepado es nulo, y éste gira en torno al eje formado por los pilotes centrales, lo que provoca que éstos se encuentren descargados en cuanto a esfuerzos axiales dinámicos, siendo los extremos los que interactúan con el suelo, generando los esfuerzos que pueden observarse en las correspondientes figuras.

El fenómeno descrito en factores de interacción cinemática para las ondas SV y ángulos de  $30^\circ$  y  $50^\circ$  también tiene lugar en los esfuerzos. Los esfuerzos se incrementan notablemente para ángulos ligeramente subcríticos, teniendo lugar variaciones de los valores que sólo pueden comprenderse recordando que, en estos casos, se hace precisa la aparición de una onda de superficie para el cumplimiento de las condiciones de contorno del problema elastodinámico.

Los esfuerzos en el punto situado a  $L/5$  del extremo superior de los pilotes son netamente inferiores a los que existen en su cabeza. Es conocido que, en semiespacios homogéneos como el estudiado, los esfuerzos disminuyen rápidamente con la profundidad, como se aprecia en los resultados mostrados en [39], donde se concluye que la variación de los esfuerzos a lo largo de los pilotes es prácticamente exponencial, conclusión que se confirma en el presente trabajo para incidencias no verticales.

Otro estudio de interés consiste en el análisis del reparto de carga entre los pilotes. En general, a frecuencias bajas los pilotes extremos soportan un esfuerzo cortante mayor por ser los que encuentran mayor impedimento en su movimiento.

Por último, destacar que el ángulo de incidencia posee una gran influencia en la magnitud de los esfuerzos generados. De esta manera, la suposición de incidencia vertical no tiene por qué ser la que produzca los mayores esfuerzos en los elementos de la cimentación. A altas frecuencias la influencia del ángulo de incidencia es más patente en la gran mayoría de los casos analizados, con la única excepción notable de los esfuerzos axiales cuando la onda incidente es de tipo SH.

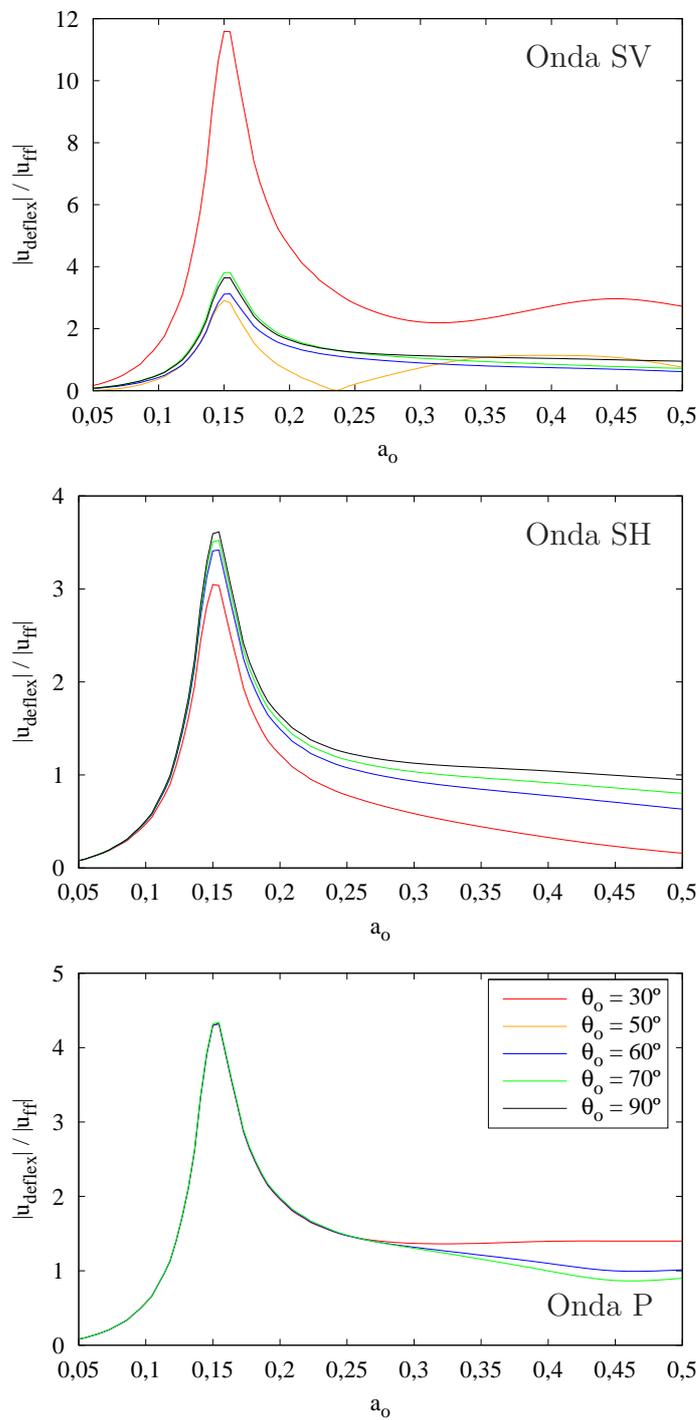


Figura 5.11: Deflexión lateral del edificio. Relación de aspecto  $h/b = 2$

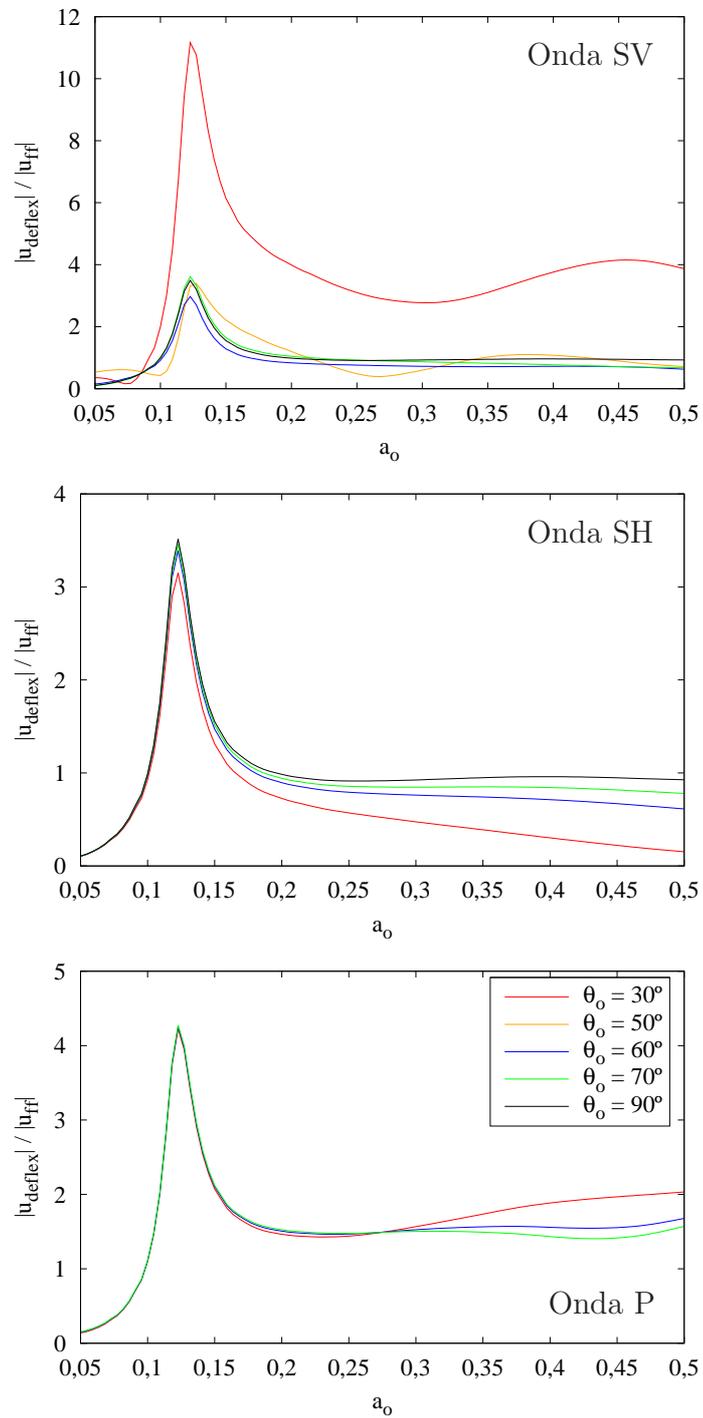


Figura 5.12: Deflexión lateral del edificio. Relación de aspecto  $h/b = 3$

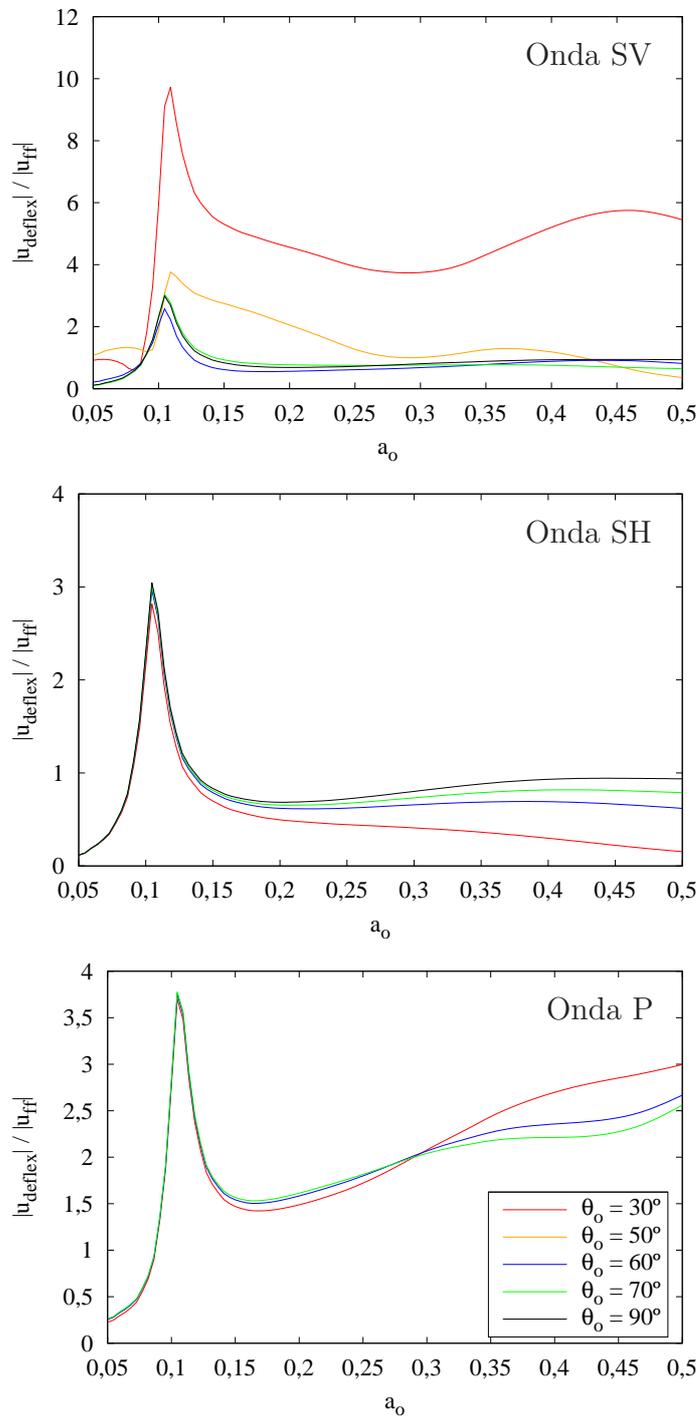


Figura 5.13: Deflexión lateral del edificio. Relación de aspecto  $h/b = 4$

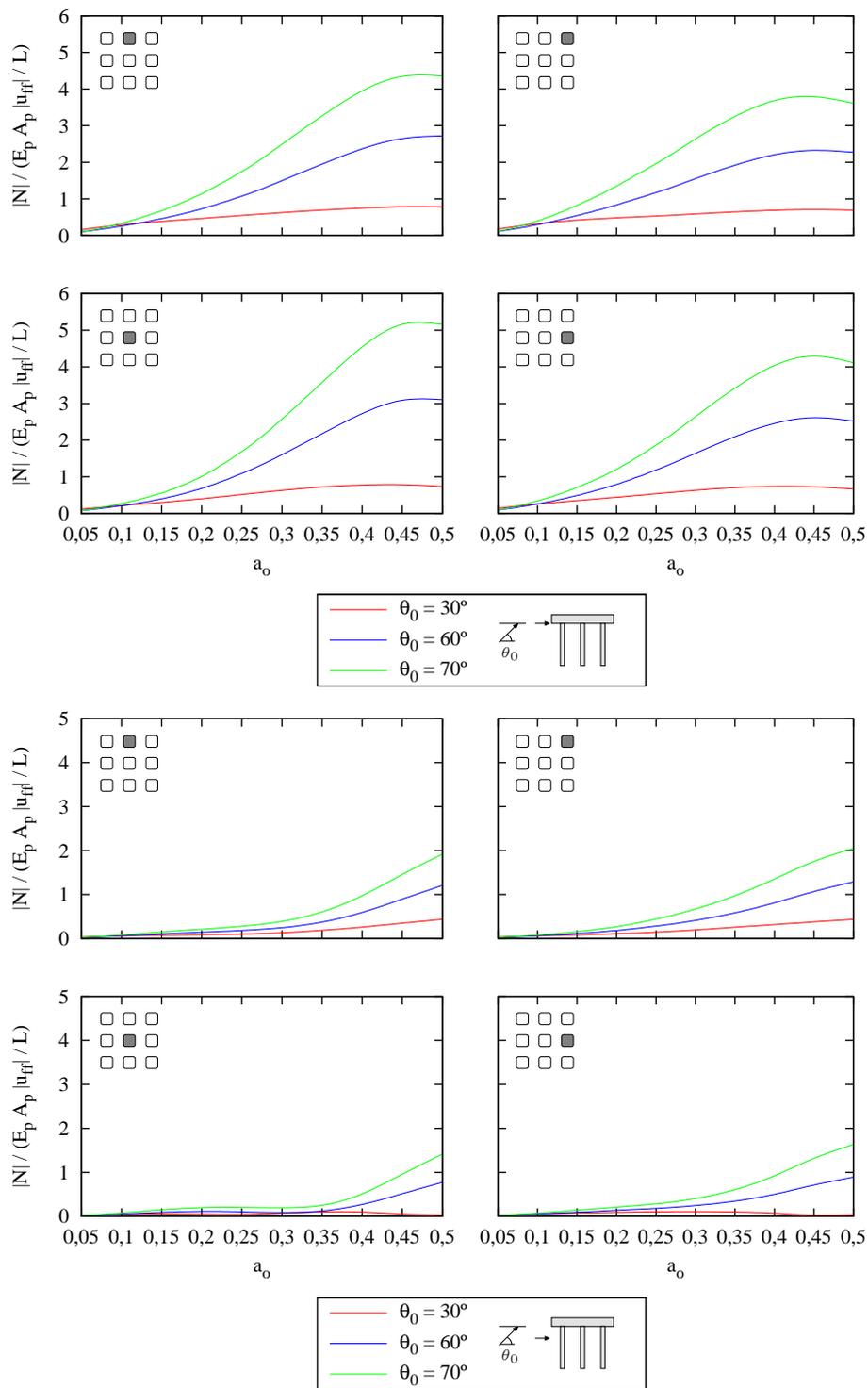


Figura 5.14: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda  $P$ , encepado sin superestructura

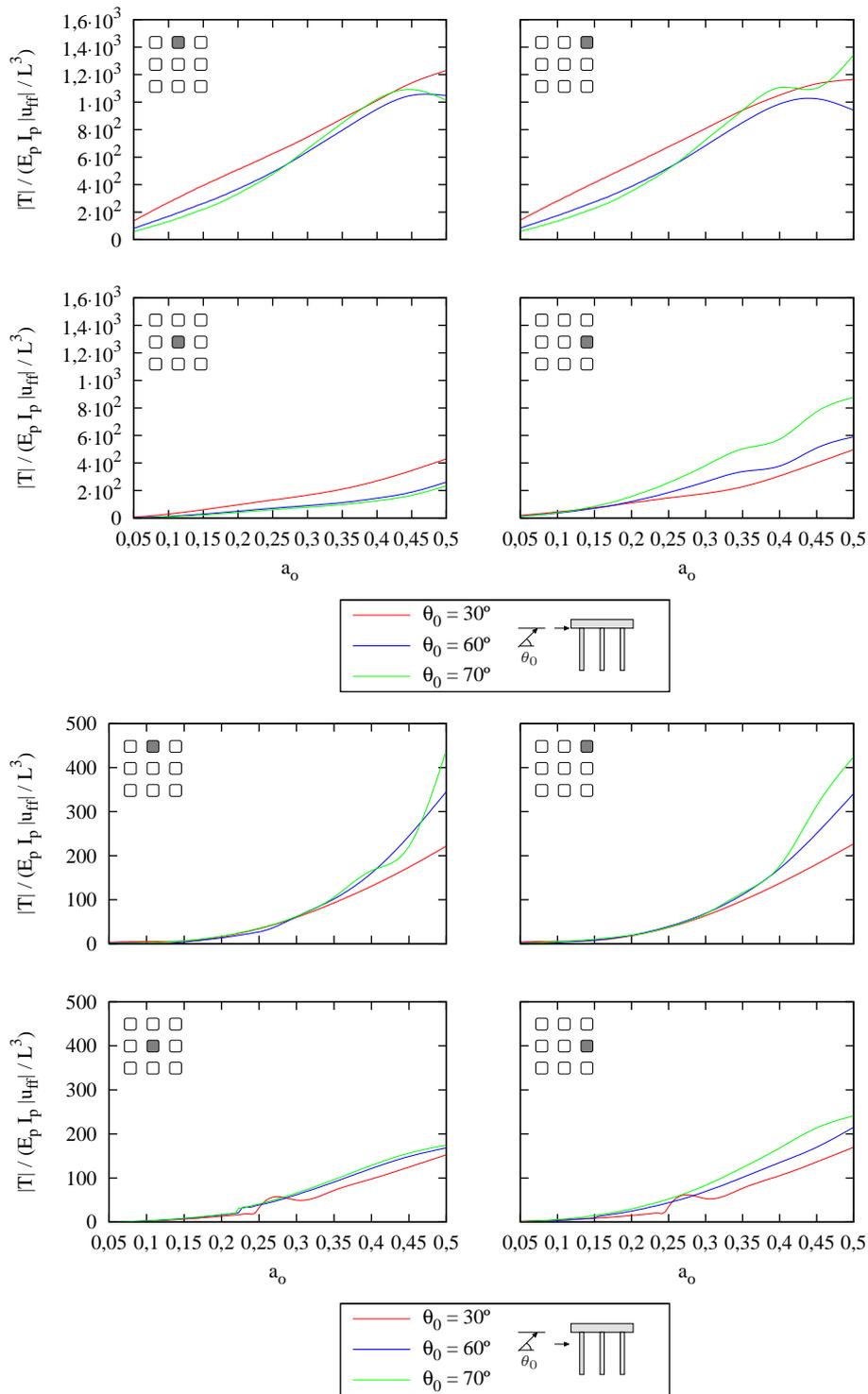


Figura 5.15: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda  $P$ , encepado sin superestructura

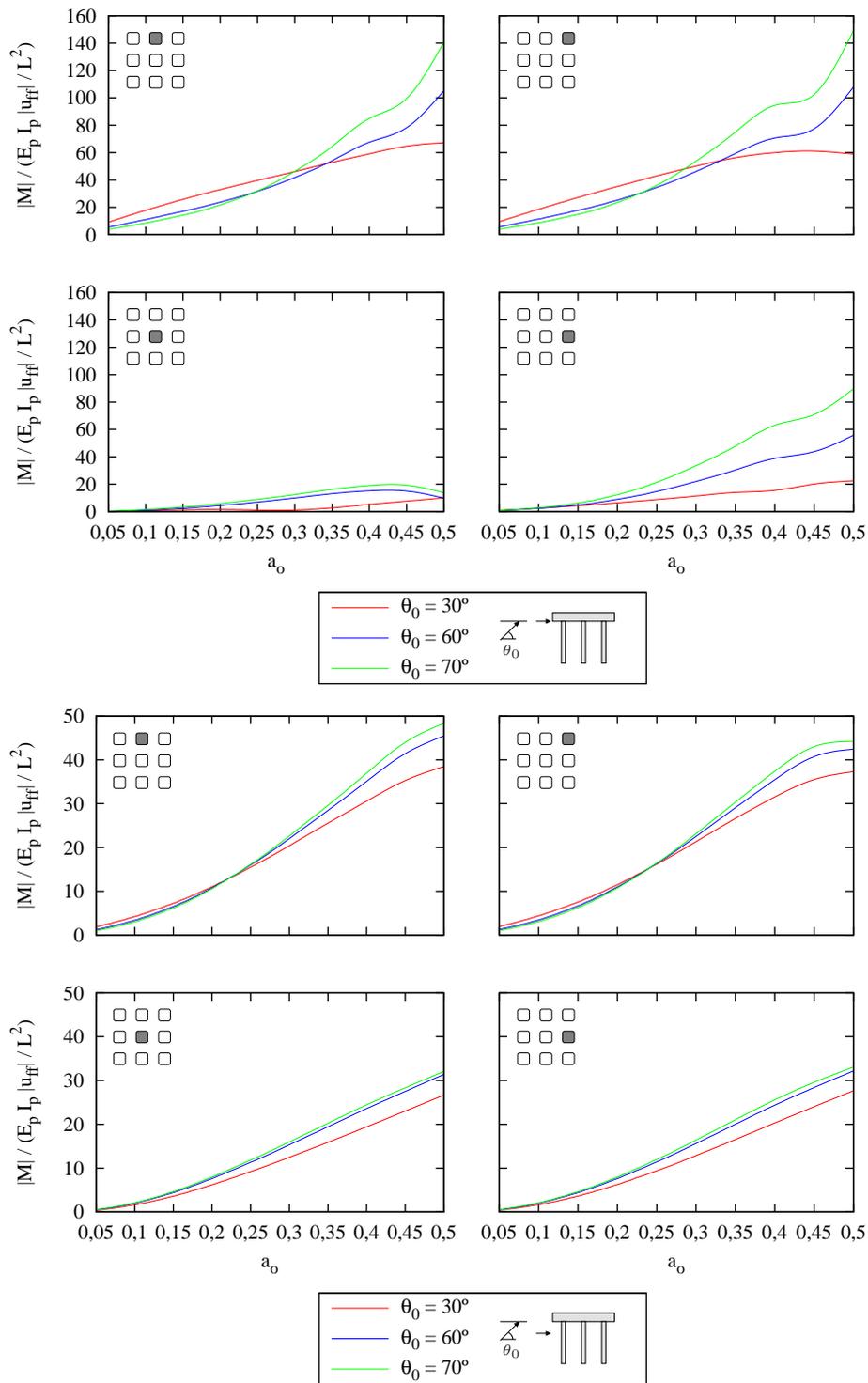


Figura 5.16: Momentos flectores en los pilotes. Onda  $P$ , encepado sin superestructura

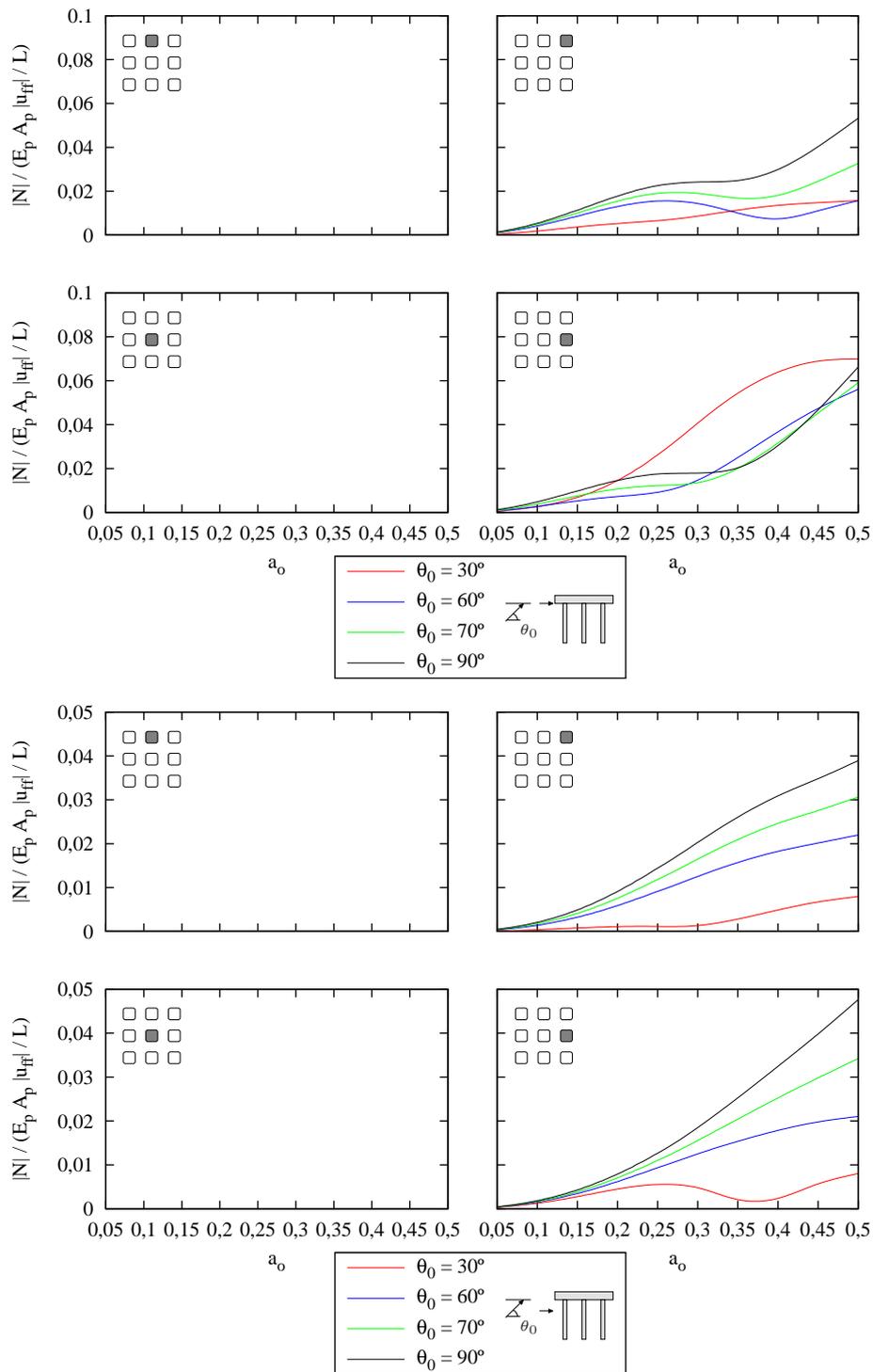


Figura 5.17: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SH, encepado sin superestructura

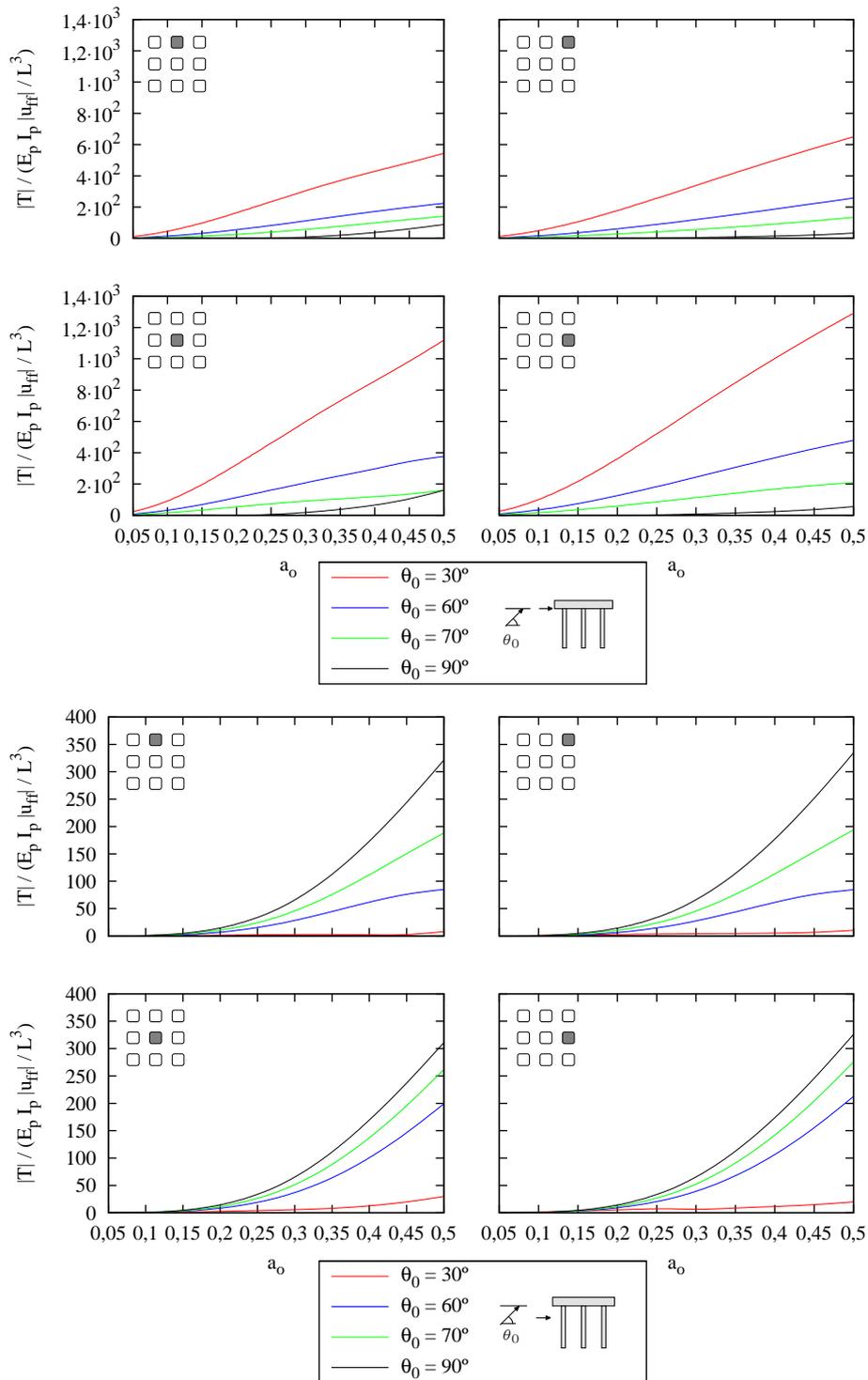


Figura 5.18: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda **SH**, encepado sin superestructura

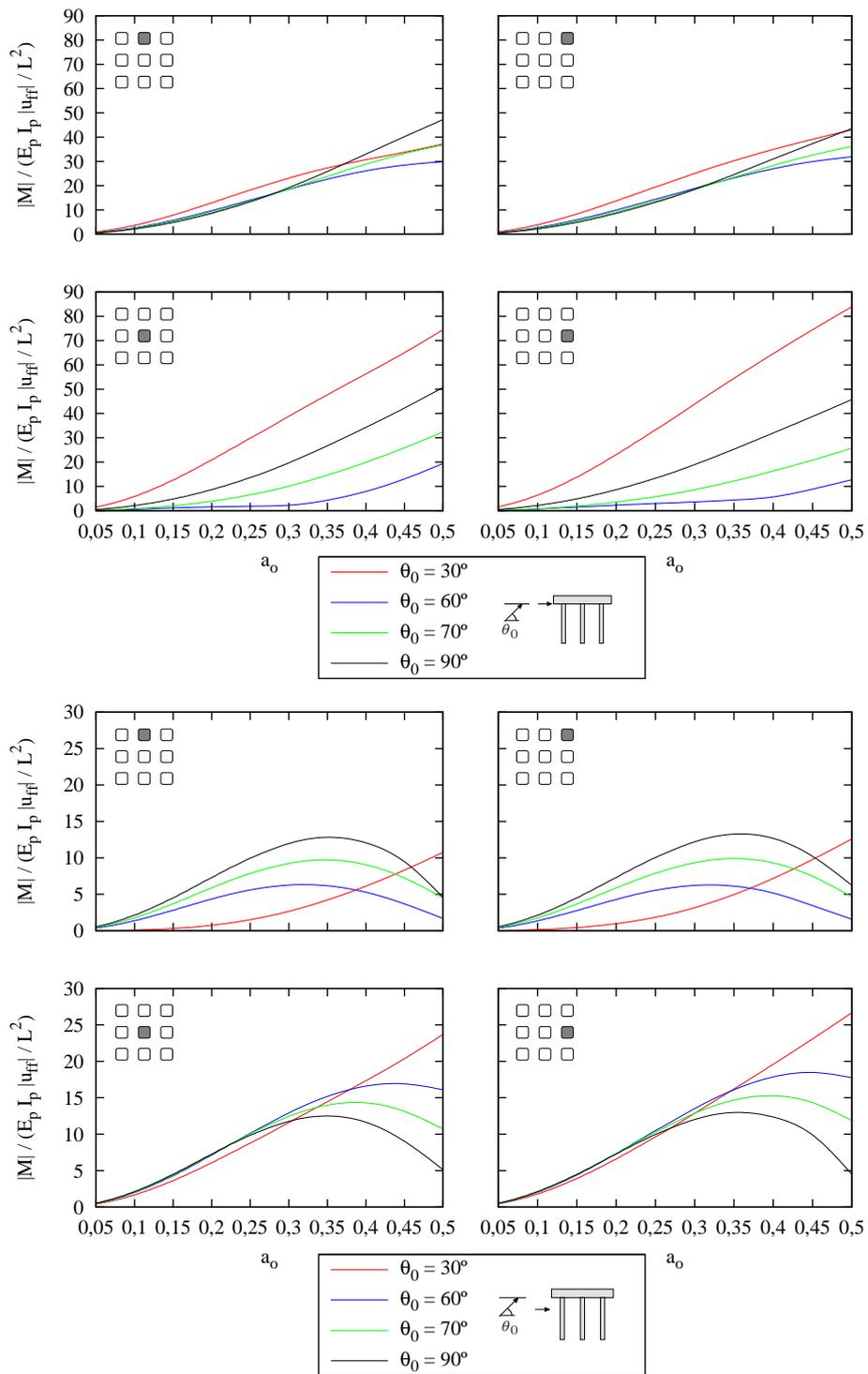


Figura 5.19: Momentos flectores en los pilotes. Onda SH, encepado sin superestructura

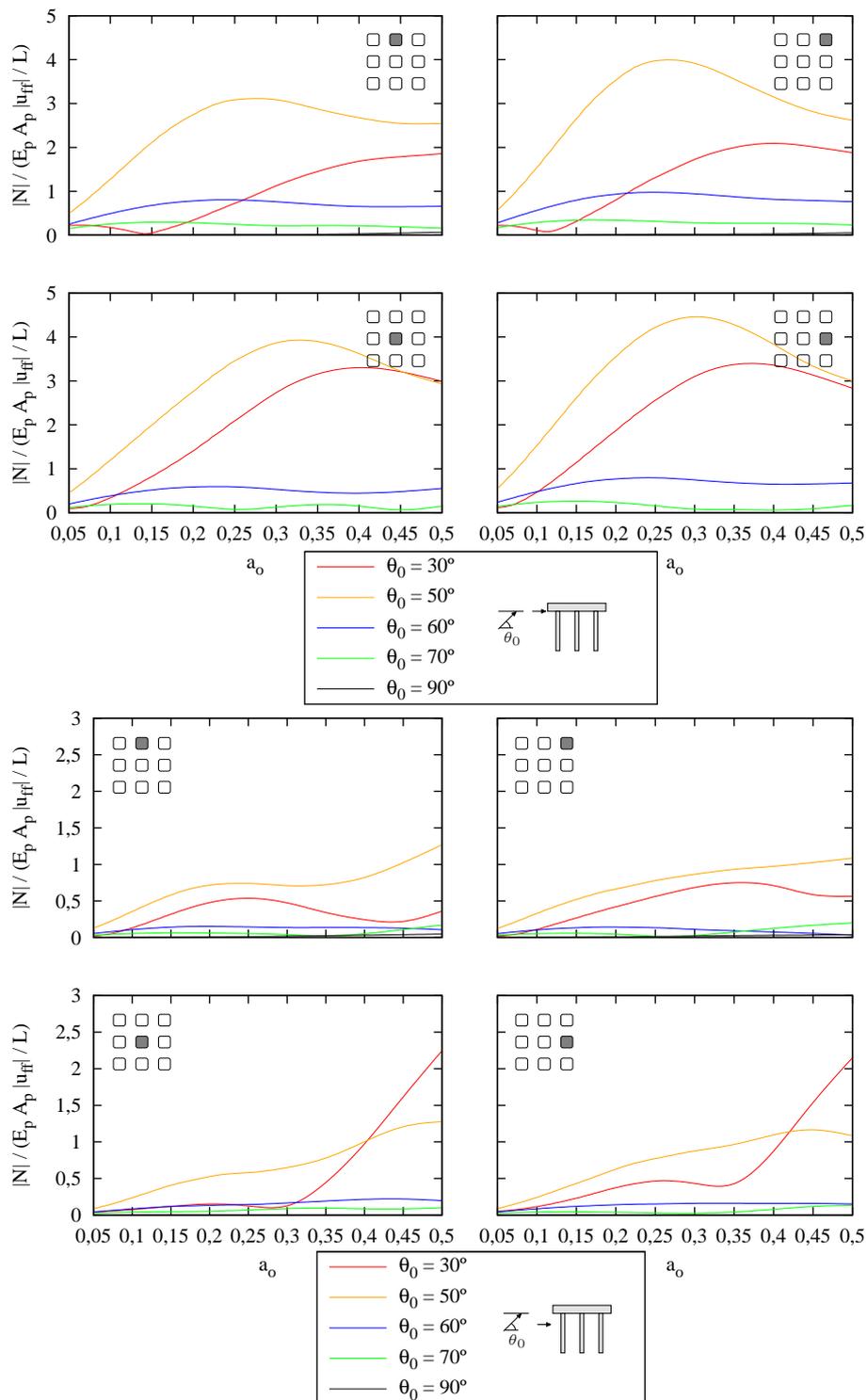


Figura 5.20: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda  $SV$ , encepado sin superestructura

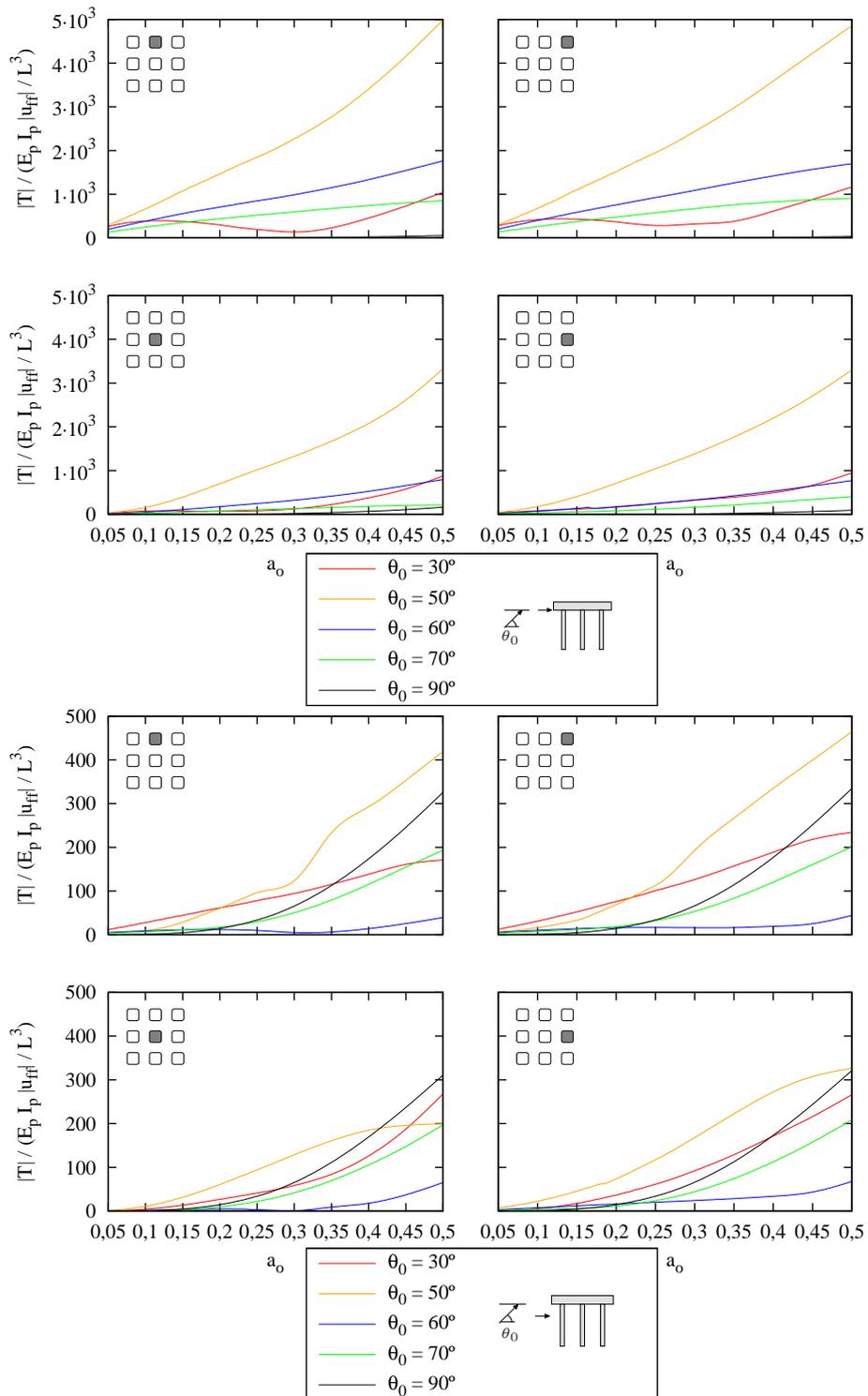


Figura 5.21: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda *SV*, encepado sin superestructura

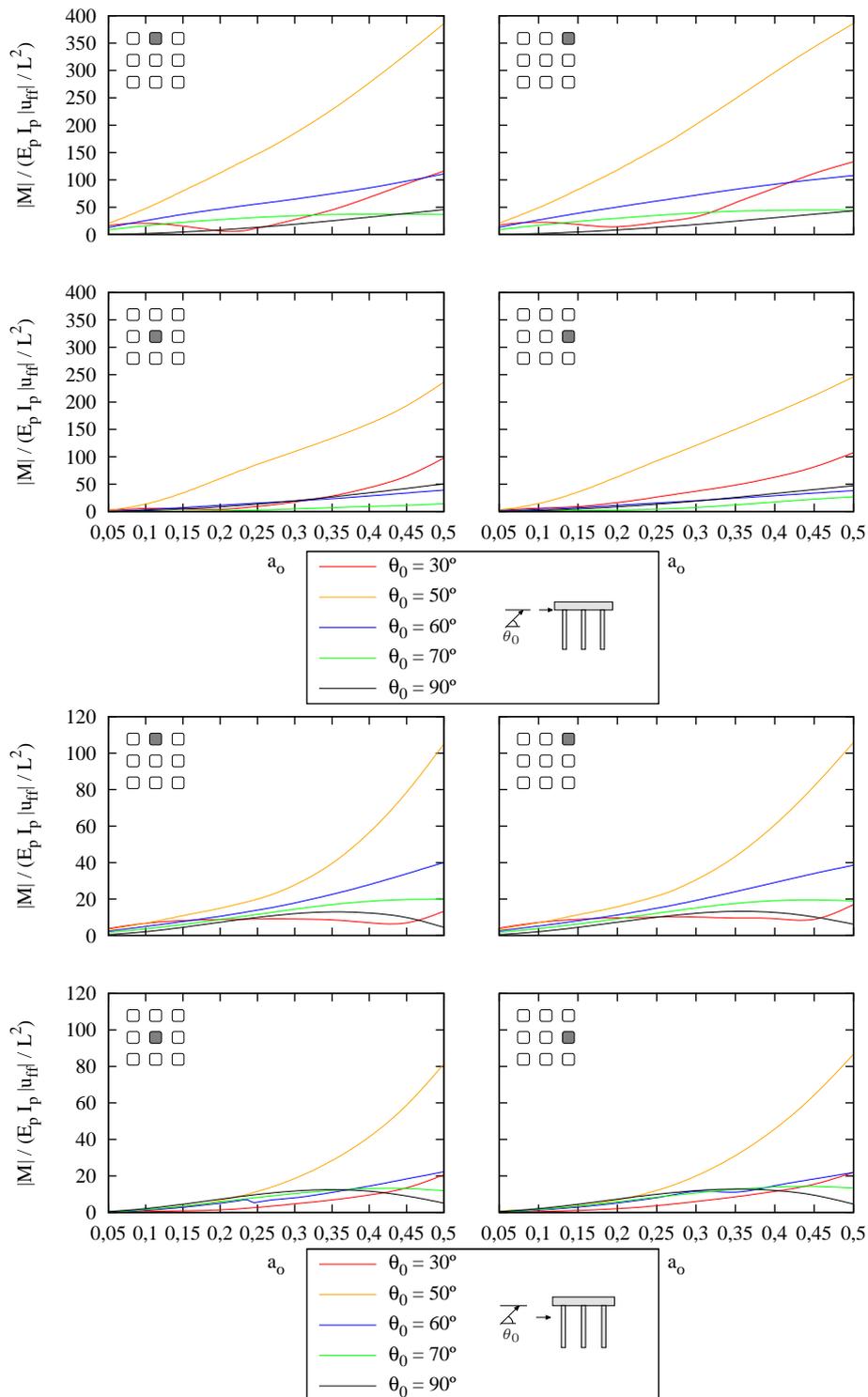


Figura 5.22: Momento flector en los pilotes. Onda *SV*, encepado sin superestructura

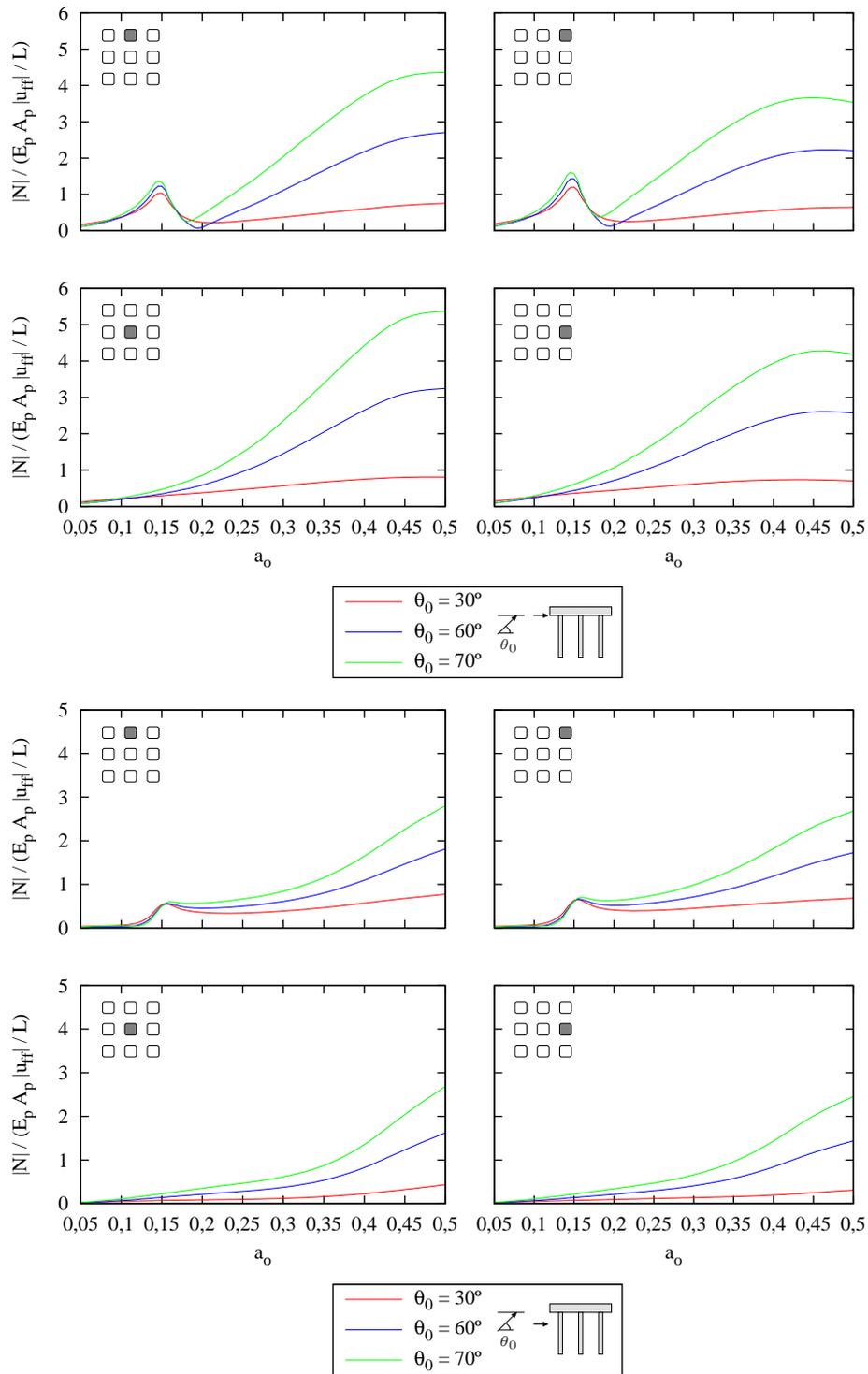


Figura 5.23: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda  $P$ ,  $h/b = 2$

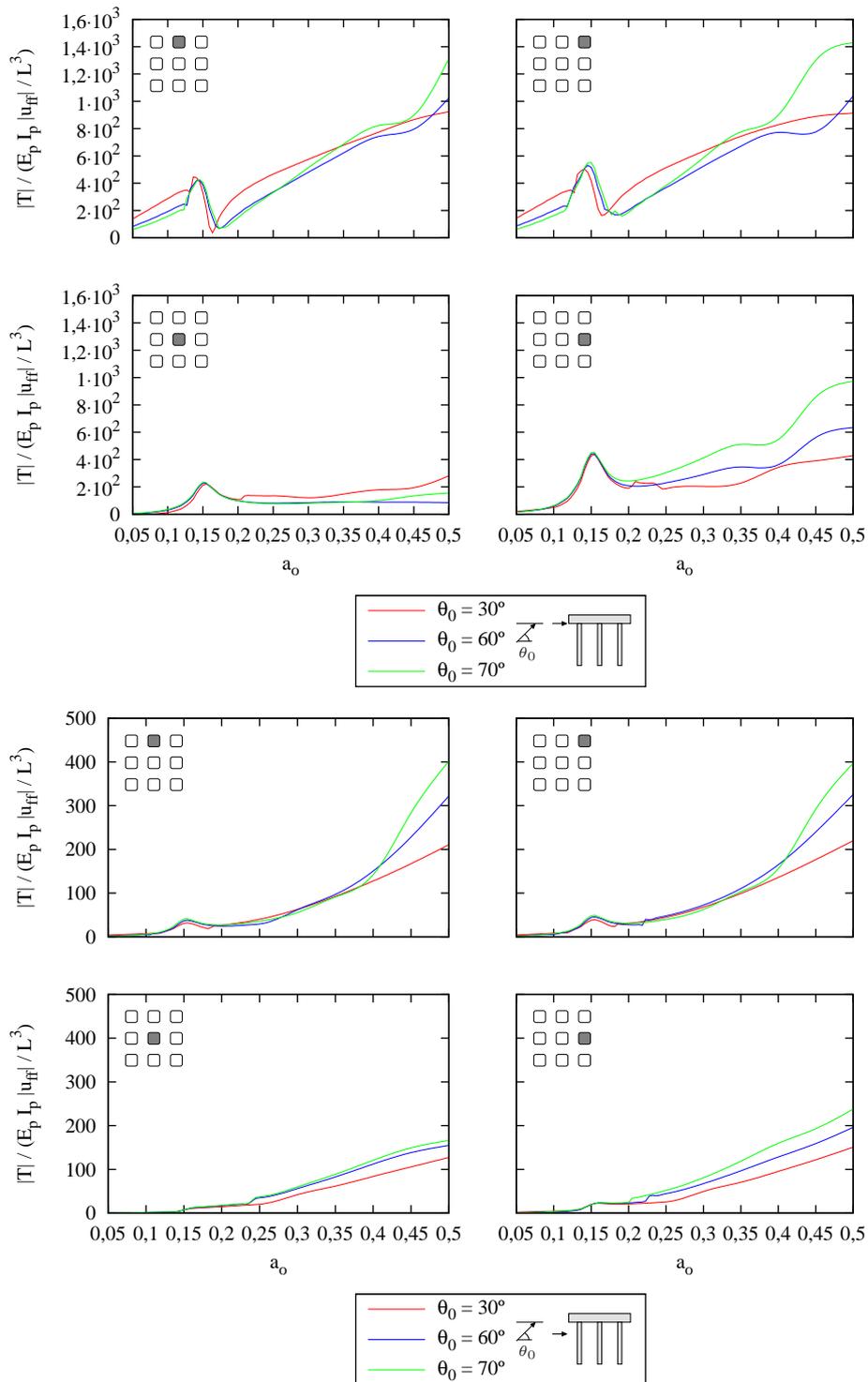


Figura 5.24: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda P,  $h/b = 2$

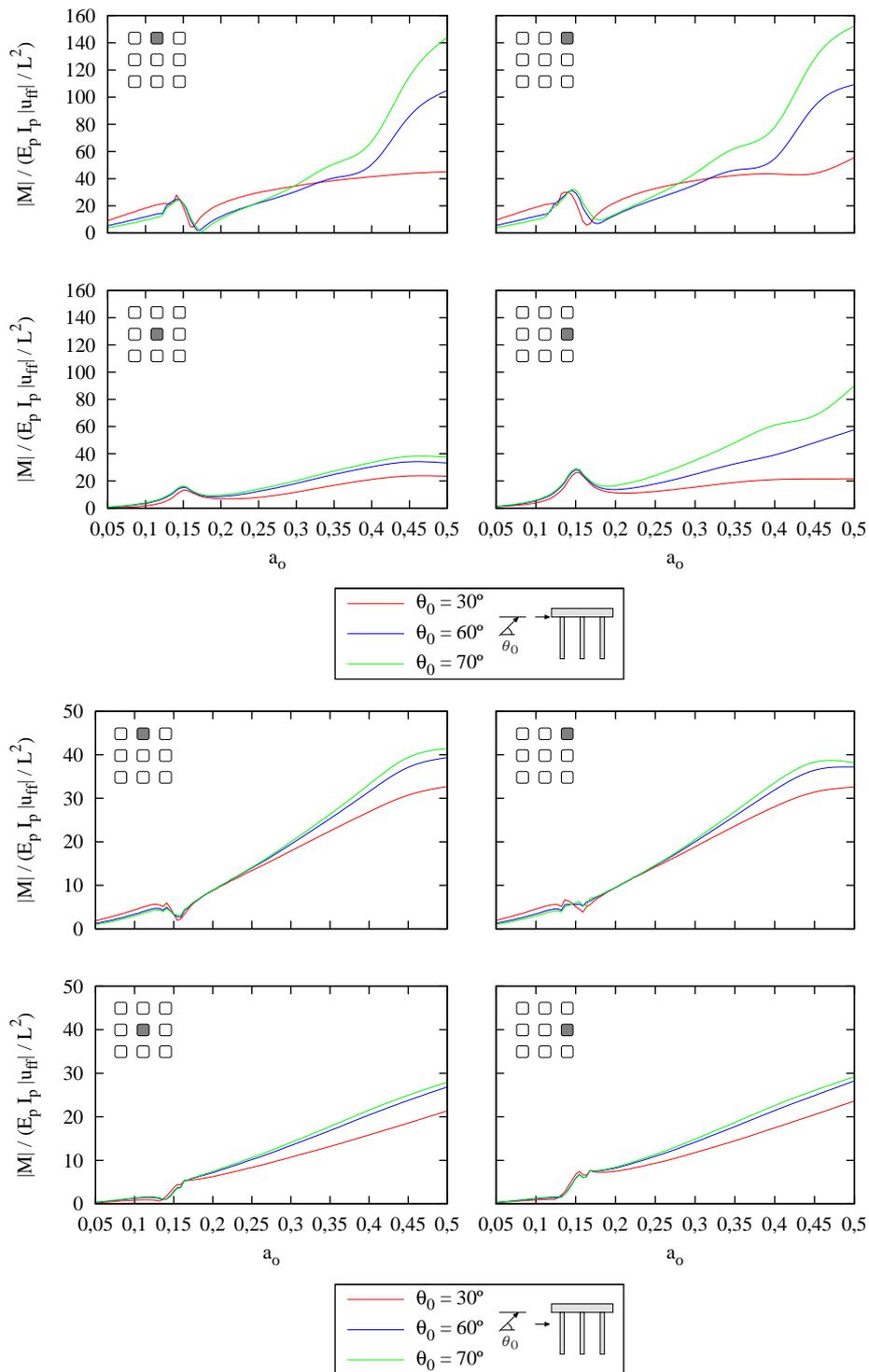


Figura 5.25: Momentos flectores en los pilotes. Onda  $P$ ,  $h/b = 2$

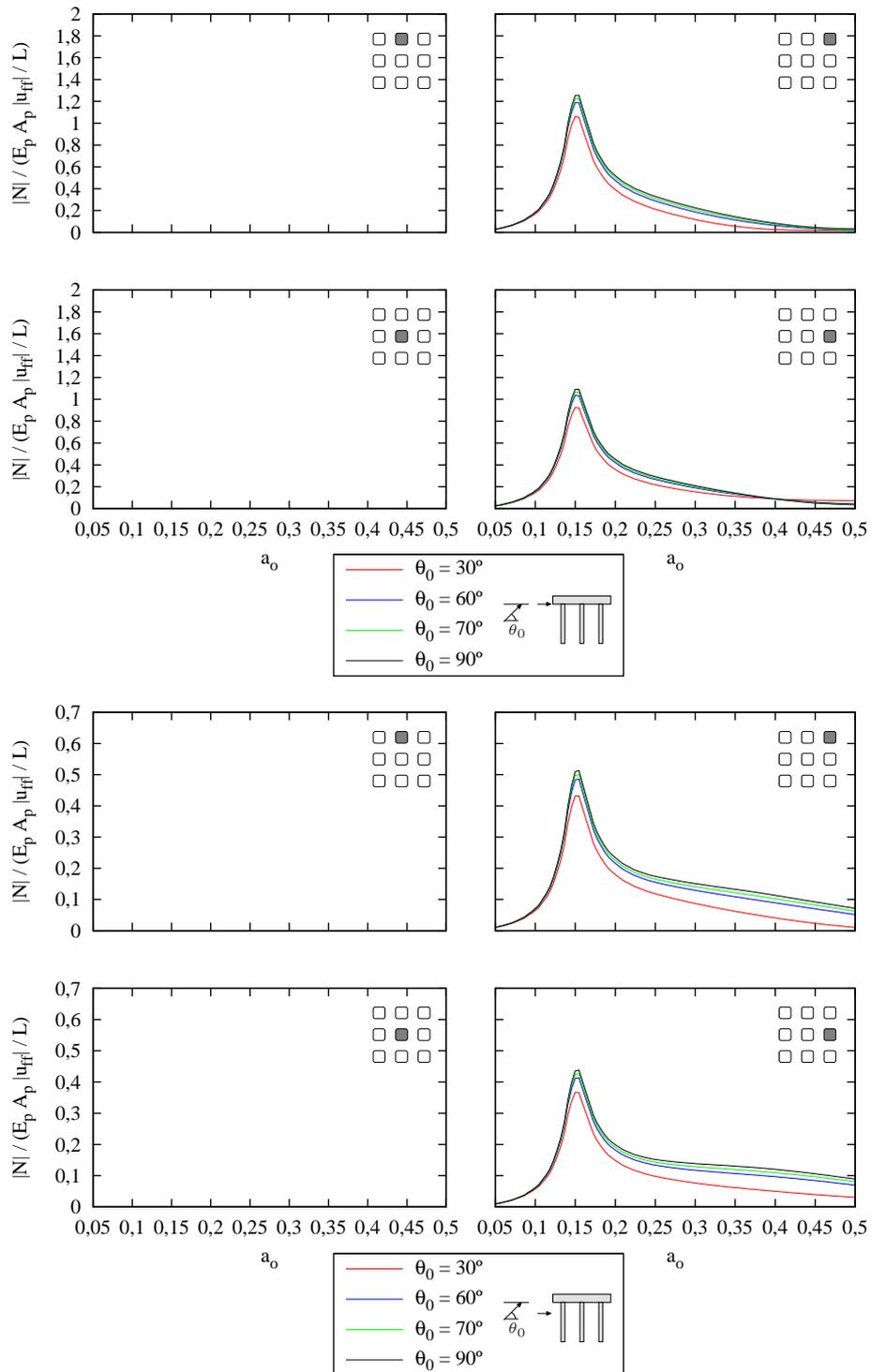


Figura 5.26: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda **SH**,  $h/b = 2$

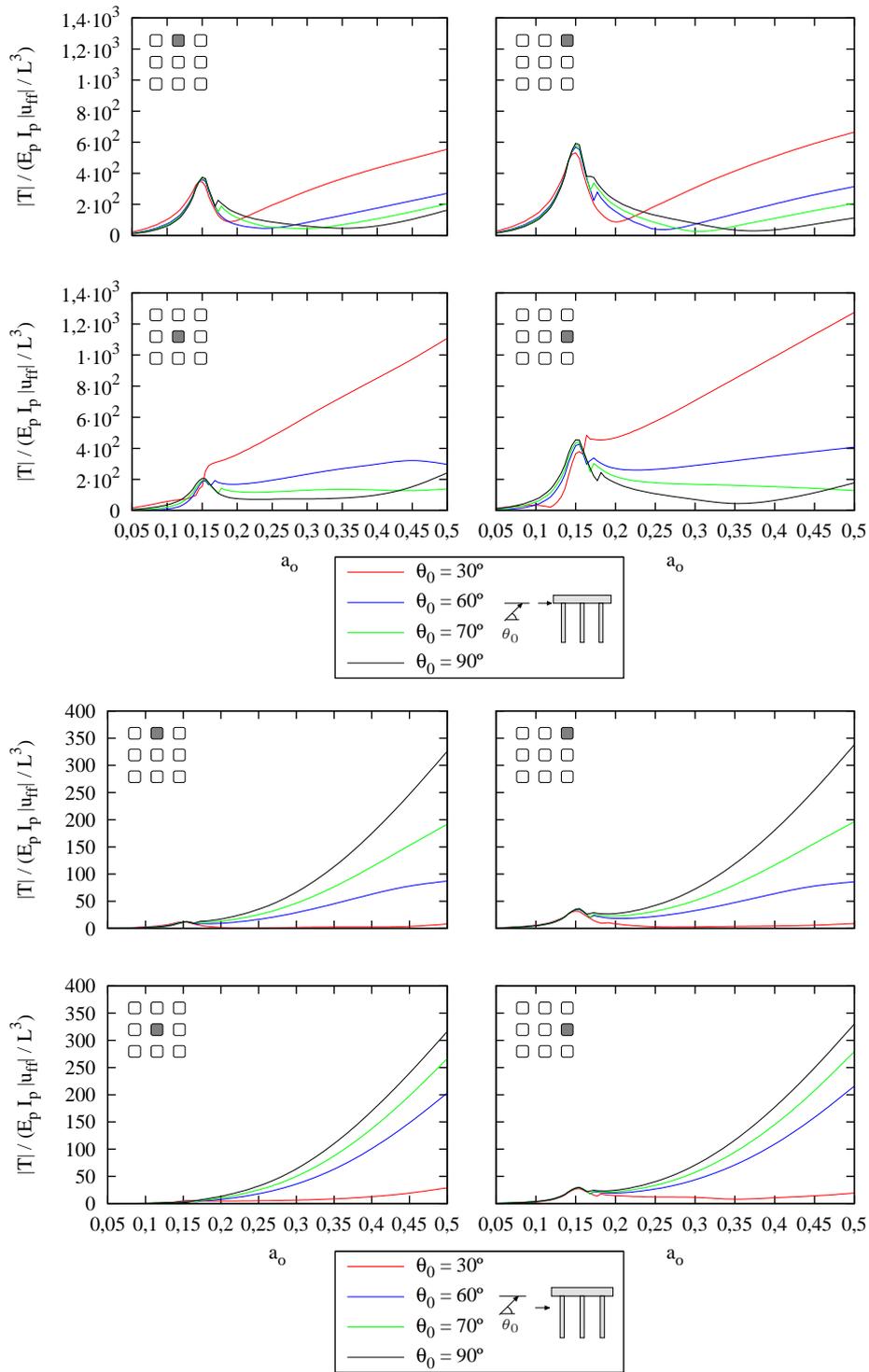


Figura 5.27: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda **SH**,  $h/b = 2$

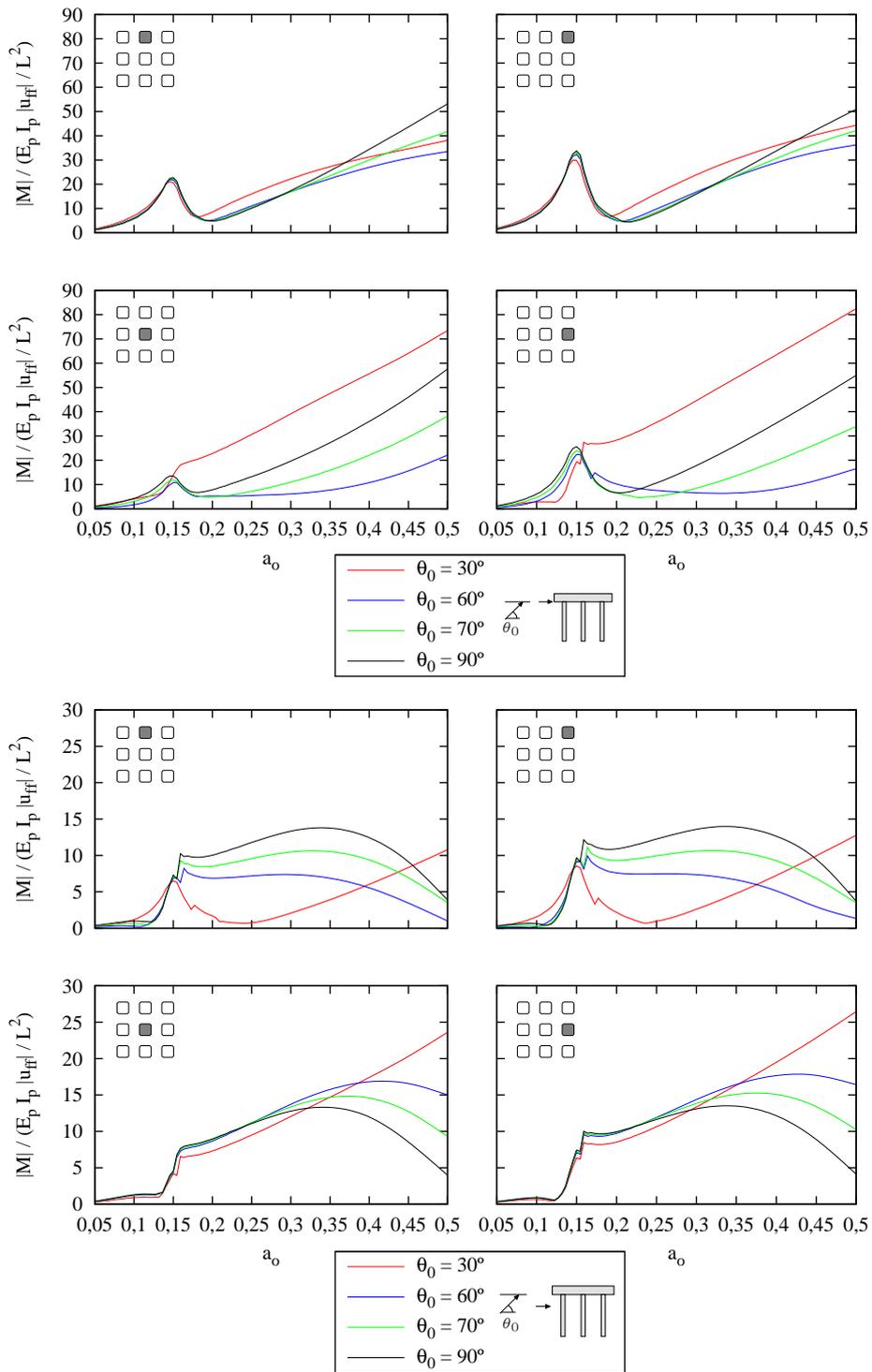


Figura 5.28: Momentos flectores en los pilotes. Onda SH,  $h/b = 2$

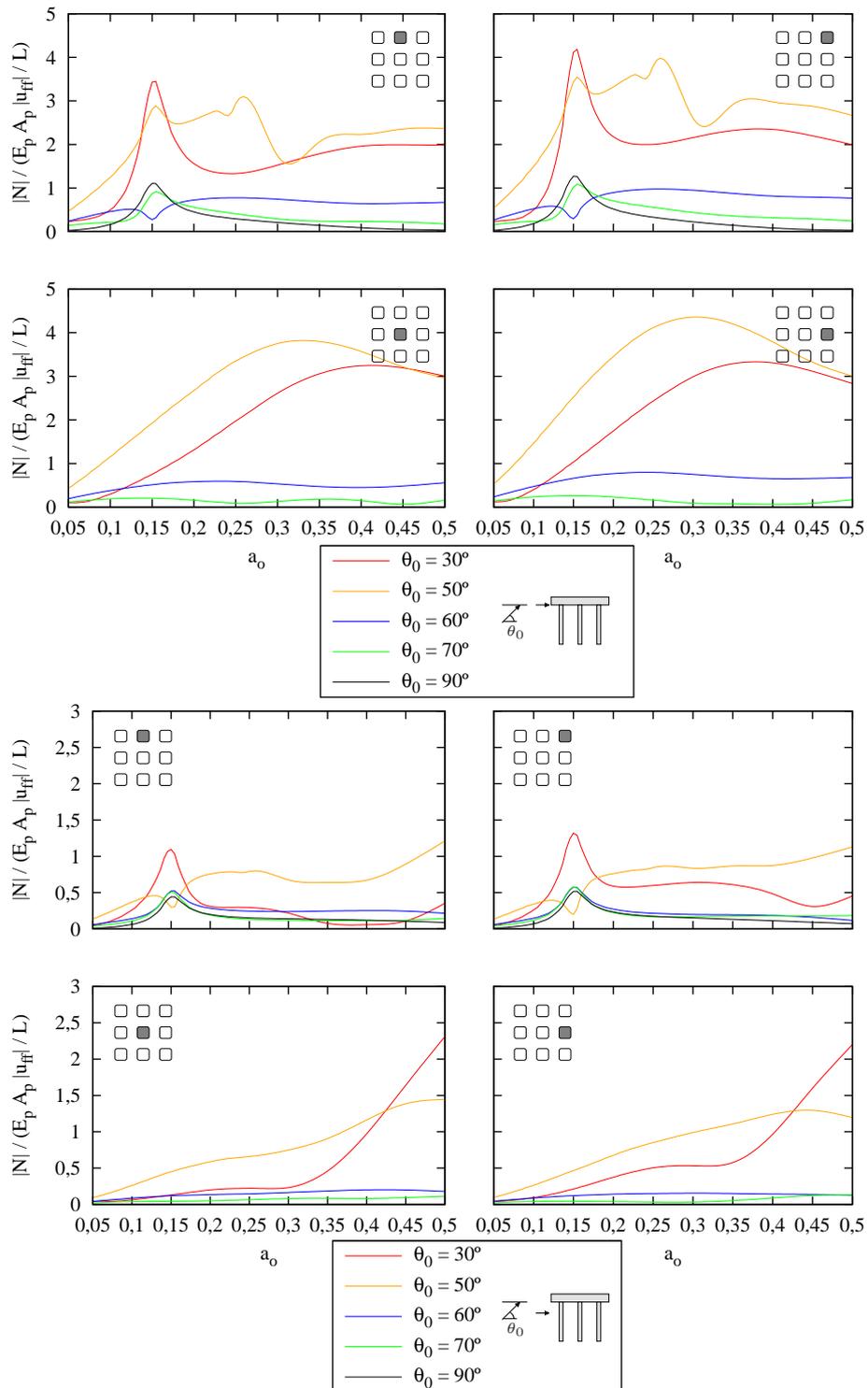


Figura 5.29: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SV,  $h/b = 2$

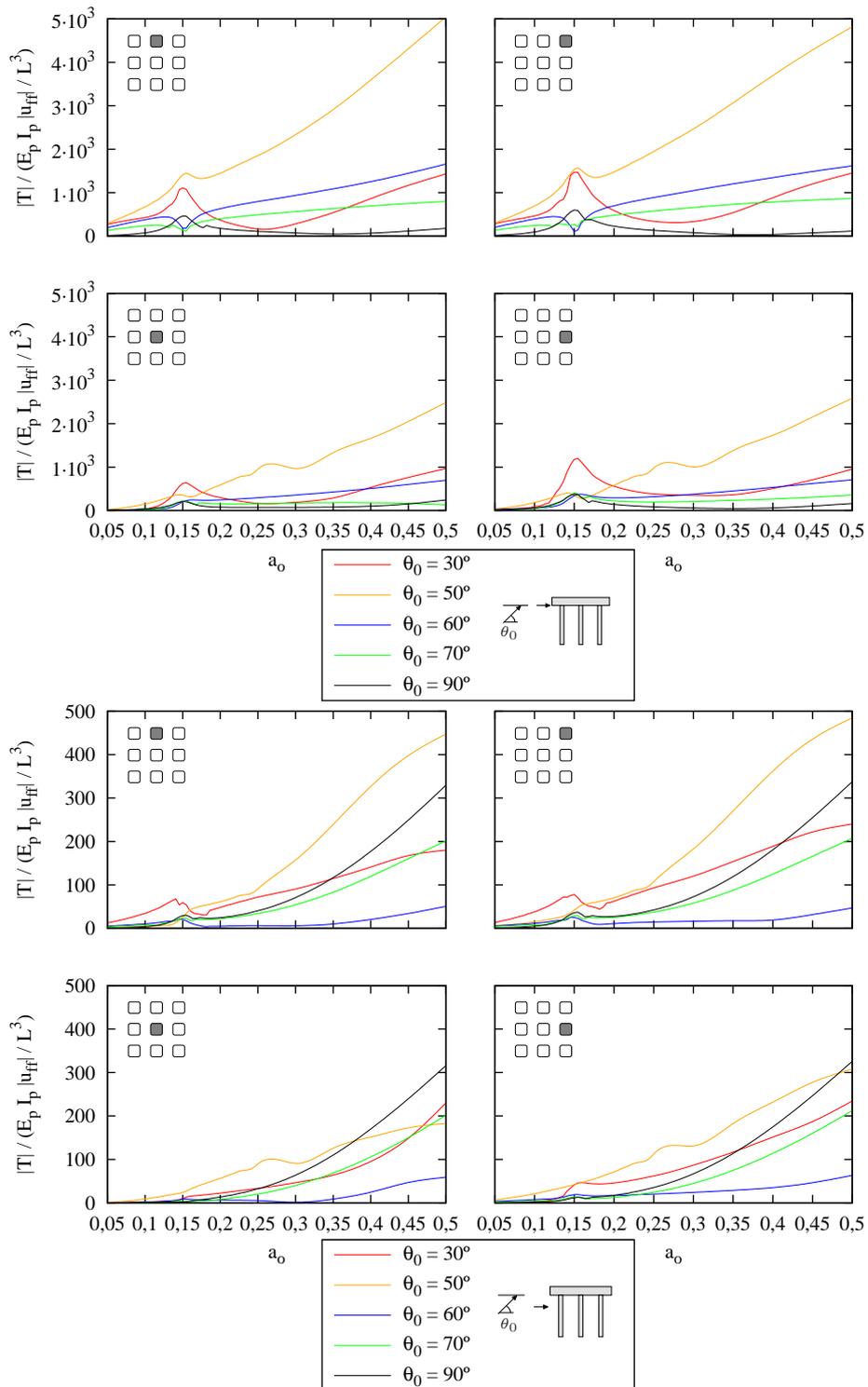


Figura 5.30: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV,  $h/b = 2$

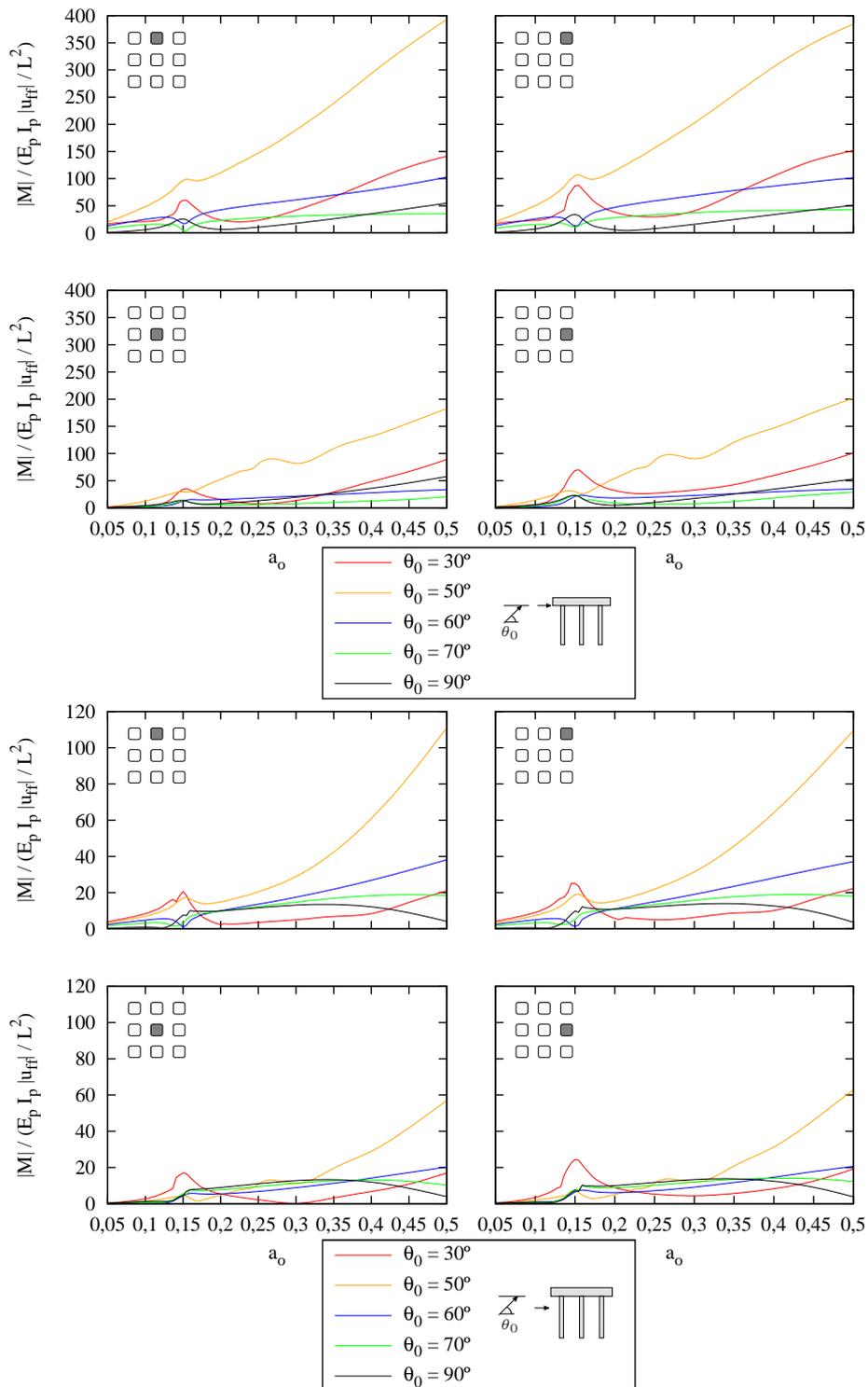


Figura 5.31: Momento flector en los pilotes. Onda SV,  $h/b = 2$

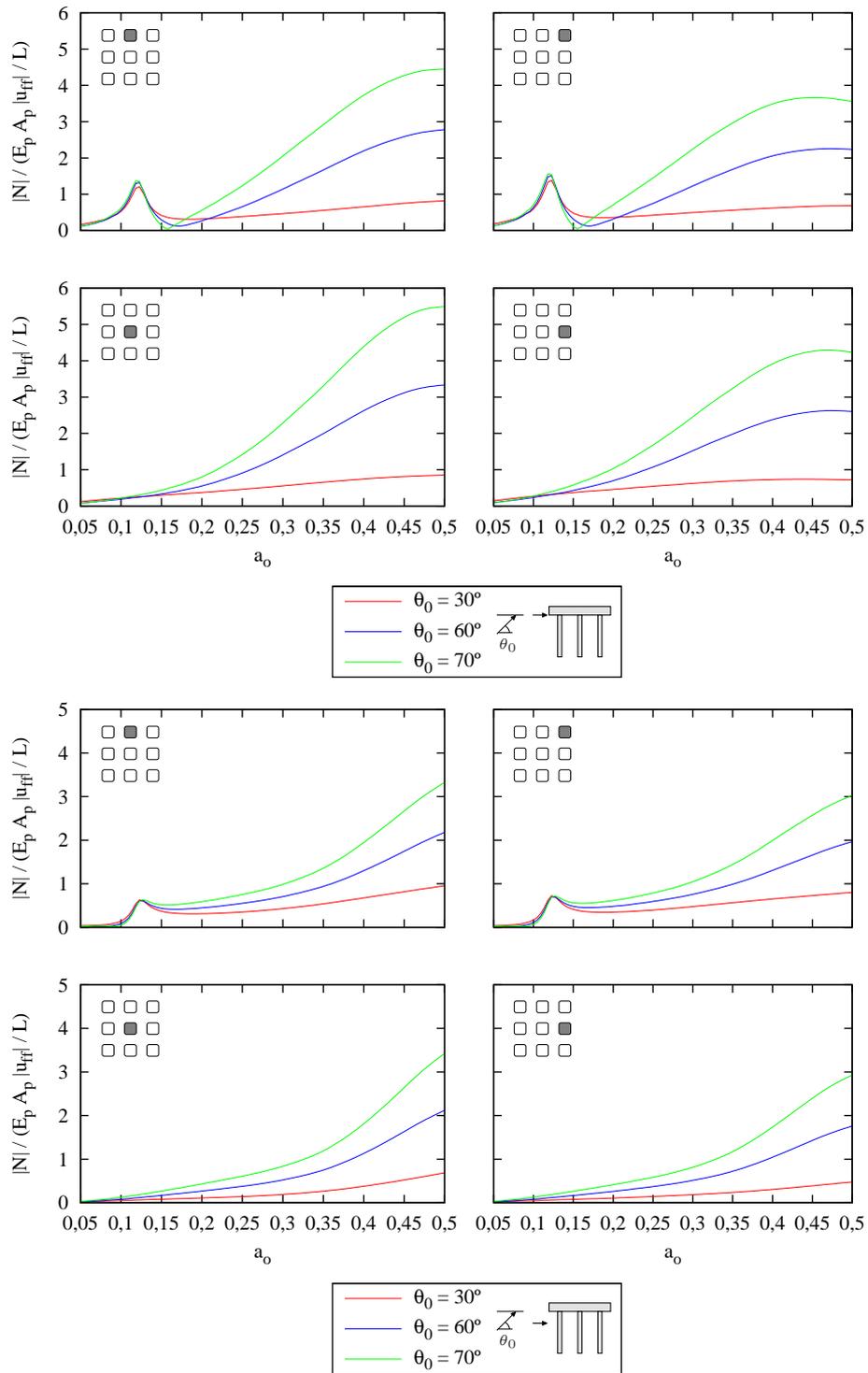


Figura 5.32: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda  $P$ ,  $h/b = 3$

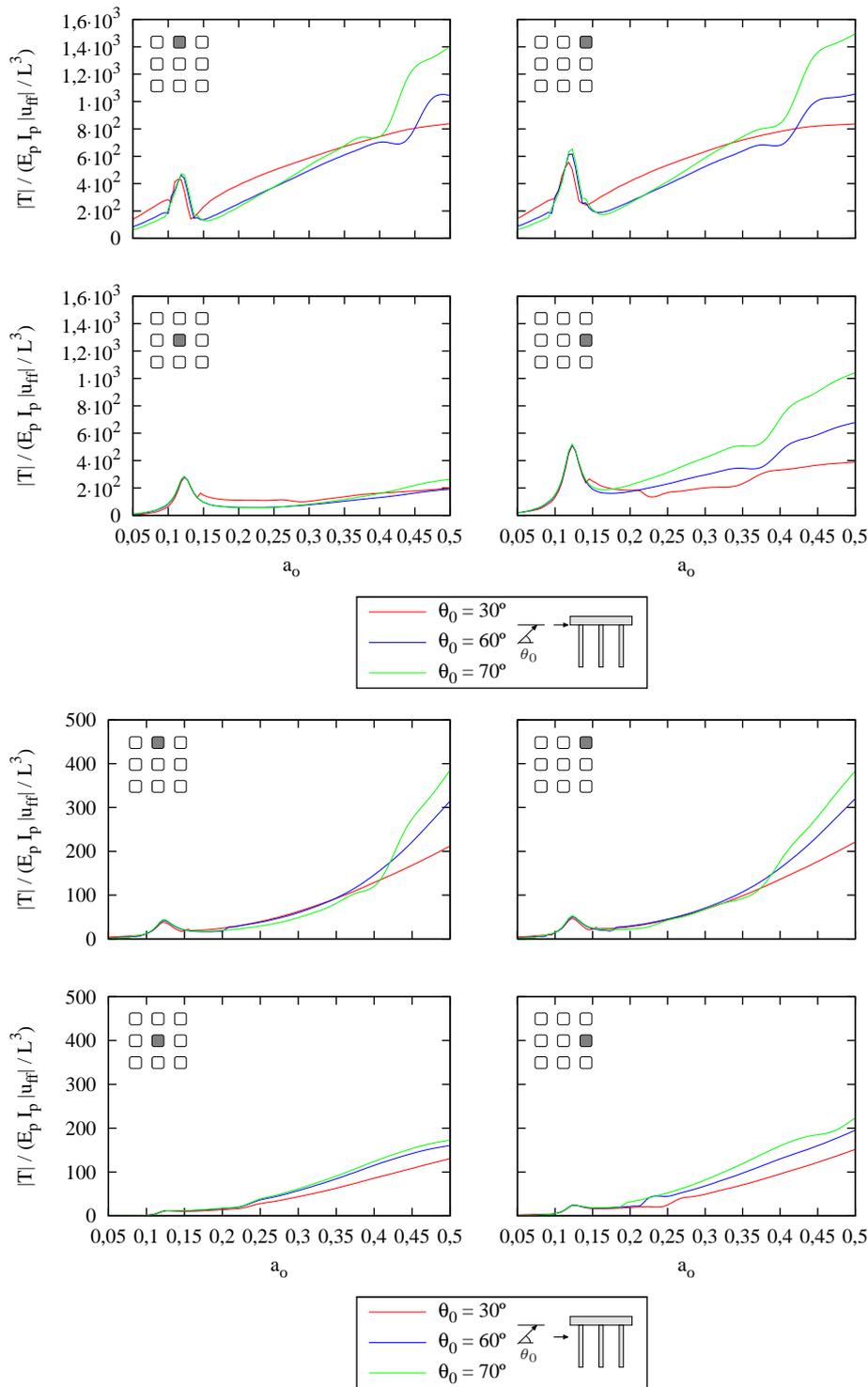


Figura 5.33: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda  $P$ ,  $h/b = 3$

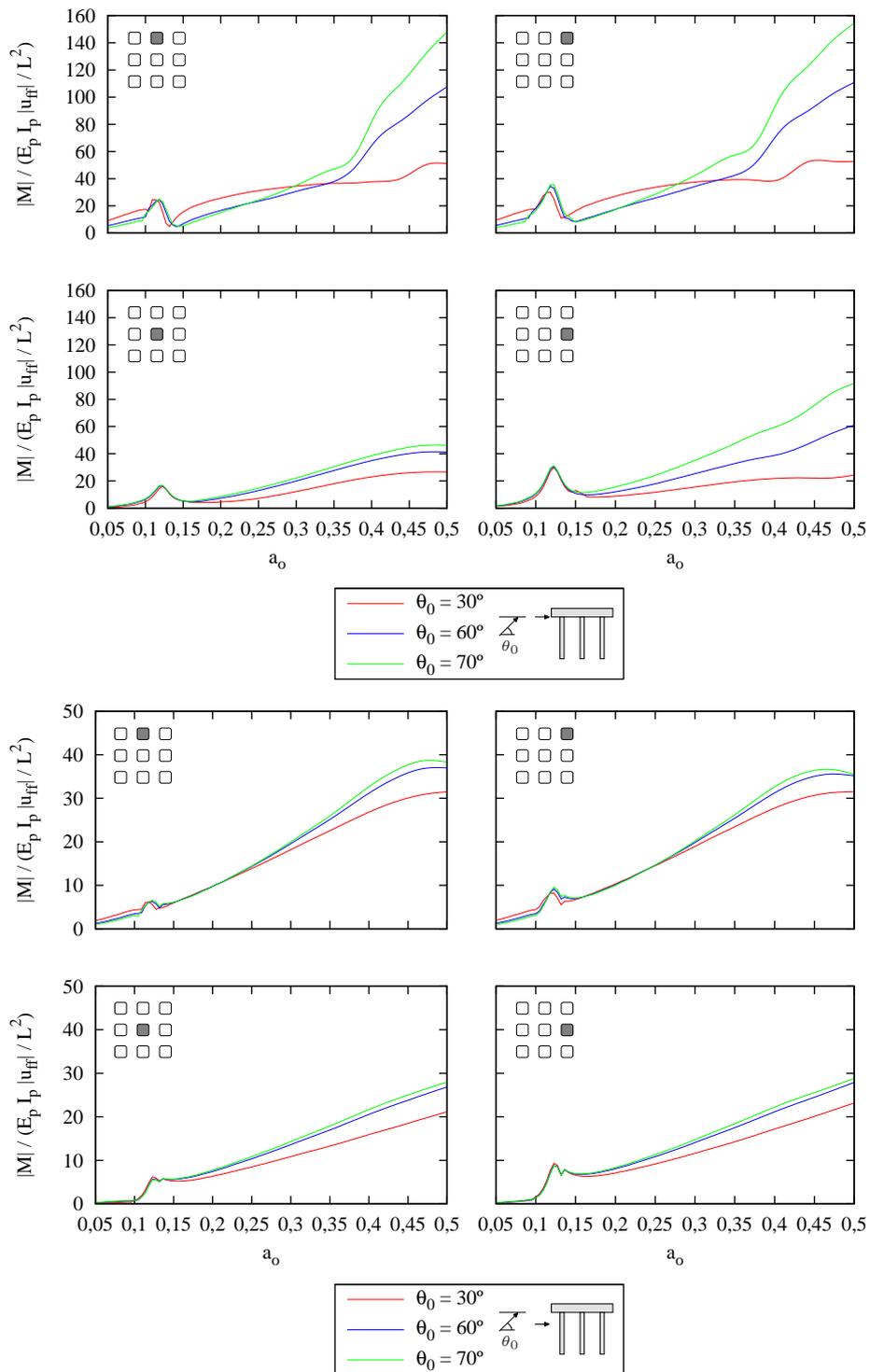


Figura 5.34: Momentos flectores en los pilotes. Onda  $P$ ,  $h/b = 3$

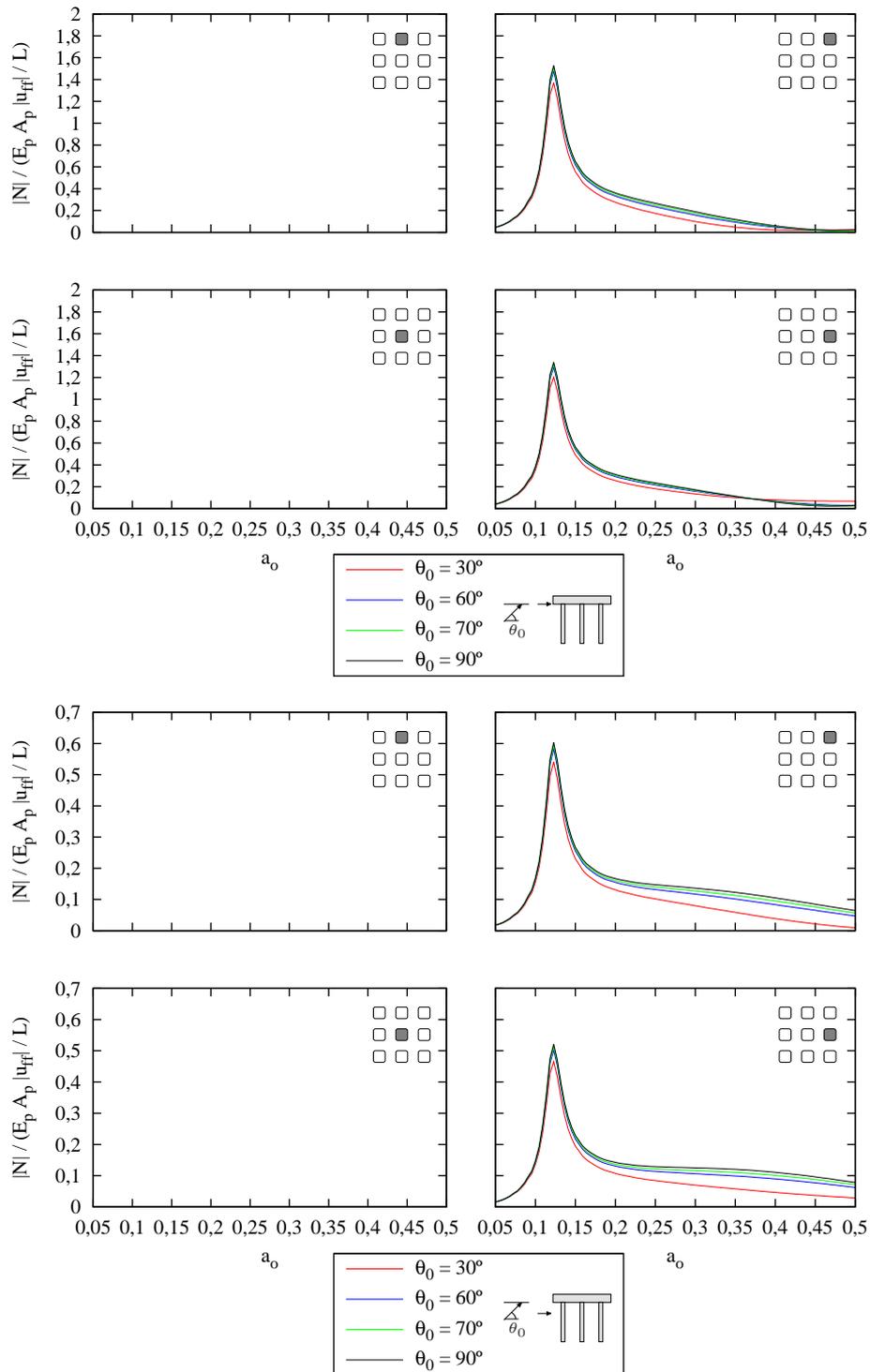


Figura 5.35: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda **SH**,  $h/b = 3$

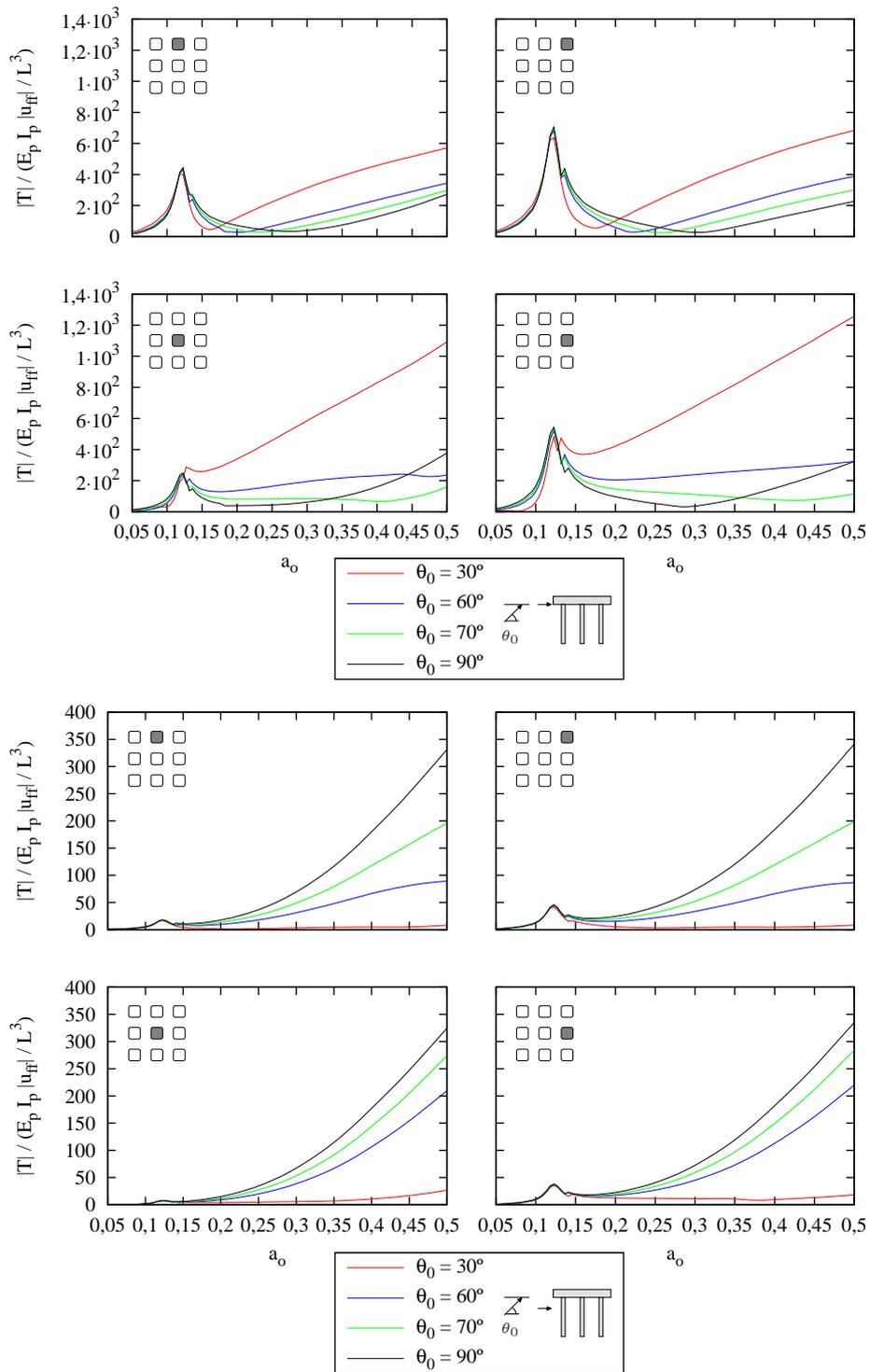


Figura 5.36: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SH,  $h/b = 3$

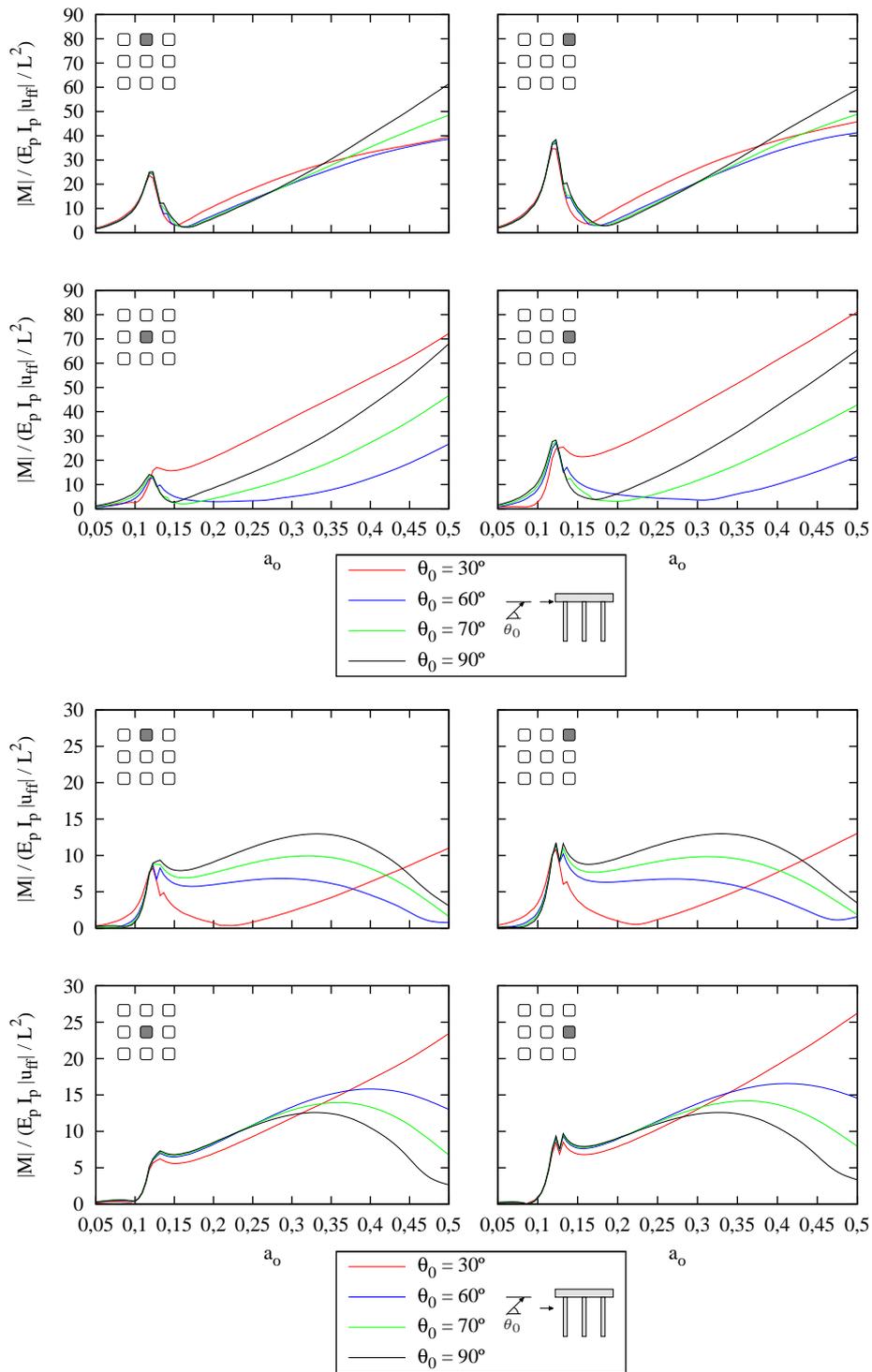


Figura 5.37: Momentos flectores en los pilotes. Onda SH,  $h/b = 3$

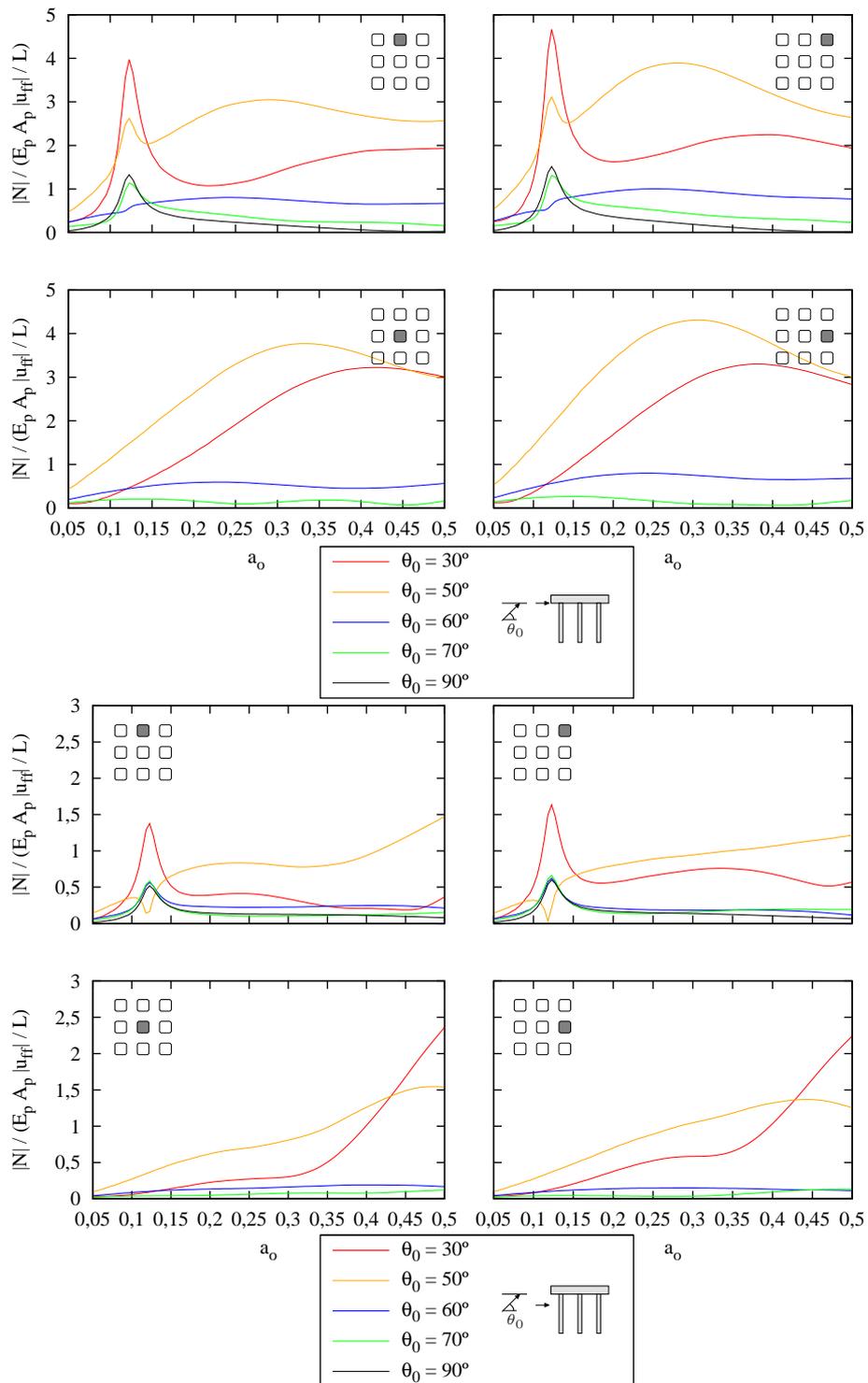


Figura 5.38: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SV,  $h/b = 3$

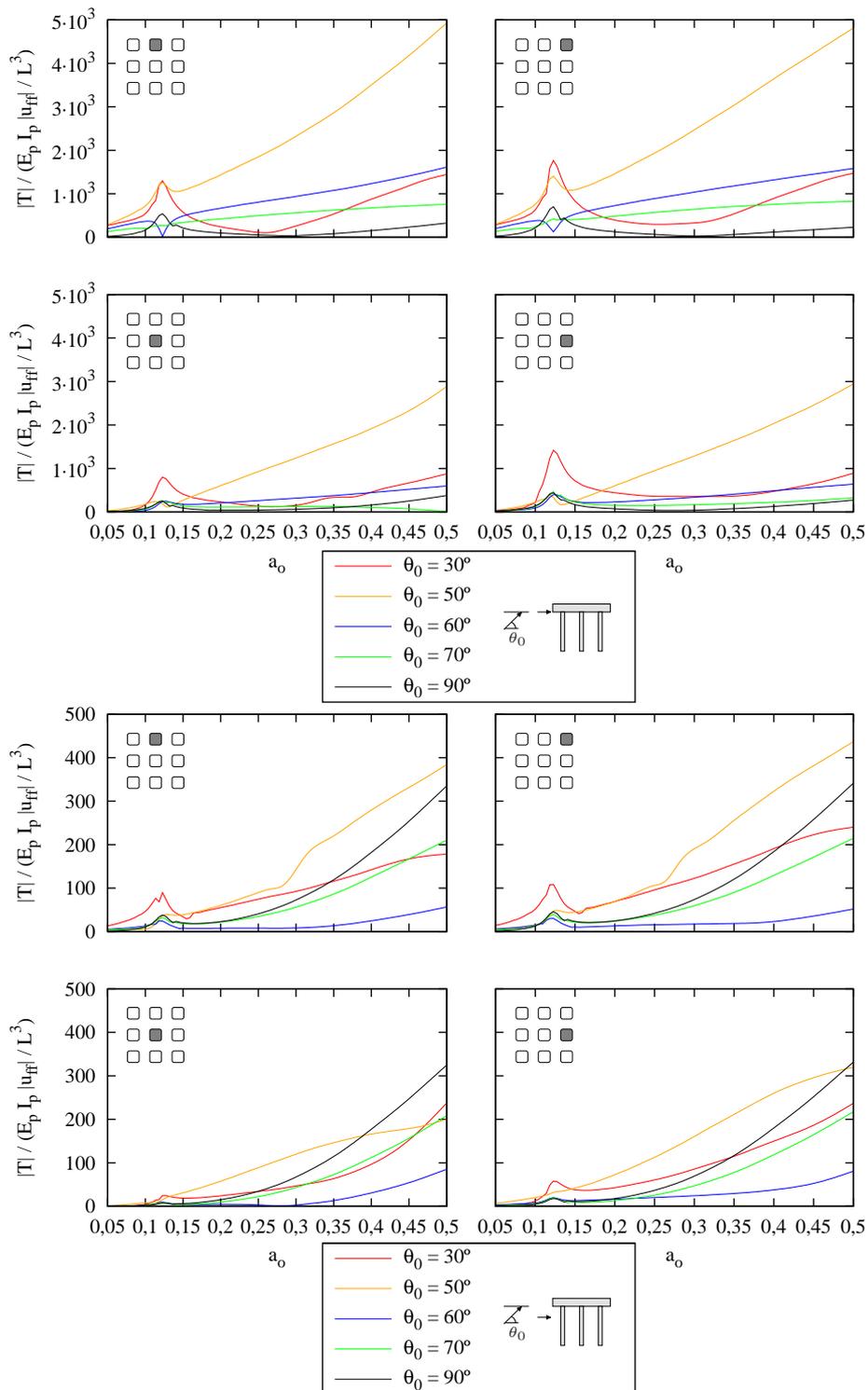


Figura 5.39: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV,  $h/b = 3$

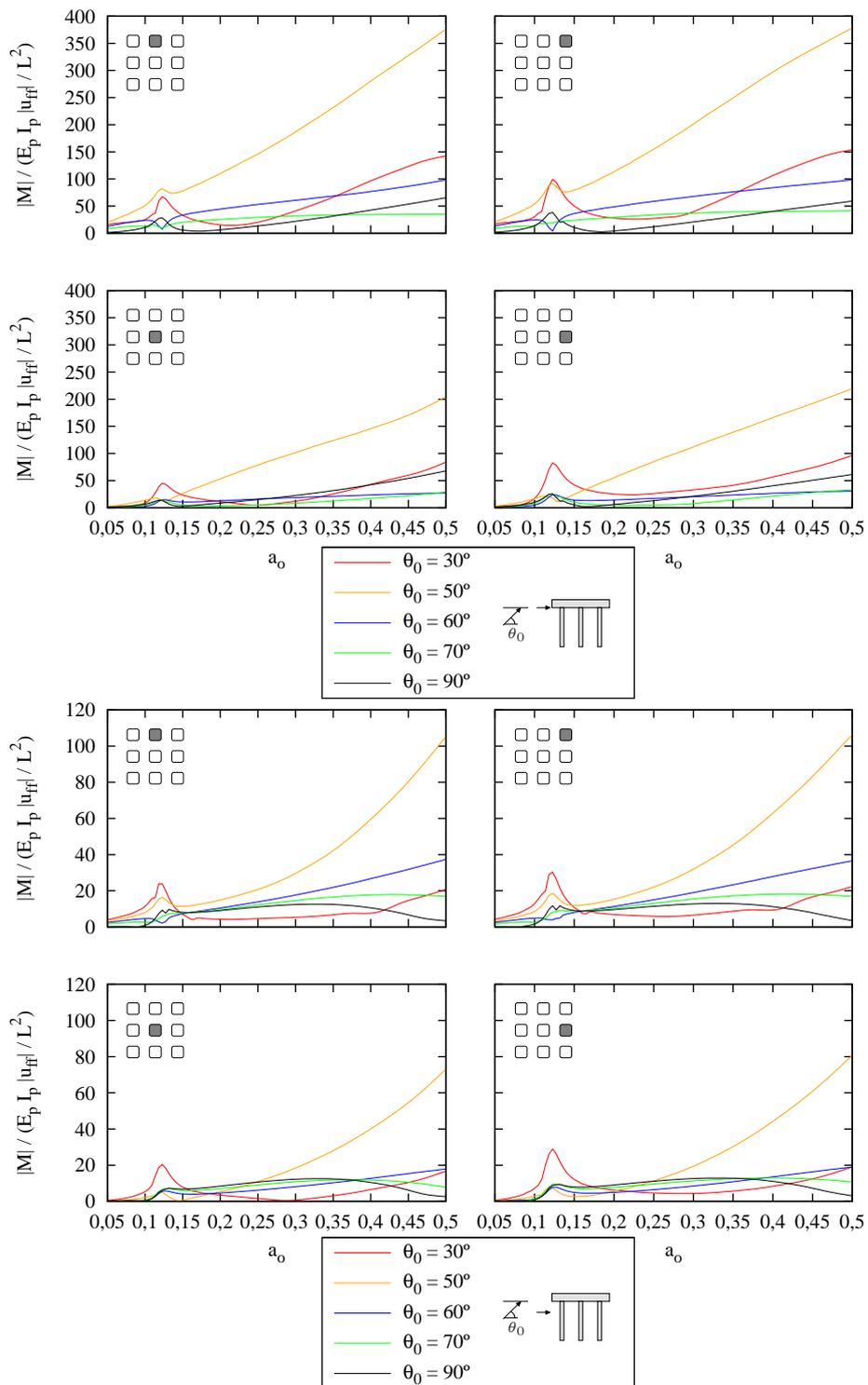


Figura 5.40: Momentos flectores en los pilotes. Onda SV,  $h/b = 3$

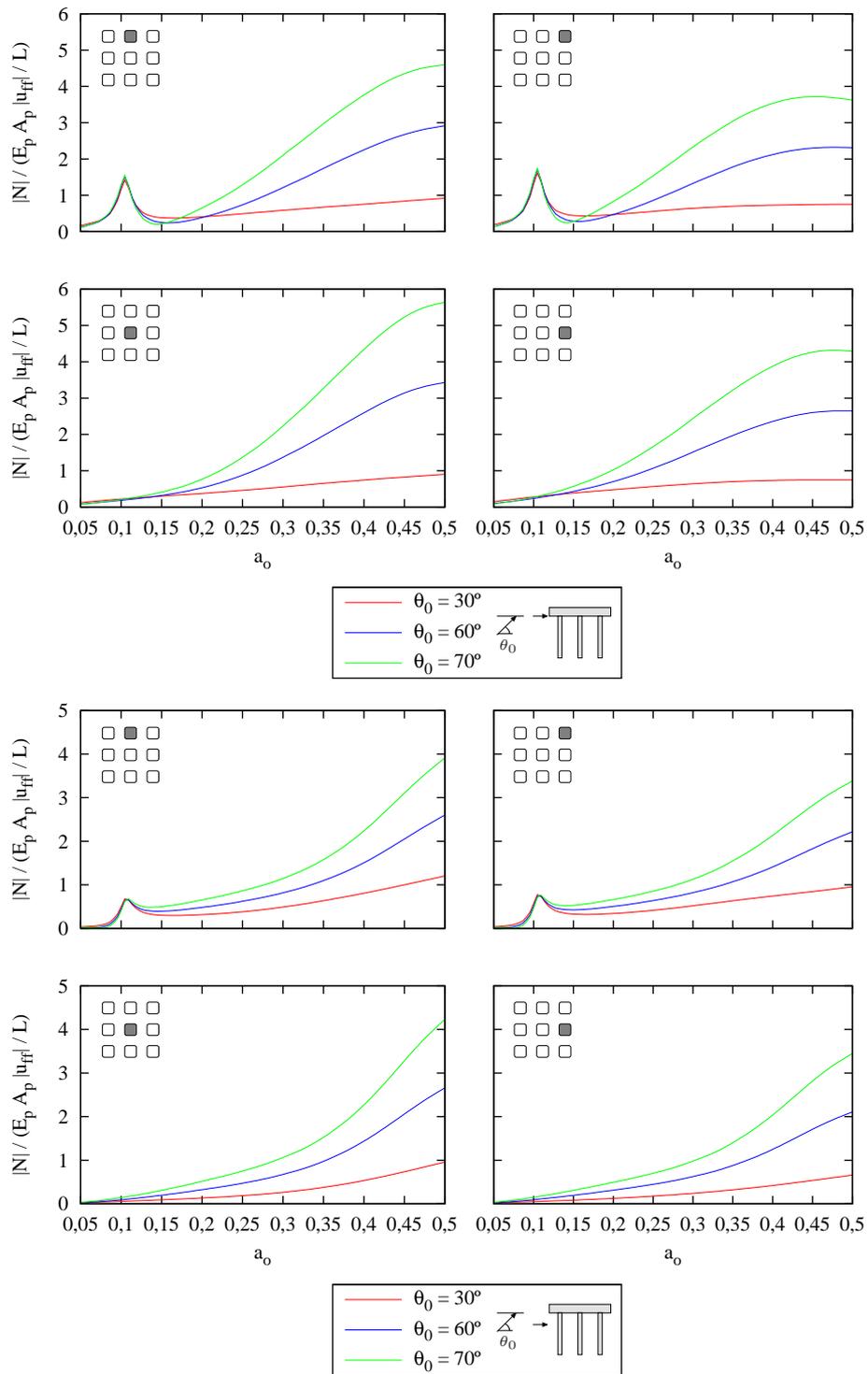


Figura 5.41: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda  $P$ ,  $h/b = 4$

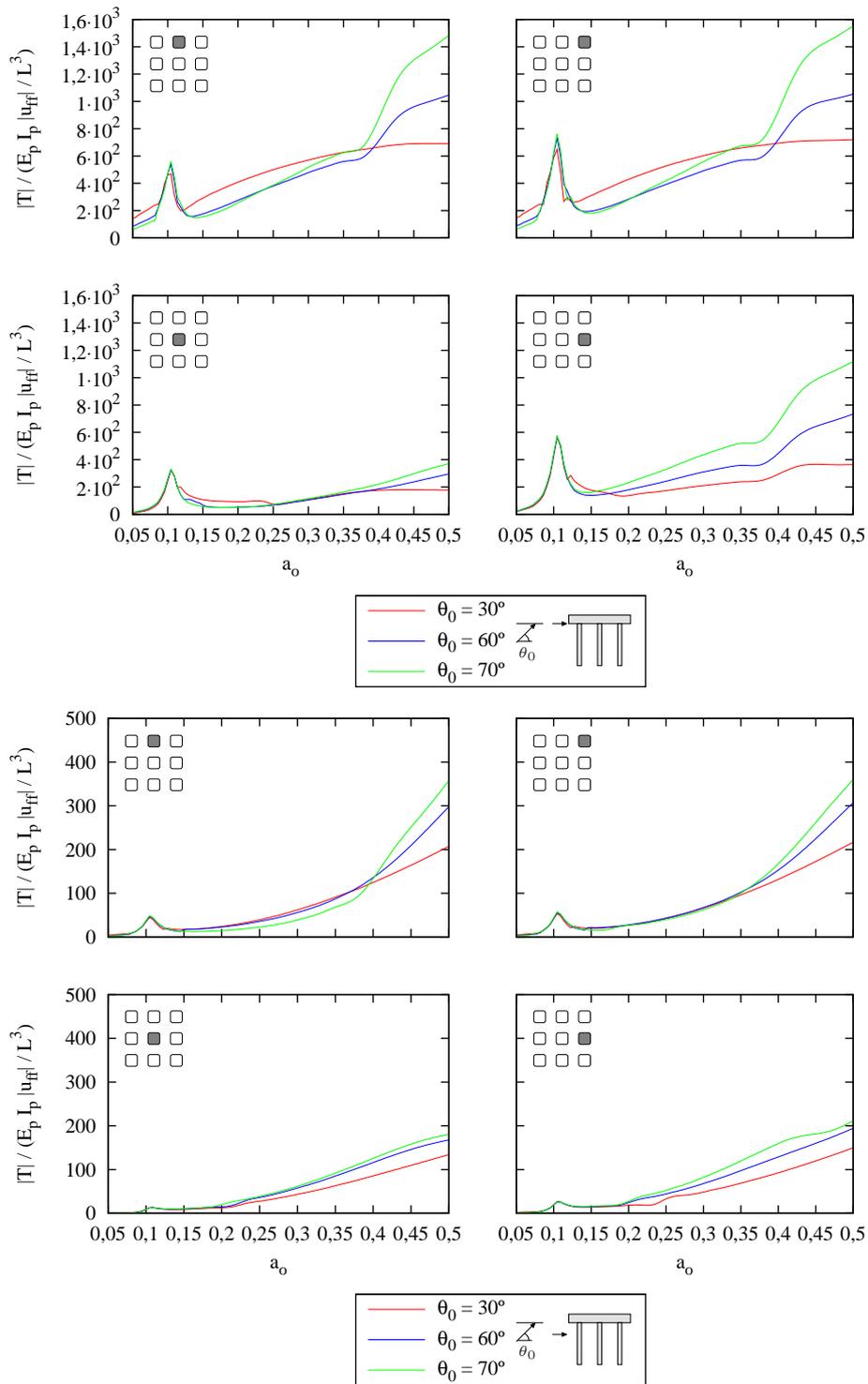


Figura 5.42: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda  $P$ ,  $h/b = 4$

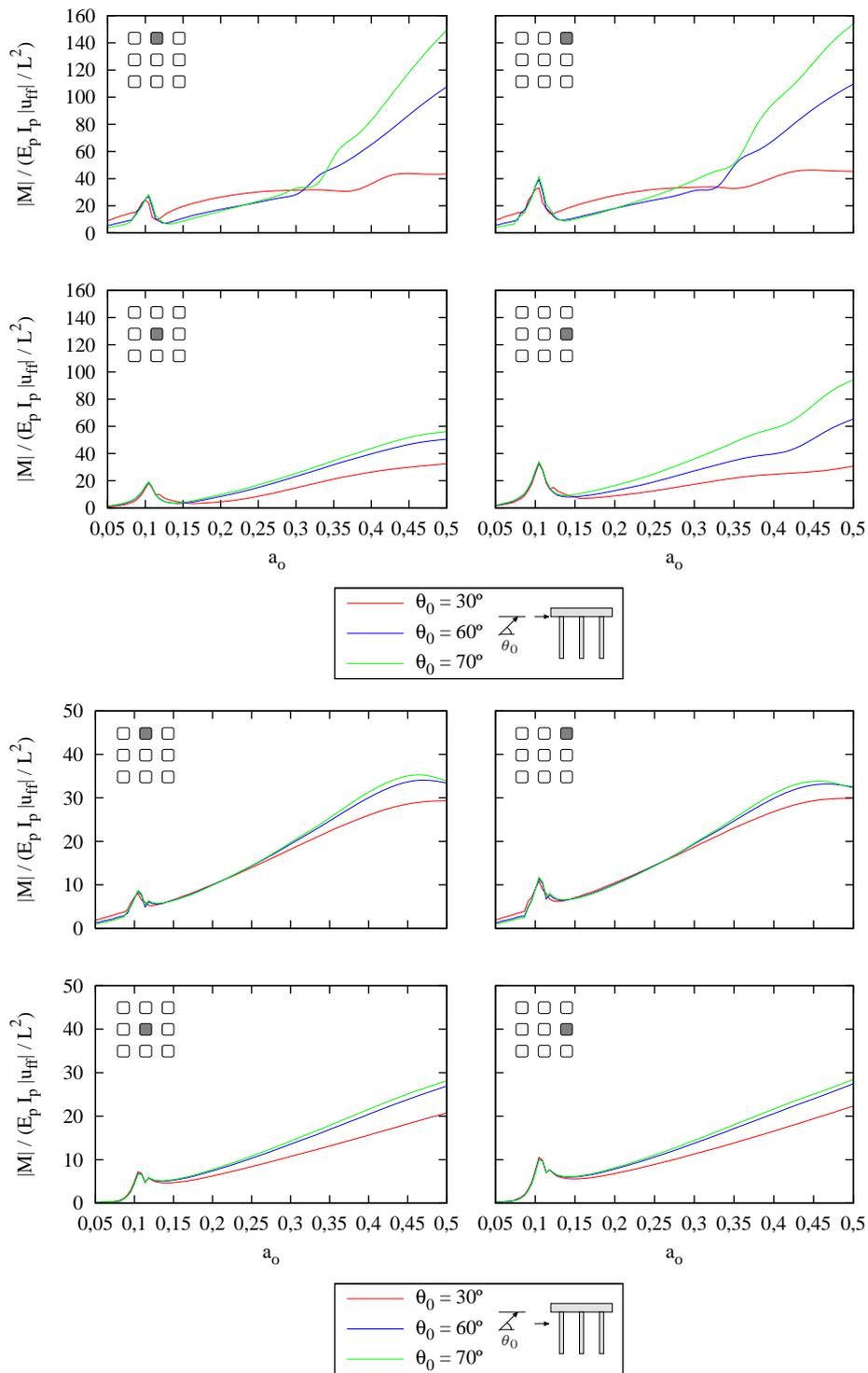


Figura 5.43: Momentos flectores en los pilotes. Onda  $P$ ,  $h/b = 4$

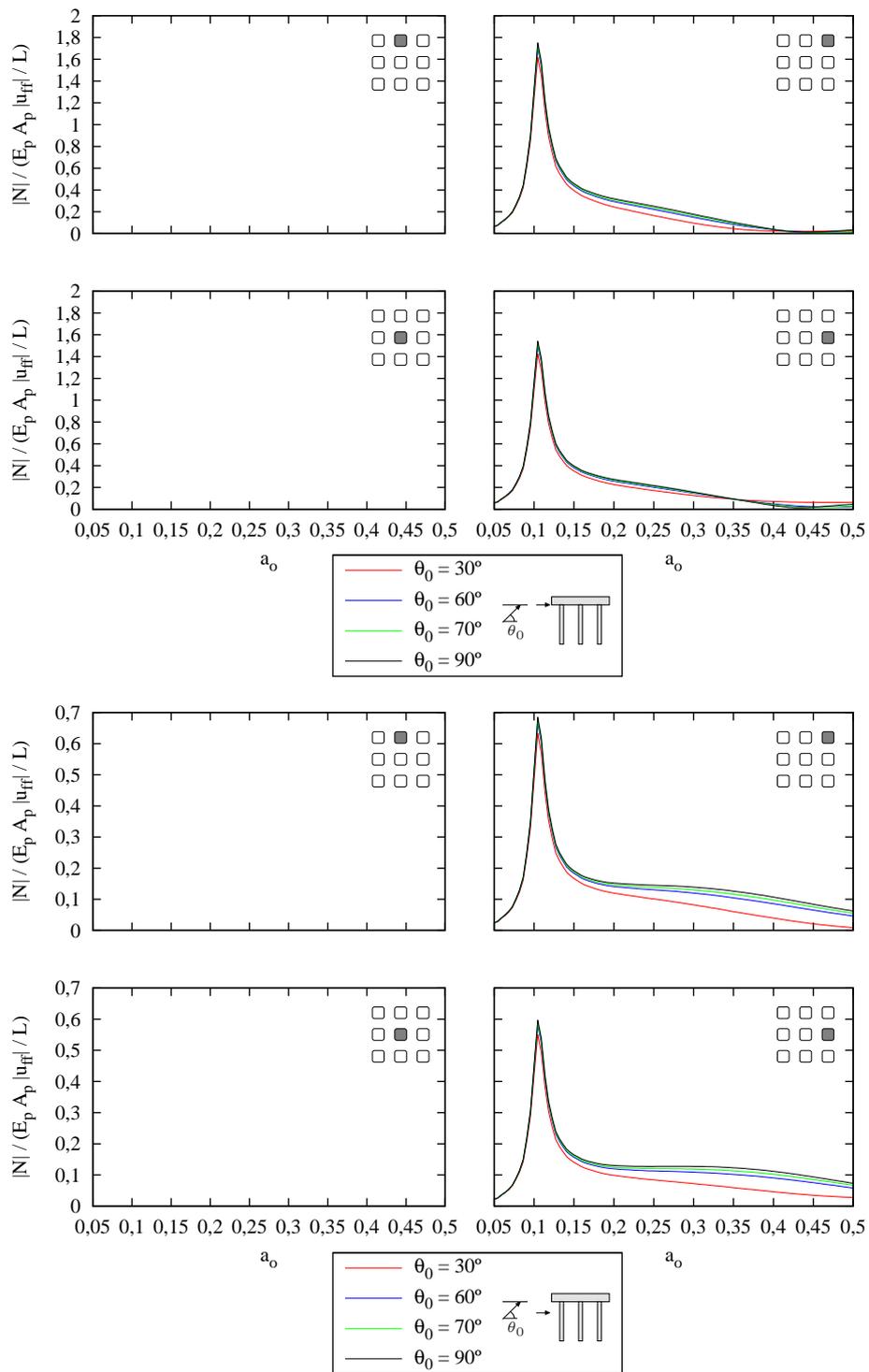


Figura 5.44: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda **SH**,  $h/b = 4$

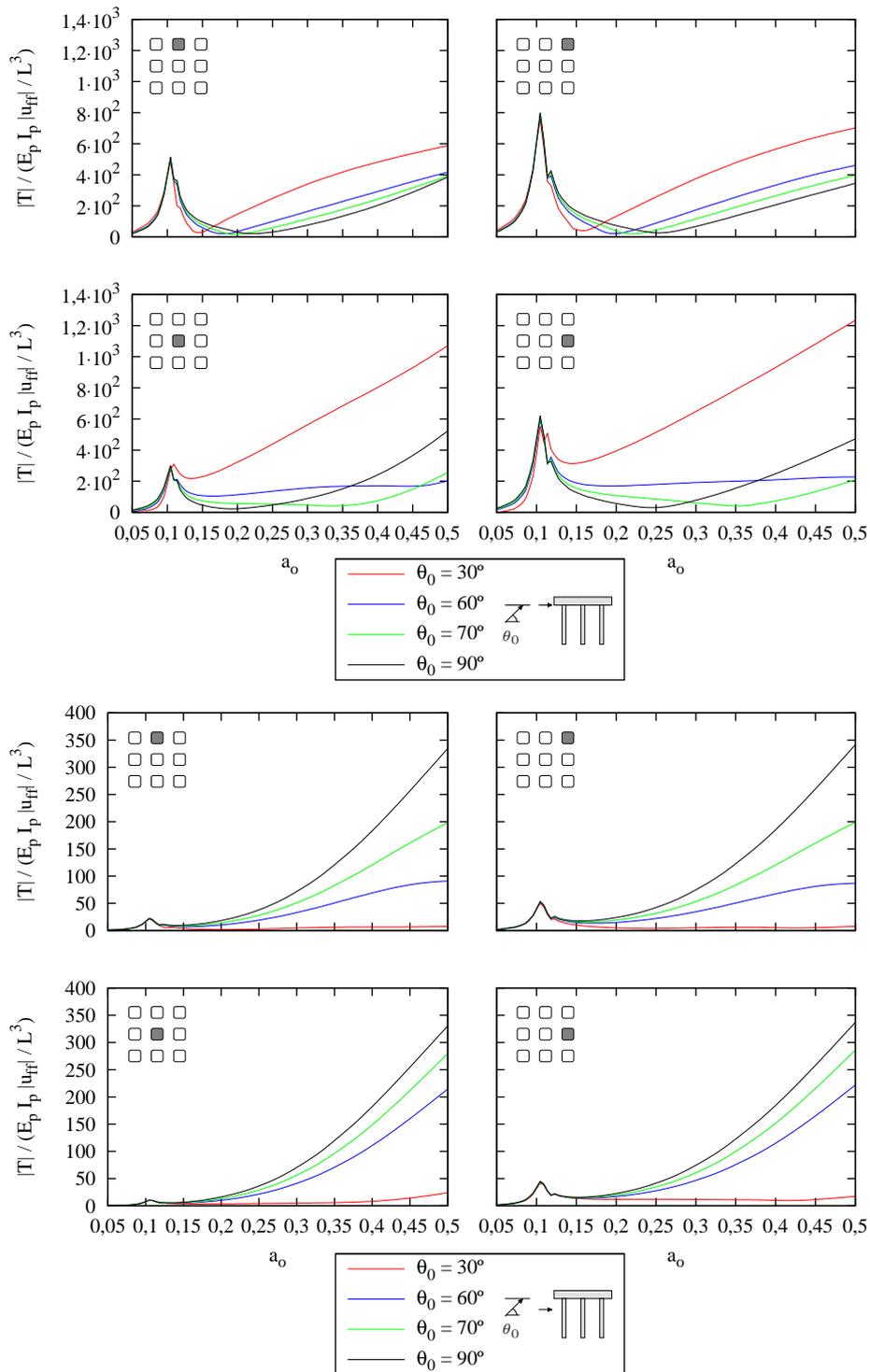


Figura 5.45: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SH,  $h/b = 4$

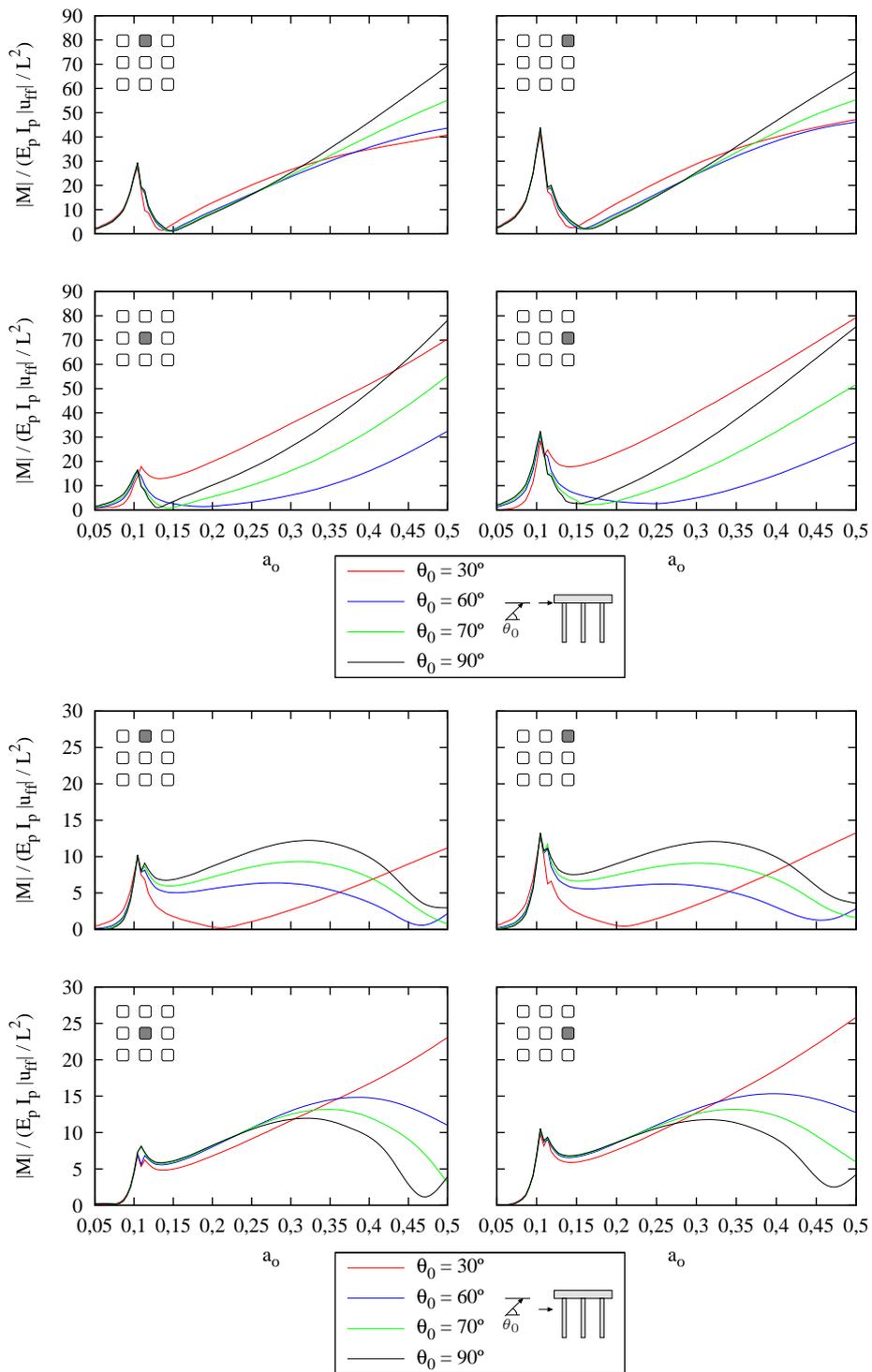


Figura 5.46: Momentos flectores en los pilotes. Onda **SH**,  $h/b = 4$

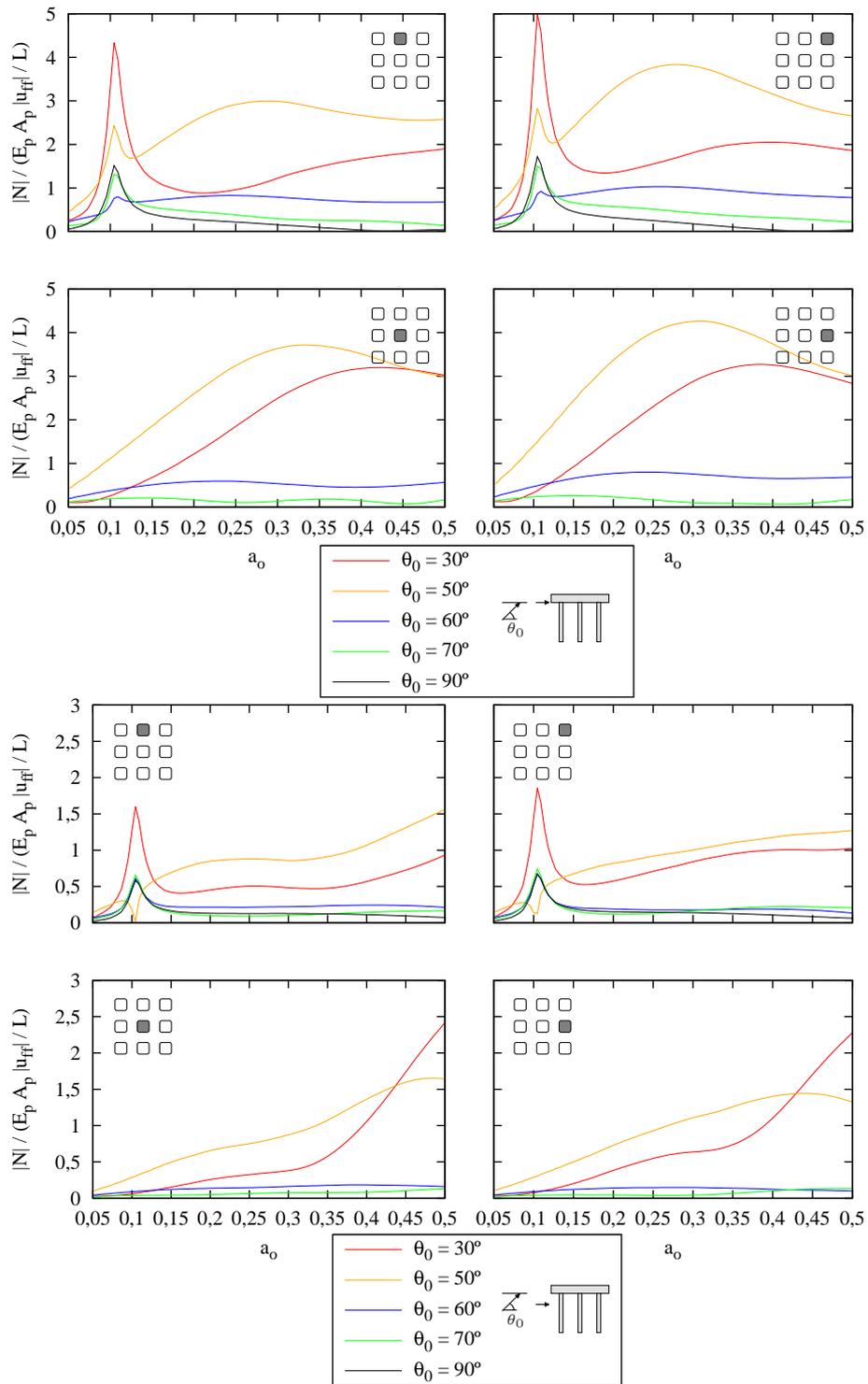


Figura 5.47: Esfuerzos axiales en los pilotes. Onda SV,  $h/b = 4$

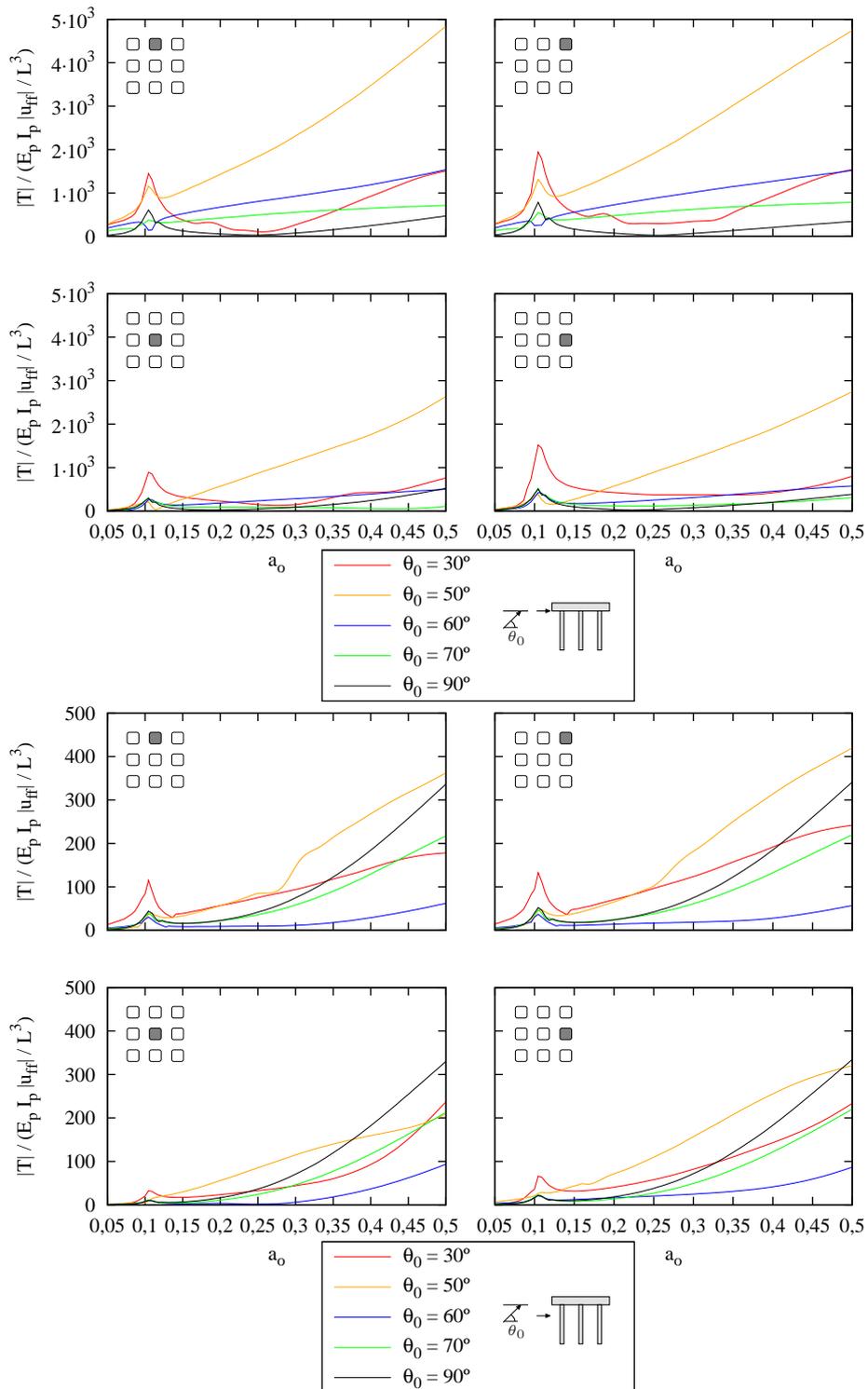


Figura 5.48: Esfuerzos cortantes en los pilotes. Onda SV,  $h/b = 4$

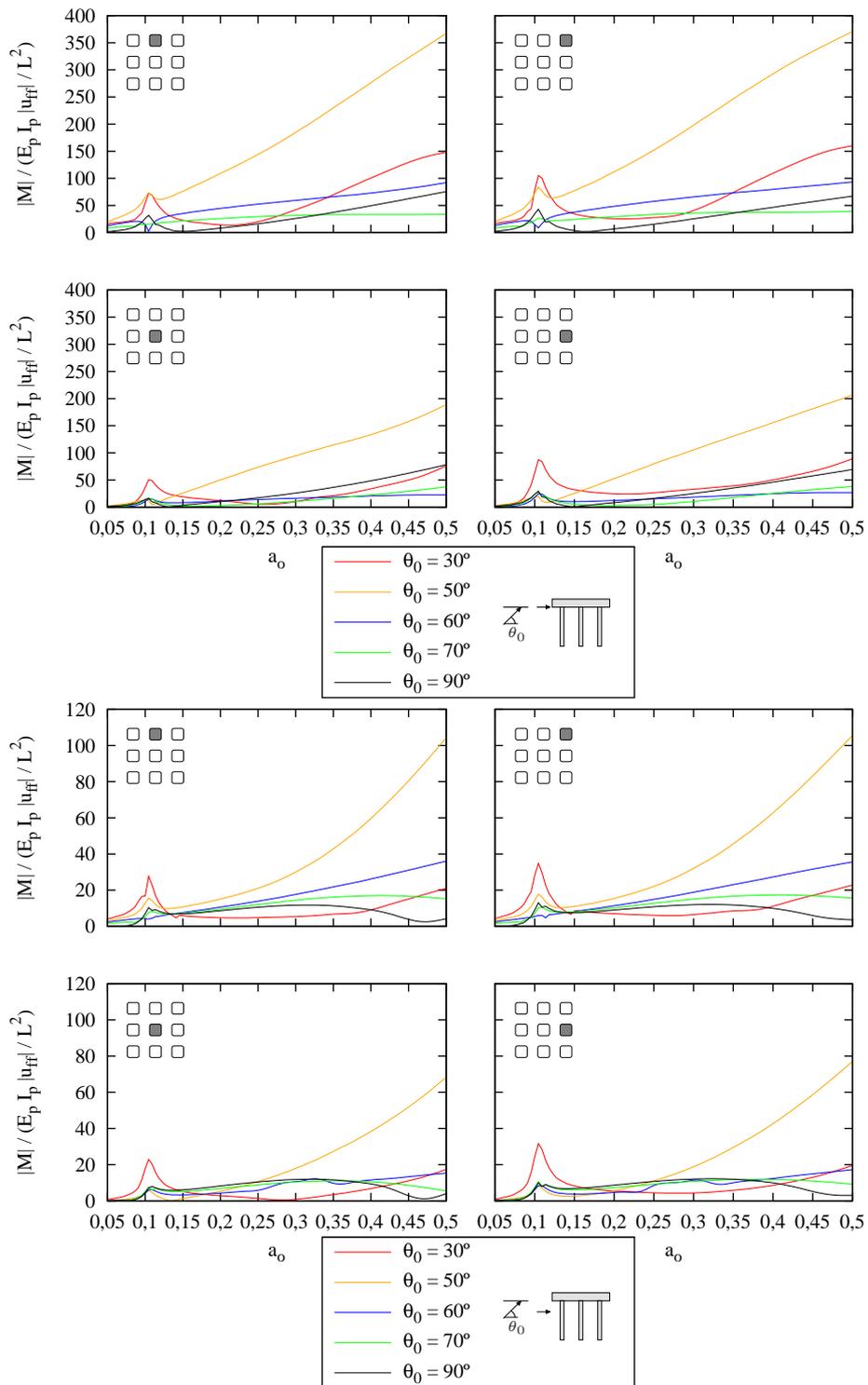


Figura 5.49: Momentos flectores en los pilotes. Onda SV,  $h/b = 4$

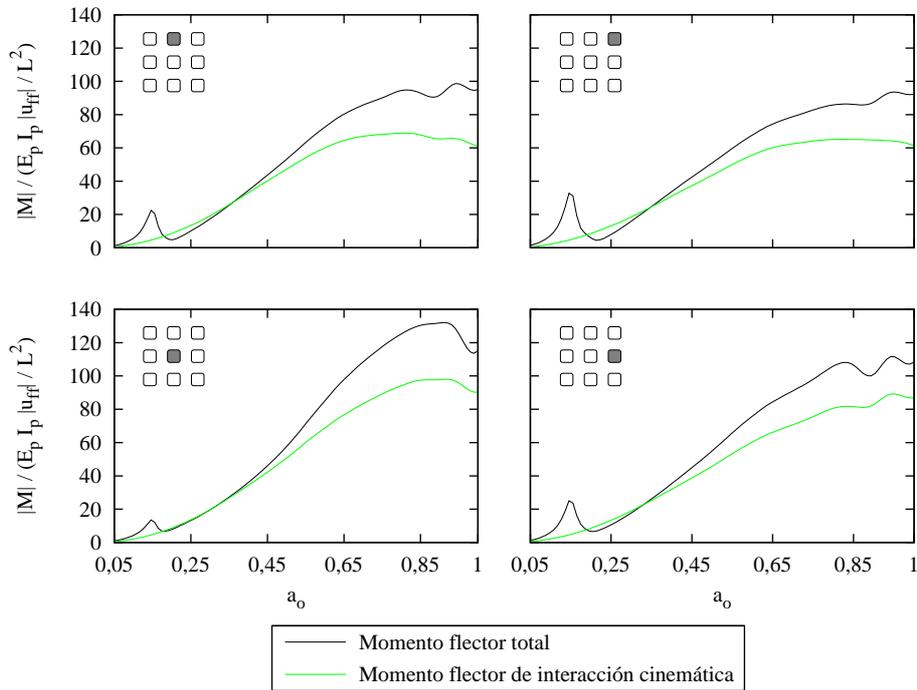


Figura 5.50: Momentos flectores en los pilotes. Onda *SH*,  $\theta_0 = 90^\circ$ ,  $h/b = 2$ ,  $a_0 \leq 1$

## 5.6. Resultados en el dominio del tiempo

### 5.6.1. Definición de los acelerogramas sintéticos a utilizar

El primer paso que debe considerarse de cara a la obtención de leyes de evolución temporal de las magnitudes cuyas funciones de transferencia se han mostrado anteriormente es la consideración de una entrada adecuada al sistema. En análisis de sistemas estructurales sometidos a acciones de tipo sísmico es posible considerar dos tipos de excitaciones: registros en aceleraciones de terremotos reales o acelerogramas sintéticos compatibles con un espectro de respuesta dado. En el presente trabajo se empleará el segundo tipo de acelerogramas.

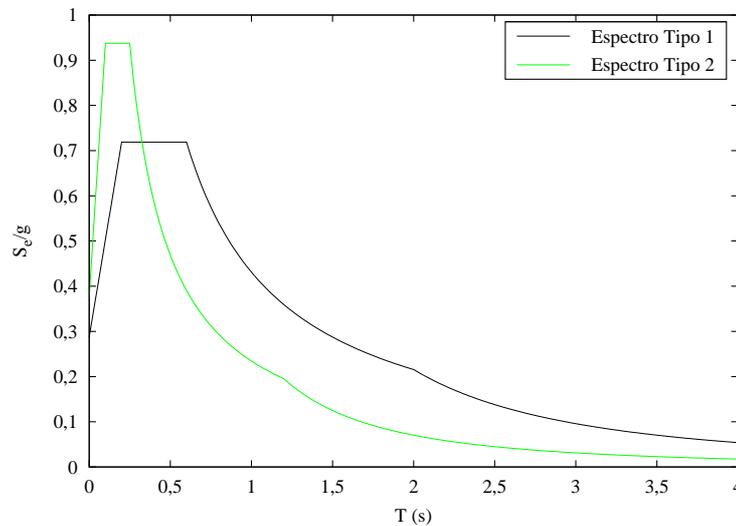
Como espectros de respuesta de referencia se emplearán en este estudio los espectros de respuesta elástica horizontal indicados en el apartado 3.2.2.2. *Horizontal elastic response spectrum* de la Parte 1 del Eurocódigo 8 [6]. La elección se justifica por tener el marco normativo en el que se encuadran carácter europeo y constituir una referencia habitual en trabajos de esta índole.

La caracterización de los espectros de respuesta de la mencionada normati-

va exige el conocimiento de un parámetro de carácter geotécnico (velocidad de propagación de las ondas de corte en el medio, la cual cuantifica la rigidez del medio por donde el evento sísmico se propaga), de otro relacionado con la escala de magnitud de onda superficial ( $M_s$ ) de los terremotos que contribuyen en mayor medida al riesgo sísmico en el emplazamiento de la estructura (tratándose, por tanto, de un parámetro que mide el tamaño de los terremotos que más contribuyen al riesgo sísmico en el lugar de estudio), de un tercero asociado a la aceleración de diseño en suelo tipo  $A$  del citado emplazamiento (siendo un valor característico de la aceleración horizontal de la superficie del terreno y de la peligrosidad sísmica del emplazamiento) y de la cantidad de amortiguamiento considerada. El conocimiento de la primera magnitud permite clasificar el suelo como tipo  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  o  $E$ , lo que, a su vez, determina los parámetros de diseño del espectro. La normativa empleada establece dos tipologías diferentes de espectro, denominados espectros de tipo 1 y de tipo 2, cuya elección debe realizarse de acuerdo a la escala de magnitud de onda superficial ( $M_s$ ) anteriormente indicada. Por último, la aceleración de diseño y el factor de amortiguamiento permiten definir completamente las ecuaciones que describen la forma del espectro.

Las funciones de transferencia obtenidas con anterioridad en el dominio de la frecuencia son adimensionales. La determinación de la velocidad de propagación de las ondas de corte en el medio exige fijar algunas propiedades del sistema. Tomando, por ejemplo, un diámetro del pilote  $d = 1$  m y un módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young del pilote de  $E_p = 2,2 \cdot 10^8$  N/m<sup>2</sup>, puede comprobarse que la separación entre pilotes es  $s = 5$  m, que la longitud de los mismos vale  $L = 15$  m y que la velocidad de propagación de las ondas de corte en el medio alcanza los 210 m/s. Por otro lado, el porcentaje de amortiguamiento se supone igual al 5 % y se estima una aceleración de diseño de 0,25 g. A los valores indicados les corresponde un suelo de tipo  $C$  de acuerdo a la clasificación del Eurocódigo 8 (tabla 3.1. *Ground types*). La existencia de dos espectros diferentes (asociados a terremotos de magnitud de onda superficial  $M_s$  diferentes) permite generar, para unas mismas propiedades de suelo y estructura, dos acelerogramas de características diferenciadas. Por ello, en el presente trabajo se usarán ambos tipos de espectros, a fin de obtener una mayor variedad de resultados. Los espectros son los que se adjuntan en la figura 5.51.

Una vez determinados los espectros de respuesta, es posible pasar a generar los acelerogramas compatibles con los mismos. El proceso se fundamenta en la generación de un acelerograma a partir de un sumatorio de ondas senoidales el tipo  $\sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ , donde los ángulos de fase se generan de manera aleatoria y las amplitudes se fijan de acuerdo al espectro de respuesta deseado. La generación de estos acelerogramas se realiza con ayuda del programa *SIMQKE* [45], el cual genera acelerogramas compatibles con un espectro de respuesta empleado como entrada. Los acelerogramas sintéticos generados cumplen con el conjunto de



**Figura 5.51:** Espectros de respuesta elástica empleados en el trabajo

condiciones establecidas en el punto 3.2.3.1.2. *Artificial accelerograms* de la Parte 1 del Eurocódigo 8.

Los acelerogramas generados poseen una duración de 30 segundos, con una aceleración máxima de 0,288 g para los compatibles con los espectros de tipo 1 y de 0,375 g para los compatibles con los espectros de tipo 2. Se emplean tres acelerogramas por espectro a fin de obtener resultados con una cierta relevancia estadística. Los acelerogramas generados, para cada tipo de espectro de respuesta considerado, pueden observarse en la figura 5.52 para los espectros tipo 1 y en la figura 5.53 para los espectros de tipo 2.

Los acelerogramas generados deben de ser sometidos a un proceso de corrección de la línea base a fin de garantizar que se cumplen las siguientes condiciones:

- La aceleración media es igual a cero.
- La velocidad inicial es igual a cero.
- La velocidad media es igual a cero.
- La velocidad cuadrática media es mínima.

El proceso de corrección de la línea base es el descrito por Kausel y Ushijima en [46]. De esta manera, los acelerogramas corregidos son los que se muestran en las figuras 5.54 y 5.55, correspondiéndose el primero a los acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 1 y el segundo con el espectro de tipo 2.

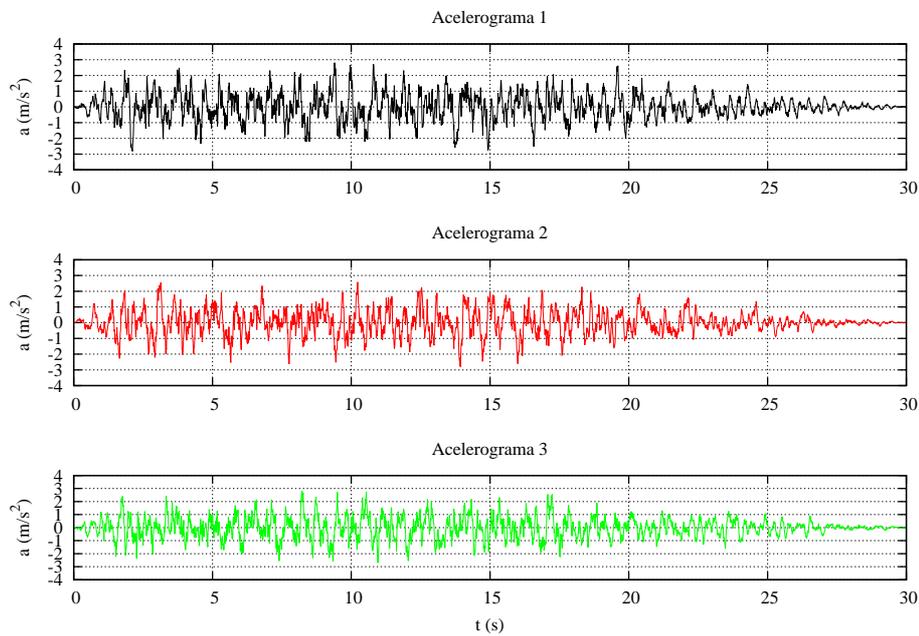


Figura 5.52: Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1

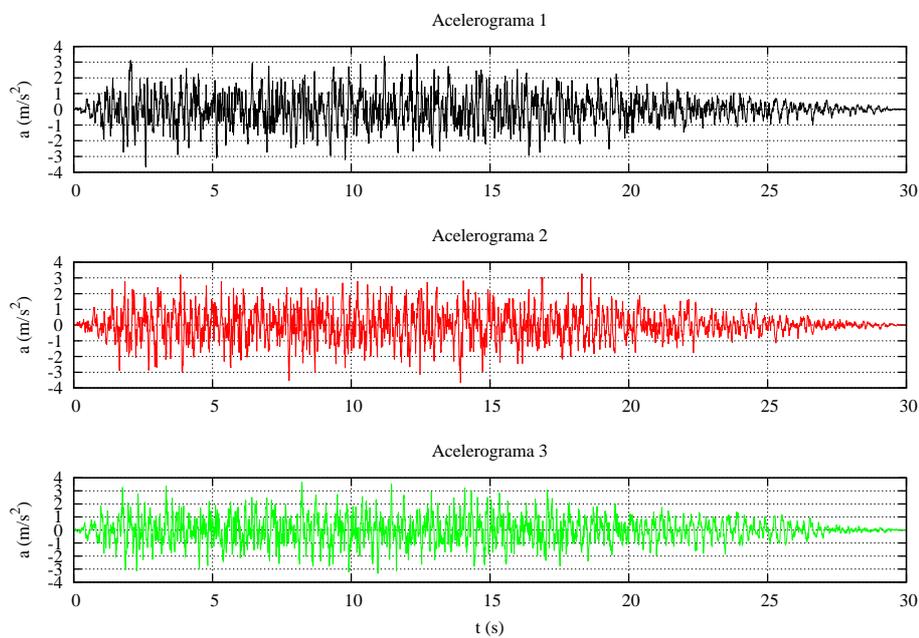
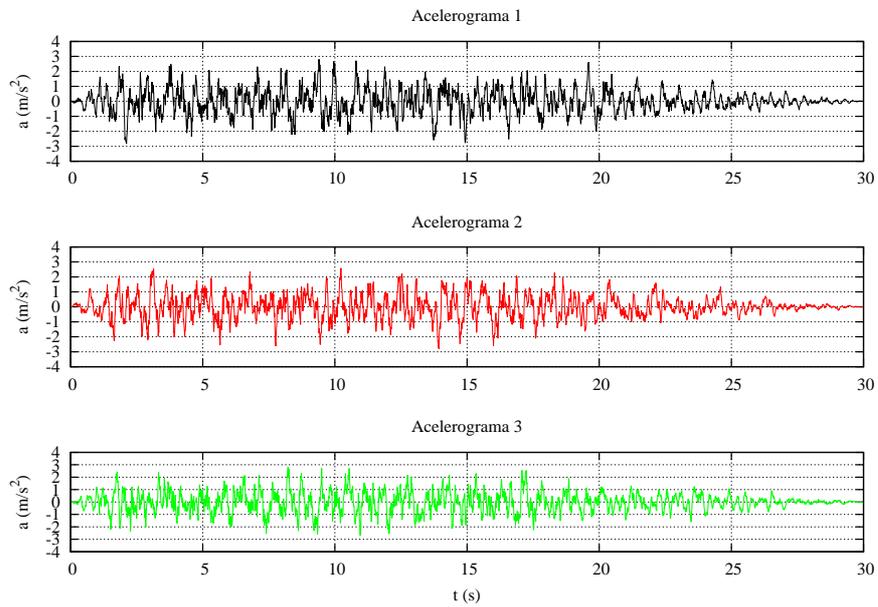
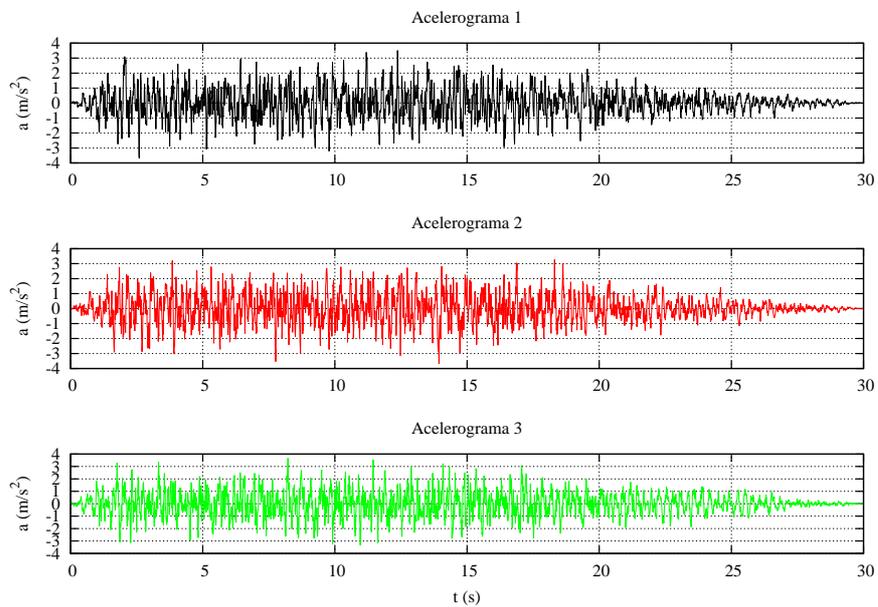


Figura 5.53: Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2



**Figura 5.54:** Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1. Línea base corregida



**Figura 5.55:** Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2. Línea base corregida

Es importante determinar la correlación existente entre los distintos acelerogramas generados a fin de poder garantizar su independencia. La tabla 5.3 recoge los valores del coeficiente de correlación de Pearson de los tres acelerogramas de cada tipo, verificándose la escasa correlación existente entre ellos, inferior en todo caso al 10%. La expresión del coeficiente de correlación de Pearson para una muestra poblacional de tamaño  $n$  [47] es la siguiente:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X})(Y_i - \hat{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y})^2}} \quad (5.9)$$

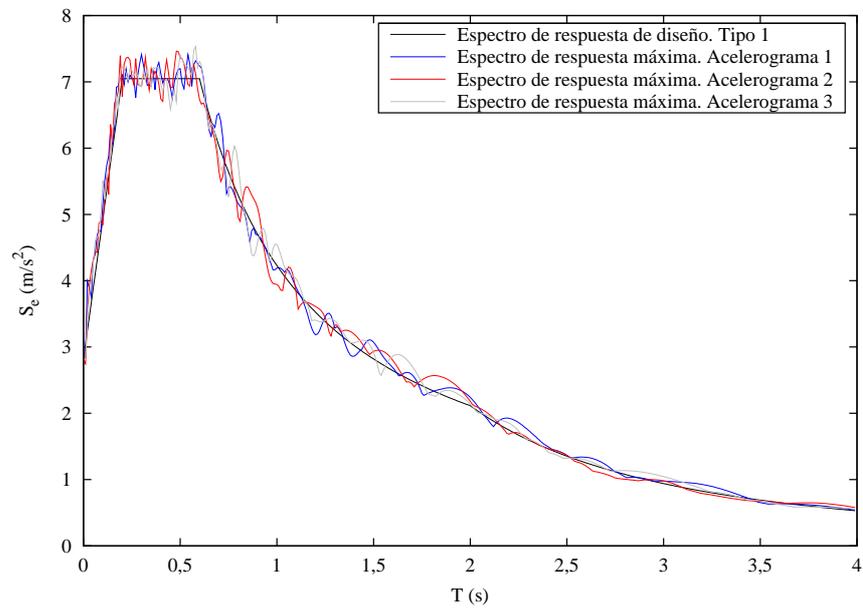
siendo  $X_i$  e  $Y_i$  los  $i$ -ésimos valores muestrales del par comparado y  $\hat{X}$  y  $\hat{Y}$  sus medias.

	A1	A2	A3
A1	1	0,056	-0,002
A2	0,056	1	-0,081
A3	-0,002	-0,081	1

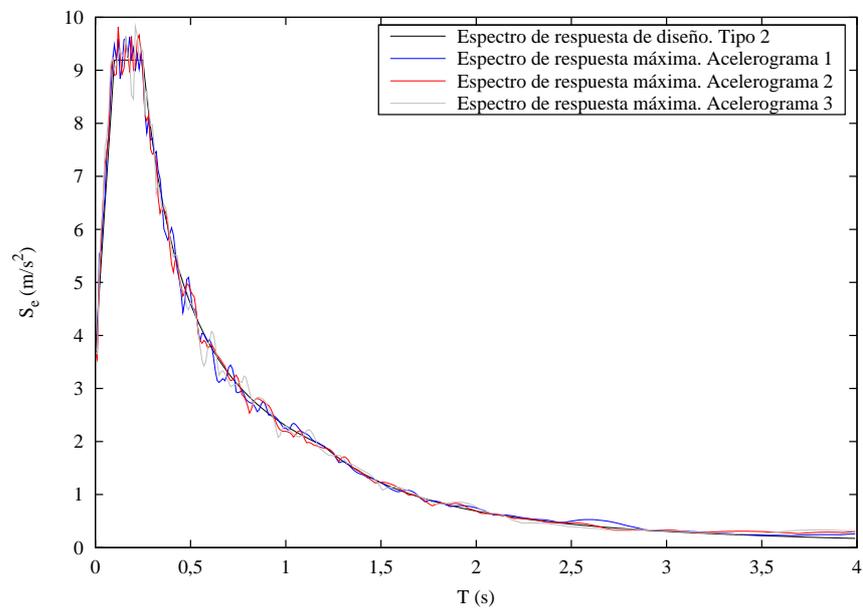
	A1	A2	A3
A1	1	0,001	-0,045
A2	0,001	1	-0,096
A3	-0,045	-0,096	1

**Cuadro 5.3:** *Coeficiente de correlación de Pearson de los acelerogramas. Acelerogramas compatibles con los espectros de tipo 1 (izquierda) y con los espectros de tipo 2 (derecha)*

Por último, las figuras 5.56 y 5.57 muestran las comparativas entre los espectros de respuesta máxima de los acelerogramas generados y los espectros de respuesta de diseño del Eurocódigo 8, conteniendo la primera la información relativa a los espectros de tipo 1 y la segunda la correspondiente a los de tipo 2.



**Figura 5.56:** Comparativa entre los espectros de respuesta de diseño y los espectros de respuesta de los acelerogramas generados. Tipo 1



**Figura 5.57:** Comparativa entre los espectros de respuesta de diseño y los espectros de respuesta de los acelerogramas generados. Tipo 2

### 5.6.2. Espectros de Fourier de los acelerogramas empleados

Es posible obtener la respuesta del sistema en el dominio del tiempo mediante la transformación al dominio complejo de la frecuencia de la señal de entrada haciendo uso de la Transformada Discreta de Fourier para, posteriormente, realizar el producto de la función de transferencia por la entrada transformada y regresar al dominio del tiempo mediante la realización de la Transformada Discreta Inversa de Fourier del citado producto. Es habitual emplear el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (o *FFT*, del inglés *Fast Fourier Transform*), desarrollado por Cooley y Tukey [48], cuya eficiencia computacional para el cálculo de Transformadas Discretas de Fourier (y de sus inversas) es muy superior a la de otros algoritmos clásicos. Por ello, se empleará un algoritmo *FFT* para realizar las transformaciones tiempo-frecuencia (y viceversa) que se precisen en este trabajo.

Los espectros de amplitudes de Fourier hasta la frecuencia de Nyquist (que, para un paso de tiempo  $\Delta t = 0,01$  s, es igual a 314,159 rad/s) de los acelerogramas generados pueden observarse en las figuras 5.58 y 5.59 para los acelerogramas compatibles con los espectros de respuesta tipo 1 y 2, respectivamente.

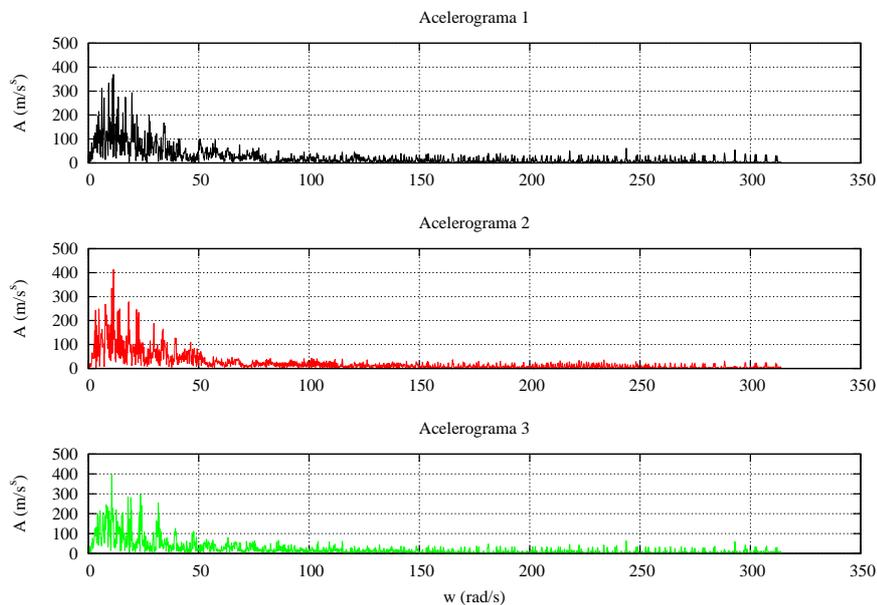
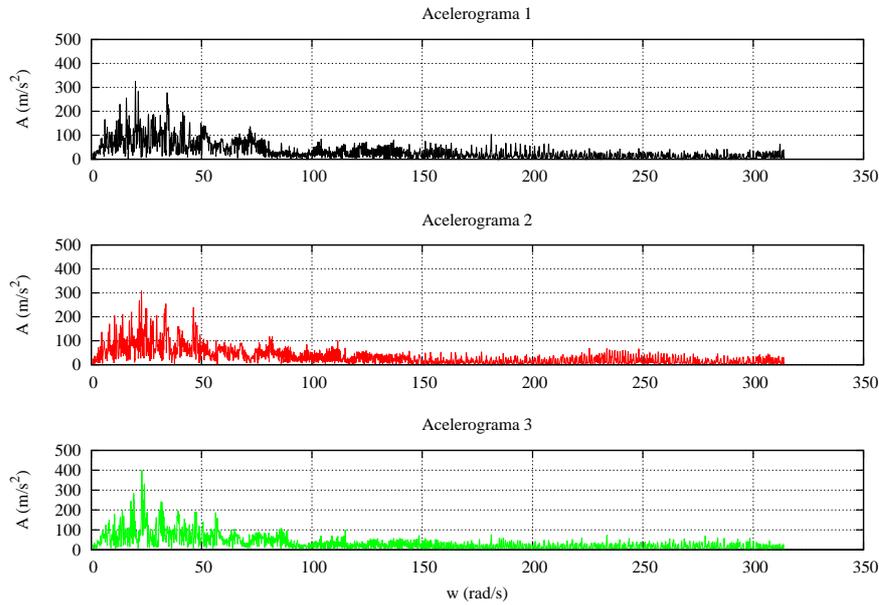


Figura 5.58: Espectro de amplitudes de Fourier de los acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1



**Figura 5.59:** Espectro de amplitudes de Fourier de los acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2

### 5.6.3. Sobre la obtención de la evolución temporal de los esfuerzos en los pilotes

El proceso de determinación de las leyes de evolución temporal de los esfuerzos en los pilotes prosigue con la realización del producto de los espectros de amplitudes de Fourier obtenidos por los valores correspondientes de las funciones de transferencia de los esfuerzos. Es necesario destacar que los valores de las funciones de transferencia de los esfuerzos se encuentran adimensionalizados entre el módulo del desplazamiento horizontal de campo libre y la rigidez al esfuerzo correspondiente del pilote. Así, los esfuerzos axiales están adimensionalizados por división de su módulo entre  $(|u_{ff}| E_p A_p / L)$ , los esfuerzos cortantes por división del módulo entre  $(|u_{ff}| E_p I_p / L^3)$  y los momentos flectores por el cociente entre su módulo y  $(|u_{ff}| E_p I_p / L^2)$ .

Debe notarse que es necesaria alguna transformación del input si este viene dado en aceleraciones para que su producto por las funciones de transferencia devuelva esfuerzos. En concreto, es preciso transformar el módulo del desplazamiento de campo libre a módulo de la aceleración de campo libre. Esto puede llevarse a cabo dividiendo cada función de transferencia entre  $-\omega^2$ , siendo  $\omega$  la frecuencia correspondiente en rad/s. Por estar trabajando en el dominio de la frecuencia y ser las variables armónicas, si se denota por  $u$  a los desplazamientos,  $u = U e^{i\omega t}$ .

De esta manera, la velocidad puede obtenerse por derivación temporal de la expresión anterior, pudiendo ponerse como  $\dot{u} = i \omega U e^{i \omega t}$ . Derivando nuevamente respecto al tiempo se obtiene la expresión de la aceleración  $\ddot{u} = -\omega^2 U e^{i \omega t}$ . Así, la relación entre las aceleraciones y los desplazamientos puede expresarse como  $\ddot{u}/u = -\omega^2$ , lo que justifica la afirmación anterior según la cual el módulo del desplazamiento de campo libre se transformaba en módulo de la aceleración de campo libre dividiendo las funciones de transferencia entre  $-\omega^2$ .

Esta modificación de las funciones de transferencia puede evitarse si el input del sistema viene dado en desplazamientos, caso en el cual la transformada inversa del producto entre la función de transferencia del esfuerzo analizado y la transformada de la entrada devuelve directamente la ley de evolución temporal del esfuerzo. Esto es así porque las funciones de transferencia se encuentran adimensionalizadas entre el desplazamiento horizontal de campo libre y las entradas están dadas en términos de esos desplazamientos horizontales. Es decir, si se denota por  $|E|$  al módulo del esfuerzo estudiado y por  $R$  a la correspondiente rigidez al mismo,  $[|E| / (|u_{ff}| R)] \cdot |u_{ff}| = |E|/R$ .

No existen grandes diferencias entre el empleo de ambas metodologías. Siendo pues las dos opciones análogas, en este trabajo se ha optado por emplear la entrada en aceleraciones por facilidad operativa.

#### 5.6.4. Evolución temporal del momento flector en la cabeza de los pilotes

Comentado el procedimiento de generación de acelerogramas sintéticos compatibles con un determinado espectro de respuesta y estudiado el procedimiento de transformación del dominio del tiempo al de la frecuencia, y viceversa, es momento de obtener las leyes de evolución temporal de los esfuerzos en las cabezas de los pilotes del sistema estudiado.

El sistema estructural descrito en la sección 5.3, cuyas funciones de transferencia en esfuerzos fueron obtenidas en el apartado 5.5.4 se somete a un movimiento sísmico definido empleando, exclusivamente, un conjunto de acelerogramas, obtenidos en el punto 5.6.1, que definen aceleraciones en una dirección horizontal para un punto lejano de la superficie libre (representando el denominado desplazamiento de campo libre).

Los desplazamientos de campo libre que genera la incidencia de ondas SH son exclusivamente horizontales, independientemente del ángulo de incidencia con el que éstas se propaguen, como puede verificarse atendiendo a la ecuación (4.2). Por ello, la consideración realizada en el párrafo anterior no implica ninguna simplificación o hipótesis adicional.

La incidencia de ondas SV con un ángulo distinto de 90 grados (o de ondas P) genera desplazamientos horizontales y verticales de manera conjunta, como se

comprueba en la ecuación (4.27) para ondas SV. Estos desplazamientos horizontales y verticales se encuentran unívocamente relacionados entre sí. El procedimiento seguido en este trabajo implica que el sistema está siendo sometido a movimientos sísmicos horizontales y verticales. Los primeros se definen por los acelerogramas del apartado 5.6.1, estando los segundos relacionados con ellos por las ecuaciones (4.27) en el caso de ondas SV y (4.9) en el caso de ondas P incidentes. De esta manera, los acelerogramas horizontales y verticales se encuentran correlacionados, en contra de la independencia y falta de correlación que deberían poseer. Un procedimiento como el descrito por García *et ál.* en [49] permitiría que una combinación de ondas P y S, incidentes con el mismo ángulo, generase una terna de acelerogramas independientes entre sí y compatibles con los espectros de respuesta correspondientes de la normativa seguida.

El autor, siendo consciente de la simplificación empleada, ha considerado oportuno evaluar la influencia, en un primer análisis, de una única onda a fin de tratar de estimar la influencia del ángulo de incidencia y tipo de onda en los resultados de manera aislada. La implementación de procedimientos como el indicado permitiría obtener combinaciones de ondas P y S que generasen acelerogramas no correlacionados entre sí. La comparación de los resultados obtenidos implementando la metodología de García *et ál.* con los presentados en este trabajo posibilitaría la realización de un análisis de sensibilidad del problema a la correlación entre acelerogramas horizontales y verticales. Este proceso, que si bien resulta interesante, está fuera del alcance del presente documento, constituyendo una interesante línea futura de investigación.

De cara a la representación de los resultados se ha optado por determinar el valor máximo del historial de momentos flectores en cada pilote para cada problema estudiado. Este valor se ha obtenido para cada acelerograma y para los problemas de interacción cinemática y del sistema completo con relaciones de aspecto  $h/b = 2$  y  $h/b = 4$ . A fin de obtener una magnitud con la que comparar los resultados, se ha procedido a determinar el momento de agotamiento de una sección circular de hormigón armado de un metro de diámetro y 8 centímetros de recubrimiento con tres armados diferentes sometida, además, a un esfuerzo axial variable entre 0 y 500 kN. De este modo, si el armado es de 10 barras de acero corrugado B-500-S de 25 milímetros de diámetro nominal, es posible comprobar haciendo uso de diagramas de interacción [50] que el rango de momentos de agotamiento de la sección varía entre  $8,508 \cdot 10^5$  y  $9,817 \cdot 10^5$  N·m. Se estudia también el mismo problema con un armado de 16 barras de acero corrugado B-500-S de 32 milímetros de diámetro nominal, proporcionando unos momentos de agotamiento de  $1,898 \cdot 10^6$  y  $2,016 \cdot 10^6$  N·m. Por último, se incluye como referencia una sección fuertemente armada con 26 barras de acero corrugado B-500-S de 32 milímetros de diámetro nominal y unos momentos tope de entre  $2,88 \cdot 10^6$  y  $2,971 \cdot 10^6$  N·m.

Las figuras 5.60, 5.61, 5.62 y 5.63 representan la variación de los momentos

flectores máximos con el ángulo de incidencia en los problemas de ondas SH incidentes y acelerogramas compatibles con los espectros tipo 1 y 2 y en los problemas de ondas SV incidentes y acelerogramas compatibles con los espectros tipo 1 y 2, representando cada fila los resultados para cada uno de los tres acelerogramas artificiales generados. Debe indicarse que las líneas de tendencia entre dos valores del ángulo de incidencia se incluyen únicamente por simplificar la visualización e interpretación de los resultados y no deben entenderse como una evolución rigurosa de los esfuerzos con el ángulo de incidencia.

Se constata, en primer lugar, la escasa diferencia existente entre los resultados que se obtienen entre cada conjunto de tres acelerogramas del mismo tipo, con excepción hecha de los valores obtenidos para los acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 1 y en el caso del sistema completo con esbeltez  $h/b = 4$ , caso en el que existen ligeras diferencias entre los resultados que se obtienen para cada acelerograma. Además, los esfuerzos que aparecen para los acelerogramas compatibles con los espectros de tipo 2 son, en todos los casos, inferiores. En general, puede decirse que la variación de los momentos máximos con el ángulo de incidencia para acelerogramas generados por ondas SH incidentes es pequeña, con valores ligeramente mayores para ángulos de incidencia de  $30^\circ$  en el problema de interacción cinemática, diferencias prácticamente inapreciables para el problema con  $h/b = 2$  y valores muy parecidos para el problema con  $h/b = 4$  en todos los pilotes salvo en el central superior, donde se observa una tendencia de incremento de los esfuerzos conforme la onda se vuelve más vertical.

Los resultados para ondas SV incidentes exhiben, en todos los casos, grandes diferencias entre los valores obtenidos para los pilotes centrales y los exteriores, con resultados muy superiores en estos últimos. Además, la influencia del ángulo de incidencia en la respuesta del sistema en términos de momentos máximos en los pilotes es muy grande en todos los casos, con mención especial de los ángulos subcríticos y, en particular, del ángulo  $50^\circ$ , el cual produce, en todos los casos, esfuerzos mayores. Se confirma de esta manera que la incidencia vertical no es la situación más desfavorable en términos de esfuerzos en los pilotes.

Deben destacarse también las semejanzas existentes entre los valores obtenidos para los problemas de interacción cinemática y para el problema completo con relación de aspecto  $h/b = 2$ , llegando a ser menores los esfuerzos en algunos casos para el problema que incorpora interacción inercial. Esto puede explicarse atendiendo al hecho de que los esfuerzos del problema de interacción cinemática contrarrestan a ciertas frecuencias los correspondientes al problema de interacción inercial. Para ilustrar este efecto, la figura 5.64 muestra, para el pilote central del problema de ondas SV incidentes y para un ángulo de incidencia de  $30^\circ$ , las partes real e imaginaria de las funciones de transferencia de momentos que provocan giro en torno al eje  $x_2$ . En la parte superior, se presentan los momentos obtenidos del problema de interacción cinemática, mientras que en la central los resultantes

exclusivamente de la interacción inercial y en la inferior los momentos totales obtenidos tanto por la superposición de los dos anteriores como por el método directo. El momento del problema de interacción inercial se obtiene como el producto del momento del problema de impedancia horizontal (es decir, del problema de desplazamiento horizontal unitario) por el desplazamiento horizontal del encepado en el problema total menos el desplazamiento del problema de interacción cinemática (es decir, el desplazamiento del problema de interacción inercial en exclusiva) más el momento del problema de impedancia de giro (correspondiente al problema de giro unitario) por el giro total del encepado menos el giro del problema de interacción cinemática (siendo, por tanto, el giro del problema de interacción inercial). Matemáticamente, puede expresarse como:

$$M_{in} = M_{imp.hor.} (u_{total} - u_{cin}) + M_{imp.giro} (\varphi - \varphi_{cin}) \quad (5.10)$$

siendo  $M_{in}$  el momento flector del problema de interacción inercial,  $M_{imp.hor.}$  el momento del problema de impedancia horizontal,  $u_{total}$  el desplazamiento horizontal del encepado,  $u_{cin}$  el desplazamiento horizontal del encepado para el problema de interacción cinemática,  $M_{imp.giro}$  el momento flector del problema de impedancia de giro,  $\varphi$  el giro del encepado y  $\varphi_{cin}$  el giro del encepado en el problema de interacción cinemática.

Obsérvese que, en este caso, los momentos obtenidos de la interacción cinemática y de la interacción inercial poseen, para la mayor parte de las frecuencias, signos distintos. Se explica así lo comentado anteriormente. La parte inferior de la figura, que muestra los momentos totales obtenidos por el método directo y por el método de subestructuración, es útil para comprobar los códigos utilizados. Como puede verse, el acuerdo entre los resultados obtenidos por ambas metodologías es muy alto.

A fin de caracterizar estadísticamente la magnitud de las respuestas temporales se presentan también resultados en términos de valores cuadráticos medios. Así, si se tienen los valores de una función  $f$  en un conjunto discreto de  $n$  puntos, el valor cuadrático medio de la misma puede obtenerse como:

$$f_{RMS} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{f(i)^2}{n}} \quad (5.11)$$

siendo  $f(i)$  el valor de la función en el punto  $i$ -ésimo.

Los valores cuadráticos medios de los momentos flectores pueden observarse en las figuras 5.65, 5.66, 5.67 y 5.68. Respectivamente, representan los valores cuadráticos medios del problema con ondas SH incidentes con acelerogramas compatibles con espectros tipo 1 y 2 y del problema con ondas SV incidentes con acelerogramas compatibles con los espectros tipo 1 y 2.

Los resultados y las tendencias observables son muy semejantes a los obtenidos para los esfuerzos máximo, observándose una clara disminución de los valores en relación a los esfuerzos máximos. Debe indicarse que las escalas de representación escogidas para estos casos son también menores, lo que provoca que las bandas que indican los momentos máximos resistidos puedan llegar a desaparecer de las figuras (como ocurre en 5.66).

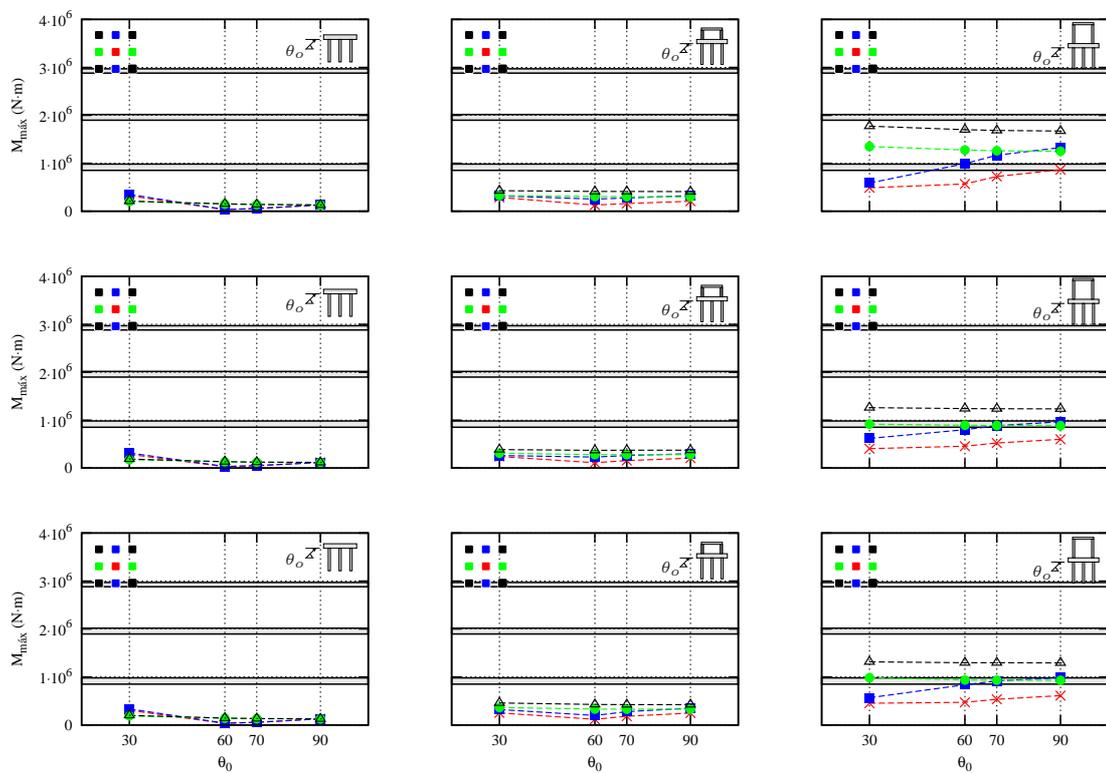
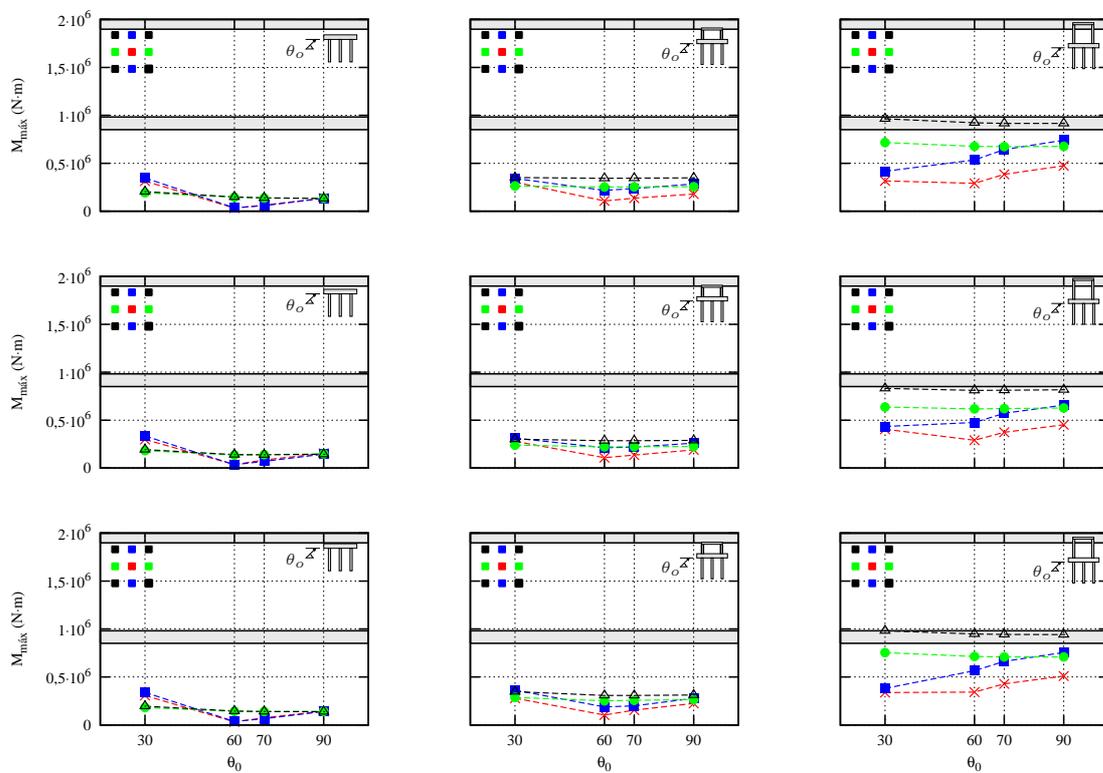


Figura 5.60: Momentos máximos en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda),  $h/b = 2$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1



**Figura 5.61:** Momentos máximos en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda),  $h/b = 2$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2

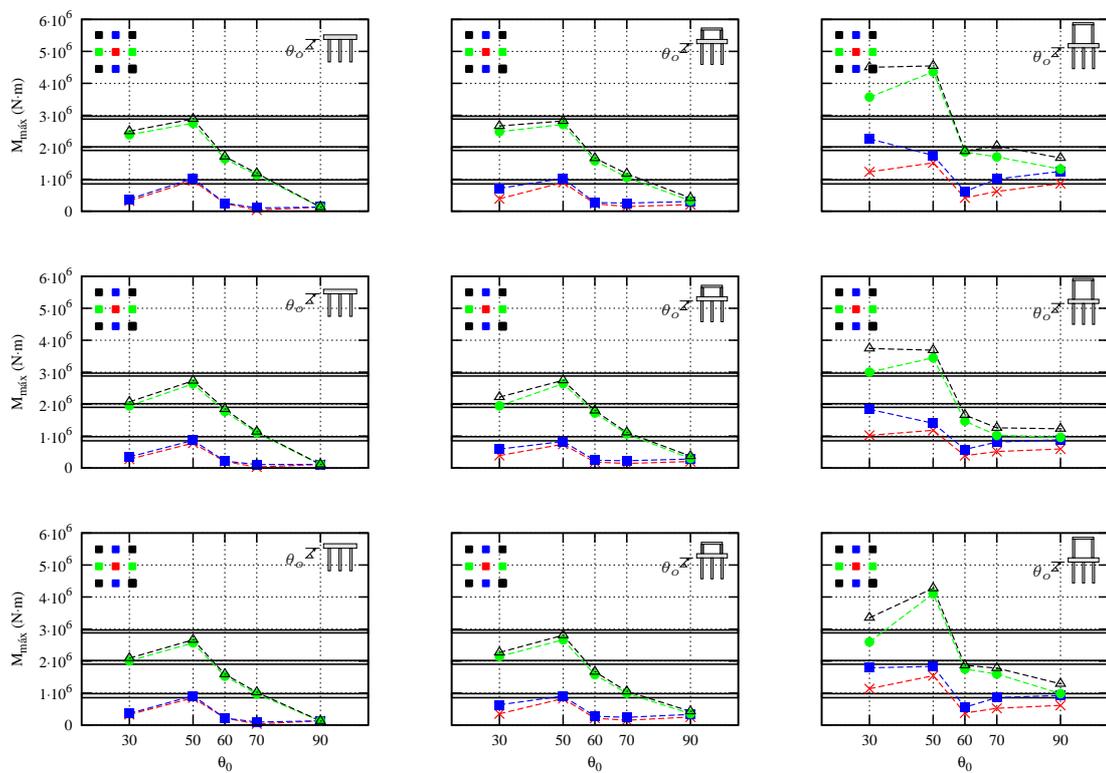
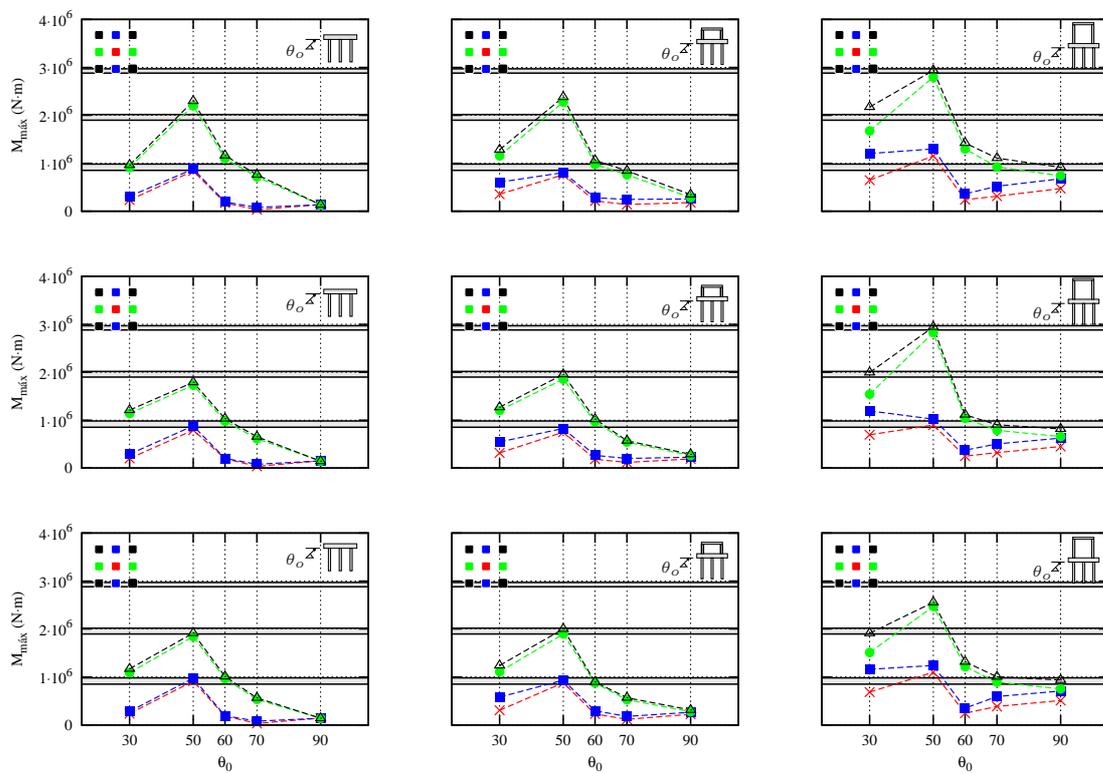
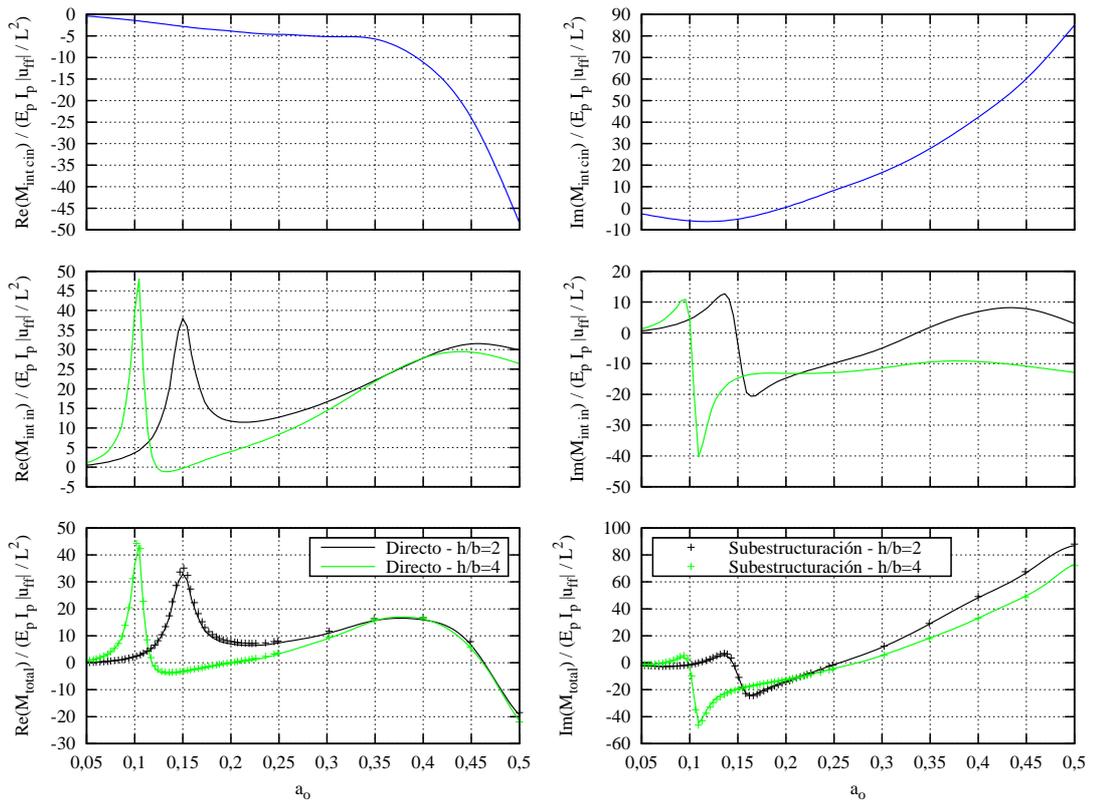


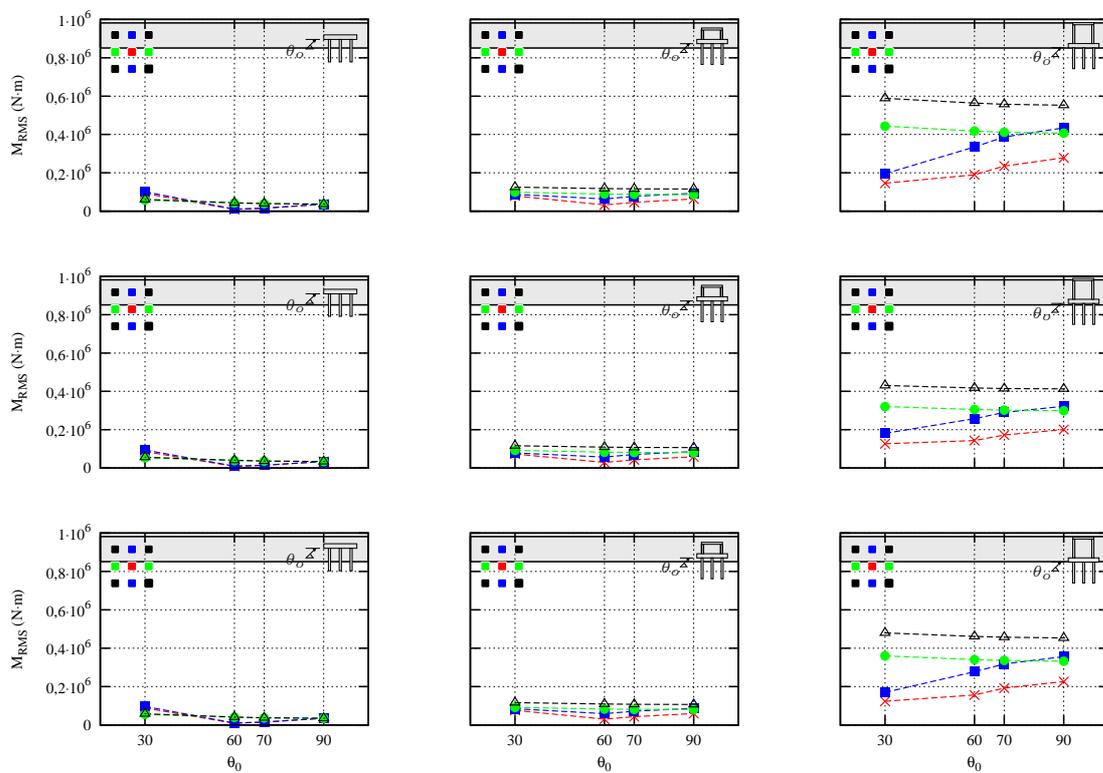
Figura 5.62: Momentos máximos en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda),  $h/b = 2$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1



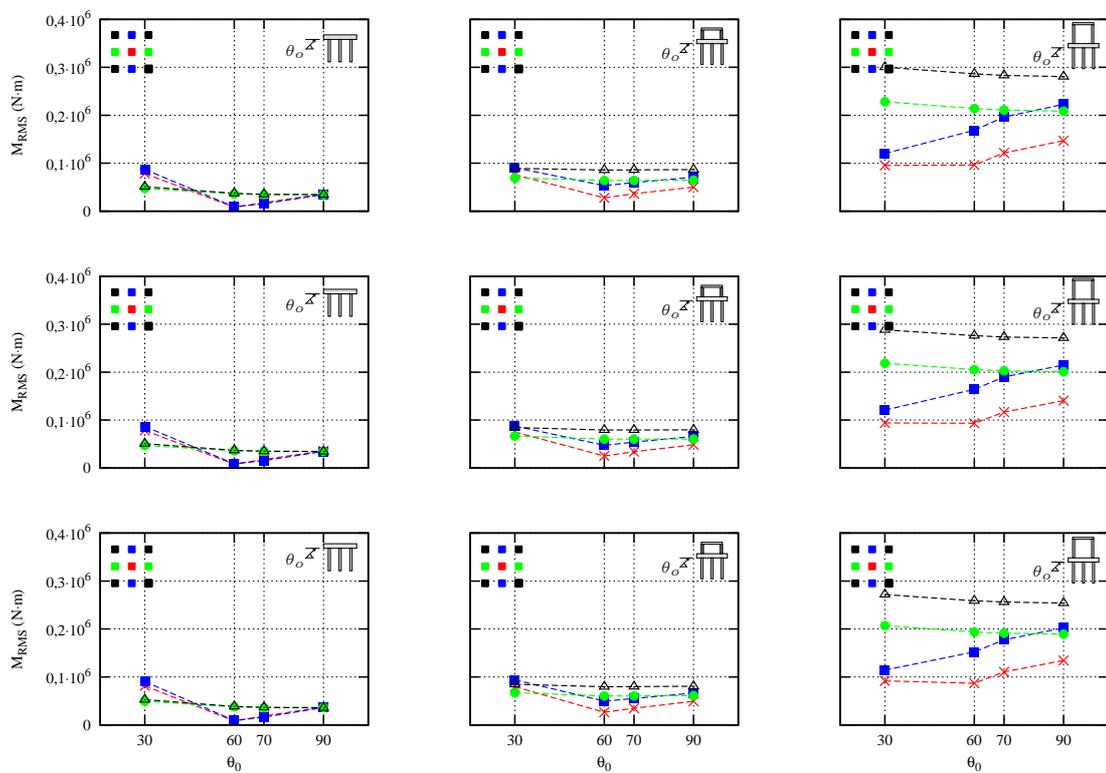
**Figura 5.63:** Momentos máximos en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda),  $h/b = 2$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2



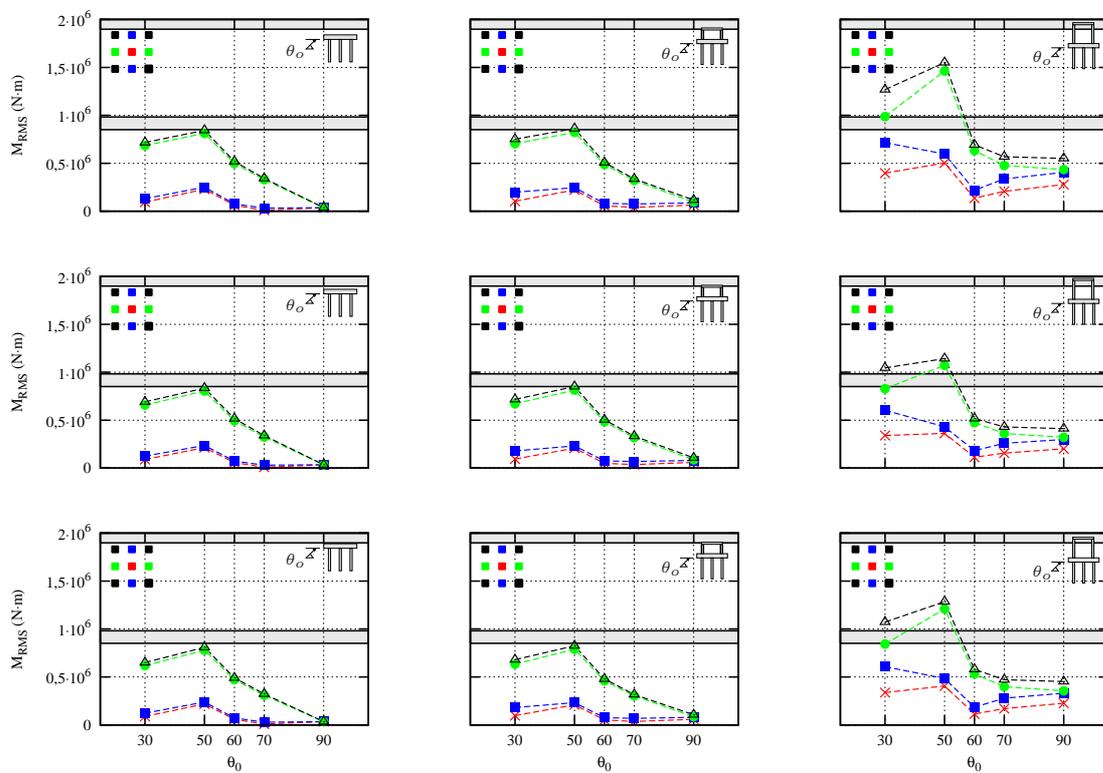
**Figura 5.64:** Partes real e imaginaria de los momentos flectores de interacción cinemática (fila superior), inercial (fila central) y totales (fila inferior). Comparativa entre método directo y subestructuración (tres pasos). Pilote central. Ondas SV incidentes con un ángulo de 30 grados



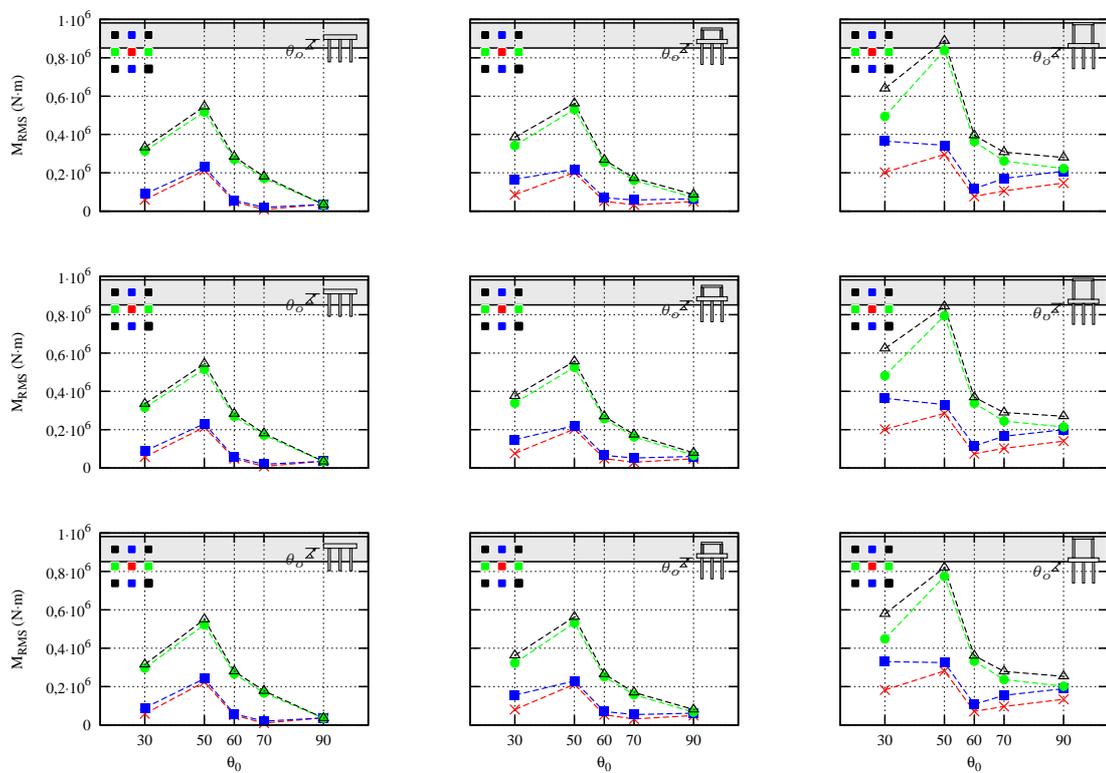
**Figura 5.65:** Valores cuadráticos medios del momento flector en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda),  $h/b = 2$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1



**Figura 5.66:** Valores cuadráticos medios del momento flector en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda),  $h/b = 2$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2



**Figura 5.67:** Valores cuadráticos medios del momento flector en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda),  $h/b = 2$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1

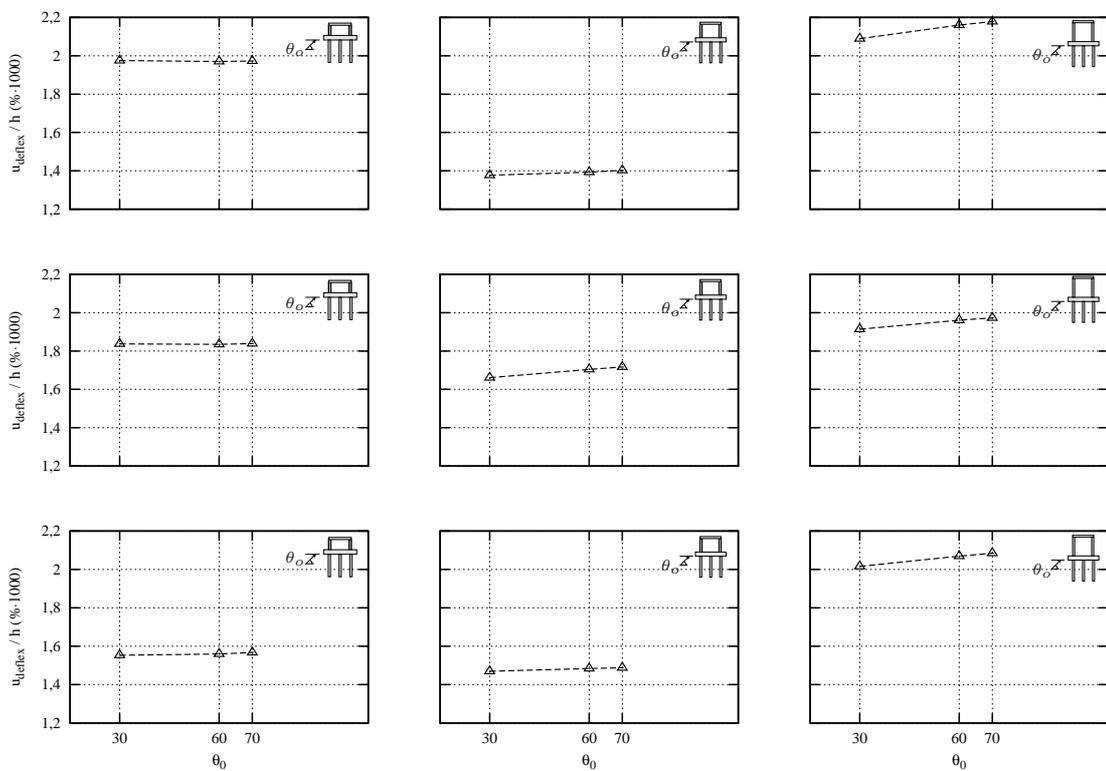


**Figura 5.68:** Valores cuadráticos medios del momento flector en cabeza de los pilotes. Sólo encepado (izquierda),  $h/b = 2$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2

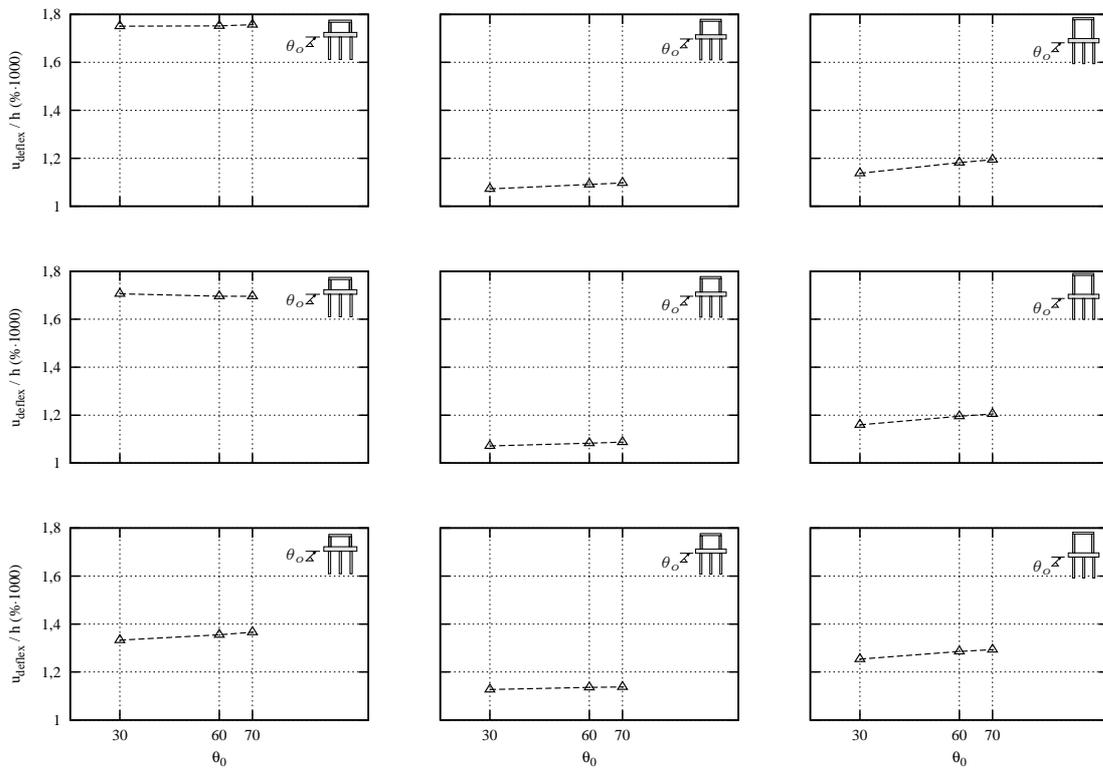
### 5.6.5. Evolución temporal de la deflexión lateral del edificio

En este apartado se recoge el último conjunto de resultados que se presentarán en el presente trabajo. Mediante un procedimiento análogo al descrito para el caso de esfuerzos en pilotes es posible obtener el historial de evolución temporal de las deflexiones laterales del edificio conociendo sus funciones de transferencia. De esta manera, las figuras 5.69, 5.70, 5.71, 5.72, 5.73 y 5.74 representan la variación de la deflexión lateral máxima del edificio (expresada en porcentaje de la altura del edificio multiplicado por 1000) con el ángulo de incidencia para los tres acelerogramas compatibles con cada tipo de espectro, suponiendo éstos generados por la incidencia de un tren de ondas de tipo SV, SH o P y para tres relaciones de aspecto diferentes ( $h/b = 2, 3$  y  $4$ ). Paralelamente, en las figuras 5.75, 5.76, 5.77, 5.78, 5.79 y 5.80 se recogen los valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio, obtenidos de manera análoga a los momentos flectores cuadráticos medios anteriores.

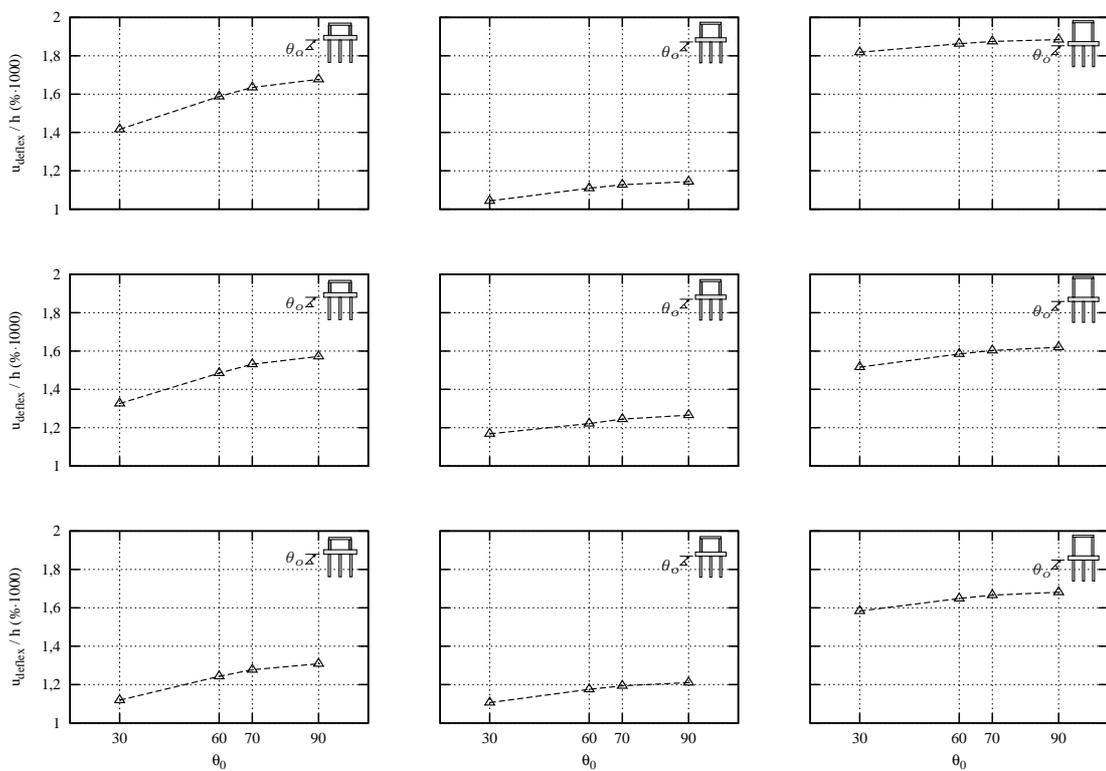
Los resultados en términos de deflexiones laterales máximas del edificio para ondas incidentes de tipo P y SH resultan ser prácticamente independientes del ángulo de incidencia y de la esbeltez del edificio (recuérdese que la escala real de representación en ordenadas es 1000 veces inferior a la que se muestra en las figuras). Por su parte, existen diferencias algo mayores para ondas incidentes de tipo SV, en particular en lo relativo al ángulo de incidencia, de modo que ángulos de incidencia subcríticos generan mayores deflexiones laterales en el edificio. En concreto, ángulos de  $30^\circ$  son los que producen, en todos los casos analizados, deflexiones notablemente mayores que el resto de ángulos de incidencia. Las tendencias en valores cuadráticos medios son similares a las observadas en valores máximos, con una independencia del tipo de problema más notable si cabe que en el caso de las deflexiones laterales del edificio máximas.



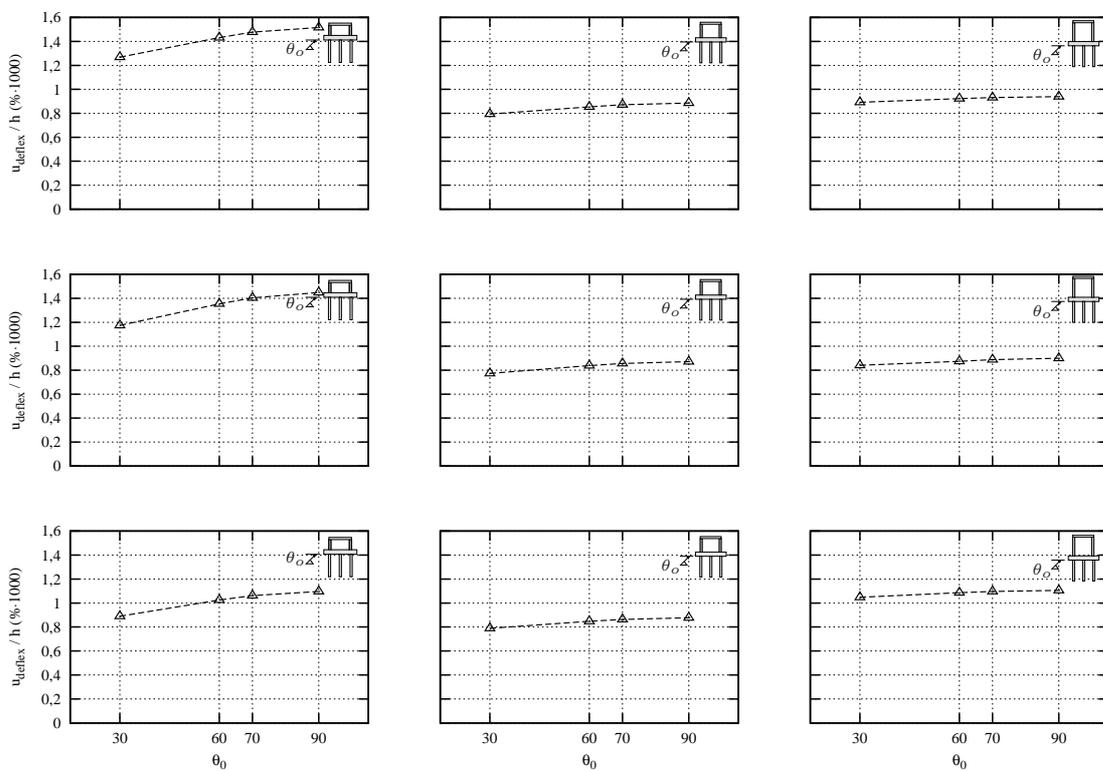
**Figura 5.69:** Deflexiones laterales máximas del edificio.  $h/b = 2$  (izquierda),  $h/b = 3$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas P. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 1



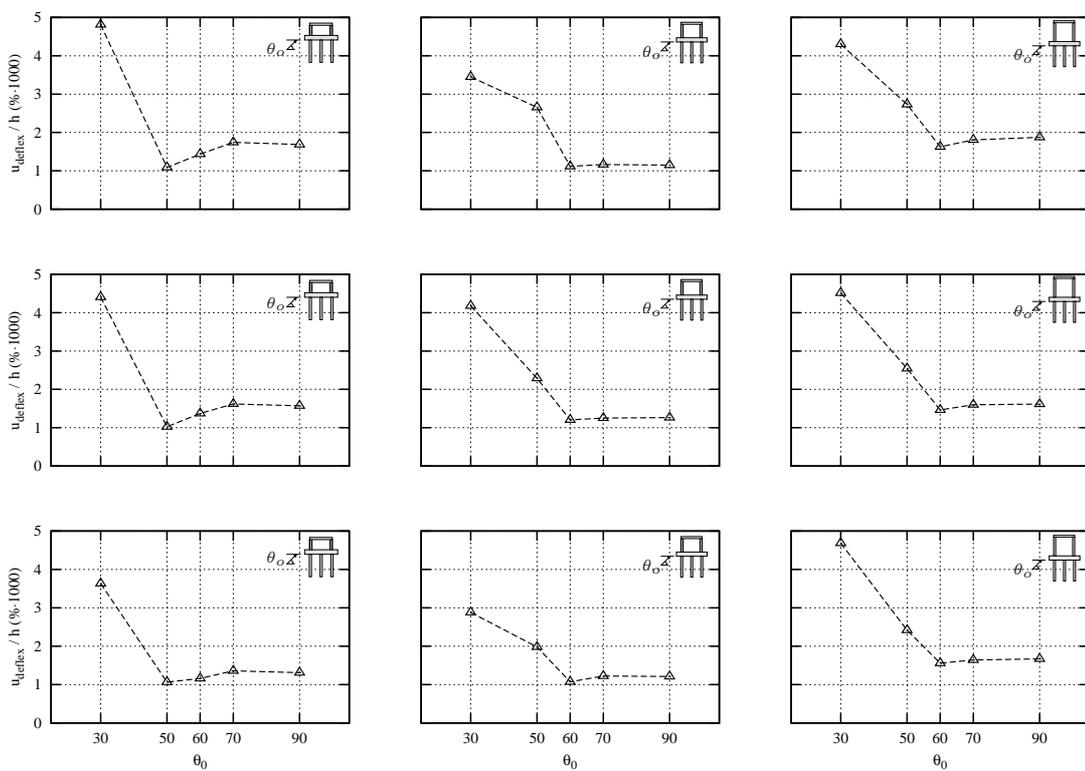
**Figura 5.70:** Deflexiones laterales máximas del edificio.  $h/b = 2$  (izquierda),  $h/b = 3$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas P. Acelerograma compatibles con el espectro de tipo 2



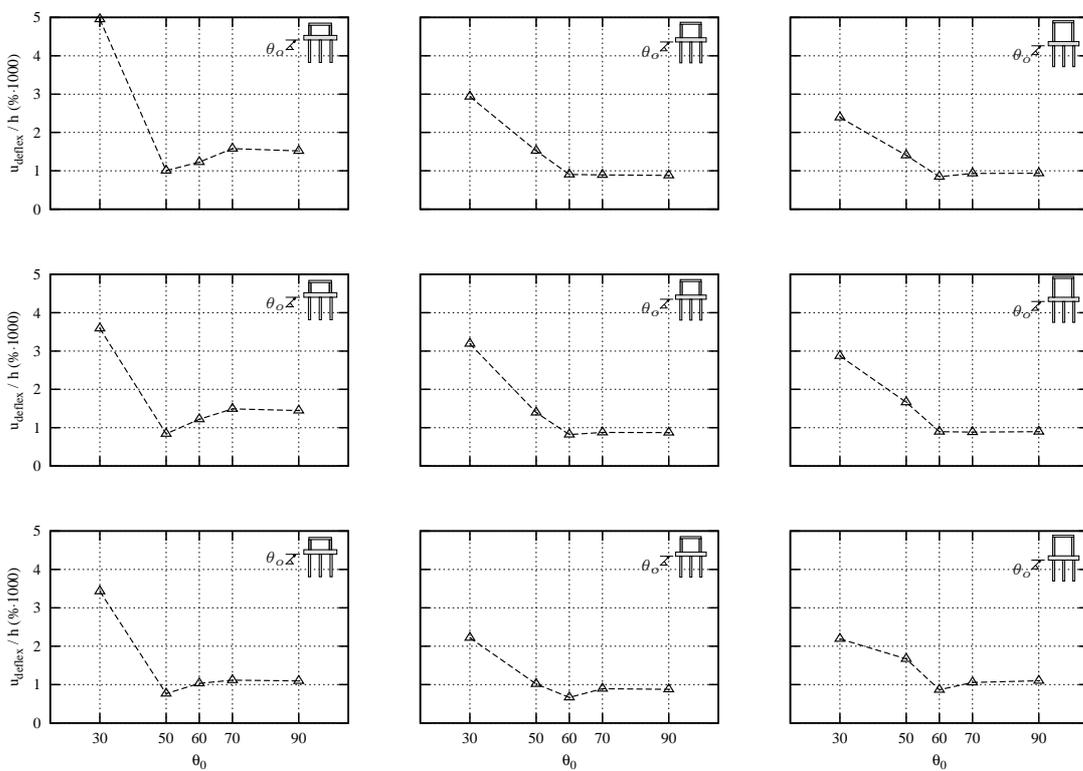
**Figura 5.71:** Deflexiones laterales máximas del edificio.  $h/b = 2$  (izquierda),  $h/b = 3$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1



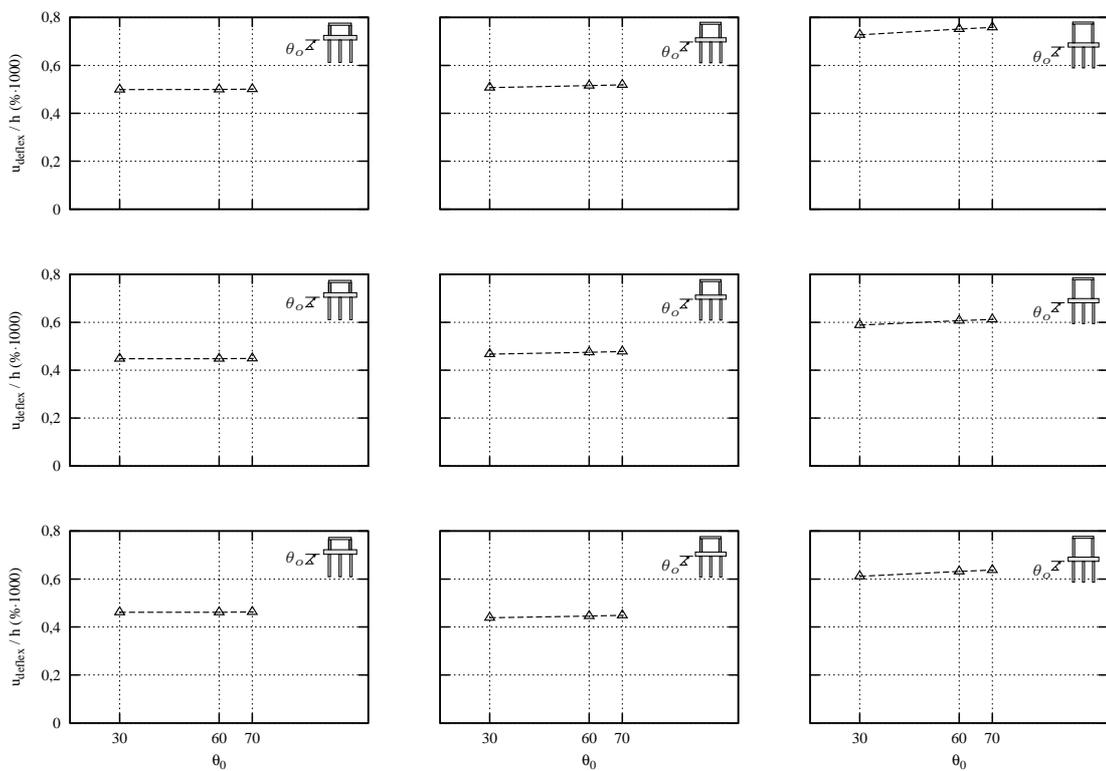
**Figura 5.72:** Deflexiones laterales máximas del edificio.  $h/b = 2$  (izquierda),  $h/b = 3$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2



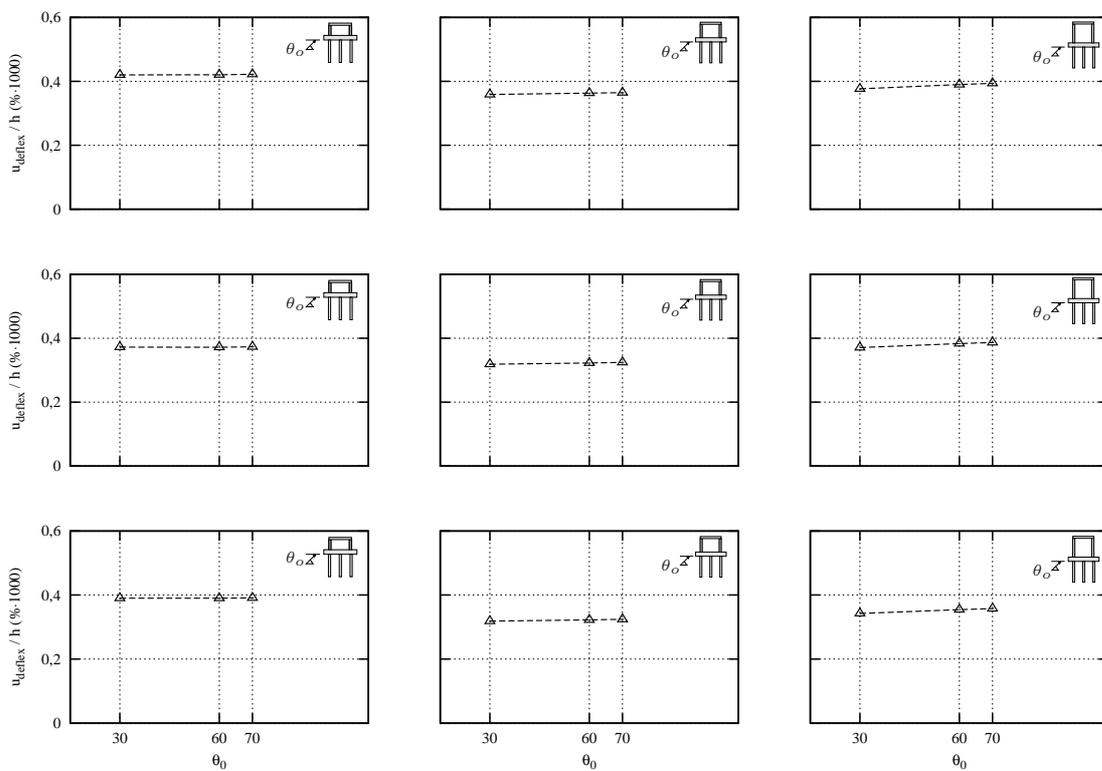
**Figura 5.73:** Deflexiones laterales máximas del edificio.  $h/b = 2$  (izquierda),  $h/b = 3$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 1



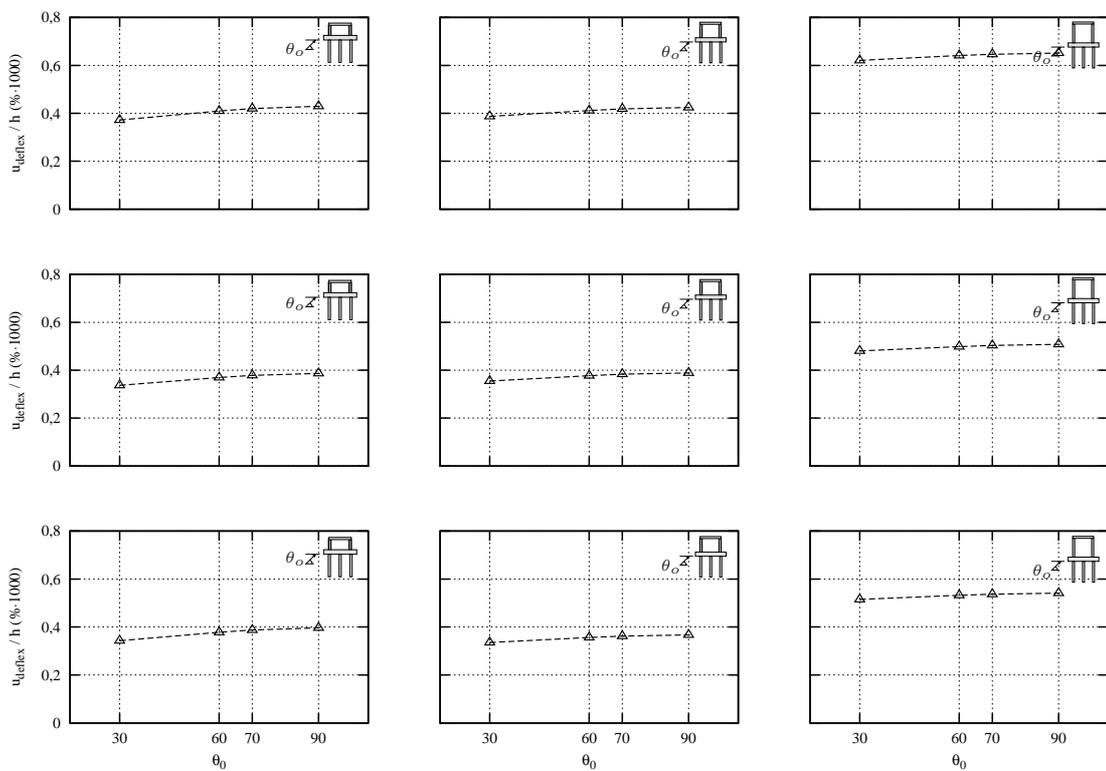
**Figura 5.74:** Deflexiones laterales máximas del edificio.  $h/b = 2$  (izquierda),  $h/b = 3$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro tipo 2



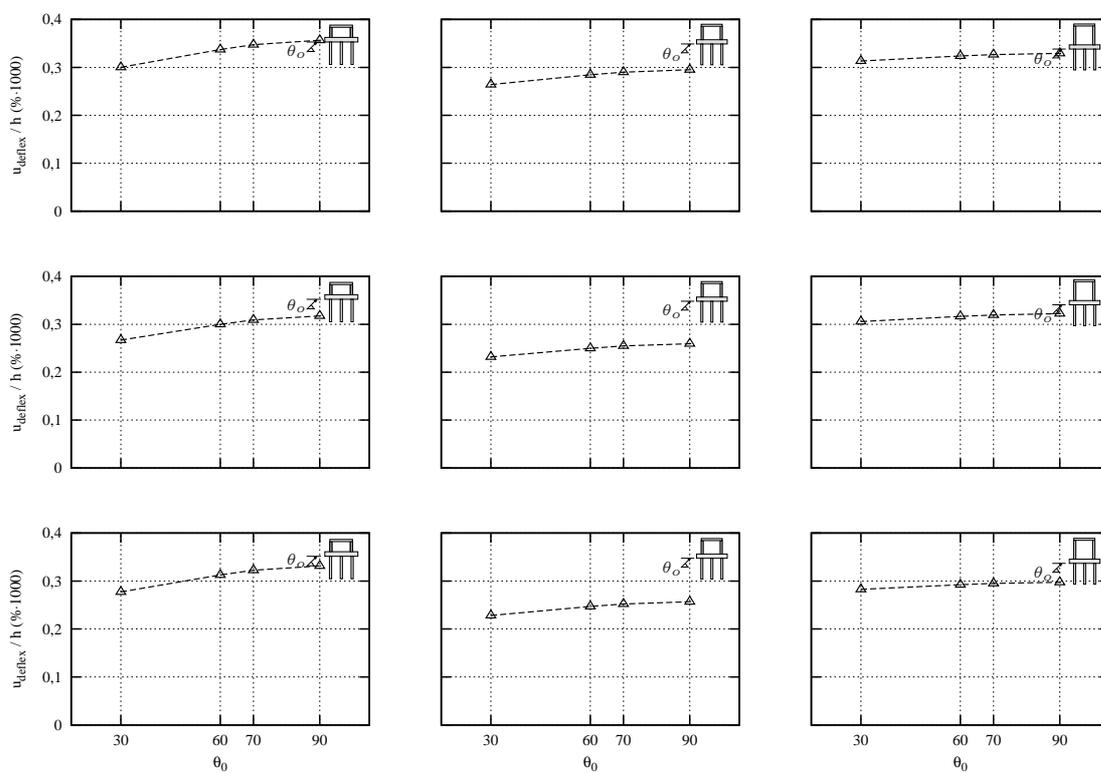
**Figura 5.75:** Valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio.  $h/b = 2$  (izquierda),  $h/b = 3$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas P. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 1



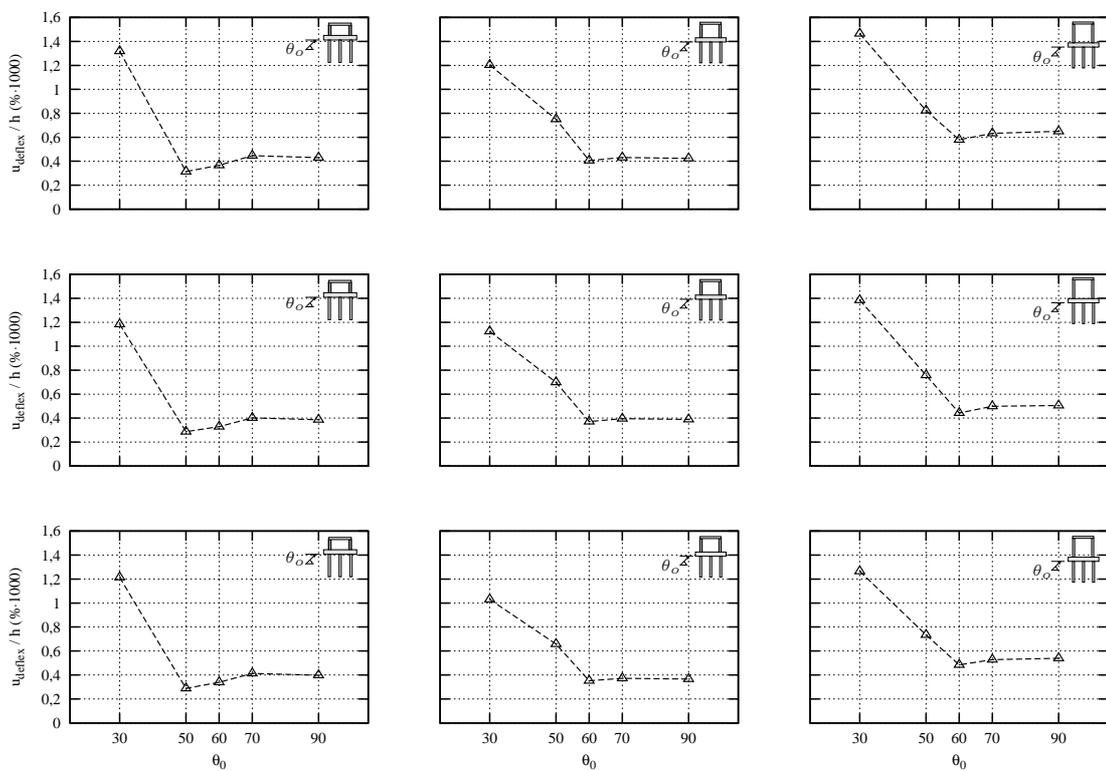
**Figura 5.76:** Valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio.  $h/b = 2$  (izquierda),  $h/b = 3$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas P. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 2



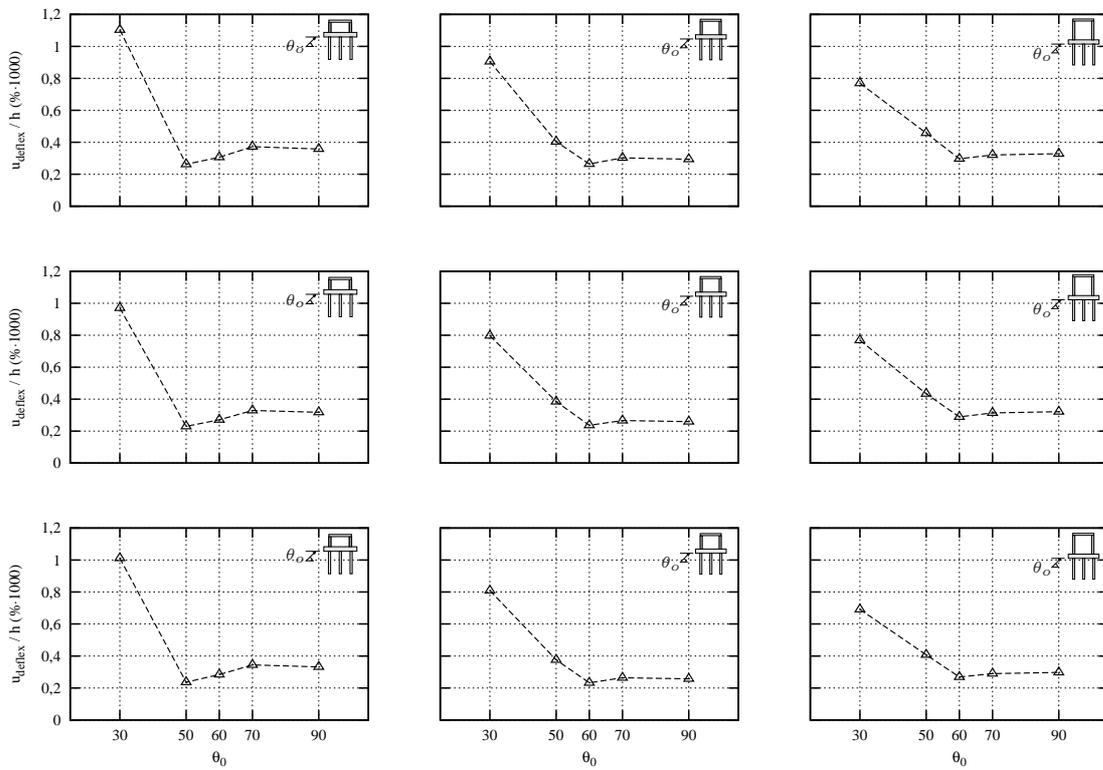
**Figura 5.77:** Valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio.  $h/b = 2$  (izquierda),  $h/b = 3$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 1



**Figura 5.78:** Valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio.  $h/b = 2$  (izquierda),  $h/b = 3$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SH. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 2



**Figura 5.79:** Valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio.  $h/b = 2$  (izquierda),  $h/b = 3$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 1



**Figura 5.80:** Valores cuadráticos medios de las deflexiones laterales del edificio.  $h/b = 2$  (izquierda),  $h/b = 3$  (centro) y  $h/b = 4$  (derecha). Ondas SV. Acelerogramas compatibles con el espectro de tipo 2

# Capítulo 6

## Conclusiones y líneas futuras

### 6.1. Resumen y conclusiones

El presente trabajo emplea una formulación acoplada MEC-MEF para la obtención de la respuesta dinámica de estructuras de edificación pilotadas cuando éstas están sometidas a ondas sísmicas que inciden con un ángulo genérico. Para ello, se ha desarrollado una formulación que permite tener en cuenta la incidencia de ondas sísmicas en la obtención de los campos de desplazamientos y tensiones en el terreno por el cual se propagan. Esta formulación fue implementada por el autor en una subrutina escrita en lenguaje FORTRAN e incluida en un programa preexistente en el seno de la División de Mecánica de Medios Continuos y Estructuras del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

La subrutina implementada fue verificada en el Proyecto Fin de Carrera del autor y empleada para obtener factores de interacción cinemática de grupos cuadrados de  $3 \times 3$  pilotes sometidos a trenes de ondas SH, SV y P, concluyéndose que el ángulo de incidencia tiene gran importancia en el comportamiento de las cimentaciones estudiadas. También se empleó para obtener las funciones de transferencia en desplazamientos y giros del encepado de edificios de distintas esbelteces cimentados en los grupos descritos, así como para determinar los espectros de deflexión lateral de los edificios y funciones de transferencia en esfuerzos en los pilotes. En todos los casos, se concluyó que la importancia del ángulo de incidencia era manifiesta, especialmente cuando la onda incidente es de tipo SV y el ángulo de incidencia es subcrítico.

Este trabajo parte del punto donde concluyó el anterior. En primer lugar, se determinaron las funciones de transferencia en esfuerzos correspondientes al caso de interacción cinemática en exclusiva. Realizado el proceso de obtención de las funciones de transferencia necesarias, se generaron un conjunto de acelerogramas horizontales artificiales cuyos espectros de respuesta elástica son compatibles con

los establecidos por Eurocódigo 8 [6]. Estos acelerogramas fueron tratados a fin de corregirles la línea base para, posteriormente, ser transformados al dominio de la frecuencia mediante una Transformada Discreta de Fourier. Una vez transformados y debidamente modificados, se operaron con las funciones de transferencia correspondientes, suponiendo que los acelerogramas son generados por trenes de ondas de tipo P, SV o SH con un determinado ángulo de incidencia, transformando de nuevo los resultados al dominio del tiempo mediante una Transformada Discreta de Fourier Inversa. Este procedimiento se repitió para obtener los historiales en tiempo de los momentos flectores en los pilotes del grupo estudiado, así como para determinar las evoluciones temporales de la deflexión lateral del edificio.

Los resultados en términos de momentos flectores máximos en los pilotes demuestran su escasa variabilidad con el acelerograma generado compatible con un cierto espectro de respuesta. Además, los acelerogramas compatibles con espectros de tipo 2 producen esfuerzos inferiores en todos los casos estudiados. Para ondas de tipo SH, los resultados son prácticamente independientes del ángulo de incidencia, con excepción del problema de interacción cinemática, en el que ángulos de incidencia de 30 grados son los que provocan mayores momentos. En lo referente a ondas SV, aparecen grandes diferencias entre los momentos que experimentan los pilotes centrales y los extremos, siendo mucho mayores los de éstos últimos. Además, la incidencia de 50 grados resulta ser la más desfavorable en todos los casos estudiados, con esfuerzos muy superiores a los correspondientes al resto de ángulos de incidencia. Se produce en estos casos, además, un fenómeno de disminución de los esfuerzos generados en interacción inercial por los desarrollados en interacción cinemática, de manera que los momentos del problema de interacción cinemática son del mismo orden o incluso superiores a los de algunos problemas en los que existen ambos tipos de interacción. Por otro lado, los valores cuadráticos medios de las variaciones temporales de los momentos flectores en los pilotes presentan tendencias semejantes con valores netamente inferiores a los valores máximos.

Paralelamente, se han obtenido resultados en términos de deflexiones laterales máximas de edificios sometidos a los acelerogramas indicados. Los resultados muestran una independencia casi total tanto de la esbeltez del edificio como del ángulo de incidencia para ondas P y SH, mientras que para el caso de ondas incidentes de tipo SV existen diferencias importantes entre los valores máximos obtenidos para ángulos subcríticos y supercríticos, con valores mayores para ángulos subcríticos y, en especial, para 30 grados. También en esta ocasión las tendencias observables en los valores cuadráticos medios coinciden con las que aparecen en los valores máximos.

Es importante destacar el hecho de que el ángulo de incidencia posee una gran influencia en la magnitud de los esfuerzos que se presentan en los pilotes para ondas SV. Además, la incidencia vertical no se corresponde en ningún caso

analizado con el caso más desfavorable. El grado de desconocimiento existente en relación al comportamiento dinámico de edificios pilotados frente a cargas sísmicas es aún hoy muy grande. Ello, unido a la importancia que tiene que los elementos de cimentación permanezcan dentro del rango elástico por ser elementos críticos cuya reparación es normalmente inviable tras un sismo y cuyo fallo puede provocar, a su vez, el colapso de la superestructura, justifica la realización de trabajos como el presentado aquí. Aún tratándose de un análisis básico en el que se han tenido en cuenta un número limitado de parámetros, se puede verificar, desde este punto, que la hipótesis mayoritariamente empleada de incidencia vertical no tiene por qué ser la produzca situaciones más desfavorables tanto en cimentaciones como en superestructuras, de modo que el estado del arte actual debe evolucionar hacia modelos que consideren tanto el tipo de onda como el ángulo de incidencia de la misma como parámetros de importancia de cara a la cuantificación de la respuesta estructural real.

## 6.2. Líneas futuras

El código desarrollado se ha empleado para la determinación de un conjunto de resultados en términos de respuesta dinámica de estructuras de cimentación y de superestructuras. Empleando el código en su estado actual pueden desarrollarse una serie de análisis que no se han incluido en el presente trabajo. Entre ellos, pueden destacarse:

- Obtención de resultados para ondas de superficie, tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo.
- Estudio de la influencia de un mayor número de parámetros, tales como la relación de rigideces de la cimentación y el suelo o la geometría de la cimentación.
- Análisis de la influencia del ángulo de incidencia y tipo de onda en la respuesta sísmica de conjuntos de edificios, de modo que la interacción estructura-suelo-estructura se ponga en relieve.
- Determinación de expresiones de uso práctico para la determinación de los esfuerzos en pilotes y en miembros de la superestructura, función de parámetros tales como la relación de aspecto de la superestructura, la relación de rigideces suelo-estructura, la cantidad y tipo de cimentación pilotada, etc. Estas expresiones deben tener en cuenta no sólo las fuerzas que aparecen como consecuencia de la interacción inercial, sino también de la interacción cinemática. La obtención de esta clase de expresiones permitiría establecer

un paso adelante de cara al diseño sísmico de esta clase de elementos, cuyo estudio posee, en este momento, importantes lagunas de conocimiento.

En lo referente a la formulación y al propio código, existen distintas posibilidades de modificación, tales como:

- Desarrollo de expresiones que permitan tener en cuenta una estratificación horizontal del terreno sobre el que se cimienta e implementación del mismo en el código existente.
- Implementación de combinaciones de ondas P y S para la generación de una terna de acelerogramas independientes entre sí y obtención de esfuerzos en pilotes para esa combinación.

# Bibliografía

- [1] Kausel, E. and Roesset, J. M. (1974) Soil-structure interaction for nuclear containment. *Power Div. ASCE Specialty Conf*, Boulder, Colorado, pp. 469–498.
- [2] Domínguez, J. (1993) *Boundary elements in dynamics*. Computational Mechanics Publications & Elsevier Applied Science, Southampton, NY.
- [3] Maeso, O., Aznárez, J. J., and Domínguez, J. (2002) Effects of space distribution of excitation on seismic response of arch dams. *J Eng Mech*, **128**, 759–768.
- [4] Maeso, O., Aznárez, J. J., and Domínguez, J. (2004) Three-dimensional models of reservoir sediment and effects on the seismic response of arch dams. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **33**, 1103–1123.
- [5] Aznárez, J. J., Maeso, O., and Domínguez, J. (2006) BE analysis of bottom sediments in dynamic fluid-structure interaction problems. *Eng Anal Bound Elem*, **30**, 124–136.
- [6] CEN/TC 250 (2003) *Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance. Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings. Standard EN-1998-1*.
- [7] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2007) BEM-FEM coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups. *Eng Anal Bound Elem*, **31**, 473–484.
- [8] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2008) Dynamic analysis of piled foundations in stratified soils by a BEM-FEM model. *Soil Dyn Earthquake Eng*, **28**, 333–346.
- [9] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., Maeso, O., and Santana, A. (2010) Dynamic stiffness of deep foundations with inclined piles. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **39**(12), 1343–1367.

- 
- [10] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2009) Dynamic structure-soil-structure interaction between nearby piled buildings under seismic excitation by BEM-FEM model. *Soil Dyn Earthquake Eng*, **29**, 1084–1096.
- [11] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2010) 3-D Boundary element - finite element method for the dynamic analysis of piled buildings. *Eng Anal Bound Elem*, p. in press.
- [12] Achenbach, J. D. (1973) *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland, Amsterdam.
- [13] Eringen, A. C. and Suhubi, E. S. (1975) *Elastodynamics*, vol. 2 - Linear Theory. Academic Press, NY.
- [14] Graffi, D. (1946) Sul teorema di reciprocità nella dinamica dei corpi elastici. *Mem Accad Sci, Bologna*, **4**, 103–111.
- [15] Wheeler, L. T. and Sternberg, E. (1968) Some theorems in classical elastodynamics. *Arch Rat Mech Anal*, **31**, 51–90.
- [16] Stokes, G. G. (1849) On the dynamical theory of diffraction. *Trans Cambridge Philos Soc*, **9**, 1–62.
- [17] Cruse, T. A. and Rizzo, F. J. (1968) A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. *J Math Anal Appl*, **22**, 244–259.
- [18] Kupradze, V. D. (1963) *Dynamical problems in elasticity*. Progress in solid mechanics, North-Holland, Amsterdam.
- [19] Aznárez, J. J. (2002) *Efectos de los fenómenos de interacción incluyendo los factores espaciales y sedimentos de fondo en la respuesta sísmica de presas bóveda*. Ph.D. thesis, University of Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de G.C., Spain.
- [20] Hartmann, F. (1981) *Elastostatics*. Progress in boundary element methods, Pentech Press, London.
- [21] Medina, F. (1987) *Análisis de la respuesta sísmica de presas incluyendo efectos de interacción suelo-fluido-estructura*. Ph.D. thesis, University of Seville, Spain.
- [22] Stroud, A. H. and Secrest, D. (1966) *Gaussian quadrature formulas*. Prentice-Hall, NY.

- 
- [23] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, NY.
- [24] Telles, J. C. (1987) A selfadapative coordinate transformation for efficient evaluation of general boundary element integrals. *Int J Numer Meth Eng*, **24**, 937–959.
- [25] Li, H. B., Han, G. M., and Mang, H. A. (1985) A new method for evaluating singular integrals in stress analysis of solids by the direct boundary element method. *Int J Numer Meth Eng*, **21**, 2071–2098.
- [26] Cerrolaza, M. and Alarcón, E. (1989) A bicubic transformation for the numerical evaluation of the Cauchy principal value integrals in boundary elements. *Int J Numer Meth Eng*, **28**, 987–999.
- [27] Chirino, F., Maeso, O., and Aznárez, J. J. (2000) Una técnica simple para el cálculo de las integrales en el sentido del valor principal de Cauchy en el MEC 3D. *Rev Int Met Num para Cálculo y Diseño en Ing*, **16**, 77–95.
- [28] Cruse, T. A. (1969) Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *Int J Numer Meth Eng*, **5**, 1259–1274.
- [29] Christensen, R. M. (1982) *Theory of viscoelasticity*. Academic Press Inc., NY.
- [30] Matos Filho, R., Mendonça, A. V., and Paiva, J. B. (2005) Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads. *Eng Anal Boundary Elem*, **29**, 195–203.
- [31] Padrón, L. A., Aznárez, J. J., and Maeso, O. (2006) A BEM-FEM model for studying dynamic impedances of piles in elastic soils. Topping, B. H. V., Montero, G., and Montenegro, R. (eds.), *Proc. of the Fifth Int Conf on Eng Comput Technology*, Stirlingshire, UK, no. 163, Civil-Comp Press.
- [32] Kaynia, A. M. (1982) Dynamic stiffness and seismic response of pile groups. Report R83-03, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- [33] Pak, R. S. Y. and Jennings, P. C. (1987) Elastodynamic response of the pile under transverse excitation. *J Eng Mech, ASCE*, **113**, 1101–1116.
- [34] Sen, R., Davies, T. G., and Banerjee, P. K. (1985) Dynamic analysis of piles and pile groups embedded in homogeneous soils. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **13**, 53–65.
- [35] Jennings, P. C. and Bielak, J. (1973) Dynamics of building-soil interaction. *Bull Seism Soc Ame*, **63**, 9–48.

- [36] Avilés, J. and Pérez-Rocha, L. E. (1996) Evaluation of interaction effects on the system period and the system damping due to foundation embedment and layer depth. *Soil Dyn Earthquake Eng*, **15**, 11–27.
- [37] Veletsos, A. S. and Meek, J. W. (1974) Dynamic behaviour of building-foundation systems. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **3**, 121–138.
- [38] Bielak, J. (1975) Dynamic behavior of structures with embedded foundations. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **3**, 259–274.
- [39] Padrón, L. A. (2008) *Numerical model for the dynamic analysis of pile foundations*. Ph.D. thesis, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- [40] Sica, S., Mylonakis, G., and Simonelli, A. (2011) Transient kinematic pile bending in two-layer soil. *Soil Dyn Earthquake Eng*, doi:10.1016/j.soildyn.2011.02.001.
- [41] Gazetas, G., Tazoh, T., Shimizu, K., and Fan, K. (1-6 June 1993) Seismic response of the pile foundation of Ohba-Ohashi Bridge. Prakash, S. (ed.), *Proceedings of the 3rd International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering, St. Louis, MO*, vol. vol. 3, pp. 1803–1809, University of Missouri-Rolla.
- [42] Nikolaou, S., Mylonakis, G., Gazetas, G., and Tazoh, T. (2001) Kinematic pile bending during earthquakes: analysis and field measurements. *Géotechnique*, **51**, 425–440.
- [43] Kaynia, A. M. and Novak, M. (1992) Response of pile foundations to Rayleigh waves and obliquely incident body waves. *Earthquake Eng Struct Dyn*, **21**, 303–318.
- [44] Clough, R. W. and Penzien, J. (1982) *Dynamics of structures*. McGraw-Hill.
- [45] Vanmarcke, E. H. (1976) SIMQKE: A program for artificial motion generation. Report, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.
- [46] Kausel, E. and Ushijima, R. (1979) Baseline correction of earthquake records in the frequency domain. Report, Massachusetts Institute of Technology.
- [47] Hollander, M. and Wolfe, D. (1973) *Nonparametric statistical methods*.
- [48] Cooley, J. and Tukey, J. (1965) An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math Comput*, **19**, 297–301.

- 
- [49] García, F., Aznárez, J., and Maeso, O. (2011) Variabilidad de la respuesta sísmica de presas bóveda ante diferentes combinaciones de ondas P y S compatibles con un espectro de respuesta. Tadeu, A., Figueiredo, I., Menezes, L., Mendes, P., Rodríguez-Ferran, A., Arias, I., and Blanco, J. (eds.), *Métodos Numéricos em Engenharia*.
- [50] Montoya, J., Meseguer, A., Cabré, F., and Portero, J. (2009) *Hormigón armado*. GG, 15<sup>a</sup> edn.

